

Quinto Relatório de Lab de Circuitos II

Henrique da Silva
hpsilva@proton.me

6 de abril de 2023

Sumário

1	Introdução	
2	Análise preliminar	
2.1	O circuito	
2.2	Maxima	
2.2.1	Filtro 1	
2.2.2	Filtro 2	
2.2.3	Filtro combinado	
2.2.4	Gráfico de Bode	
3	Medições em laboratório	
3.1	Os filtros	
3.2	Tabela de componentes	
3.3	Gráficos de Bode dos filtros reais .	
3.3.1	Filtro 1	
3.3.2	Filtro 2	
3.3.3	Filtro total	
3.4	Comportamento na frequência . . .	
3.5	Resultados das medidas	
4	Pós-laboratorial	
4.1	Função transferência de todos filtros envolvidos.	
4.1.1	Filtro 1	
4.1.2	Filtro 2	
4.1.3	Filtro total	
4.2	Ganho do filtro	
4.3	Tabela de magnitudes	
4.4	Dados achado e gráfico de Bode . .	

5 Conclusões

1 Introdução

Neste relatório, vamos discutir filtros de Butterworth, em particular, vamos projetar, montar e testar um filtro de Butterworth ativo passa-baixa de quarta ordem.

Todos arquivos utilizados para criar este relatório, e o relatório em si estão em: https://github.com/Shapis/ufpe_ee/tree/main/5thsemester/CircuitsII/

2 Análise preliminar

Utilizarei o Maxima para fazer a análise teórica do circuito antes de montá-lo fisicamente.

Após terminar as análises compararei os resultados obtidos nas análises numéricas e em laboratório para verificar sua coerência.

2.1 O circuito

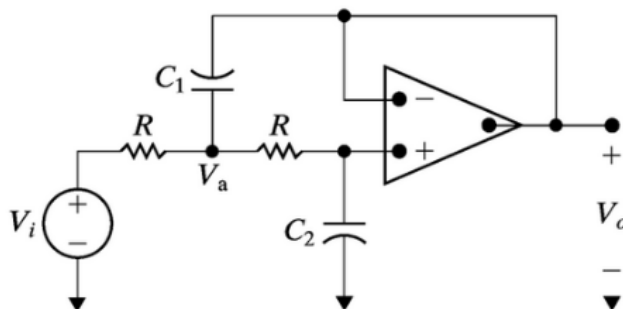


Figura 1: Filtro ativo Butterworth de segunda ordem.

2.2 Maxima

Podemos realizar a análise do circuito utilizando análise nodal.

$$\begin{aligned} \frac{V_a - V_i}{R} + (V_a - V_o) sC_1 + \frac{V_a - V_o}{R} &= 0 \\ \frac{V_o - V_a}{R_2} + V_o sC_2 &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Resolvendo simbolicamente no Maxima obtemos o seguinte:

$$\frac{\frac{1}{C_1 C_2 R^2}}{s^2 + \frac{2s}{C_1 R} + \frac{1}{C_1 C_2 R^2}} \quad (2)$$

Daqui vemos que temos um circuito passa-baixa com os seguintes parâmetros:

$$\begin{aligned} \omega_c^2 &= \frac{1}{C_1 C_2 R^2} \\ \beta &= \frac{2}{C_1 R} \end{aligned} \quad (3)$$

E já que estamos tratando de um filtro Butterworth de quarta ordem, precisamos analisar as projeções das raízes dos seus pólos no eixo real.

No caso, só observamos as do segundo quadrante, já que as suas projeções são iguais às das raízes que se encontram no terceiro quadrante.

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 2 \left| \cos \frac{5\pi}{8} \right| = 0.765367 \\ \beta_2 &= 2 \left| \cos \frac{7\pi}{8} \right| = 1.847759 \end{aligned} \quad (4)$$

Com esta informação podemos projetar os filtros protótipos que utilizaremos em série para obter nosso filtro de quarta ordem.

2.2.1 Filtro 1

Neste filtro chamaremos seus resistores de R_1 seus capacitores de C_1 e C_2 .

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 0.765367 = \frac{2}{C_1 R} \\ \omega_c^2 &= 1 = \frac{1}{C_1 C_2 R^2} \\ R &= 1; \end{aligned} \quad (5)$$

Resolvendo para essas equações teremos:

$$\begin{aligned} R_1 &= 1\Omega \\ C_1 &= 2.6131F \\ C_2 &= 0.38268F \end{aligned} \quad (6)$$

Agora vamos realizar o escalonamento para $50Hz$, já que o nosso circuito protótipo foi projetado para $1Hz$.

