



Trabajo practico 1

21 de abril de 2024

Algoritmos y estructuras de datos

Grupo: LEQNFVIO

Integrante	LU	Correo electrónico
Festa, Bruno Alejandro	690/23	brunofesta2004@gmail.com
Tocto, Anthony Armando	342/22	armando.ddvv@gmail.com
Barg Oyanguren, Ciro	597/23	cirobargoyanguren@gmail.com
Zapata, Juan Francisco	1191/23	juanfzapata123@gmail.com



Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)

Intendente Güiraldes 2610 - C1428EGA

Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina

Tel/Fax: (++54 +11) 4576-3300

<http://www.exactas.uba.ar>

1. Ejercicio 1

```

proc redistribucionDeLosFrutos (in recursos:seq(R), in cooperan:seq(Bool)) : R
  requiere {|cooperan| = |recursos|}
  requiere {(∀i : Z)(0 ≤ i < |recursos| →L recursos[i] ≥ 0)}
  asegura {(∃L : seq(R))(esDistribucionDeRecursos(recursos, cooperan, L) ∧L res = L)}

  pred esDistribucionDeRecursos (cooperan : seq(Bool), recursos : seq(R), L : seq(R)) {
    (∀i : Z)(0 ≤ i < |L| →L if cooperan[i] = true then L[i] =  $\frac{\text{fondoComun}(\text{recursos}, \text{cooperan})}{|\text{recursos}|}$ 
    else L[i] =  $\frac{\text{fondoComun}(\text{recursos}, \text{cooperan})}{|\text{recursos}|} + \text{recursos}[i]$ ) fi
  }

  aux fondoComun (In recursos : R, In cooperan : Bool) : R =  $\sum_{i=0}^{|\text{recursos}|-1} \text{if } (\text{cooperan}[i] = \text{true}) \text{ then } \text{recursos}[i] \text{ else } 0 \text{ fi ;}$ 

```

2. Ejercicio 2

```

proc proc trayectoriaDeLosFrutosIndividualesALargoPlazo (inout trayectoria : seq(R), in cooperan:seq(Bool),
in apuestas : seq(seq(R)), in pagos : seq(seq(R)), in eventos : seq(seq(R))) :

  requiere {|cooperan| = |trayectoria| = |eventos| = |pagos| = |apuestas|}

  requiere {(∀i : Z)(0 ≤ i < |apuestas| →L  $\sum_{k=0}^{|\text{apuestas}[i]|} \text{apuestas}[i][k] = 1$ )}}

  requiere {(∀i, e : Z)(0 ≤ i < |pagos| ∧ 0 ≤ e < |pagos[i]| →L pagos[i][e] > 0)}

  requiere {(∀i, e : Z)(0 ≤ i < |trayectoria| ∧ 0 ≤ e < |trayectoria[i]| →L trayectoria[i][e] > 0)}

  asegura {(∀individuo, nroDeEvento : Z)(0 ≤ individuo < |recursos| ∧ 0 < nroDeEvento
  < |cooperan| →L (∃Lista : seq(R))(esListaDespuesDeDistribuir(individuo, nroDeEvento, pagos, apuestas, Lista
  , trayectoria, cooperan) ∧ trayectoria[individuo][nroDeEvento] = Lista[individuo]))}

  pred esListaDespuesDeDistribuir (individuo : Z, nroDeEvento : Z, pagos : seq(seq(R)), apuesta seq(seq(R)),
  listaDistribuida:seq(R), trayectoria:seq(seq(R)), cooperan seq(Bool)) {
    (∃listaDeRecursosActualizada : seq(R))(esListaDeRecursosActualizada(listaDeRecursosActualizada, individuo,
    nroDeEvento, trayectoria, pagos, apuestas) ∧L esDistribucionDeRecursos(cooperan, listaDeRecursosActualizada
    , listaDistribuida)
  }

  pred esListaDeRecursosActualizada (lista : seq(R), individuo : Z, nroDeEvento : Z, trayectoria:seq(R), pagos :
  seq(seq(R)), apuesta seq(seq(R))) {
    lista[individuo] = calculoIndividual(individuo, nroDeEvento, trayectoria, pagos, apuestas)
  }

  aux calculoIndividual (individuo : Z, nroDeEvento : Z, trayectoria : seq(seq(R)), pagos : seq(seq(R)), apuestas :
  seq(seq(R))) : R = trayectoria[individuo][nroDeEvento - 1] * pagos[individuo][nroDeEvento] *
  apuestas[individuo][nroDeEvento] ;

  pred esDistribucionDeRecursos (cooperan : seq(Bool), recursos : seq(R), L : seq(R)) {
    (∀i : Z)(0 ≤ i < |L| →L if cooperan[i] = true then L[i] =  $\frac{\text{fondoComun}(\text{recursos}, \text{cooperan})}{|\text{recursos}|}$ 
    else L[i] =  $\frac{\text{fondoComun}(\text{recursos}, \text{cooperan})}{|\text{recursos}|} + \text{recursos}[i]$ ) fi
  }

  aux fondoComun (In recursos : R, In cooperan : Bool) : R =  $\sum_{i=0}^{|\text{recursos}|-1} \text{if } (\text{cooperan}[i] = \text{true}) \text{ then } \text{recursos}[i] \text{ else } 0 \text{ fi ;}$ 

