

Trabajo practico 1

16 de mayo de 2024

Algoritmos y estructuras de datos

Grupo: LEQNFVIO

Integrante	LU	Correo electrónico
Festa, Bruno Alejandro	690/23	brunofesta2004@gmail.com
Tocto, Anthony Armando	342/22	armando.ddvv@gmail.com
Barg Oyanguren, Ciro	597/23	cirobargoyanguren@gmail.com
Zapata, Juan Francisco	1191/23	juanfzapata123@gmail.com

1. Ejercicio 1

```

proc redistribucionDeLosFrutos (in recursos:seq(R), in cooperan:seq(Bool)) : seq(R)

  requiere {|cooperan| = |recursos|}

  requiere {(∀i : Z)(0 ≤ i < |recursos| →L recursos[i] ≥ 0)}

  asegura {(∃recursosFondoComun : seq(R))(esRecursosDespuesDelFondoComun
    (cooperan, recursos, recursosFondoComun) ∧ res = recursosFondoComun)}

  pred esRecursosDespuesDelFondoComun ( recursosFondoComun : seq(R), cooperan : seq(Bool), recursos : seq(R)) {
    (∀i : Z)(0 ≤ i < |cooperan| →L (cooperan[i] = true ∧ recursosFondoComun[i] =  $\frac{\text{fondoComun}(\text{recursos}, \text{cooperan})}{|\text{recursos}|}$ ) ∨
      (cooperan[i] = false ∧ recursosFondoComun[i] = recursos[i] +  $\frac{\text{fondoComun}(\text{recursos}, \text{cooperan})}{|\text{recursos}|}$ ))
  }

  aux fondoComun (In recursos : seq(R), In cooperan : seq(Bool)) : R =
     $\sum_{i=0}^{|\text{recursos}|-1}$  if (cooperan[i] = true) then recursos[i] else 0 fi ;

```

2. Ejercicio 2

```

proc trayectoriaDeLosFrutosIndividualesALargoPlazo (inout trayectoria : seq(R), in cooperan:seq(Bool),
in apuestas : seq(seq(R)), in pagos : seq(seq(R)), in eventos : seq(seq(R))) :

  requiere {|cooperan| = |trayectoria| = |eventos| = |pagos| = |apuestas|}

  requiere {(∀i : Z)(0 ≤ i < |apuestas| →L  $\sum_{k=0}^{|\text{apuestas}[i]|}$  apuestas[i][k] = 1)}

  requiere {(∀i, e : Z)(0 ≤ i < |pagos| ∧ 0 ≤ e < |pagos[i]| →L pagos[i][e] > 0)}

  requiere {(∀i, e : Z)(0 ≤ i < |trayectoria| ∧ 0 ≤ e < |trayectoria[i]| →L trayectoria[i][e] > 0)}

  asegura {(∀evento : Z)(0 < evento < |eventos| →L (∃recursosActualizados : seq(R))(esRecursosActualizados
    (recursosActualizados, cooperan, trayectoria[evento - 1], pagos, apuestas, evento) ∧
    trayectoria[evento] = recursosActualizados))}

  pred esRecursosActualizados (listaAVerificar : seq(R), cooperan : seq(Bool), recursosEventoAnterior : seq(R),
    pagos : seq(seq(R)), apuestas : seq(seq(R)), evento : N) {
    (∃recursosLuegoDeApuestas : seq(R))(|recursosLuegoDeApuestas| = |recursosEventoAnterior|) ∧L
    (esRecursosLuegoDeApuestas(recursosLuegoDeApuestas, recursosEventoAnterior, pagos, apuestas, evento)) ∧
    (esRecursosDespuesDelFondoComun(listaAVerificar, cooperan, recursosLuegoDeApuestas))
  }

  pred esRecursosLuegoDeApuestas (listaAVerificar : seq(R), recursosEventoAnterior : seq(R), pagos : seq(seq(R)),
    apuestas : seq(seq(R)), evento : N) {
    (∀i : Z)(0 ≤ i < |recursosEventoAnterior| →L listaAVerificar[i] = recursosEventoAnterior[i] *
      pagos[eventos[evento]][individuo][individuo] * apuestas[eventos[evento]][individuo][individuo])
  }