Utilizaremos as seguintes equações de escalonamento:

$$\begin{aligned} R' &= Rk_m \\ C' &= \frac{C}{k_m k_f} \end{aligned} \quad (7)$$

Com $k_f = 50$ para escalonarmos a frequência central para $50Hz$ e escolhemos um valor de $k_m = 8.3 * 10^4$ para utilizarmos apenas um único resistor com valor comercial.

Então obteremos os seguintes componentes que serão usados para montar o filtro:

$$\begin{aligned} R_1 &= 83k\Omega \\ C_1 &= 100nF \\ C_2 &= 14.7nF \end{aligned} \quad (8)$$

2.2.2 Filtro 2

Neste filtro chamaremos seus resistores de R_2 seus capacitores de C_3 e C_4 .

$$\begin{aligned} \beta_2 &= 1.847759 = \frac{2}{C_3 R} \\ \omega_c^2 &= 1 = \frac{1}{C_3 C_4 R^2} \\ R &= 1; \end{aligned} \quad (9)$$

Resolvendo para essas equações teremos:

$$\begin{aligned} R_2 &= 1\Omega \\ C_3 &= 1.08239F \\ C_4 &= 0.92388F \end{aligned} \quad (10)$$

Agora vamos realizar o escalonamento para $50Hz$, já que o nosso circuito protótipo foi projetado para $1Hz$.

Utilizaremos as seguintes equações de escalonamento:

$$\begin{aligned} R' &= Rk_m \\ C' &= \frac{C}{k_m k_f} \end{aligned} \quad (11)$$

Com $k_f = 50$ para escalonarmos a frequência central para $50Hz$ e escolhemos um valor de $k_m = 6.2 * 10^4$ para utilizarmos apenas um único resistor com valor comercial.

Então obteremos os seguintes componentes que serão usados para montar o filtro:

$$\begin{aligned} R_2 &= 62k\Omega \\ C_3 &= 55.6nF \\ C_4 &= 47.4nF \end{aligned} \quad (12)$$

2.2.3 Filtro combinado

Podemos então combinar os dois filtros de Butterworth de segunda ordem que projetamos em série para obter um filtro de quarta ordem com a seguinte função de transferência:

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{\omega_c^4}{(s^2 + \beta_1 s + \omega_c^2)(s^2 + \beta_2 s + \omega_c^2)} \\ \beta_1 &= 0.765367 \\ \beta_2 &= 1.847759 \\ \omega_c &= 2\pi 50 = 314.159265 \end{aligned} \quad (13)$$

2.2.4 Gráfico de Bode

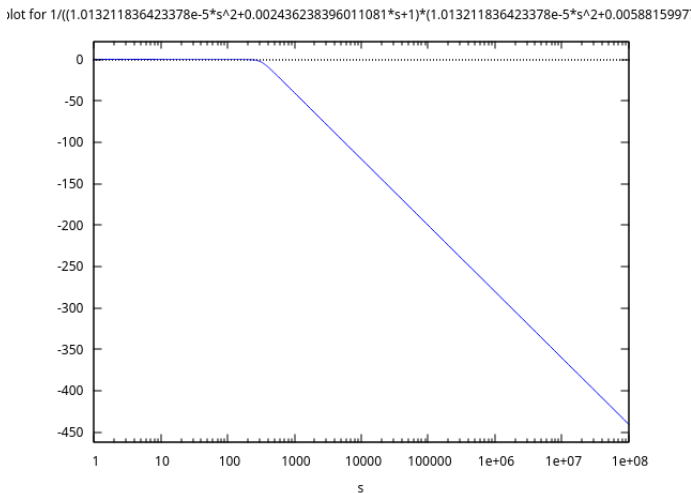


Figura 2: Magnitude de $H(s)$ do filtro.

Temos $80dB$ de perda em $500Hz$ e $160dB$ de perda em $5000Hz$.

Cada filtro de Butterworth tem $40dB$ de perda por década. Como temos dois em série, perdemos $80dB$ por década.

Em outras palavras, temos $20dB$ de perda por polo por década. Como temos 4 polos, perdemos $80dB$ por década.

Então o que observamos é coerente.

