

Sétimo Relatório de Lab de Circuitos II

Henrique da Silva
hpsilva@proton.me

4 de maio de 2023

Sumário

1	Introdução	
2	Análise preliminar	
2.1	Os circuitos	
2.2	Maxima	
2.2.1	Quadripolo A	
2.2.2	Quadripolo B	
2.2.3	Parâmetros "y" do quadri- polo B	
2.2.4	Impedância de entrada com carga	
2.2.5	Parâmetros a do quadripolo em cascata	
2.2.6	Equações parâmetro a em cascata	
3	Medições em laboratório	
3.1	Quadripolo A	
3.1.1	Tabela de medidas	
3.1.2	Resultados das medidas	
3.1.3	Parâmetros z	
3.1.4	Impedância de entrada com carga	
3.2	Quadripolo B	
3.2.1	Tabela de medidas	
3.2.2	Resultados das medidas	
3.2.3	Parâmetros y	
3.2.4	Impedância de entrada com carga	
3.3	Quadripolo em cascata	
3.3.1	Tabela de medidas	
3.3.2	Resultados das medidas	
3.3.3	Parâmetros a	
3.3.4	Impedância de entrada com carga	

4 Conclusões

1 Introdução

Neste relatório, vamos discutir quadripolos, e vamos projetar, montar e testar um quadripolo em cascata, obtendo seus parâmetros a .

Todos arquivos utilizados para criar este relatório, e o relatório em si estão em: https://github.com/Shapis/ufpe_ee/tree/main/5thsemester/CircuitsII/

2 Análise preliminar

Utilizarei o Maxima para fazer a análise teórica do circuito antes de montá-lo fisicamente.

Após terminar as análises compararei os resultados obtidos nas análises numéricas e em laboratório para verificar sua coerência.

2.1 Os circuitos

Vamos utilizar dois circuitos em cascata, o quadripolo "A" e o quadripolo "B", ambos puramente resistivos e representados abaixo.

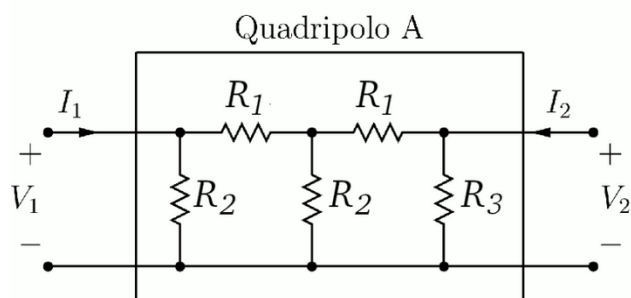


Figura 1: Quadripolo "A" puramente resistivo.

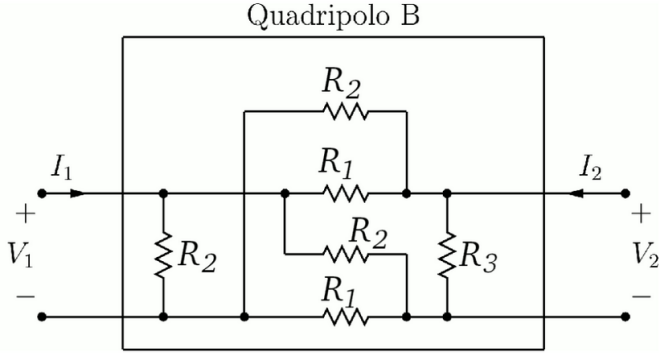


Figura 2: Quadripolo "B" puramente resistivo.

2.2 Maxima

Podemos realizar a análise dos quadripolos acima utilizando análise nodal.

2.2.1 Quadripolo A

$$\begin{aligned} \frac{V_1 - V_a}{R_1} + \frac{V_1}{R_2} - I_1 &= 0 \\ \frac{V_a - V_2}{R_1} + \frac{V_a - V_1}{R_1} + \frac{V_a}{R_2} &= 0 \\ \frac{V_2 - V_a}{R_1} + \frac{V_2}{R_3} - I_2 &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

2.2.2 Quadripolo B

$$\begin{aligned} \frac{V_1 - V_b}{R_2} + \frac{V_1 - V_a}{R_1} + \frac{V_1}{R_2} - I_1 &= 0 \\ \frac{V_a - V_b}{R_3} + \frac{V_a - V_1}{R_1} + \frac{V_a}{R_2} - I_2 &= 0 \\ \frac{V_b - V_a}{R_3} + \frac{V_b - V_1}{R_2} + \frac{V_b}{R_1} + I_2 &= 0 \\ V_2 &= V_a - V_b \end{aligned} \quad (2)$$

