# Ficha 2

## ① Contagem

1.

→ Identificar MC e PC em termos do nº de comparações entre elems. do array e em termos do nº trocas efetuadas.

→ Calcule nº comparações entre elems do array efetuadas nesses casos identificados.

a)
```
void bubbleSort (int v[], int N){
    int i, j;
    for (i=N-1; i>0; i--)
        for(j=0; j<i; j++)
            if(v[j] > v[j+1]) swap (v, j, j+1);
}
```

> ñ tem MC ou PC pois são sempre feitas o mesmo nº de comparações

$$T_>(N) = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=0}^{i-1} 1$$ → comparação entre elems. do array, tem tempo constante

$$= \sum_{i=1}^{N-1} i-\cancel{1}-0+\cancel{1} = \sum_{i=1}^{N-1} i = \frac{(N-1)N}{2} = \Theta(N^2)$$

Swap já tem MC e PC pois depende da condição $v[j] > v[j+1]$

quando array está ordenado crescente, ou seja, $v[j] < v[j+1]$ (if sempre False)

quando array está ordenado decrescente, ou seja, $v[j] > v[j+1]$ (if sempre True)

$$T_{swap}^{MC}(N) = 0 = \Theta(1)$$

$$T_{swap}^{PC}(N) = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=0}^{i-1} 1 = \frac{N(N-1)}{2} = \Theta(N^2)$$

b) void iSort (int v[], int N){
    int i, j;
    for (i=1; i<N; i++)
        for (j=i; j>0 && v[j-1] > v[j]; j--)
            Swap (v, j, j-1);

> agora tem MC e PC pois está dentro do for, logo:

$$T_{>}^{MC}(N) = \sum_{i=1}^{N-1} 1 = N-1-\cancel{1}+\cancel{1} = \underline{\Theta(N)}$$

$$T_{>}^{PC}(N) = \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{i} 1 = \sum_{i=1}^{N-1} i-\cancel{1}+\cancel{1} = \frac{(N-1)N}{2} = \underline{\Theta(N^2)}$$

Swap tem MC e PC também:

quando $v[j-1] <= v[j]$

quando $v[j-1] > v[j]$

$$T_{Swap}^{MC}(N) = 0 = \underline{\Theta(1)}$$

$$T_{Swap}^{PC}(N) = \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{i} 1 = \sum_{i=1}^{N-1} i = \frac{(N-1)N}{2} = \underline{\Theta(N^2)}$$

2.

```
int mult1(int x, int y){
    // pre: x>=0
    int a=x, b=y, r=0;
    while (a>0){
        r = r+b;
        a = a-1;
    }
    //pos: r == x*y
    return r;
}
```

```
int mult2(int x, int y) {
    // pre: x>=0
    int a=x, b=y, r=0;
    while (a>0){
        if (a%2 == 1) r = r+b;
        a = a/2; b = b*2;
    }
    // pos: r == x*y
    return r;
}
```

$\boxed{*}$ sempre feito

3* $\boxed{?}$

+ nº ocorrências ímpares

- Contar nº de vezes que as operações primitivas (+ − *2 /2 %2) contadas no corpo do ciclo são executadas no pior caso.

Tamanho do input é o nº bits necessários para representar nºs inteiros, como argumento.

N=4 bits

$\boxed{1|1|1|1} = 2^4-1 = 15$

$\boxed{1|0|0|0} = 2^3 = 8$

$\left.\right\} [2^{N-1}, 2^N-1]$

$\boxed{\text{mult1}}$

→ tanto para + como para − ñ existe PC e MC pois só depende de a>0 para ser executado o corpo do ciclo

nº comparações de + e − é de $\underline{*}$

- $T_-^{MC}(N) = T_+^{MC}(N) = 2^{N-1}$

$T_-^{PC}(N) = T_+^{PC}(N) = 2^N-1$

→ assimptoticamente

$T_+(N) = \Theta(2^N)$

$\boxed{\text{mult2}}$

nº comparações $= \boxed{*}$

→ if(False) sempre até $\frac{1}{1}=1$

$T_+^{MC}(N) = 1$

$\boxed{0|0|0|0|1}$

N-1 ... 0

$\boxed{0|1|1|1} \xrightarrow{a=\frac{a}{2}} \boxed{0|0|1|1}$

faz shift para a direita

bit + significativo

Logo vamos ter N shifts para a direita

- $T_+^{PC}(N) = N = \Theta(N)$

o Como * faz o mesmo nº de execuções de / então $T_*(N) = T_/(N) = N = \Theta(N)$

3.