```

3. Ejercicio 3

```

proc trayectoriaExtrañaEscalera (in trayectoria: seq⟨ℝ⟩) : Bool
  requiere {|T| ≥ 2}
  requiere {res = false}
  asegura {Res = true ⇔ (∃j : ℤ)((0 ≤ j < |T|) ∧L ((|T| ≤ 2) ∧ Distintos(T)) ∨
    ((j = 0) ∧ primerElemEsMaximo(T) ∧ esUnicoMaximoLocal(T, j)) ∨
    ((j = |T| - 1) ∧ ultimoElemEsMaximo(T) ∧ esUnicoMaximoLocal(T, j)) ∨
    (esMaximoLocal(T, j) ∧ esUnicoMaximoLocal(T, j)))}
  pred primerElemEsMaximo (T:seq⟨ℝ⟩) {
    T[0] > T[1]
  }
  pred ultimoElemEsMaximo (T:seq⟨ℝ⟩) {
    T[|T| - 1] > T[|T| - 2]
  }
  pred esMaximoLocal (T:seq⟨ℝ⟩, j:ℤ) {
    T[j - 1] < T[j] ∧ T[j] > T[j + 1]
  }
  pred esUnicoMaximoLocal (T:seq⟨ℝ⟩, j:ℤ) {
    ¬(∃i : ℤ)((1 ≤ i < |T| - 1) ∧L (i ≠ j) ∧ esMaximoLocal(T, i))
  }
  pred distintos (T:seq⟨ℝ⟩) {
    T[0] ≠ T[1]
  }

```

4. Ejercicio 4

```

proc individuoDecideSiCooperarONo (in individuo : ℕ, in recursos : seq⟨ℝ⟩, inout cooperan : seq⟨Bool⟩, in apuestas : seq⟨ℝ⟩,
in pagos : seq⟨seq⟨ℝ⟩⟩, in eventos : seq⟨seq⟨ℝ⟩⟩)

```

```

  requiere {(∀i : ℤ)(0 ≤ i < |apuestas| →L ∑k=0|apuestas[i]| apuestas[i][k] = 1)}

```

```

  requiere {|cooperan| = |recursos| = |eventos| = |pagos| = |apuestas|}

```

```

  requiere {0 ≤ individuo < |recursos|}

```

```

  requiere {(∀i, e : ℤ)(0 ≤ i < |pagos| ∧ 0 ≤ e < |pagos[i]| →L pagos[i][e] > 0)}

```

```

  requiere {(∀i : ℤ)(0 ≤ i < |recursos| →L recursos[i] ≥ 0)}

```

```

  asegura {(∀i : ℤ)(0 ≤ i < |recursos| →L (∃L1, L2 : seq⟨ℝ⟩)
    (esListaDespuesDeDistribuir(i, |eventos| - 1, pagos, apuestas, L1, setAt(cooperan, individuo, true)) ∧
    (esListaDespuesDeDistribuir(i, |eventos| - 1, pagos, apuestas, L2, setAt(cooperan, individuo, false))) →L
    if (L1[individuo] ≤ L2[individuo]) then (cooperan[individuo] = false) else (cooperan[individuo] = true) fi))}

