Resumo Complementos de Matematica Primeira Unidade

Henrique da Silva
hpsilva@proton.me

28 de julho de 2022

Sumário

1 Potencias de i

As potencias de i sao periodicas em 4. Da seguinte maneira:

$$\begin{array}{|ccc|} i^0 & = & 1 \\ i^1 & = & i \\ i^2 & = & \text{-1} \\ i^3 & = & -i \\ i^4 & = & 1 \\ i^5 & = & i \\ i^6 & = & -1 \\ & \vdots & \\ i^n & = & i^{n\%4} \end{array}$$

Com "%"sendo resto da divisao inteira

2 Forma algebrica de um numero complexo

A forma algebrica de um numero complexo eh:

$$Z = a + ib \tag{1}$$

Onde a eh a componente real de Z e pode ser chamado de $Re(Z)$ e b eh a componente imaginaria e pode ser chamado de $Im(Z)$

Podemos dizer que os numeros $\Re$ sao um subconjunto de $\mathbb{C}$, exceto que no caso de um numero $\Re$ a parte imaginaria b seria 0, alguns exemplos:

$5+i$	$a=5$	$b=1$
$4-3i^2$	$a=4$	$b=-3$
12	$a=12$	$b=0$
$7i^3$	$a=0$	$b=7$

Dois numeros complexos sao iguais se seus componentes reais e imaginarios forem iguais

3 Operacoes na forma algebrica

Nos exemplos a seguir: $Z_n = a_n + ib_n$

3.1 Adicao & Subtracao

Para subtrair e adicionar basta subtrair e adicionar as partes imaginarias dos numeros complexos

$$Z_1 + Z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i \tag{2}$$

$$Z_1 - Z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i \tag{3}$$

3.2 Multiplicacao

Vamos utilizar a distributividade e o fato que $i^2 = -1$

$$Z_1 * Z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i)$$
$$Z_1 * Z_2 = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 i^2$$

Como $i^2 = -1$ podemos entao simplificar em:

$$Z_1 * Z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i \tag{4}$$

3.3 Divisao

O conjugado de Z eh $\overline{Z}$. Se $Z = a + ib$ entao $\overline{Z} = a - ib$

Algo interessante acontece quando fazemos $Z * \overline{Z}$:

$$\begin{aligned} Z_1 * \overline{Z} &= (a + bi)(a - bi) \\ Z_1 * \overline{Z} &= a^2 - (bi)^2 \\ Z_1 * \overline{Z} &= a^2 - b^2 i^2 \\ Z_1 * \overline{Z} &= a^2 + b^2 \end{aligned} \tag{5}$$

Ou seja, essa operacao nos da um escalar. E vamos utilizar disso para poder fazer a divisao.

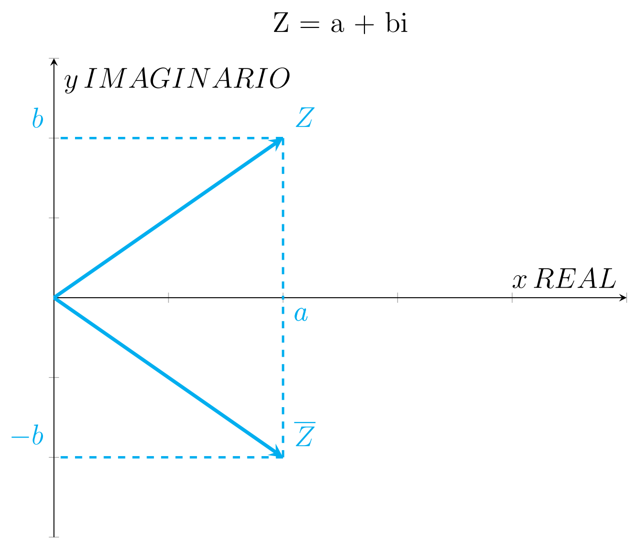
Para fazer a divisao de Z por $\overline{Z}$ fazemos:

$$\frac{Z}{W} = \frac{Z}{W} * \frac{\overline{W}}{\overline{W}} \tag{6}$$

E transformamos a operacao de divisao de numeros complexos em uma multiplicacao de Z por $\overline{W}$ divido por um escalar $W * \overline{W}$

4 Representacao geometrica

Na representacao geometrica de um numero complexo podemos ver o eixo x como a parte real e o y como a parte imaginaria, como no exemplo abaixo:



Eh interessante notar que $\overline{Z}$ eh o simetrico de Z, porem oposto no eixo imaginario