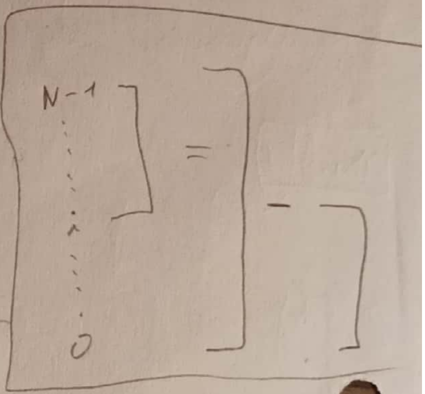
```c
int maxSoma (int v[], int N){
    int i, j, r=0, m;
    for (i=0; i<N; i++)
        for (j=i; j<N; j++){
            m = Soma(v,i,j);
            if (m>r) r=m;
        }
    return r;
}
```

```c
int Soma (int v[], int a, int b) {
    int r=0, i;
    for (i=a; i<=b; i++)
        r = r+v[i];
    return r;
}
```

a) $\boxed{m^2 \text{ acessos ao array argumento}}$

Soma não tem MC ou PC

$$T_{Soma}(a,b) = \sum_{i=a}^{b} 1 = b-a+1$$




$$T_{maxSoma}(N) = \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=i}^{N-1} T_{Soma}(i,j)$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=i}^{N-1} (j-i+1)$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1}\left(\sum_{j=i}^{N-1} j - \sum_{j=i}^{N-1} i-1\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1}\left(\sum_{j=1}^{N-1} j - \sum_{j=1}^{i} j - \sum_{j=i}^{N-1} i-1\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1}\left(\frac{(N-1)N}{2} - \frac{(i-1+1)(i-1)}{2} - (i-1)\sum_{j=i}^{N-1} 1\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1}\left(\frac{N^2-N}{2} - \frac{i^2+i}{2} - (i-1)(N-\cancel{1}-i+\cancel{1})\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1}\left(\frac{N^2-N}{2} - \frac{i^2+i}{2} - (i-1)(N-i)\right) \rightarrow -iN+i^2+N-i$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1}\left(\frac{N^2-N}{2}\right) - \sum_{i=0}^{N-1}\frac{i^2-i}{2} - \sum_{i=0}^{N-1} iN + \sum_{i=0}^{N-1} i^2 + \sum_{i=0}^{N-1} N - \sum_{i=0}^{N-1} i$$

$$= \frac{N^2-N}{2}\cdot\underbrace{\sum_{i=0}^{N-1} 1}_{N-1+1} - \frac{1}{2}\cdot\underbrace{\sum_{i=0}^{N-1} i^2}_{?} + \frac{1}{2}\cdot\sum_{i=0}^{N-1} i - N\cdot\sum_{i=0}^{N-1} i + \underbrace{\sum_{i=0}^{N-1} i^2}_{?} + N\cdot\underbrace{\sum_{i=0}^{N-1} 1}_{N} - \underbrace{\sum_{i=0}^{N-1} i}_{\frac{(N-1)N}{2}}$$

$$\frac{(N^2-N)N}{2} = \frac{N^3-N^2}{2}$$

$$= \frac{N^2-N}{2}\cdot N - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-1} i^2 + \frac{1}{2}N - N\cdot\frac{(N-1)\cdot N}{2} + \sum_{i=0}^{N-1} i^2 + N - \frac{(N-1)N}{2}$$

$$= \frac{N^3-N^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-1} i^2 + \frac{1}{2}N - \frac{N^3+N^2}{2} + N - \frac{N^2-N}{2}$$

$$= \cancel{\frac{N^3}{2}} - \cancel{\frac{N^2}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}N} - \cancel{\frac{N^3}{2}} + \cancel{\frac{N^2}{2}} + N - \frac{N^2}{2} - \cancel{\frac{N}{2}} + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-1} i^2$$

$$= N - \frac{N^2}{2} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-1} i^2}_{\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\left(\sum_{i=1}^{N-1} i^2 + \sum_{i=0}^{1} i^2\right)}_{\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{(N-1)N(2(N-1)+1)}{6} + 1}_{\frac{1}{12}\cdot(N^2-N)(2N-1) = \frac{1}{12}\cdot 2N^3 - N^2 - 2N^2 + N}}}$$

$$= N - \frac{N^2}{2} + \frac{2N^3 - 3N^2 + N}{12} = \Theta(N^3)$$

④

```c
int crescente (int v[], int N){
    int i;
    for (i=1; i<N; i++)
        if (v[i] < v[i-1]) break;
    return i;
}
```

```c
int maxCresc (int v[], int N) {
    int r = 1, i=0, m;
    while (i<N-1) {
        m = crescente (v+i, N-i);
        if (m > r) r = m;
        i++;
    }
    return r;
}
```

