Curso Demografía - Licenciatura en Estadística, UDELAR
Proyecciones de Población

Daniel Ciganda

26 de Noviembre de 2024

Método de los Componentes de Cohorte

Desarrollado por Whelpton en 1928. Es prácticamente el único método utilizado en la actualidad.

En el método de los componentes de cohorte cada uno de los componentes de la dinámica demográfica (fecundidad, mortalidad, migración) se proyecta de manera independiente para cada cohorte de nacimiento.

Es un modelo de tiempo discreto.

Este método busca proyectar la población a un momento $t + n$ a partir de una tabla de vida y un conjunto de tasas específicas de fecundidad por edad.

El período de la proyección se divide en intervalos del mismo largo de los intervalos de edad utilizados.

Principios del Método

Se segmenta a la población en subgrupos que están expuestos de manera diferencial al riesgos de los eventos demográficos y se computan de manera separada los cambios en el tiempo en estos grupos. $\rightarrow$ Como míinimo edad y sexo.

Los cambios en la estructura y tamaño de la población sólo pueden resultar de un conjunto bien definido de eventos demográficos.

Por ejemplo, el número de personas que vive en Uruguay sólo puede cambiar cuando uno de estos tres eventos ocurre:

- un nacimiento en Uruguay
- la muerte de alguien que se encuentra viviendo en Uruguay
- la migración de una persona desde o hacia Uruguay

Estos eventos son los componentes del cambio demográfico

Pasos

- Proyectar la población en cada subgrupo al inicio del intervalo estimando el numero de sobrevivientes al inicio de el intervalo siguiente.
- Computar el número de nacimientos correspondientes a cada subgrupo en el intervalo, sumarlos, y computar el número de esos nacimientos que sobreviven al inicio del próximo intervalo.
- La población proyectada se utiliza como la población base para la proyección del próximo intervalo.

Insumos básicos - Notación

Los insumos básicos son:

- La población inicial $\rightarrow {}_5N_x(t)$
- Años-persona vividos en el intervalo (de la *tabla de vida*) $\rightarrow {}_5L_x$
- Las tasas de fecundidad por edad $\rightarrow {}_5F_x$

Importante: Los intervalos de edad utilizados en la proyección, deben ser los mismos a los utilizados en el cálculo de la tabla de vida y las tásas específicas de fecundidad por edad.

Se asume inicialmente que la población está cerrada a la migración.

Aplicación para la población de Suecia en 1993

Box 6.1 (part 2)

Example: Sweden, baseline 1993 (females); $l_o = 100{,}000$

Age x	${}_5N_x^F$ (1993.0)	${}_5L_x^F$	${}_5F_x$	${}_5N_x^F$ (1998.0)	${}_5B_x$ [1993.0, 1998.0]	${}_5N_x^F$ (2003.0)	${}_5B_x$ [1998.0, 2003.0]
0	293,395	497,487		293,574		280,121	
5	248,369	497,138		293,189		293,368	
10	240,012	496,901		248,251		293,049	
15	261,346	496,531	0.0120	239,833	15,035	248,066	14,637
20	285,209	495,902	0.0908	261,015	123,993	239,529	113,624
25	314,388	495,168	0.1499	284,787	224,541	260,629	204,394
30	281,290	494,213	0.1125	313,782	167,364	284,238	168,193
35	286,923	492,760	0.0441	280,463	62,554	312,859	65,414
40	304,108	490,447	0.0074	285,576	10,909	279,147	10,447
45	324,946	486,613	0.0003	301,731	470	283,344	439
50	247,613	480,665		320,974		298,043	
55	211,351	471,786		243,039		315,045	
60	215,140	457,852		205,109		235,861	
65	221,764	436,153		204,944		195,388	
70	223,506	402,775		204,793		189,260	
75	183,654	350,358		194,419		178,141	
80	141,990	271,512		142,324		150,666	
85+	112,424	291,707		131,768		141,960	
Sum	4,397,428			4,449,570	604,866	4,478,712	577,148

B [1993.0, 1998.0] = 604,866 $\quad$ B [1998.0, 2003.0] = 577,148

B^F [1993.0, 1998.0] = 295,057 $\quad$ B^F [1998.0, 2003.0] = 281,536

B^M [1993.0, 1998.0] = 309,810 $\quad$ B^M [1998.0, 2003.0] = 295,612

Proyección de la población existente

Proyectar la población mayor a 5 años en el tiempo $t+5$ es relativamente fácil ya que en una población cerrada estos son simplemente los sobrevivientes de la población en el tiempo t.

Para esto necesitamos:

- La probabilidad de sobrevivir entre las edades $(x-5, x)$ y las edades $(x, x+5)$.
- Es decir ${}_5L_x/{}_5L_{x-5}$.

Entonces:

$$ {}_5N_x(t+5) = {}_5N_{x-5}(t) \cdot \frac{{}_5L_x}{{}_5L_{x-5}} $$

Para todos los grupos de edad menos el primero y el último.

Proyección grupo de edad abierto (85+)

- Este grupo consta de dos subgrupos, los de 80-84 al inicio que en $t+5$ tendrán 85-89, y los de 85$+$ que tendrán 90$+$.
- Las probabilidades de supervivencia son ${}_5L_{85}/{}_5L_{80}$ para el primer grupo y T_{90}/T_{85} para el segundo.
- Si el último grupo de edad es 85$+$, no tenemos T_{90}.
- En este caso se acostumbra combinar los dos últimos grupos de edad en el momento t y proyectarlos juntos (por lo que 80-84 y 85$+$ se tratan como 80$+$) utilizando la tasa de supervivencia T_{85}/T_{80}, donde $T_{80} = {}_5L_{80} + T_{85}$.