```

```

  pred esListaDespuesDeDistribuir (individuo : ℤ, nroDeEvento : ℤ, pagos : seq⟨seq⟨ℝ⟩⟩, apuesta seq⟨seq⟨ℝ⟩⟩,
  listaDistribuida:seq⟨ℝ⟩, trayectoria:seq⟨seq⟨ℝ⟩⟩, cooperan seq⟨Bool⟩) {
    (∃listaDeRecursosActualizada : seq⟨ℝ⟩)(esListaDeRecursosActualizada(listaDeRecursosActualizada, individuo,
    nroDeEvento, trayectoria, pagos, apuestas) ∧L esDistribucionDeRecursos(cooperan, listaDeRecursosActualizada,
    , listaDistribuida)
  }

```

```

  pred esDisribucionDeRecursos (cooperan : seq⟨bool⟩, recursos : seq⟨ℝ⟩, L : seq⟨ℝ⟩) {
    (∀i : ℤ)(0 ≤ i < |L| →L if cooperan[i] = true then L[i] =  $\frac{\text{fondoComun}(\text{recursos}, \text{cooperan})}{|\text{recursos}|}$ 
    else L[i] =  $\frac{\text{fondoComun}(\text{recursos}, \text{cooperan})}{|\text{recursos}|} + \text{recursos}[i]$  fi)
  }

```

aux fondoComun (In recursos : \mathbb{R} , In cooperan : Bool) : $\mathbb{R} = \sum_{i=0}^{|recursos|-1} \text{if } (cooperan[i] = \text{true}) \text{ then } recursos[i] \text{ else } 0 \text{ fi ;}$

5. Ejercicio 5

proc individuoActualizaSuApuesta (in individuo : \mathbb{N} , in recursos : $seq\langle\mathbb{R}\rangle$, in cooperan : $seq\langle\text{Bool}\rangle$, inout apuestas : $seq\langle\mathbb{R}\rangle$, in pagos : $seq\langle seq\langle\mathbb{R}\rangle\rangle$, in eventos : $seq\langle seq\langle\mathbb{R}\rangle\rangle$)

requiere $\{(\forall i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |apuestas| \longrightarrow_L \sum_{k=0}^{|apuestas[i]|} apuestas[i][k] = 1)\}$

requiere $\{|cooperan| = |recursos| = |eventos| = |pagos| = |apuestas|\}$

requiere $\{0 \leq individuo < |recursos|\}$

requiere $\{(\forall i, e : \mathbb{Z})(0 \leq i < |pagos| \wedge 0 \leq e < |pagos[i]| \longrightarrow_L pagos[i][e] > 0)\}$

requiere $\{(\forall i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |recursos| \longrightarrow_L recursos[i] \geq 0)\}$

asegura $\{(\exists L1, mejorApuesta : seq\langle\mathbb{R}\rangle)(esApuestaValida(mejorApuesta, individuo) \wedge (\forall i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |recursos| \longrightarrow_L esListaDespuesDeDistribuir(i, |eventos|, pagos, setAt(apuestas, individuo, mejorApuesta), L1, cooperan)) \wedge \neg(\exists L2, noMejorApuesta : seq\langle\mathbb{R}\rangle)(esApuestaValida(noMejorApuesta, individuo) \wedge esMejorApuesta(apuesta1, apuesta2, individuo, eventos, pagos, cooperan)))\}$

pred esApuestaValida (apuestaAVerificar : $seq\langle\mathbb{R}\rangle$) {
 $\sum_{i=0}^{|apuestaAVerificar|-1} apuestaAVerificar[i] = 1 \wedge |apuestaAVerificar| = |apuestas[individuo]|$
}