5 Modulo

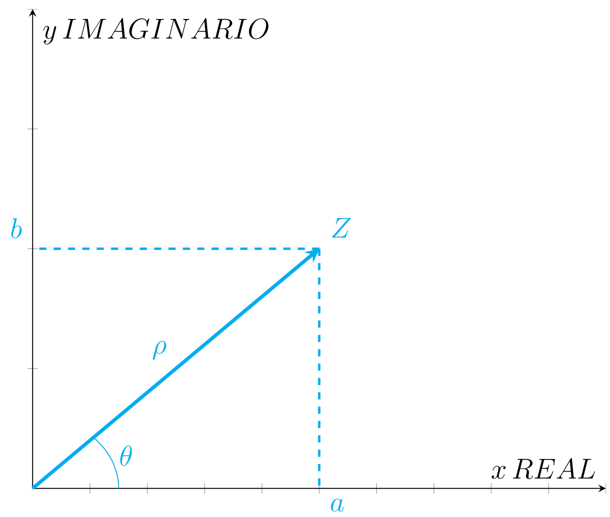
Como temos uma representacao geometrica do numero complexo, podemos calcular o modulo do numero complexo por simplesmente a hipotenusa de a e b do mesmo jeito que fariamos com um vetor comum

O modulo sera representado pela letra ρ ou por $|Z|$

$$\rho = |Z| = \sqrt{a^2 + b^2} = |\overline{Z}| \tag{7}$$

6 Argumento

O argumento eh simplesmente o angulo entre o eixo real e o vetor complexo sera representado pela letra θ ou por $arg(Z)$



Dai temos:

$$\cos\theta = \frac{a}{\rho}$$
$$\sin\theta = \frac{b}{\rho} \tag{8}$$

7 Complexo na forma polar

Entendendo o conceito de argumento, podemos entao naturalmente:

$$\cos\theta = \frac{a}{\rho} \rightarrow a = \rho cos\theta$$
$$\sin\theta = \frac{b}{\rho} \rightarrow b = \rho sin\theta \tag{9}$$

Que nos da a e b no formato de coordenadas polares, entao podemos re-escrever o nosso Z como:

$$Z = \rho * cos\theta + \rho * sin\theta * i$$
$$Z = \rho * (cos\theta + sin\theta * i) \tag{10}$$

8 Operacoes na forma polar

As simplificacoes abaixo vem diretamente da multiplicacao e divisao de numeros complexos na forma polar, e simplificacao por regras de trigonometria.

8.1 Multiplicacao

$$Z_1 * Z_2 = \rho_1\rho_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right] \tag{11}$$

8.2 Divisao

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\left[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\right] \tag{12}$$

9 Forma de Moivre

Com tudo que foi visto acima vamos agora fazer a seguinte definicao:

9.1 Definicao

$$e^{it} = \cos t + i\sin t \tag{13}$$

Escrever nessa forma nos da varias propriedades uteis:

9.2 Propriedades

$$Z = \rho * e^{it}$$
$$\overline{Z} = \rho * e^{i*(-t)}$$
$$|e^{it}| = 1 \rightarrow \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1$$
$$\frac{1}{e^{it}} = e^{-it} = \overline{e^{it}}$$
$$e^{it} = e^{i*(t+2K\pi)}$$
$$e^{it} * e^{ig} = e^{i*(t+g)}$$

E por fim chegamos a uma forma mais simples de efetuar multiplicacoes e divisoes:

9.3 Multiplicacao

$$Z_1 * Z_2 = \rho_1\rho_2\, e^{i(t_1+t_2)} \tag{14}$$

9.4 Divisao

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\, e^{i(t_1-t_2)} \tag{15}$$

9.5 Radiciacao

Dado um numero complexo Z qualquer, $\sqrt[n]{Z}$ tera n raizes complexas

Podemos dizer a partir das propriedades o seguinte:

$$Z = \rho * e^{i(\theta+2K\pi)}$$
$$\sqrt[n]{Z} = W$$
$$Z = W^n$$
$$W^n = \left(\rho_k * e^{i\theta_k}\right)^n$$
$$W^n = \rho_k^n e^{i\theta_k n}$$
$$\rho_k^n e^{i\theta_k n} = \rho * e^{i(\theta+2K\pi)}$$

Entao conseguimos algumas conclusoes interessantes, primeiro que o nosso ρ_k^n nao depende de k, ou seja. para todas raizes teremos o mesmo modulo, so o que vai se alterar eh o argumento, ou seja, o angulo

$$\begin{aligned} \rho_k^n &= \rho \\ \rho_k &= \sqrt[n]{\rho} \end{aligned} \tag{16}$$

E segundo, concluimos que o nosso argumento varia de acordo com K da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \theta_k n &= \theta + 2K\pi \\ \theta_k &= \frac{\theta + 2K\pi}{n} \end{aligned} \tag{17}$$

Concluindo, para conseguir cada raiz, basta fazermos o K variar de 0 a $n-1$, e eh util notar que isso vai criar vetores de tamanho ρ equidistantes no intervalo $[0, 2\pi]$

10 Inversao complexa

11 asds