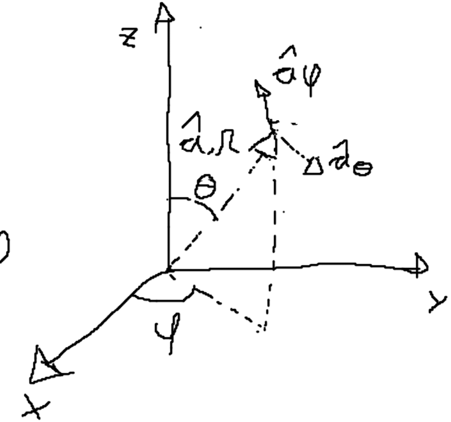
1 – Mostre em detalhes como obter cada versor $\hat{a}_x$, $\hat{a}_y$ e $\hat{a}_z$ do sistema cartesiano de coordenadas em termos dos versores $\hat{a}_r$, $\hat{a}_\theta$ e $\hat{a}_\varphi$ do sistema de coordenadas esféricas.

$$\hat{a}_x = \text{SEN}\,\theta\,\text{COS}\,\varphi\,\hat{a}_r + \text{COS}\,\theta\,\text{COS}\,\varphi\,\hat{a}_\theta - \text{SEN}\,\varphi\,\hat{a}_\varphi$$

$$\hat{a}_y = \text{SEN}\,\theta\,\text{SEN}\,\varphi\,\hat{a}_r + \text{COS}\,\theta\,\text{SEN}\,\varphi\,\hat{a}_\theta + \text{COS}\,\varphi\,\hat{a}_\varphi$$

$$\hat{a}_z = \text{COS}\,\theta\,\hat{a}_r - \text{SEN}\,\theta\,a_\theta$$



2 – Utilizando a função Gradiente, obtenha um versor normal ao plano $3x + 4y + 5z = 0$.

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = (3, 4, 5)$$

$$\text{VERSOR} = \left(\frac{3}{\sqrt{3^2+4^2+5^2}}, \frac{4}{\sqrt{50}}, \frac{5}{\sqrt{50}} \right)$$

3 – Obtenha a Densidade de Fluxo Elétrico $\vec{D}$ de um filamento de carga infinito na direção do eixo dos zz, se ele traz uma carga Q por unidade de comprimento. Obtenha $\vec{D}$ pela Lei de Gauss nas formas integral e diferencial.

$$\int_\gamma \vec{D}\cdot d\vec{s} = Q$$

$$\int_\gamma (D_r\hat{a}_r + D_\theta\hat{a}_\theta + D_z\hat{a}_z)\cdot(ds\,\hat{a}_r) = Q$$

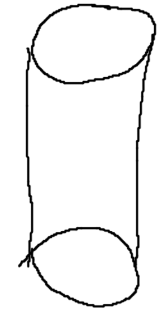
$$D_\theta = D_z = 0 \rightarrow \int_\gamma D_r\hat{a}_r\cdot ds\,\hat{a}_r = Q$$

$$D_r\int_\gamma ds = Q,\quad D_r 2\pi r L = Q,\quad D_r = \frac{Q}{2\pi r L} \Rightarrow D_r\hat{a}_r = \vec{D} = \frac{Q}{2\pi r L}\hat{a}_r$$

$$\nabla\cdot\vec{D} = \rho = D_r\,\delta(r),\quad \frac{1}{\cancel{r}}\frac{\partial r D_r}{\partial r} = \frac{Q}{2\pi \cancel{r} L}\delta(r),\quad rD_r = \int\frac{Q}{2\pi L}\delta(r)\,dr$$

$$rD_r = \frac{Q}{2\pi L}\int_0^\infty \delta(r)\,dr = \frac{Q}{2\pi L},\quad D_r = \frac{Q}{2\pi r L} \Rightarrow D_r\hat{a}_r = \vec{D} = \frac{Q}{2\pi r L}\hat{a}_r$$

4 – Obtenha a Densidade de Fluxo Elétrico $\vec{D}$ em todas as regiões de uma casca cilíndrica de raio ***a***, na direção do eixo dos zz, se ela tem uma carga Q uniformemente distribuída por unidade de comprimento. Obtenha $\vec{D}$ pela Lei de Gauss nas formas integral e diferencial.



PARA RAIO < a, TEMOS $\vec{D} = 0$

PARA RAIO > a)

INTEGRAL

$$\int \vec{D}\, d\vec{s} = Q \rightarrow$$

$$D_r \int ds = Q$$

$$D_r = \frac{Q}{2\pi r L} \rightarrow \vec{D} = \frac{Q}{2\pi r L}\hat{a}_r$$

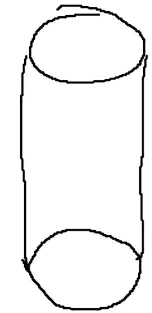
$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho = \frac{Q}{2\pi r L}\delta(r-a)$$

$$\frac{1}{\cancel{r}}\frac{\partial r D_r}{\partial r} = \frac{Q}{2\pi \cancel{r} L}\delta(r-a)$$

$$r D_r = \frac{Q}{2\pi L}\int_0^{\infty}\delta(r-a)\,dr$$

$$D_r = \frac{Q}{2\pi r L}$$

5 – Um cilindro maciço , infinito e de raio ***a*** possui uma densidade de carga volumétrica uniforme ρ_v. Obtenha $\vec{E}$ dentro e fora do cilindro pelas formas integral e diferencial das Equações de Maxwell.