pred esMejorApuesta (apuesta1 : $seq\langle\mathbb{R}\rangle$, apuesta2 : $seq\langle\mathbb{R}\rangle$, individuo : \mathbb{N} , eventos : $seq\langle seq\langle\mathbb{R}\rangle\rangle$, pagos : $seq\langle seq\langle\mathbb{R}\rangle\rangle$, cooperan : $seq\langle\text{Bool}\rangle$) {
 $(\exists L1, L2 : seq\langle\mathbb{R}\rangle)(esListaDespuesDeDistribuir(individuo, |eventos|, pagos, apuesta1, L1, cooperan) \wedge (esListaDespuesDeDistribuir(individuo, |eventos|, pagos, apuesta2, L2, cooperan) \wedge L1[individuo] \geq L2[individuo]))$
}

pred esListaDespuesDeDistribuir (individuo : \mathbb{Z} , nroDeEvento : \mathbb{Z} , pagos : $seq\langle seq\langle\mathbb{R}\rangle\rangle$, apuesta : $seq\langle seq\langle\mathbb{R}\rangle\rangle$, listaDistribuida : $seq\langle\mathbb{R}\rangle$, trayectoria : $seq\langle seq\langle\mathbb{R}\rangle\rangle$, cooperan : $seq\langle\text{Bool}\rangle$) {
 $(\exists listaDeRecursosActualizada : seq\langle\mathbb{R}\rangle)(esListaDeRecursosActualizada(listaDeRecursosActualizada, individuo, nroDeEvento, trayectoria, pagos, apuestas) \wedge_L esDistribucionDeRecursos(cooperan, listaDeRecursosActualizada, listaDistribuida))$
}

pred esListaDeRecursosActualizada (lista : $seq\langle\mathbb{R}\rangle$, individuo : \mathbb{Z} , nroDeEvento : \mathbb{Z} , trayectoria : $seq\langle\mathbb{R}\rangle$, pagos : $seq\langle seq\langle\mathbb{R}\rangle\rangle$, apuesta : $seq\langle seq\langle\mathbb{R}\rangle\rangle$) {
 $lista[individuo] = calculoIndividual(individuo, nroDeEvento, trayectoria, pagos, apuestas)$
}

aux calculoIndividual (individuo : \mathbb{Z} , nroDeEvento : \mathbb{Z} , trayectoria : $seq\langle seq\langle\mathbb{R}\rangle\rangle$, pagos : $seq\langle seq\langle\mathbb{R}\rangle\rangle$, apuestas : $seq\langle seq\langle\mathbb{R}\rangle\rangle$) : $\mathbb{R} = trayectoria[individuo][nroDeEvento - 1] * pagos[individuo][nroDeEvento] * apuestas[individuo][nroDeEvento] ;$

pred esDistribucionDeRecursos (cooperan : $seq\langle\text{bool}\rangle$, recursos : $seq\langle\mathbb{R}\rangle$, L : $seq\langle\mathbb{R}\rangle$) {
 $(\forall i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |L| \longrightarrow_L \text{if } cooperan[i] = \text{true} \text{ then } L[i] = \frac{fondoComun(recursos, cooperan)}{|recursos|}$
 $\text{else } L[i] = \frac{fondoComun(recursos, cooperan)}{|recursos|} + recursos[i] \text{ fi}$
}

aux fondoComun (In recursos : \mathbb{R} , In cooperan : Bool) : $\mathbb{R} = \sum_{i=0}^{|recursos|-1} \text{if } (cooperan[i] = \text{true}) \text{ then } recursos[i] \text{ else } 0 \text{ fi ;}$

6. Ejercicio 6

- $P_c \equiv res = recursos \wedge i = 0 \wedge 0 \leq recursos$

- $Q_c \equiv res = recurso(apuesta_c * pago_c)^{apariciones(eventos,T)} * (apuesta_s * pagos_s)^{apariciones(eventos,F)}$

- $I \equiv 0 \leq i \leq |eventos| \wedge res = \prod_{j=0}^{i-1} \text{if } (eventos[j]) \text{ then } (apuesta_c * pago_c) \text{ else } (apuesta_s * pago_s) \text{ fi}$