MC e PC de maxCresc em termos de $\boxed{\text{nº de comp. entre elems. do array}}$

Vamos 1º analisar a função crescente → mais especificamente v[1] e v[0]

no MC ( v[i] < v[i-1] e faz break) ⟶ $\overline{T}^{MC}_{crescente}(N) = 1$

no PC ( v[i] >= v[i-1] sempre) ⟶ $\overline{T}^{PC}_{crescente}(N) = \sum_{i=1}^{N-1} 1 = N-\cancel{1}+\cancel{1}-\cancel{1}$

ou

v[i] >= v[i-1] com i=[0... N-2]

a ultima comparação é feita à mesma em caso de falha.

$$\overline{T}^{MC}_{maxCres}(N) = \sum_{i=0}^{N-2} 1 = N-2-0+1 = N-1$$

$$\overline{T}^{PC}_{maxCres}(N) = \sum_{i=0}^{N-2} N-1 = N\sum_{i=0}^{N-2} 1 - \sum_{i=0}^{N-2} 1$$

$$= N.(N-1) - N-1$$

$$= N^2 - 2N - 1 = \underline{\Theta(N^2)}$$

# ② Definições Recursivas

resolução ensinada pelo jbb

## 1. Árvores de Recorrência

$T(0) = \text{constante}$

a) $T(n) = k + T(n-1)$ com $k$ constante

$$T(n) = \begin{cases} a & \Leftarrow n < 1 \\ k + T(n-1) & \Leftarrow n \geq 1 \end{cases}$$

| i | |
|---|---|
| 0 | $T(n) - k$ |
| 1 | $T(n-1) - k$ |
| 2 | $T(n-2) - k$ |
| $i$ | $\boxed{T(n-i) - k}$ |
| $u$ | $T(1) - k$ |
| N | $T(0) - a$ |

$T(0) = a$

$T(1) = k + a$

$T(2) = k + (k + a)$

$T(3) = k + (k + k + a)$

$\vdots$

$T(n) = k + ((n-1)k + a) = \underline{\underline{nk + a}}$

$1 = n - u$

$\Leftrightarrow u = n - 1$

$$T(n) = \sum_{i=0}^{u} k + a$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} k + a = \underline{\underline{nk + a}} = \underline{\underline{\Theta(n)}}$$

b) $T(n) = k + T\left(\frac{n}{2}\right)$ com $k$ constante

$$T(n) = \begin{cases} a & \Leftarrow n < 1 \\ k + T\left(\frac{n}{2}\right) & \Leftarrow n \geq 1 \end{cases}$$

| i | |
|---|---|
| 0 | $T(N) - k$ |
| 1 | $T\left(\frac{N}{2}\right) - k$ |
| 2 | $T\left(\frac{N}{4}\right) - k$ |
| 3 | $T\left(\frac{N}{8}\right) - k$ |
| $i$ | $\boxed{T\left(\frac{N}{2^i}\right) - k}$ |
| $u$ | $T(1) - k$ |
| N | $T(0) - a$ |