DENTRO

$$\oint \vec{D}\,d\vec{s} = Q = \int_v \rho_v \, dv$$

$$D_r 2\cancel{\pi} \cancel{r} \cancel{L} = \rho_v \cancel{\pi} r^{\cancel{2}} \cancel{L}$$

$$D_r = \frac{\rho_v r}{2},$$

$$\vec{D} = \frac{\rho_v r}{2}\hat{a}_r \, , \vec{E}\varepsilon_0 = \vec{D}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_v r}{2\varepsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v \, , \frac{1}{r}\frac{\partial r D_r}{\partial r} = \rho_v$$

$$r D_r = \int_0^r \rho_v r \, dr$$

$$D_r = \frac{\rho_v}{r}\int r\,dr = \frac{\rho_v r}{2}, \vec{E} = \frac{\rho_v r}{2\varepsilon_0}$$

FORA

$$\oint \vec{D}\,d\vec{s} = Q = \int_v \rho_v \, dV$$

$$D_r 2\pi r L = \rho_v \int_0^a dV$$

$$D_r 2\cancel{\pi} r \cancel{L} = \rho_v a^2 \cancel{\pi} \cancel{L}$$

$$D_r = \frac{\rho_v a^2}{2r}, \vec{E} = \frac{\rho_v a^2}{2r\varepsilon_0}\hat{a}_r$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v \, , \frac{1}{r}\frac{\partial r D_r}{\partial r} = \rho_v$$

$$r D_r = \int_0^a \rho_v r \, dr \, , \; r D_r = \rho_v \int_0^a r\,dr$$

$$D_r = \frac{\rho_v a^2}{2r}, \vec{E} = \frac{\rho_v a^2}{2r\varepsilon_0}\hat{a}_r$$

6 – Se $\vec{E} = x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z$, encontre a expressão para o fluxo elétrico sobre uma superfície esférica de raio R.

$\vec{E} = x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z = R\hat{a}_r$, $\varepsilon_0 \vec{E} = \vec{D}$, $\int \varepsilon_0 \vec{E}\, ds = Q = \Psi$

$\varepsilon_0 \int R\hat{a}_r \cdot ds\,\hat{a}_r = \Psi$, $\varepsilon_0 \int R\, ds = \Psi$, $\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} R \cdot R^2 \,\text{sen}\,\theta\, d\varphi\, d\theta$

$\varepsilon_0 2\pi R^3 \int_0^{\pi} \text{sen}\,\theta\, d\theta$, $-\cos\Big|_0^{\pi} = 2$

$\Psi = \varepsilon_0 4\pi R^3$

7 – Um volume cúbico de lado 2L tem uma densidade de carga uniforme ρ. Obtenha a expressão para $\oint \vec{D}.d\vec{s}$ sobre uma das faces cúbicas.

$$\oint \vec{D}\, d\vec{s} = Q = \int_V \rho_V\, dv,$$

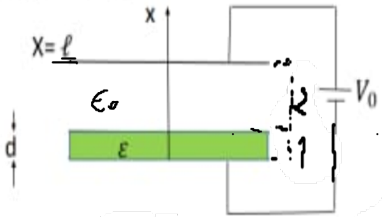
Q = FLUXO NAS 6 FACES,

FLUXO EM UMA FACE $= \frac{Q}{6}$

$$\rho_V \int dV \rightarrow \rho_V (2L)^3 = Q$$

FLUXO EM UMA FACE $= \frac{\rho_V\, 8L^3}{6} = \frac{4}{3}\rho_V L^3$

9 – Uma chapa dielétrica de permissividade ε e espessura **d** preenche parcialmente o espaço entre os eletrodos formados por duas placas condutoras paralelas. As placas estão separadas de uma distância ℓ e são mantidas a uma diferença de potencial $V=V_0$. Ajustando as soluções adequadas da Equação de Laplace nas duas regiões, encontre a distribuição de potencial no dielétrico e no espaço que contém o ar entre as placas. Despreze os efeitos de borda.