- $B \equiv i < |eventos|$

- $fv = |eventos| - i$

- $\{\neg B \wedge I\} \longrightarrow Q_c$

$$\neg(i < |eventos|) \wedge 0 \leq i \leq |eventos| \wedge res = \prod_{j=0}^{i-1} \text{if } (eventos[j]) \text{ then } (apuesta_c * pago_c) \text{ else } (apuesta_s * pago_s) \text{ fi} \equiv \\ |eventos| \leq i \wedge i \leq |eventos| \wedge res = \prod_{j=0}^{|eventos|-1} \text{if } (eventos[j]) \text{ then } (apuesta_c * pago_c) \text{ else } (apuesta_s * pago_s) \text{ fi} \equiv \\ res = recurso(apuesta_c * pago_c)^{apariciones(eventos,T)} * (apuesta_s * pagos_s)^{apariciones(eventos,F)} \equiv Q_c$$

- $P_c \longrightarrow I$

Como por P_c se tiene que $i=0$ en el invariante queda que

$$res = \prod_{j=0}^{-1} \text{if } (eventos[j]) \text{ then } (apuesta_c * pago_c) \text{ else } (apuesta_s * pago_s) \text{ fi} = 0$$

por otra parte como por P_c $res = recursos$ y $0 \leq recursos$ se tiene que $0 \leq res$ queda que $res = 0$ es una Tautologia

- $\{B \wedge I\} S\{I\} \equiv (B \wedge I) \longrightarrow wp(S, I)$

Donde $S \equiv \text{if } eventos[i] \text{ then}$

$$S_1 \quad res := res * apuesta.c * pago.c$$

else

$$S_2 \quad res := res * apuesta.s * pago.s$$

endif

$$S_3 \quad i := i+1$$

$$wp(S, I) \equiv wp(\text{if } eventos[i] \text{ Then } res = res * apuesta.c * pago.c \text{ else } res * apuesta.s * pago.s, wp(i := i + 1, I))$$

$$wp(S_3, I) \equiv def(i+1) \wedge_L 0 \leq i+1 \leq |eventos| \wedge res = \prod_{j=0}^{i+1-1} \text{if } (eventos[j]) \text{ then } (apuesta_c * pago_c) \text{ else } (apuesta_s * pago_s) \text{ fi}$$

$$wp(S, I) \equiv def(eventos[i]) \wedge_L ((eventos[i] = True \wedge wp(S_1, wp(S_3, I))) \vee (eventos[i] = False \wedge wp(S_2, wp(S_3, I))))$$

$$wp(S, I) \equiv 0 \leq i < |eventos| \wedge_L ((eventos[i] = True \wedge wp(S_1, wp(S_3, I))) \vee (eventos[i] = False \wedge wp(S_2, wp(S_3, I))))$$

$$wp(S_1, wp(S_3, I)) \equiv def(res * apuesta.c * pago.c) \wedge_L 0 \leq i+1 \leq |eventos| \wedge$$

$$res * apuesta.c * pago.c = \prod_{j=0}^i \text{if } (eventos[j]) \text{ then } (apuesta_c * pago_c) \text{ else } (apuesta_s * pago_s) \text{ fi} \equiv$$

$$0 \leq i+1 \leq |eventos| \wedge$$

$$res * apuesta.c * pago.c = \prod_{j=0}^{i-1} \text{if } (eventos[j]) \text{ then } (apuesta_c * pago_c) \text{ else } (apuesta_s * pago_s) \text{ fi} * (apuesta.c * pago.c) \equiv$$

$$0 \leq i < |eventos| \wedge$$

$$res = \prod_{j=0}^{i-1} \text{if } (eventos[j]) \text{ then } (apuesta_c * pago_c) \text{ else } (apuesta_s * pago_s) \text{ fi}$$

$$wp(S_2, wp(S_3, I)) \equiv def(res * apuesta.s * pago.s) \wedge_L 0 \leq i+1 \leq |eventos| \wedge$$

$$res * apuesta.s * pago.s = \prod_{j=0}^i \text{if } (eventos[j]) \text{ then } (apuesta_c * pago_c) \text{ else } (apuesta_s * pago_s) \text{ fi} \equiv$$

$$0 \leq i+1 \leq |eventos| \wedge$$

$$res * apuesta.s * pago.s = \prod_{j=0}^{i-1} \text{if } (eventos[j]) \text{ then } (apuesta_c * pago_c) \text{ else } (apuesta_s * pago_s) \text{ fi} * (apuesta.s * pago.s) \equiv$$

$$0 \leq i < |eventos| \wedge$$

$$res = \prod_{j=0}^{i-1} \text{if } (eventos[j]) \text{ then } (apuesta_c * pago_c) \text{ else } (apuesta_s * pago_s) \text{ fi}$$