$T(0) = a$

$\frac{1}{2} = 0.5$ $= 0$ $\quad T(1) = k + a$

$T(2) = k + k + a = 2k + a$

$T(4) = k + 2k + a = 3k + a$

$T(8) = k + 3k + a = 4k + a$

$T(16) = k + 4k + a = 5k + a$

$\vdots$

$$T(n) = \sum_{i=0}^{u} k + a = \sum_{i=0}^{\log_2 N} k + a = (*)$$

$1 = \frac{N}{2^u} \Leftrightarrow 2^u = N$

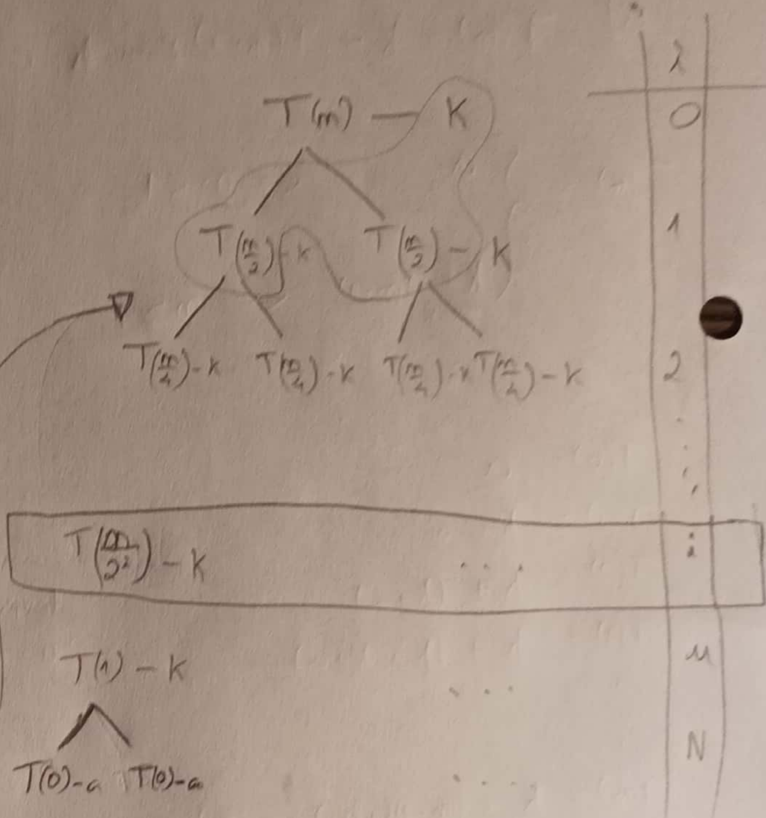
$\Leftrightarrow u = \log_2 N$

$$\sum_{i=0}^{\log_2 N} k + a \overset{(+)}{=} k \sum_{i=0}^{\log_2 N} 1 + a = \underline{\underline{k(\log_2 N + 1) + a}}$$

$$= k(\log_2 N) + k + a = \underline{\underline{\Theta(\log_2 N)}}$$

c) $T(n) = k + 2 * T(\frac{n}{2})$ com $k$ constante

$$T(n) = \begin{cases} a & \Leftarrow n < 1 \\ k + 2 * T(\frac{n}{2}) & \Leftarrow n \geq 1 \end{cases}$$




$T(0) = a$

$T(1) = k + 2a$

$T(2) = k + 2(k + 2a) = 3k + 4a$

$T(4) = k + 2(3k + 4a) = 7k + 8a$

$\vdots$

$T(n) = (2n-1)k + 2na$ ??

por intuição, vamos desenhar a árvore da recorrência

tava certa a minha intuição ✓

$$T(n) = \sum_{i=0}^{u} 2^i k + 2 \times 2^u \times a = k \sum_{i=0}^{\log_2 n} 2^i + 2 \times 2^{\log_2 n} \times a$$

$$= \underline{\underline{k \times (2n-1) + 2na}} = \Theta(n)$$

$2^i$ folhas em cada nível

logo, se em $u$ temos $2^u$ folhas em $N = u + 1$ nível temos $2^{u+1}$ folhas

Soma das k (logo em $i$ nº por nível)

$i=0$ $1k = 2^0 k$

$i=1$ $2k = 2^1 k$

$i=2$ $4k = 2^2 k$

$i=3$ $8k = 2^3 k$

$\vdots$

$i=i$ $2^i k$

$i=u$ $2^u k$

$i=N$ $2^{u+1} k = 2^{u+1} a$ pois são a em k

$$\sum_{i=0}^{\log_2 N} 2^i = \frac{2^{\log_2 N + 1} - 1}{2 - 1} = 2 \cdot 2^{\log_2 N} - 1 = 2N - 1$$

$1 = \left(\frac{n}{2^u}\right) \Leftrightarrow 2^u = n$

$\Leftrightarrow u = \log_2 n$

d) $T(n) = n + T(n-1)$

$T(0) = a$

$T(1) = 1 + a$ $\quad )+1$

$T(2) = 2 + 1 + a = 3 + a$ $\quad )+2$

$T(3) = 3 + 3 + a = 6 + a$ $\quad )+3$

$T(4) = 4 + 6 + a = 10 + a$ $\quad )+4$

$\vdots$

$T(n) = ?$

| | | $i$ |
|---|---|---|
| $T(n)$ | $n$ | $0$ |
| $T(n-1)$ | $n-1$ | $1$ |
| $T(n-2)$ | $n-2$ | $2$ |
| $T(n-3)$ | $n-3$ | $3$ |
| $\vdots$ | | |
| $T(n-i)$ | $n-i$ | $i$ |
| $\vdots$ | | $u$ |
| $T(1)$ | $1$ | |
| $T(0)$ | $a$ | $N$ |