2.2.3 Parâmetros "y" do quadripolo B

Resolvendo as quatro equações acima para I_1 , I_2 , V_1 e V_2 obtemos:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{-R_2 V_2 + R_1 V_2 + (R_2 + 3 R_1) V_1}{2 R_1 R_2} \\ I_2 &= -\frac{R_2 (-R_3 V_2 - 2 R_1 V_2) - R_1 R_3 V_2 + (R_2 R_3 - R_1 R_3) V_1}{2 R_1 R_2 R_3} \\ V_a &= \frac{V_2 + V_1}{2} \\ V_b &= \frac{V_1 - V_2}{2} \end{aligned} \quad (3)$$

Com estes em mãos podemos calcular a solução simbólica dos parâmetros y .

Fazendo $V_2 = 0$:

$$\begin{aligned} y_{11} &= \frac{R_2 + 3 R_1}{2 R_1 R_2} \\ y_{21} &= -\frac{R_2 R_3 - R_1 R_3}{2 R_1 R_2 R_3} \end{aligned} \quad (4)$$

Fazendo $V_1 = 0$

$$\begin{aligned} y_{12} &= \frac{R_1 V_2 - R_2 V_2}{2 R_1 R_2 V_2} \\ y_{22} &= -\frac{R_2 (-R_3 V_2 - 2 R_1 V_2) - R_1 R_3 V_2}{2 R_1 R_2 R_3 V_2} \end{aligned} \quad (5)$$

E para conseguir a solução numérica, basta substituir R_1 , R_2 , e R_3 pelos valores dos resistores que desejamos.

No caso:

$$\begin{aligned} R_1 &= 8.2k\Omega \\ R_2 &= 47k\Omega \\ R_3 &= 82k\Omega \end{aligned} \quad (6)$$

Que nos dá os seguintes parâmetros y :

$$\begin{aligned} y_{11} &= 9.289050337311884 \times 10^{-5} \\ y_{12} &= -5.033731188375714 \times 10^{-5} \\ y_{21} &= -5.033731188375714 \times 10^{-5} \\ y_{22} &= 8.38090295796575 \times 10^{-5} \end{aligned} \quad (7)$$

2.2.4 Impedância de entrada com carga

Aqui introduziremos uma carga $Z_L = 2k\Omega$ na saída do quadripolo B, e analisaremos o que ocorre com sua impedância de entrada. Ou seja. Com $\frac{V_1}{I_1}$.

$$\begin{aligned} I_1 &= 9.289010^{-5} V_1 + -5.033710^{-5} V_2 \\ I_2 &= -5.033710^{-5} V_1 + 8.380910^{-5} V_2 \end{aligned} \quad (8)$$

E aqui conectamos a carga Z_L a saída do quadripolo fazendo $V_2 = -I_2 Z_L$:

$$\begin{aligned} I_1 &= 9.289010^{-5} V_1 + -5.033710^{-5} (-2000 I_2) \\ I_2 &= -5.033710^{-5} V_1 + 8.380910^{-5} (-2000 I_2) \end{aligned} \quad (9)$$

Daqui resolvemos para V_1 , V_2 e I_2 e obtemos a impedância de entrada com a carga:

$$\frac{V_1}{I_1} = 11293.0154298157\Omega \quad (10)$$

2.2.5 Parâmetros a do quadripolo em cascata

A análise do quadripolo A foi realizada no relatório 6. Então pegarei os seus parâmetros z previamente obtidos para realizar a análise do quadripolo em cascata.

$$\begin{aligned} z_{11} &= 21343.61254363896 \\ z_{12} &= 15333.99250307293 \\ z_{21} &= 15333.99250307293 \\ z_{22} &= 23826.62255647245 \end{aligned} \quad (11)$$

Podemos convertê-los para parâmetros a do quadripolo "A" com as seguintes operações:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{z_{11}}{z_{21}} = 1.391914893617021 \\ a_{12} &= \frac{\Delta z}{z_{21}} = 17830.63829787234 \\ a_{21} &= \frac{1}{z_{21}} = 6.521458777285825 * 10^{-5} \\ a_{22} &= \frac{z_{22}}{z_{21}} = 1.553843368039837 \end{aligned} \quad (12)$$

E convertemos os parâmetros y do quadripolo "B" da seguinte forma:

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\frac{y_{22}}{y_{21}} = 1.664948453608247 \\ a_{12} &= -\frac{1}{y_{21}} = 19865.9793814433 \\ a_{21} &= -\frac{\Delta y}{y_{21}} = 1.043205880622088 * 10^{-4} \\ a_{22} &= -\frac{y_{11}}{y_{21}} = 1.845360824742268 \end{aligned} \quad (13)$$

Agora para achar os parâmetros a do quadripolo em cascata, basta fazer a multiplicação matricial dos parâmetros a de cada quadripolo.

