

Resumo Complementos de Matematica Primeira Unidade

Henrique da Silva
hpsilva@proton.me

11 de julho de 2022

Sumário

- 1 Potencias de i
- 2 Forma algebrica de um numero complexo
- 3 Operacoes na forma algebrica
 - 3.1 Adicao & Subtracao
 - 3.2 Multiplicacao
 - 3.3 Divisao
- 4 Representacao geometrica
- 5 Modulo
- 6 Argumento
- 7 Complexo na forma polar
- 8 Operacoes na forma polar
 - 8.1 Multiplicacao
 - 8.2 Divisao
- 9 Forma de Moivre
 - 9.1 Definicao
 - 9.2 Propriedades
 - 9.3 Multiplicacao
 - 9.4 Divisao
 - 9.5 Radiciacao
- 10 Inversao complexa

1 Potencias de i

As potencias de i sao periodicas em 4. Da seguinte maneira:

i^0	=	1
i^1	=	i
i^2	=	-1
i^3	=	$-i$
i^4	=	1
i^5	=	i
i^6	=	-1
\vdots		
i^n	=	$i^{n\%4}$

Com "%" sendo resto da divisao inteira

2 Forma algebrica de um numero complexo

A forma algebrica de um numero complexo eh:

$$Z = a + ib \quad (1)$$

Onde a eh a componente real de Z e pode ser chamado de $Re(Z)$ e b eh a componente imaginaria e pode ser chamado de $Im(Z)$

Podemos dizer que os numeros \Re sao um subconjunto de \mathbb{C} , exceto que no caso de um numero \Re a parte imaginaria b seria 0, alguns exemplos:

$5 + i$	$a = 5$	$b = 1$
$4 - 3i^2$	$a = 4$	$b = -3$
12	$a = 12$	$b = 0$
$7i^3$	$a = 0$	$b = 7$

Dois numeros complexos sao iguais se seus componentes reais e imaginarios forem iguais

3 Operacoes na forma algebrica

Nos exemplos a seguir: $Z_n = a_n + ib_n$

3.1 Adicao & Subtracao

Para subtrair e adicionar basta subtrair e adicionar as partes imaginarias dos numeros complexos

$$Z_1 + Z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i \quad (2)$$

$$Z_1 - Z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i \quad (3)$$

3.2 Multiplicacao

Vamos utilizar a distributividade e o fato que $i^2 = -1$

$$Z_1 * Z_2 = (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i)$$

$$Z_1 * Z_2 = a_1a_2 + a_1b_2i + b_1a_2i + b_1b_2i^2$$

Como $i^2 = -1$ podemos entao simplificar em:

$$Z_1 * Z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)i \quad (4)$$

3.3 Divisao

O conjugado de Z eh \bar{Z} . Se $Z = a + ib$ entao $\bar{Z} = a - ib$

Algo interessante acontece quando fazemos $Z * \bar{Z}$:

$$Z_1 * \bar{Z} = (a + bi)(a - bi)$$

$$Z_1 * \bar{Z} = a^2 - (bi)^2$$

$$Z_1 * \bar{Z} = a^2 - b^2i^2$$

$$Z_1 * \bar{Z} = a^2 + b^2$$

Ou seja, essa operacao nos da um escalar. E vamos utilizar disso para poder fazer a divisao.

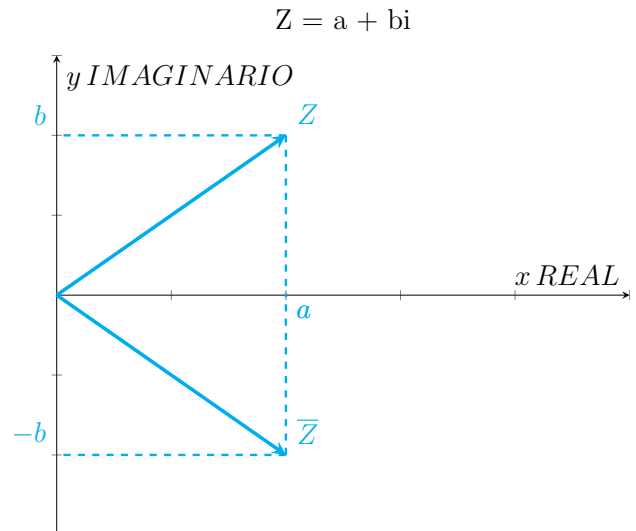
Para fazer a divisao de Z por \bar{Z} fazemos:

$$\frac{Z}{W} = \frac{Z}{W} * \frac{\bar{W}}{\bar{W}} \quad (6)$$

E transformamos a operacao de divisao de numeros complexos em uma multiplicacao de Z por \bar{W} dividido por um escalar $W * \bar{W}$

4 Representacao geometrica

Na representacao geometrica de um numero complexo podemos ver o eixo x como a parte real e o y como a parte imaginaria, como no exemplo abaixo:



Eh interessante notar que \bar{Z} eh o simetrico de Z , porem oposto no eixo imaginario