$1 = n - u$

$\Leftrightarrow u = n - 1$

$$T(n) = \sum_{i=0}^{u} n - i + a$$

$$= n\sum_{i=0}^{n-1} 1 - \sum_{i=0}^{n-1} i + a$$

$$= n\,n - \frac{(n-\cancel{1}+\cancel{1})(n-1+0)}{2} + a$$

$$= n^2 - \frac{n(n-1)}{2} + a \quad \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + a$$

$$= n^2 - \frac{n^2 - n}{2} + a = \Theta(n^2)$$

e) $T(n) = n + T\left(\frac{n}{2}\right)$

$T(0) = a$

$T(1) = 1 + a$

$T(2) = 2 + 1 + a = 3 + a$

$T(4) = 4 + 3 + a = 7 + a$

$\vdots$

$T(n) = \underbrace{2n - 1 + a}$

intuição, vamos verificar

$$\begin{array}{ll|c}
 & & i \\
T(n) & - \; n & 0 \\
T\left(\frac{n}{2}\right) & - \; \frac{n}{2} & 1 \\
T\left(\frac{n}{4}\right) & - \; \frac{n}{4} & 2 \\
T\left(\frac{n}{8}\right) & & 3 \\
T\left(\frac{n}{2^i}\right) & & i \\
T(1) & - \; 1 & u \\
T(0) & - \; a & N
\end{array}$$

$$T(n) = \sum_{i=0}^{u} \frac{n}{2^i} + a$$

$$= n \sum_{i=0}^{\log_2 n} \frac{1}{2^i} + a$$

?? n sei se está certo

$$= n\left(2 + \frac{1}{n}\right) + a$$

$$= 2n + 1 + a = \Theta(n)$$

$1 = \frac{n}{2^u} \iff 2^u = n$

$\iff u = \log_2 n$

$$\underbrace{\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} \cdots + \frac{1}{n}}_{\simeq 2} + \frac{1}{n}$$