E isto nos dará os seguintes resultados para parâmetro a do quadripolo em cascata:

$$\begin{aligned} a_{11} &= 4.177569222440531 \\ a_{12} &= 60555.71397236235 \\ a_{21} &= 2.706767809755985 * 10^{-4} \\ a_{22} &= 4.162953335231222 \end{aligned} \quad (14)$$

2.2.6 Equações parâmetro a em cascata

Agora que temos os parâmetros a do quadripolo em cascata, podemos escrever as equações que relacionam as tensões e correntes de entrada e saída do quadripolo em cascata.

$$\begin{aligned} V_1 &= a_{11}V_2 - a_{12}I_2 \\ I_1 &= a_{21}V_2 - a_{22}I_2 \end{aligned} \quad (15)$$

Substituindo pelos valores achados temos:

$$\begin{aligned} V_1 &= 4.1775V_2 - 60555.71I_2 \\ I_1 &= 2.7 * 10^{-4} * V_2 - 4.16I_2 \end{aligned} \quad (16)$$

Para achar a impedância de entrada com uma carga resistiva de $2k\Omega$ fazemos novamente $V_2 = -I_2Z_L$:

$$\begin{aligned} V_1 &= 4.1775V_2 - 60555.71(-2000I_2) \\ I_1 &= 2.7 * 10^{-4} * V_2 - 4.16(-2000I_2) \end{aligned} \quad (17)$$

E resolvemos para V_1 , V_2 , e I_2 .

Com isto em mãos temos:

$$\frac{V_1}{I_1} = 14648.46021387691\Omega \quad (18)$$

3 Medições em laboratório

Inicialmente farei as medições dos componentes a serem usados.

Após isso montarei os circuitos e realizei as medições de tensão e corrente de ambos quadripolos e da conexão em cascata, com estes obterei os parâmetros z do quadripolo A e os parâmetros y do quadripolo B, e parâmetros a do quadripolo em cascata.

E por fim, medir a impedância total do circuito para confirmar que os resultados que obtive são coerentes

3.1 Quadripolo A

3.1.1 Tabela de medidas

$$\begin{aligned} R_{11} &= 8.22k\Omega \\ R_{12} &= 8.217k\Omega \\ R_{21} &= 46.53k\Omega \\ R_{22} &= 46.34k\Omega \\ R_3 &= 82.05k\Omega \\ Z_L &= 1.9475\Omega \end{aligned} \quad (19)$$

3.1.2 Resultados das medidas

V_1	0.643V	1.0082V
V_2	1.005V	0.7215V
I_1	0	47.33 μ A
I_2	42.18 μ A	0

3.1.3 Parâmetros z

Para $I_1 = 0$:

$$\begin{aligned} z_{12} &= \frac{V_1}{I_2} = 15244.19156\Omega \\ z_{22} &= \frac{V_2}{I_2} = 23826.458037\Omega \end{aligned} \quad (20)$$

Para $I_2 = 0$:

$$\begin{aligned} z_{11} &= \frac{V_1}{I_1} = 21301.5001056\Omega \\ z_{21} &= \frac{V_2}{I_1} = 15244.0312698\Omega \end{aligned} \quad (21)$$

E assim podemos montar as equações para parâmetro z :

$$\begin{aligned} V_1 &= 21301.5I_1 + 15244.19I_2 \\ V_2 &= 15244.03I_1 + 23826.45I_2 \end{aligned} \quad (22)$$

3.1.4 Impedância de entrada com carga

Novamente podemos substituir $I_2 = -I_1 Z_L$ que nos dá:

$$\begin{aligned} Z_{numerico} &= 11547.1061332794\Omega \\ Z_{experimental} &= 12204\Omega \end{aligned} \quad (23)$$

Observamos que o valor da impedância obtido numericamente a partir dos parâmetros z é bastante próximo do valor obtido experimentalmente.