$\vec{E} = -\nabla V$

REGIÃO 1

$\nabla^2 V_1 = \frac{\rho_v}{\epsilon} = 0$

$\frac{\partial V_1}{\partial x^2} = 0$

$V_1''(x) = 0$

$V_1'(x) = A$

$V_1(x) = Ax + B$

$V_1(0) = A \cdot 0 + B = 0, B = 0$

$V_1(x) = Ax$

REGIÃO 2

$\nabla^2 V_2 = \frac{\rho_v}{\epsilon_0} = 0$

$V_2''(x) = 0$

$V_2(x) = Cx + D$

$V_2(\ell) = V_0 = C\ell + D$

$D = V_0 - C\ell$

$V_2(x) = \underbrace{Cx + V_0 - C\ell}$

$C(x-\ell) + V_0$

REGIÃO $x = d$

$V_1(d) = V_2(d)$

$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1)\hat{a}_x = 0$

$\vec{D}_1 = \epsilon \vec{E}_1 = -\epsilon \nabla V_1 \hat{a}_x = -\epsilon A \hat{a}_x$

$\vec{D}_2 = \epsilon_0 \vec{E}_2 = -\epsilon_0 \nabla V_2 \hat{a}_x = -\epsilon_0 C \hat{a}_x$

$\left[(-\epsilon_0 C \cancel{\hat{a}_x}) - (-\epsilon A \cancel{\hat{a}_x})\right] \cancel{\hat{a}_x} = 0$

$-\epsilon_0 C + \epsilon A = 0$ $\leftarrow$ $A = \frac{\epsilon_0 C}{\epsilon}$

$Ad = Cd + V_0 - C\ell$

$C \frac{\epsilon_0}{\epsilon} d = Cd + V_0 - C\ell$

$C \frac{\epsilon_0}{\epsilon} d - Cd - V_0 + C\ell = 0$

$C\left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon} d - d + \ell\right) = V_0$

$C = \frac{V_0}{d\left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon} - 1\right) + \ell}$

$V_1(x) = Ax$

$V_1(x) = \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \frac{V_0 \, x}{d\left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon} - 1\right) + \ell}$

$V_2(x) = \frac{V_0 (x - \ell)}{d\left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon} - 1\right) + \ell} + V_0$

10 – Um campo potencial no vácuo é definido por V=50/r para $a \leq r \leq b$. A) Mostre que a densidade volumétrica de cargas ρ_v é nula para $a<r<b$. B) Determine a energia armazenada na região $a<r<b$.

$$\vec{E} = -\nabla V, \quad - -50R^{-1} \quad \vec{E} = 50R^{-2}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_v}{\varepsilon_0}, \quad \frac{1}{R^2}\left(\cancel{R^2}\, 50 \cancel{R^{-2}}\right)' = 0 \Rightarrow \rho_v = 0$$

$$W = \frac{1}{2}\int_V \vec{E}\,\vec{D}\,dV, \quad \frac{1}{2}\int_V \frac{2500}{R^4}\,\varepsilon_0\,dV$$

$$\frac{\varepsilon_0}{2}\int_a^b\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{2500}{R^{\cancel{4}\,2}}\,\cancel{R^2}\,\text{sen}\,\theta\,d\varphi\,d\theta\,dR, \quad \frac{2500\varepsilon_0}{\cancel{2}}\int_a^b \frac{1}{R^2}\,dR\int_0^{\pi}\text{sen}\,\theta\,d\theta\int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$-b^{-1} + a^{-1} \cdot \cancel{2} \cdot 2\pi$$

$$5000\,\varepsilon_0\,\pi\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\epsilon} = 0$$

$$\frac{1}{r}\left(rV'\right)' = 0$$

$$rV' = A \Rightarrow V' = \frac{A}{r}, \quad V = A\int r^{-1}\,dr$$

$$V = A\ln r + B$$

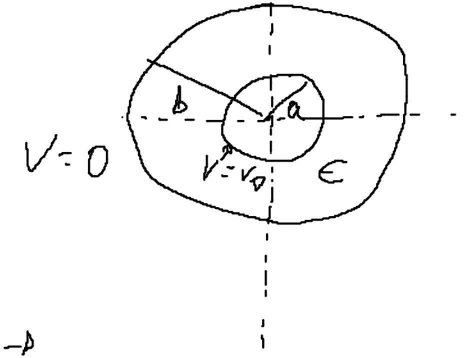
$$V(b) = 0 = A\ln b + B, \quad B = -A\ln b$$

$$V(a) = V_0 = A\ln a + B \Rightarrow A\ln a - A\ln b = V_0$$

$$A(\ln a - \ln b) = V_0,$$

$$A = \frac{V_0}{\ln\frac{a}{b}} = \frac{-V_0}{\ln\frac{b}{a}}, \quad B = \frac{V_0\ln b}{\ln b/a}$$

$$V(r) = \frac{-V_0\ln r}{\ln\frac{b}{a}} + \frac{V_0\ln b}{\ln\frac{b}{a}}$$



$$\vec{E} = -\nabla V$$

$$\vec{D} = \epsilon\vec{E}$$

$$\vec{E} = \frac{-V_0}{\left(\ln\frac{b}{a}\right)\cdot r}\,\hat{a}_r$$

$$\vec{D} = \frac{-V_0\epsilon}{\ln\frac{b}{a}\cdot r}\,\hat{a}_r$$