$\frac{1}{2^0} = 1$

f) $T(n) = n + 2 * T\left(\frac{n}{2}\right)$

$T(0) = a$

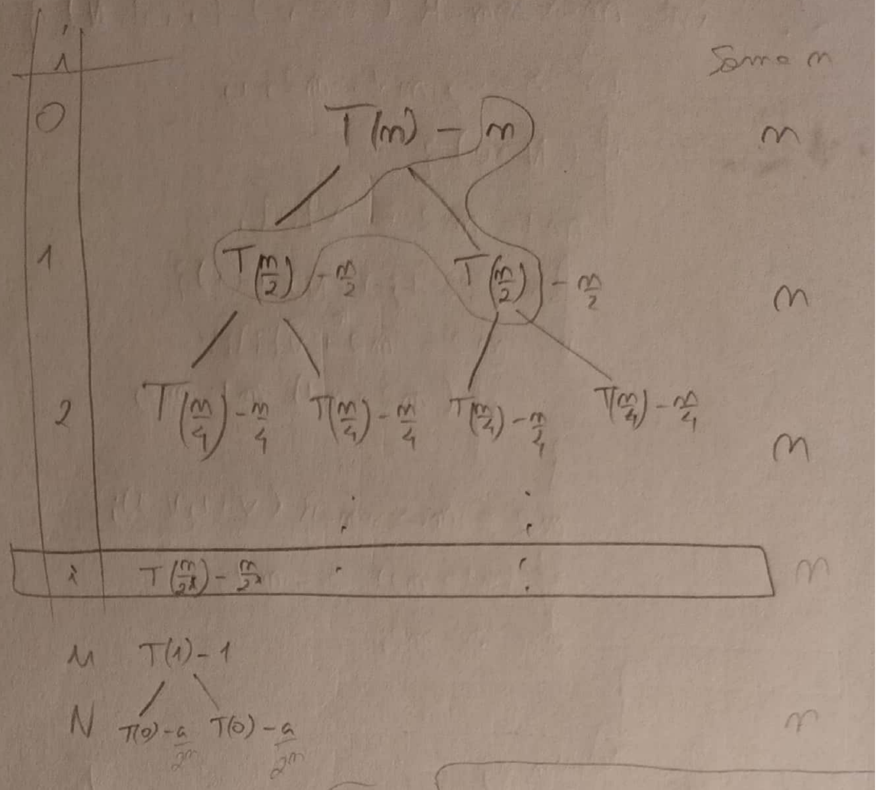
$T(1) = 1 + 2a$

$T(2) = 2 + 2 + 4a = 4 + 4a$

$T(4) = 4 + 8 + 8a = 12 + 8a$

$T(8) = 8 + 24 + 16a = 32 + 16a$

$\vdots$




$2^n$ vezes

$2^n \times \frac{a}{2^n}$

$1 = \frac{n}{2^u} \iff 2^u = n$

$\iff u = \log_2 n$

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\log_2 n} n + a$$

$$= n \sum_{i=0}^{\log_2 n} 1 + a$$

$$= n(\log_2 n + 1) + a = \Theta(n \log_2 n)$$

$$\left(= n\log_2 n + n + a\right)$$

2.
```
int maxSomaR (int v[], int N) {
    int r=0, m1, m2, i;
    if (N>0) {
        m1 = m2 = v[0];                (1)
        for (i=1; i<N; i++) {
            m2 = m2 + v[i];            (N-1)
            if (m2 > m1) m1 = m2;
        }
        m2 = maxSomaR (v+1, N-1);
        if (m1 > m2) r = m1;
        else r = m2;
    }
    return r;
}
```

Não tem PC ou MC logo só existe 1 possível recorrência do algoritmo

nº acessos array argumento

Como recorrência

$$T_{maxSoma}(N) = \begin{cases} 0 & \Leftarrow N == 0 \\ N + T_{maxSoma}(N-1) & \Leftarrow N > 0 \end{cases}$$

| | |
|---|---|
| $T_{maxSoma}(N) - N$ | 0 |
| $T_{maxSoma}(N-1) - N-1$ | 1 |
| $T_{maxSoma}(N-2) - N-2$ | 2 |
| ⋮ | ⋮ |
| $\boxed{T_{maxSoma}(N-i) - N-i}$ | $i$ |
| $T(1) - 1$ | $u$ |
| $T(0) - 0$ | $N$ |

$1 = N - u$

$\Leftrightarrow u = N-1$

$$T(N) = \sum_{i=0}^{u} N-i + 0$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1} N-i = \sum_{i=0}^{N-1} N - \sum_{i=0}^{N-1} i = N \sum_{i=0}^{N-1} 1 - \frac{(N-1)N}{2}$$

$$= N(N-1-0+1) - \frac{N^2-N}{2} = N^2 - \frac{N^2-N}{2} = \frac{N^2-N}{2} = \Theta(N^2)$$

3.
```
void Hanoi (int nDiscos, int esquerda, int direita, int meio) {
    if (nDiscos>0) {
        Hanoi (nDiscos-1, esquerda, meio, direita);
        printf ("mover disco de %d para %d, esquerda, direita);
        Hanoi (nDiscos-1, meio, direita, esquerda);
    }
}
```