```

3. Ejercicio 3

```

proc trayectoriaExtrañaEscalera (in trayectoria: seq(R)) : Bool
  requiere {|T| ≥ 2}
  requiere {res = false}
  asegura {Res = true ⇔ (∃j : Z)((0 ≤ j < |T|) ∧L ((|T| ≤ 2) ∧ Distintos(T)) ∨
    ((j = 0) ∧ primerElemEsMaximo(T) ∧ esUnicoMaximoLocal(T, j)) ∨
    ((j = |T| - 1) ∧ ultimoElemEsMaximo(T) ∧ esUnicoMaximoLocal(T, j)) ∨
    (esMaximoLocal(T, j) ∧ esUnicoMaximoLocal(T, j)))}

```

```

pred primerElemEsMaximo (T:seq⟨ℝ⟩) {
  T[0] > T[1]
}
pred ultimoElemEsMaximo (T:seq⟨ℝ⟩) {
  T[|T| - 1] > T[|T| - 2]
}
pred esMaximoLocal (T:seq⟨ℝ⟩, j:ℤ) {
  T[j - 1] < T[j] ∧ T[j] > T[j + 1]
}
pred esUnicoMaximoLocal (T:seq⟨ℝ⟩, j:ℤ) {
  ¬(∃i : ℤ)((1 ≤ i < |T| - 1) ∧L (i ≠ j) ∧ esMaximoLocal(T, i))
}
pred distintos (T:seq⟨ℝ⟩) {
  T[0] ≠ T[1]
}

```

4. Ejercicio 4

```

proc individuoDecideSiCooperar0No (in individuo : ℕ, in recursos : seq⟨ℝ⟩, inout cooperan : seq⟨Bool⟩, in apuestas : seq⟨ℝ⟩,
in pagos : seq⟨seq⟨ℝ⟩⟩, in eventos : seq⟨seq⟨ℝ⟩⟩)

```

```

  requiere {(∀i : ℤ)(0 ≤ i < |apuestas| →L ∑k=0|apuestas[i]| apuestas[i][k] = 1)}

  requiere {|cooperan| = |recursos| = |eventos| = |pagos| = |apuestas|}

  requiere {0 ≤ individuo < |recursos|}

  requiere {(∀i, e : ℤ)(0 ≤ i < |pagos| ∧ 0 ≤ e < |pagos[i]| →L pagos[i][e] > 0)}

  requiere {(∀i : ℤ)(0 ≤ i < |recursos| →L recursos[i] ≥ 0)}

  requiere {(cooperan0 = cooperan)}

  asegura {(∃trayectoriaSiCoopera : seq⟨seq⟨ℝ⟩⟩)(esTrayectoriaValida(trayectoriaSiCoopera,
setAt(cooperan, individuo, true), pagos, apuestas, |eventos|) ∧
(∃trayectoriaSiNoCoopera : seq⟨seq⟨ℝ⟩⟩)(esTrayectoriaValida(trayectoriaSiNoCoopera,
setAt(cooperan, individuo, false), pagos, apuestas, |eventos|))
∧L if trayectoriaSiCoopera[|eventos|][individuo] ≥ trayectoriaSiNoCoopera[|eventos|][individuo] then cooperan =
setAt(cooperan0, individuo, true) else cooperan = setAt(cooperan0, individuo, false) fi)}

  pred esTrayectoriaValida (trayectoriaAVerificar:seq⟨seq⟨ℝ⟩⟩, cooperan : seq⟨bool⟩, pagos : seq⟨seq⟨ℝ⟩⟩, apuestas
: seq⟨seq⟨ℝ⟩⟩, evento : ℕ) {
    (|trayectoriaAVerificar| = |cooperan| ∧ (∀e : ℤ)(0 ≤ e < |cooperan| →L |trayectoriaAVerificar[e]| =
|recursos|)
    ∧L (∀indiceEventos : ℤ)(0 < indiceEvento < evento →L esListaDeRecursosActualizada
(trayectoriaAVerificar[indiceEvento], cooperan, trayectoriaAVerificar[indiceEvento-1], pagos, apuestas, evento))
  }

```

5. Ejercicio 5

```

proc individuoActualizaSuApuesta (in individuo : ℕ, in recursos : seq⟨ℝ⟩, in cooperan : seq⟨Bool⟩, inout apuestas : seq⟨ℝ⟩,
in pagos : seq⟨seq⟨ℝ⟩⟩, in eventos : seq⟨seq⟨ℝ⟩⟩)