3 Medições em laboratório

3.1 Os filtros

Inicialmente farei as medições dos componentes a serem usados.

Após isso farei um breve teste em cada um dos filtros de segunda ordem individualmente.

Por fim, combinarei os dois filtros no nosso filtro de quarta ordem que queremos analisar.

3.2 Tabela de componentes

Filtro 1

$$\begin{aligned} R_1 &= 81.1k\Omega \\ R_2 &= 81k\Omega \\ C_1 &= 100nF \\ C_2 &= 14.7nF \end{aligned} \quad (14)$$

Filtro 2

$$\begin{aligned} R_3 &= 61.8k\Omega \\ R_4 &= 61.2k\Omega \\ C_3 &= 55.5nF \\ C_4 &= 47.8nF \end{aligned} \quad (15)$$

3.3 Gráficos de Bode dos filtros reais

Substitui os valores reais no Maxima para obter gráficos de Bode dos filtros reais. Para observar o comportamento real esperado.

3.3.1 Filtro 1

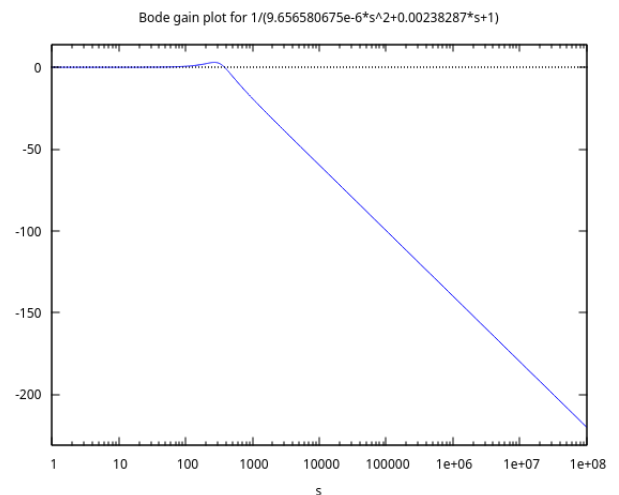


Figura 3: Magnitude de $H(s)$ do filtro 1.

Notamos que há um ganho considerável antes de começar a filtrar frequências altas.

Achamos uma frequência de corte de $71Hz$.

3.3.2 Filtro 2

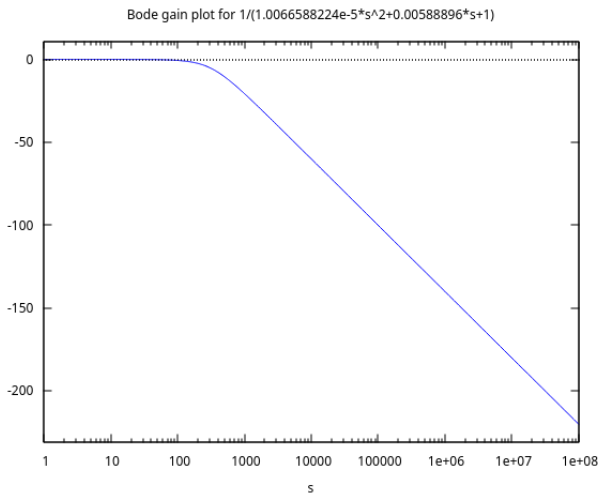


Figura 4: Magnitude de $H(s)$ do filtro 2.

Achamos uma frequência de corte de $36Hz$.

3.3.3 Filtro total

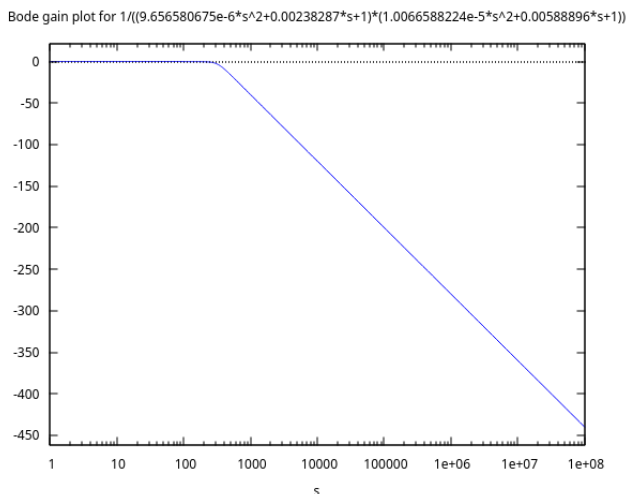


Figura 5: Magnitude de $H(s)$ do filtro total.