Ahora calculemos $I \wedge B$ y veamos si implica lo de arriba:

$$I \wedge B \equiv$$

$$0 \leq i < |eventos| \wedge res = \prod_{j=0}^{i-1} \text{if } (eventos[j]) \text{ then } (apuesta_c * pago_c) \text{ else } (apuesta_s * pago_s) \text{ fi} \equiv$$

$0 \leq i < |eventos| \wedge ((eventos[i] = True \wedge res = \prod_{j=0}^{i-1} \text{if } (eventos[j]) \text{ then } (apuesta_c * pago_c) \text{ else } (apuesta_s * pago_s) \text{ fi})$
 $\vee (eventos[i] = False \wedge res = \prod_{j=0}^{i-1} \text{if } (eventos[j]) \text{ then } (apuesta_c * pago_c) \text{ else } (apuesta_s * pago_s) \text{ fi}))$

Entonces $(I \wedge B) \longrightarrow wp(S, I)$

- $\{I \wedge B \wedge v_0 = fv\} S \{fv < v_0\} \equiv (I \wedge B \wedge v_0 = fv) \longrightarrow wp(S, fv < v_0)$

Definimos la función variante como: $fv = |eventos| - i$

$wp(S, fv < v_0) \equiv wp(\text{if } eventos[i] \text{ Then } res = res * apuesta.c * pago.c \text{ else } res * apuesta.s * pago.s, wp(i := i+1, |eventos| - i < v_0))$

$wp(S, fv < v_0) \equiv wp(\text{if } eventos[i] \text{ Then } res = res * apuesta.c * pago.c \text{ else } res * apuesta.s * pago.s, |eventos| - (i+1) < v_0)$

$wp(S, fv < v_0) \equiv def(eventos[i]) \wedge_L ((eventos[i] = True \wedge wp(S_1, |eventos| - i - 1 < v_0)) \vee (eventos[i] = False \wedge wp(S_2, |eventos| - i - 1 < v_0)))$

$wp(S_2, |eventos| - 1 - i < v_0) \equiv def(res * apuesta.s * pago.s) \wedge_L |eventos| - 1 - i < v_0 \equiv |eventos| - 1 - i < v_0$

$wp(S_1, |eventos| - 1 - i < v_0) \equiv def(res * apuesta.c * pago.c) \wedge_L |eventos| - 1 - i < v_0 \equiv |eventos| - 1 - i < v_0$

$wp(S, fv < v_0) \equiv 0 \leq i < |eventos| \wedge_L ((eventos[i] = True \wedge |eventos| - 1 - i < v_0) \vee (eventos[i] = False \wedge |eventos| - 1 - i < v_0))$

$wp(S, fv < v_0) \equiv 0 \leq i < |eventos| \wedge_L |eventos| - 1 - i < v_0$

Ahora calculemos $I \wedge B \wedge v_0 = |eventos| - i$ y veamos si implica lo de arriba:

A partir del Invariante tenemos que $0 \leq i \leq |eventos| \longrightarrow 0 \leq i < |eventos|$

Luego usando que $v_0 = |eventos| - i$ es verdadero se puede llegar a que $v_0 - 1 < v_0$ Lo cual es verdadero.

Entonces $(I \wedge B \wedge v_0 = fv) \longrightarrow wp(S, fv < v_0)$

- $I \wedge fv \leq 0 \longrightarrow \neg B$

A partir de que $fv \leq 0 \equiv |eventos| - i \leq 0 \equiv |eventos| \leq i \equiv \neg B$