```

```

  requiere {(∀i : ℤ)(0 ≤ i < |apuestas| →L ∑k=0|apuestas[i]| apuestas[i][k] = 1)}

  requiere {|cooperan| = |recursos| = |eventos| = |pagos| = |apuestas|}

  requiere {0 ≤ individuo < |recursos|}

  requiere {(∀i, e : ℤ)(0 ≤ i < |pagos| ∧ 0 ≤ e < |pagos[i]| →L pagos[i][e] > 0)}

```

requiere $\{(\forall i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |\text{recursos}| \rightarrow_L \text{recursos}[i] \geq 0)\}$

requiere $\{\text{apuestas0} = \text{apuestas}\}$

asegura $\{(\exists \text{apuesta1} : \text{seq}(\mathbb{R}))(\text{esApuestaValida}(\text{apuesta1}, \text{individuo}, \text{apuestas})$
 $\wedge (\forall \text{apuesta2} : \text{seq}(\mathbb{R}))(\text{esApuestaValida}(\text{apuesta2}, \text{individuo}, \text{apuestas}) \rightarrow_L$
 $\neg \text{esMejorApuesta}(\text{apuesta2}, \text{apuesta1}, \text{individuo}, \text{eventos}, \text{pagos}, \text{cooperan}, \text{apuestas}) \wedge$
 $\text{apuestas} = \text{setAt}(\text{apuestas0}, \text{individuo}, \text{apuestas1}))\}$

pred **esMejorApuesta** ($\text{apuesta2} : \text{seq}(\mathbb{R})$, $\text{apuesta1} : \text{seq}(\mathbb{R})$, $\text{individuo} : \mathbb{N}$, $\text{eventos} : \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{R}))$, $\text{pagos} : \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{R}))$,
 $\text{cooperan} : \text{seq}(\text{bool})$, $\text{apuestas} : \text{seq}(\text{seq}(\mathbb{R}))$) $\{$
 $(\exists \text{trayectoria2})(\text{esTrayectoriaValida}(\text{trayectoria2}, \text{cooperan}, \text{pagos}, \text{setAt}(\text{apuestas}, \text{individuo}, \text{apuestas2}), |\text{eventos}|)$
 $(\exists \text{trayectoria1})(\text{esTrayectoriaValida}(\text{trayectoria1}, \text{cooperan}, \text{pagos}, \text{setAt}(\text{apuestas}, \text{individuo}, \text{apuestas1}), |\text{eventos}|)$
 $\wedge_L \text{trayectoria1}[|\text{eventos}|][\text{individuo}] \leq \text{trayectoria2}[|\text{eventos}|][\text{individuo}])$
 $\}$

6. Ejercicio 6

■ $P_c \equiv \text{res} = \text{recursos} \wedge i = 0$

■ $Q_c \equiv \text{res} = \text{recurso}(\text{apuesta}_c * \text{pago}_c)^{\text{apariciones}(\text{eventos}, T)} * (\text{apuesta}_s * \text{pago}_s)^{\text{apariciones}(\text{eventos}, F)}$

■ $I \equiv 0 \leq i \leq |\text{eventos}| \wedge \text{res} = \text{recursos} * \prod_{j=0}^{i-1} \text{if } (\text{eventos}[j]) \text{ then } (\text{apuesta}_c * \text{pago}_c) \text{ else } (\text{apuesta}_s * \text{pago}_s) \text{ fi}$

■ $B \equiv i < |\text{eventos}|$

■ $fv = |\text{eventos}| - i$

■ $\{\neg B \wedge I\} \rightarrow Q_c$

$\neg(i < |\text{eventos}|) \wedge 0 \leq i \leq |\text{eventos}| \wedge \text{res} = \text{recursos} * \prod_{j=0}^{i-1} \text{if } (\text{eventos}[j]) \text{ then } (\text{apuesta}_c * \text{pago}_c) \text{ else } (\text{apuesta}_s * \text{pago}_s) \text{ fi} \equiv$
 $|\text{eventos}| \leq i \wedge i \leq |\text{eventos}| \wedge \text{res} = \text{recursos} * \prod_{j=0}^{|\text{eventos}|-1} \text{if } (\text{eventos}[j]) \text{ then } (\text{apuesta}_c * \text{pago}_c) \text{ else } (\text{apuesta}_s * \text{pago}_s) \text{ fi} \equiv$
 $\text{res} = \text{recurso}(\text{apuesta}_c * \text{pago}_c)^{\text{apariciones}(\text{eventos}, T)} * (\text{apuesta}_s * \text{pago}_s)^{\text{apariciones}(\text{eventos}, F)} \equiv Q_c$