Achamos uma frequência de corte de $50Hz$.

3.4 Comportamento na frequência

Em frequências baixas constatamos que o ganho permanecia 1. E achamos sua frequência de corte de fato em 59Hz. Como esperávamos da análise numérica com os valores reais.

Notamos também que há um pequeno ganho antes de atingirmos a frequência de corte. Este comportamento pode ser observado no gráfico de Bode do filtro 1 que fizemos acima na seção (3.3.1).

As fotos do osciloscópio se encontram na pasta do relatório em "images/osciloscopio/*".

3.5 Resultados das medidas

Múltiplos	Freq (Hz)	Entrada (V)	Saída (V)
0.25	14.75	5.11	5.15
0.5	29.5	5.11	5.47
0.75	44.25	5.11	5.39
1	59	5.11	3.62
1.25	73.75	5.11	2.01
1.6	94.4	5.11	0.97
2.5	147.5	5.11	0.3

4 Pós-laboratorial

As tabelas estão na seção 3.2 e 3.5.

4.1 Função transferência de todos filtros envolvidos.

4.1.1 Filtro 1

```
H1a: at(H, [C1 = 100*(10^-9), C2= 14.7 * (10^-9), R1 = 81100, R2 = 81000]);  
bode_gain(H1a, [s, 1, 10^8]);  
1/(9.656577e-6*s^2+0.00238287*s+1)
```

Figura 6: $H(s)$ do filtro 1 com valores reais.

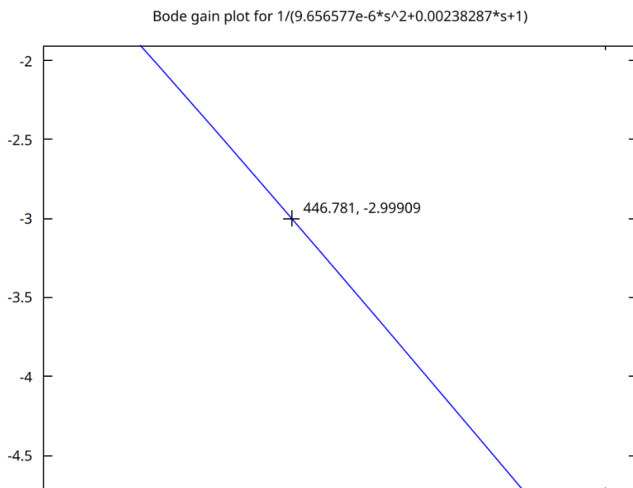


Figura 7: Zoom do gráfico de Bode do filtro 1 com valores reais.

Daqui tiramos uma frequência de corte de $71.1Hz$ a partir do gráfico de Bode desta função.

4.1.2 Filtro 2

```
H2b: at(H, [C1 = 55.5*(10^-9), C2= 47.8 * (10^-9), R1 = 61860, R2 = 61200]);  
bode_gain(H2b, [s, 1, 10^8]);  
false  
1/(1.00434337128e-5*s^2+0.005882268*s+1)
```

Figura 8: $H(s)$ do filtro 2 com valores reais.

Daqui tiramos uma frequência de corte de $35.9Hz$ a partir do gráfico de Bode desta função.

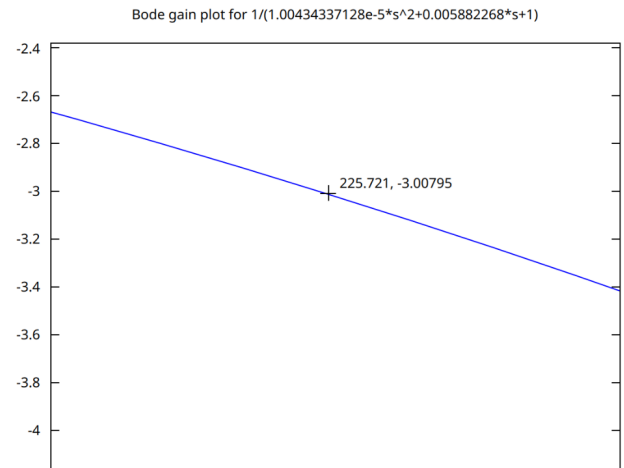


Figura 9: Zoom do gráfico de Bode do filtro 2 com valores reais.