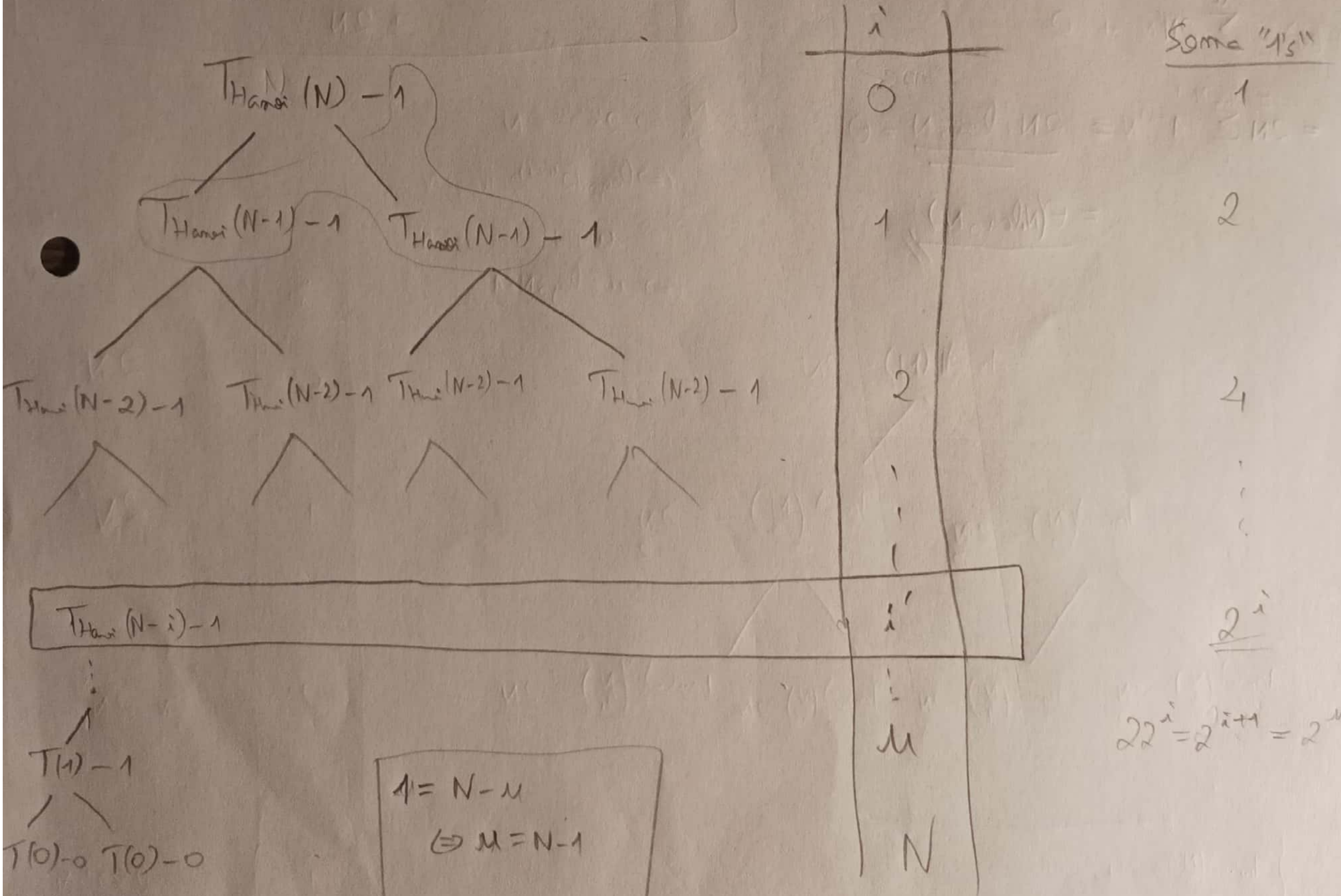
n.º linhas impressas → printf

Soma "0's" última linha árvore dá 0

$$T_{Hanoi}(N) = \begin{cases} 0 & \Leftarrow N==0 \\ 1 + T_{Hanoi}(N-1) + T_{Hanoi}(N-1) & \Leftarrow N>0 \end{cases}$$

$$T_{Hanoi}(N) = \sum_{i=0}^{u} 2^i + \overset{?}{0}$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1} 2^i = \frac{1-2^{N-1+1}}{1-2} = -(1-2^N) = \underline{\underline{2^N-1}} = \underset{\text{exponencial}}{\Theta(2^N)}$$




$2 \cdot 2^i = 2^{i+1} = 2^u$

$1 = N - u$

$\Leftrightarrow u = N-1$

4.

```
void msort(int v[], int N){
    int m = N/2;
    if (N>1){
        msort(v, m);
        msort(v+m, N-m);
        mergeH(v, N);
    }
}
```

em função do tamanho do vetor argumento

rel. recorrência do tempo de execução do msort.

$$\boxed{Tmerge(N) = 2 * N}$$

$$Tmsort(N) = \begin{cases} 0 & \Leftarrow N == 1 \\ Tmsort\left(\frac{N}{2}\right) + Tmsort\left(N - \frac{N}{2}\right) + Tmerge(N) & \Leftarrow N > 1 \end{cases}$$

$$\boxed{TmSort(N) = \begin{cases} 0 & \Leftarrow N == 1 \\ TmSort\left(\frac{N}{2}\right) + TmSort\left(\frac{N}{2}\right) + 2N & \Leftarrow N > 1 \end{cases}}$$