■ $P_c \rightarrow I$

Como por P_c se tiene que $i=0$ en el invariante queda que

$\text{res} = \text{recursos} * \prod_{j=0}^{-1} \text{if } (\text{eventos}[j]) \text{ then } (\text{apuesta}_c * \text{pago}_c) \text{ else } (\text{apuesta}_s * \text{pago}_s) \text{ fi} = \text{recursos}$
 queda que $\text{res} = \text{recursos}$

■ $\{B \wedge I\} S \{I\} \equiv (B \wedge I) \rightarrow wp(S, I)$

Donde $S \equiv \text{if } \text{eventos}[i] \text{ then}$

$S_1 \quad \text{res} := \text{res} * \text{apuesta}.c * \text{pago}.c$

else

$S_2 \quad \text{res} := \text{res} * \text{apuesta}.s * \text{pago}.s$

endif

$S_3 \quad i := i+1$

$wp(S, I) \equiv wp(\text{if } \text{eventos}[i] \text{ Then } \text{res} = \text{res} * \text{apuesta}.c * \text{pago}.c \text{ else } \text{res} * \text{apuesta}.s * \text{pago}.s, wp(i := i + 1, I))$

$wp(S_3, I) \equiv \text{def}(i+1) \wedge_L 0 \leq i+1 \leq |\text{eventos}| \wedge \text{res} = \text{recursos} * \prod_{j=0}^{i+1-1} \text{if } (\text{eventos}[j]) \text{ then } (\text{apuesta}_c * \text{pago}_c) \text{ else } (\text{apuesta}_s * \text{pago}_s)$

$wp(S, I) \equiv \text{def}(\text{eventos}[i]) \wedge_L ((\text{eventos}[i] = \text{True} \wedge wp(S_1, wp(S_3, I))) \vee (\text{eventos}[i] = \text{False} \wedge wp(S_2, wp(S_3, I))))$

$wp(S, I) \equiv 0 \leq i < |\text{eventos}| \wedge_L ((\text{eventos}[i] = \text{True} \wedge wp(S_1, wp(S_3, I))) \vee (\text{eventos}[i] = \text{False} \wedge wp(S_2, wp(S_3, I))))$

$$\begin{aligned}
wp(S_1, wp(S_3, I)) &\equiv def(res * apuesta.c * pago.c) \wedge_L 0 \leq i + 1 \leq |eventos| \wedge \\
res * apuesta.c * pago.c &= recursos * \prod_{j=0}^i \text{if } (eventos[j]) \text{ then } (apuesta_c * pago_c) \text{ else } (apuesta_s * pago_s) \text{ fi} \equiv \\
0 \leq i + 1 \leq |eventos| \wedge \\
res * apuesta.c * pago.c &= recursos * \prod_{j=0}^{i-1} \text{if } (eventos[j]) \text{ then } (apuesta_c * pago_c) \text{ else } (apuesta_s * pago_s) \text{ fi} * (apuesta.c * pago.c) \\
&\equiv \\
0 \leq i < |eventos| \wedge \\
res &= recursos * \prod_{j=0}^{i-1} \text{if } (eventos[j]) \text{ then } (apuesta_c * pago_c) \text{ else } (apuesta_s * pago_s) \text{ fi} \\
\\
wp(S_2, wp(S_3, I)) &\equiv def(res * apuesta.s * pago.s) \wedge_L 0 \leq i + 1 \leq |eventos| \wedge \\
res * apuesta.s * pago.s &= recursos * \prod_{j=0}^i \text{if } (eventos[j]) \text{ then } (apuesta_c * pago_c) \text{ else } (apuesta_s * pago_s) \text{ fi} \equiv \\
0 \leq i + 1 \leq |eventos| \wedge \\
res * apuesta.s * pago.s &= recursos * \prod_{j=0}^{i-1} \text{if } (eventos[j]) \text{ then } (apuesta_c * pago_c) \text{ else } (apuesta_s * pago_s) \text{ fi} * (apuesta.s * pago.s) \\
&\equiv \\
0 \leq i < |eventos| \wedge \\
res &= recursos * \prod_{j=0}^{i-1} \text{if } (eventos[j]) \text{ then } (apuesta_c * pago_c) \text{ else } (apuesta_s * pago_s) \text{ fi}
\end{aligned}$$