4.1.3 Filtro total

```
Htotal: H1a*H2b;  
bode_gain(Htotal, [s, 1, 10^8]);  
false  
1/((9.656577e-6*s^2+0.00238287*s+1)  
*(1.00434337128e-5*s^2+0.005882268*s+1))
```

Figura 10: $H(s)$ do filtro total com valores reais.

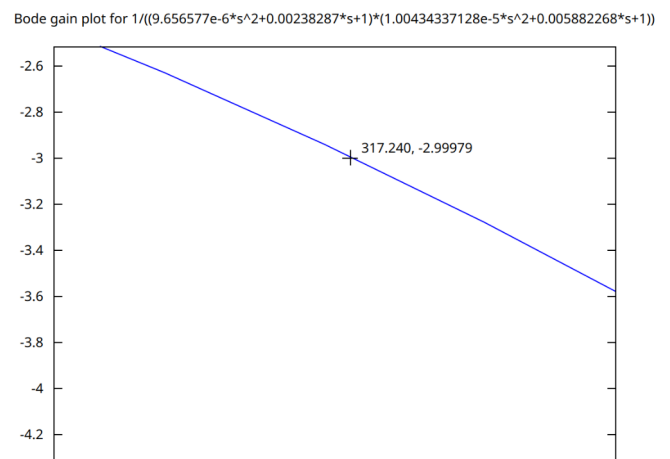


Figura 11: Zoom do gráfico de Bode do filtro total com valores reais.

Daqui tiramos uma frequência de corte de $50.5Hz$ a partir do gráfico de Bode desta função.

4.2 Ganho do filtro

Observamos um ganho unitário, que ocorre quando $s = jw$ com w tendendo a 0.

Que é o resultado esperado para filtro passa-baixa.

4.3 Tabela de magnitudes

Múltiplos	Freq (Hz)	$ H(jw) $
0.25	14.75	1.0078
0.5	29.5	1.0704
0.75	44.25	1.0547
1	59	0.7084
1.25	73.75	0.3933
1.6	94.4	0.1898
2.5	147.5	0.0587

4.4 Dados achado e gráfico de Bode

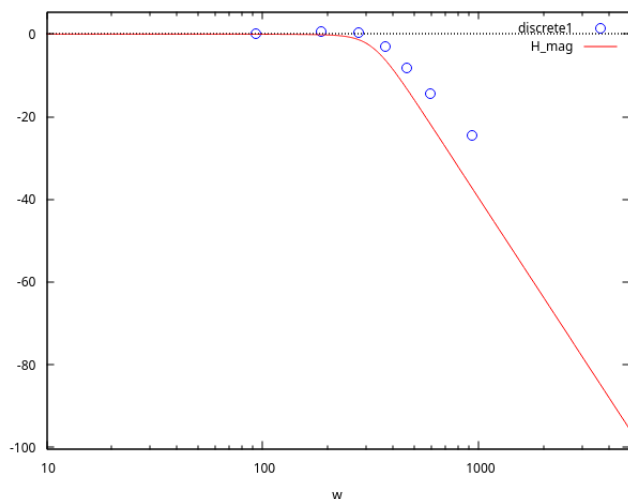


Figura 12: Gráfico da curva esperada pelos pontos encontrados.

Há uma discrepância, que já havíamos detectado. Em 4.1.3 vimos que a frequência de corte esperada com os valores reais dos componentes eh de $50.5Hz$, e a que encontramos experimentalmente foi de $59Hz$.

Eu não tenho certeza de por que houve essa discrepância. Creio que seja por conta de erro de medição dos valores dos componentes.

5 Conclusões

Conseguimos com sucesso fazer a análise numérica pelo Maxima, e comparamos os resultados com os obtidos experimentalmente.

Nos resultados práticos, a magnitude da função transferência e as frequências de corte foram coerentes com os resultados esperados.

Porém, houve o erro evidenciado em 4.3, de que a frequência de corte esperada pelos valores de componentes medidos era de $50.5Hz$, e a que de fato achamos foi de $59Hz$.

Creio que por conta de erro de medição dos valores dos componentes.

Os gráficos que geramos a partir dos resultados experimentais foram coerentes com os gráficos gerados numericamente.

Em suma creio que tivemos sucesso em nos familiarizar com as ferramentas de análise de circuitos elétricos numéricos.