$T(N) = 2N(\log_2 N - 1) = \Theta(N \log_2 N)$

$$T(N) = \sum_{i=0}^{u} 2N + 0$$

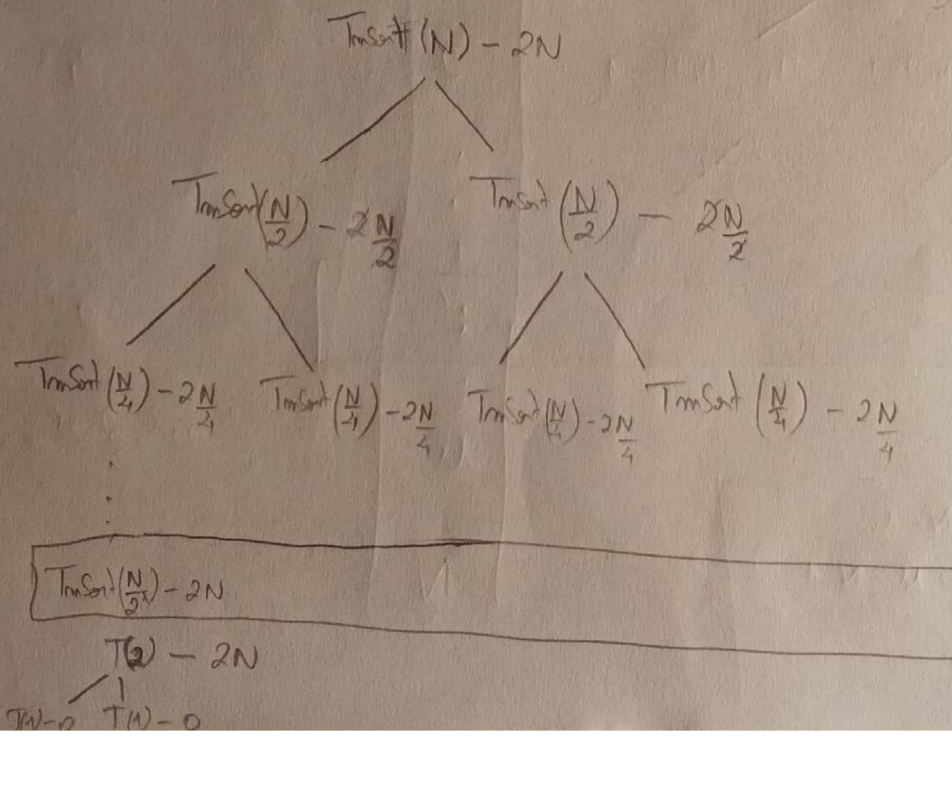
$$= 2N \sum_{i=0}^{\log_2 N - 1} 1 = 2N \log_2 N = \Theta(N \log_2 N)$$

$2 = \frac{N}{2^u} \Leftrightarrow 2 \times 2^u = N$

$\Leftrightarrow \log_2(2^{u+1}) = \log_2 N$

$\Leftrightarrow u + 1 = \log_2 N$

$\Leftrightarrow u = \log_2 N - 1$

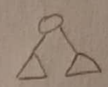



| i | Soma 2N |
|---|---|
| 0 | $2N$ |
| 1 | $2N$ |
| 2 | $\frac{8}{4}N = 2N$ |
| ⋮ | ⋮ |
| i | |
| u | $2N$ |

5.
```
int altura (ABin a){
    int r=0;
    if (a!=NULL){
        r = 1 + max (altura(a->esq),
                     altura(a->dir));
    }
    return r;
}
```

nº chamadas da função max (por exemplo)

2 casos → ① Árvores equilibradas



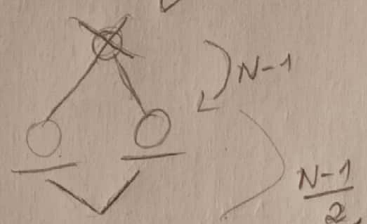
→ ② Árvores Lista

$T_{altura}(N) = \Theta(N)$ //

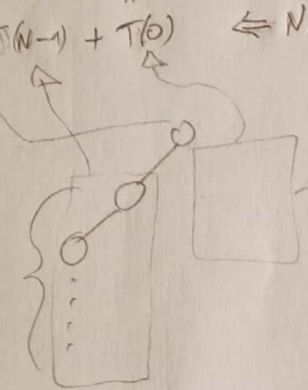
nº nodos árvore

① $T_{altura}(N) = \begin{cases} 0 & \Leftarrow N==0 \\ 1 + 2 * T_{altura}\left(\frac{N-1}{2}\right) & \Leftarrow N>0 \end{cases}$

igual à alínea c) do exercício 1. (daí sabemos que é $\Theta(N)$)




② $T_{altura}(N) = \begin{cases} 0 & \Leftarrow N==0 \\ 1 + T(N-1) + T(0) & \Leftarrow N>0 \end{cases}$




| | i |
|---|---|
| T(N) - 1 | 0 |
| T(N-1) - 1 | 1 |
| T(N-2) - 1 | 2 |
| ⋮ | ⋮ |
| $\boxed{T(N-r)}$ | r |
| | u |
| T(1) - 1 | |
| T(0) - 0 | N |

$1 = N - u$
$\Leftrightarrow u = N-1$

$T_{altura}(N) = \sum_{i=0}^{u} 1 + 0 = \sum_{i=0}^{N-1} 1 = N-1-0+1 = \underline{N} = \Theta(N)$ //