Ahora calculemos $I \wedge B$ y veamos si implica lo de arriba:

$$\begin{aligned}
I \wedge B &\equiv \\
0 \leq i < |eventos| \wedge res &= recursos * \prod_{j=0}^{i-1} \text{if } (eventos[j]) \text{ then } (apuesta_c * pago_c) \text{ else } (apuesta_s * pago_s) \text{ fi} \equiv \\
0 \leq i < |eventos| \wedge ((eventos[i] = True \wedge res &= recursos * \prod_{j=0}^{i-1} \text{if } (eventos[j]) \text{ then } (apuesta_c * pago_c) \text{ else } (apuesta_s * pago_s) \text{ fi}) \\
\vee (eventos[i] = False \wedge res &= recursos * \prod_{j=0}^{i-1} \text{if } (eventos[j]) \text{ then } (apuesta_c * pago_c) \text{ else } (apuesta_s * pago_s) \text{ fi}))
\end{aligned}$$

Entonces $(I \wedge B) \longrightarrow wp(S, I)$

$$\blacksquare \{I \wedge B \wedge v_0 = fv\} S \{fv < v_0\} \equiv (I \wedge B \wedge v_0 = fv) \longrightarrow wp(S, fv < v_0)$$

Definimos la función variante como: $fv = |eventos| - i$

$$\begin{aligned}
wp(S, fv < v_0) &\equiv wp(\text{if } eventos[i] \text{ Then } res = res * apuesta.c * pago.c \text{ else } res * apuesta.s * pago.s, wp(i := i + 1, |eventos| - i < v_0)) \\
wp(S, fv < v_0) &\equiv wp(\text{if } eventos[i] \text{ Then } res = res * apuesta.c * pago.c \text{ else } res * apuesta.s * pago.s, |eventos| - (i + 1) < v_0)
\end{aligned}$$

$$wp(S, fv < v_0) \equiv def(eventos[i]) \wedge_L ((eventos[i] = True \wedge wp(S_1, |eventos| - i - 1 < v_0)) \vee (eventos[i] = False \wedge wp(S_2, |eventos| - i - 1 < v_0)))$$

$$wp(S_2, |eventos| - 1 - i < v_0) \equiv def(res * apuesta.s * pago.s) \wedge_L |eventos| - 1 - i < v_0 \equiv |eventos| - 1 - i < v_0$$

$$wp(S_1, |eventos| - 1 - i < v_0) \equiv def(res * apuesta.c * pago.c) \wedge_L |eventos| - 1 - i < v_0 \equiv |eventos| - 1 - i < v_0$$

$$wp(S, fv < v_0) \equiv 0 \leq i < |eventos| \wedge_L ((eventos[i] = True \wedge |eventos| - 1 - i < v_0) \vee (eventos[i] = False \wedge |eventos| - 1 - i < v_0))$$

$$wp(S, fv < v_0) \equiv 0 \leq i < |eventos| \wedge_L |eventos| - 1 - i < v_0$$

Ahora calculemos $I \wedge B \wedge v_0 = |eventos| - i$ y veamos si implica lo de arriba:

A partir del Invariante tenemos que $0 \leq i \leq |eventos| \longrightarrow 0 \leq i < |eventos|$

Luego usando que $v_0 = |eventos| - i$ es verdadero se puede llegar a que $v_0 - 1 < v_0$ Lo cual es verdadero.

Entonces $(I \wedge B \wedge v_0 = fv) \longrightarrow wp(S, fv < v_0)$

$$\blacksquare I \wedge fv \leq 0 \longrightarrow \neg B$$

A partir de que $fv \leq 0 \equiv |eventos| - i \leq 0 \equiv |eventos| \leq i \equiv \neg B$

Hasta aqui se tiene la correctitud del ciclo, para tener la correctitud del programa

veremos si $Pre \longrightarrow wp(res := recursos, wp(i := 0, P_c))$

$$Pre \equiv apuesta_c + apuesta_s = 1 \wedge pago_c > 0 \wedge pago_s > 0 \wedge apuesta_s > 0 \wedge apuesta_c > 0 \wedge recursos > 0$$

$$\begin{aligned}
wp(res := recursos, wp(i := 0, P_c)) &\equiv wp(res := recursos, def(i) \wedge_L res = recursos \wedge 0 = 0) \equiv \\
def(recursos) \wedge_L recursos &= recursos \equiv True.
\end{aligned}$$

$Pre \longrightarrow True$