Resumo Complementos de Matematica Primeira Unidade

Henrique da Silva
hpsilva@proton.me

4 de julho de 2022

Sumário

1 Potencias de i

As potencias de i sao periodicas em 4. Da seguinte maneira:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} i^0 & = & 1 \\ i^1 & = & i \\ i^2 & = & \text{-1} \\ i^3 & = & -i \\ i^4 & = & 1 \\ i^5 & = & i \\ i^6 & = & -1 \\ & \vdots & \\ i^n & = & i^{n\%4} \end{array}}$$

Com "%"sendo resto da divisao inteira

2 Forma algebrica de um numero complexo

A forma algebrica de um numero complexo eh:

$$Z = a + ib \tag{1}$$

Onde a **eh a componente real de** Z **e pode ser chamado de** $Re(Z)$ **e** b **eh a componente imaginaria e pode ser chamado de** $Im(Z)$

Podemos dizer que os numeros $\Re$ **sao um subconjunto de** $\mathbb{C}$**, exceto que no caso de um numero** $\Re$ **a parte imaginaria** b **seria 0, alguns exemplos:**

$5 + i$	$a = 5$	$b = 1$
$4 - 3i^2$	$a = 4$	$b = -3$
12	$a = 12$	$b = 0$
$7i^3$	$a = 0$	$b = 7$

Dois numeros complexos sao iguais se seus componentes reais e imaginarios forem iguais

3 Operacoes na forma algebrica

Nos exemplos a seguir: $Z_n = a_n + ib_n$

3.1 Adicao & Subtracao

Para subtrair e adicionar basta subtrair e adicionar as partes imaginarias dos numeros complexos

$$Z_1 + Z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i \tag{2}$$

$$Z_1 - Z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i \tag{3}$$

3.2 Multiplicacao

Vamos utilizar a distributividade e o fato que $i^2 = -1$

$$Z_1 * Z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i)$$
$$Z_1 * Z_2 = a_1a_2 + a_1b_2i + b_1a_2i + b_1b_2i^2$$

Como $i^2 = -1$ podemos entao simplificar em:

$$Z_1 * Z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)i \tag{4}$$

3.3 Divisao

O conjugado de Z eh $\overline{Z}$. Se $Z = a + ib$ entao $\overline{Z} = a - ib$

Algo interessante acontece quando fazemos $Z * \overline{Z}$:

$$\begin{aligned} Z_1 * \overline{Z} &= (a + bi)(a - bi) \\ Z_1 * \overline{Z} &= a^2 - (bi)^2 \\ Z_1 * \overline{Z} &= a^2 - b^2i^2 \\ Z_1 * \overline{Z} &= a^2 + b^2 \end{aligned} \tag{5}$$

Ou seja, essa operacao nos da um escalar. E vamos utilizar disso para poder fazer a divisao.

Para fazer a divisao de Z por $\overline{Z}$ fazemos:

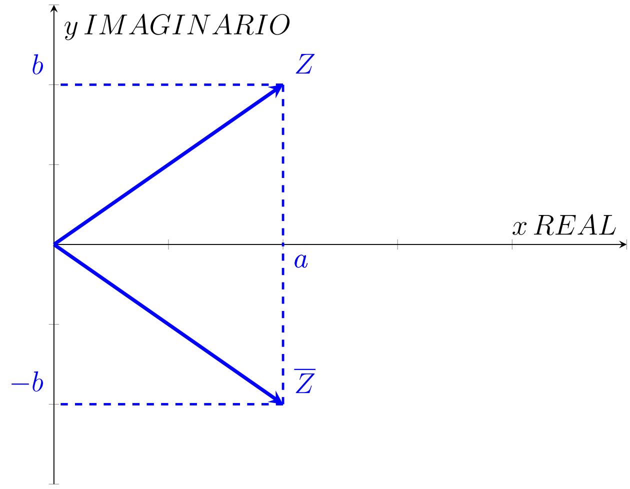
$$\frac{Z}{W} = \frac{Z}{W} * \frac{\overline{W}}{\overline{W}} \tag{6}$$

E transformamos a operacao de divisao de numeros complexos em uma multiplicacao de Z por $\overline{W}$ divido por um escalar $W * \overline{W}$

4 Representacao geometrica

Na representacao geometrica de um numero complexo podemos ver o eixo x como a parte real e o y como a parte imaginaria, como no exemplo abaixo:

Z = a + bi



Eh interessante notar que $\overline{Z}$ eh o simetrico de Z, porem oposto no eixo imaginario

5 Modulo

Como temos uma representacao geometrica do numero complexo, podemos calcular o modulo do numero complexo por simplesmente a hipotenusa de a e b do mesmo jeito que fariamos com um vetor comum

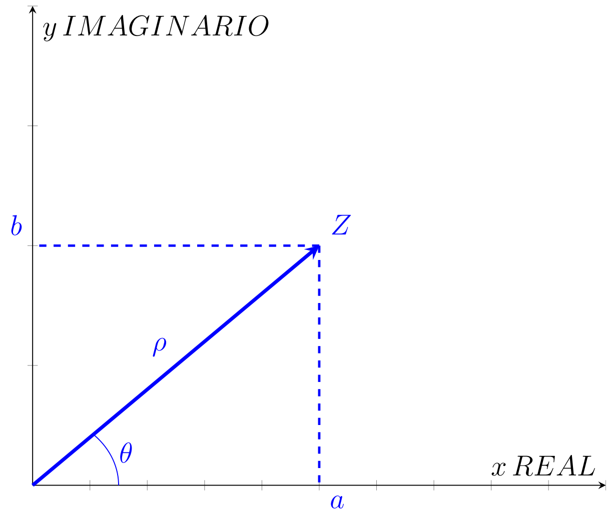
O modulo sera representado pela letra ρ ou por $|Z|$

$$\rho = |Z| = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{7}$$

6 Argumento

O argumento eh simplesmente o angulo entre o eixo real e o vetor complexo sera representado pela letra θ ou por $arg(Z)$

Z = a + bi



Dai temos:

$$\begin{aligned} \sin\theta &= \frac{b}{\rho} \\ \cos\theta &= \frac{a}{\rho} \end{aligned} \tag{8}$$

7 Complexo na forma polar

Entendendo o conceito de argumento, podemos entao naturalmente:

$$\begin{aligned} \sin\theta = \frac{b}{\rho} \rightarrow b = \rho sin\theta \\ \cos\theta = \frac{a}{\rho} \rightarrow a = \rho cos\theta \end{aligned} \tag{9}$$

Que nos da a e b no formato de coordenadas polares, entao podemos re-escrever o nosso Z como:

$$\begin{aligned} Z = \rho * cos\theta + \rho * sin\theta * i \\ Z = \rho * (cos\theta + sin\theta * i) \end{aligned} \tag{10}$$