5 Modulo

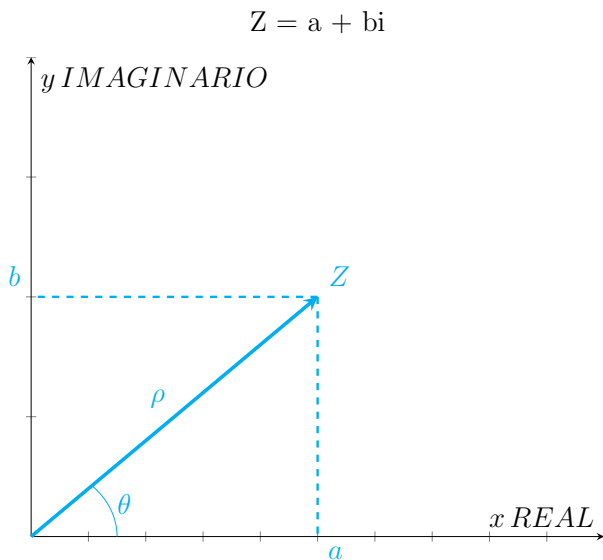
Como temos uma representacao geometrica do numero complexo, podemos calcular o modulo do numero complexo por simplesmente a hipotenusa de a e b do mesmo jeito que fariamos com um vetor comum

O modulo sera representado pela letra ρ ou por $|Z|$

$$\rho = |Z| = \sqrt{a^2 + b^2} = |\bar{Z}| \quad (7)$$

6 Argumento

O argumento eh simplesmente o angulo entre o eixo real e o vetor complexo sera representado pela letra θ ou por $\arg(Z)$



Dai temos:

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{a}{\rho} \\ \sin \theta &= \frac{b}{\rho}\end{aligned}\quad (8)$$

7 Complexo na forma polar

Entendendo o conceito de argumento, podemos entao naturalmente:

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{a}{\rho} \rightarrow a = \rho \cos \theta \\ \sin \theta &= \frac{b}{\rho} \rightarrow b = \rho \sin \theta\end{aligned}\quad (9)$$

Que nos da a e b no formato de coordenadas polares, entao podemos re-escrever o nosso Z como:

$$\begin{aligned}Z &= \rho * \cos \theta + \rho * \sin \theta * i \\ Z &= \rho * (\cos \theta + \sin \theta * i)\end{aligned}\quad (10)$$

8 Operacoes na forma polar

As simplificacoes abaixo vem diretamente da multiplicacao e divisao de numeros complexos na forma polar, e simplificacao por regras de trigonometria.

8.1 Multiplicacao

$$Z_1 * Z_2 = \rho_1 \rho_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] \quad (11)$$

8.2 Divisao

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)] \quad (12)$$

9 Forma de Moivre

Com tudo que foi visto acima vamos agora fazer a seguinte definicao:

9.1 Definicao

$$e^{it} = \cos t + i \sin t \quad (13)$$

Escrever nessa forma nos da varias propriedades uteis:

9.2 Propriedades

$$\begin{aligned}Z &= \rho * e^{it} \\ \bar{Z} &= \rho * e^{i*(-t)} \\ |e^{it}| &= 1 \rightarrow \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1 \\ \frac{1}{e^{it}} &= e^{-it} = \overline{e^{it}} \\ e^{it} &= e^{i*(t+2K\pi)} \\ e^{it} * e^{ig} &= e^{i*(t+g)}\end{aligned}$$

E por fim chegamos a uma forma mais simples de efetuar multiplicacoes e divisoes:

9.3 Multiplicacao

$$Z_1 * Z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(t_1+t_2)} \quad (14)$$

9.4 Divisao

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(t_1-t_2)} \quad (15)$$

9.5 Radiciacao

Dado um numero complexo Z qualquer, $\sqrt[n]{Z}$ tera n raizes complexas

Podemos dizer a partir das propriedades o seguinte:

$$\begin{aligned}Z &= \rho * e^{i(\theta+2K\pi)} \\ \sqrt[n]{Z} &= W \\ Z &= W^n \\ W^n &= (\rho_k * e^{i\theta_k})^n \\ W^n &= \rho_k^n e^{i\theta_k n} \\ \rho_k^n e^{i\theta_k n} &= \rho * e^{i(\theta+2K\pi)}\end{aligned}$$

Entao conseguimos algumas conclusoes interessantes, primeiro que o nosso ρ_k^n nao depende de k , ou seja. para todas raizes teremos o mesmo modulo, so o que vai se alterar eh o argumento, ou seja, o angulo

$$\begin{aligned}\rho_k^n &= \rho \\ \rho_k &= \sqrt[n]{\rho}\end{aligned}\tag{16}$$

E segundo, concluimos que o nosso argumento varia de acordo com K da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\theta_k n &= \theta + 2K\pi \\ \theta_k &= \frac{\theta + 2K\pi}{n}\end{aligned}\tag{17}$$

Concluindo, para conseguir cada raiz, basta fazermos o K variar de 0 a $n - 1$, e eh util notar que isso vai criar vetores de tamanho ρ equidistantes no intervalo $[0, 2\pi]$

10 Inversao complexa