3.2 Quadripolo B

3.2.1 Tabela de medidas

$$\begin{aligned} R_{11} &= 8.188k\Omega \\ R_{12} &= 8.188k\Omega \\ R_{21} &= 46.05k\Omega \\ R_{22} &= 46.92k\Omega \\ R_{23} &= 46.79k\Omega \\ R_3 &= 81.74k\Omega \\ Z_L &= 1.9475\Omega \end{aligned} \quad (24)$$

3.2.2 Resultados das medidas

V_1	0V	1.0036V
V_2	1.003V	0V
I_1	0.12 μ	162.62 μA
I_2	153.66 μA	0.13 μ

3.2.3 Parâmetros y

Para $V_1 = 0$:

$$\begin{aligned} y_{12} &= \frac{I_1}{V_2} = -1.19641077 * 10^{-7}\sigma \\ y_{22} &= \frac{I_2}{V_2} = 1.53 * 10^{-4}\sigma \end{aligned} \quad (25)$$

Para $V_2 = 0$:

$$\begin{aligned} y_{11} &= \frac{I_1}{V_1} = 1.62 * 10^{-4}\sigma \\ y_{21} &= \frac{I_2}{V_1} = -1.29 * 10^{-7}\sigma \end{aligned} \quad (26)$$

Observo que os resultados não estão coerentes com as análises teóricas. Creio que o problema foi na medição das correntes. As medições estavam flutuando dependendo do momento que as fiz. E não tenho certeza do por quê.

Mas vou prosseguir a análise, mesmo com os parâmetros y incoerentes.

$$\begin{aligned} I_1 &= 1.62 * 10^{-4} * V_1 - 1.19641077 * 10^{-7}V_2 \\ I_2 &= -1.29 * 10^{-7} * V_1 + 1.53 * 10^{-4}V_2 \end{aligned} \quad (27)$$

3.2.4 Impedância de entrada com carga

Novamente podemos substituir $I_2 = -I_1 Z_L$ que nos dá:

$$\begin{aligned} Z_{numerico} &= 6172.838067895077\Omega \\ Z_{experimental} &= 7000\Omega \end{aligned} \quad (28)$$

Estou deveras confuso de por que os resultados foram próximos. Quando os parametros y numericos e experimentais estavam tão distantes. Coincidência? Ou interpretei mal o resultado numérico e experimental?

3.3 Quadripolo em cascata

3.3.1 Tabela de medidas

Utilizaremos os mesmos componentes dos quadripolos A e B, logo serão as mesmas respectivas tabelas listadas acima.

3.3.2 Resultados das medidas

V_1	1.003V	1.003V
V_2	0.2982V	0V
I_1	65.8 μ	74.06 μA
I_2	0	0.1 μ

3.3.3 Parâmetros a

Para $V_2 = 0$:

$$\begin{aligned} a_{12} &= -\frac{V_1}{I_2} = 1 * 10^8 \Omega \\ a_{22} &= \frac{I_1}{I_2} = 740.6 \end{aligned} \quad (29)$$

Para $I_2 = 0$:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{V_1}{V_2} = 3.36351441985 \\ a_{21} &= \frac{I_1}{V_2} = 2.2 * 10^{-4} \Omega \end{aligned} \quad (30)$$

Novamente observo que os resultados não estão coerentes com as análises teóricas. Creio que o problema foi na medição das correntes. As medições estavam flutuando dependendo do momento que as fiz. E não tenho certeza do por quê.

Mas vou prosseguir a análise, mesmo com os parâmetros a incoerentes.

$$\begin{aligned} V_1 &= 3.36351441985 * V_2 - 10^8 I_2 \\ I_1 &= 2.2 * 10^{-4} * V_2 + 740.6 I_2 \end{aligned} \quad (31)$$

3.3.4 Impedância de entrada com carga

Novamente podemos substituir $I_2 = -I_1 Z_L$ que nos dá:

$$\begin{aligned} Z_{numerico} &= -135090.0570605898 \Omega \\ Z_{experimental} &= 13683 \Omega \end{aligned} \quad (32)$$

O resultado numérico com os parâmetros a obtidos foi bastante incoerente. Creio que por erros de medição das correntes do circuito. Mas o resultado experimental foi bastante próximo do esperado.

4 Conclusões

Conseguimos com sucesso fazer a análise numérica pelo Maxima, e comparamos os resultados com os obtidos experimentalmente.

Nos resultados práticos, obtivemos parâmetros Z bastante similares aos obtidos numericamente.

Porém para os parâmetros y e a eles foram incoerentes. Imagino que houve algum erro no quadripolo B , que propagou-se para o quadripolo em cascata.

As impedâncias de entrada com a carga Z_L experimentais foram coerentes com a análise numérica em todos casos.

Em suma creio que conseguimos entender melhor como fazer análise de quadripolos, apesar de ter errado nas medições das correntes do quadripolo B , e não ter identificado o erro a tempo de corrigi-lo.