Entonces:

$$ {}_\infty N_x(t+5) = ({}_5N_{x-5}(t) + {}_\infty N_x(t)) \cdot \frac{T_x}{T_{x-5}} $$

Proyectando Nacimientos

La población menor de 5 años en $t+5$ se compone de los nacidos durante el período de t a $t+5$ que sobreviven hasta el final del período de proyección.

Nacimientos en el intervalo t y $t+5$:

$$ {}_5B_x[t, t+5] = {}_5F_x \cdot 5 \cdot \frac{{}_5N_x(t) + {}_5N_{x-5}(t) \cdot \frac{{}_5L_x}{{}_5L_{x-5}}}{2} $$

Proyectando Nacimientos

El número total de nacimientos en el intervalo se obtiene sumando los nacimientos de las mujeres en edades reproductivas:

$$B[t, t+5] = \sum_{x=\alpha}^{\beta-5} {}_5B_x[t, t+5]$$

Los nacimientos de niñas, por su parte, se obtienen aplicando el ratio de nacimientos de niños sobre el de niñas.

$$B^F[t, t+5] = B[t, t+5] \cdot \frac{1}{1+1{,}05}$$

Proyectando Nacimientos

Finalmente, la población de niñas entres 0-4 al final de intervalo se obtiene de los nacimientos sobrevivientes en $t + 5$

$$ {}_5N_0(t+5) = B^F[t, t+5] \cdot \frac{{}_5L_0}{5 \cdot l_0} $$

Proyectando Nacimientos - Método Alternativo

En el método presentado antes procedíamos a multiplicar la tasa de fecundidad a edad x por el promedio de años persona vividos en el intervalo. Este procedimiento nos develueve los nacimientos totales de los que luego se derivan los nacimientos femeninos que sobreviven al inicio del intervalo siguiente. En este procedimeinto alternativo se multiplica la población por el promedio de las tasas de fecundidad correspondientes (tomando en cuenta la supervivencia en el primer intervalo de edad).

Proyectando Nacimientos - Método Alternativo

Vamos a ilustrar el procedimiento a través de un ejemplo:

- Consideramos a las mujeres de 15 a 19 años al comienzo de la proyección, que tendrán entre 20 y 24 años si sobreviven.
- Durante el intervalo de proyección esta cohorte estará expuesta a las tasas de 15 a 19 años y a las tasas de 20 a 24 años (ponderadas por la probabilidad de sobrevivir a edad 20-24).
- Es decir, las tasas de fecundidad relevantes son, ${}_5F_{15}$ y ${}_5F_{20}$ que se promedian y se multiplican por 5, el ancho del período.
- Los nacimientos resultantes tienen que sobrevivir desde el nacimiento hasta los 4 años, lo que ocurre con una probabilidad ${}_5L_0/5l_0$.

Proyectando Nacimientos - Método Alternativo

Poniendo todo esto junto:

$$B[t, t+5] = {}_5N_x(t) \cdot \frac{5}{2} \left({}_5F_x + {}_5F_{x+5} \frac{{}_5L_{x+5}}{{}_5L_x} \right) \cdot \frac{{}_5L_0}{5l_0}$$

Para obtener el número total de nacimientos sumamos las contribuciones de todas las mujeres en edades reproductivas.

$$B[t, t+5] = \sum_{x=\alpha}^{\beta-5} {}_5B_x[t, t+5]$$

Para obtener las nacimientos femeninos podemos utilizar el mismo procedimiento que antes o dividir las tasas de fecundidad por $1 + SRB$ para obtener tasas de maternidad.

La matriz de Leslie

Patrick Holt Leslie, nacido en 1900 en Edimburgo.

Se dedicó a la estadística y en 1935 se incorporó a la Bureau of Animal Population.

Realizó la mayor parte de su investigación en roedores.

Leslie aplicó a los datos sobre ratones los métodos desarrollados por Lotka en la demografía de poblaciones humanas.

On the use of matrices in certain population mathematics (1945)

Presenta un modelo para estudiar el crecimiento del número de hembras en una población animal, pero que podía aplicarse a una población de humanos.

Matriz de Leslie

- **Idea**:
  - $N_{1,t+1} = F_1 \cdot N_{1,t} + F_2 \cdot N_{2,t} + \cdots + F_n \cdot N_{n,t}$
  - $N_{2,t+1} = S_1 \cdot N_{1,t}$
  - $N_{3,t+1} = S_2 \cdot N_{2,t}$
  - $\vdots$
  - $N_{n,t+1} = S_{n-1} \cdot N_{n-1,t}$
- F_x: tasas de fecundidad por edad.
- S_x: probabilidades de supervivencia en edad x a $x + 1$.

En Forma de Matriz:

$$L = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 & \cdots & F_{n-1} & F_n \\ S_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & S_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Ecuación de Proyección:

- $\mathbf{N}_{t+1} = L \times \mathbf{N}_t$
- $\mathbf{N}_t$: Población en el tiempo t.

Multiplicación de la Matriz de Leslie y el Vector de Población

$$\begin{pmatrix} F_1 & F_2 & F_3 \\ S_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} N_{1,t} \\ N_{2,t} \\ N_{3,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_{1,t+1} \\ N_{2,t+1} \\ N_{3,t+1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} N_{1,t+1} &= F_1 N_{1,t} + F_2 N_{2,t} + F_3 N_{3,t} \\ N_{2,t+1} &= S_1 N_{1,t} \\ N_{3,t+1} &= S_2 N_{2,t} \end{aligned}$$

La matriz de Leslie

La matriz de Leslie se puede utilizar para proyectar la población repetidamente. Si se hace esto se encontrará que la población seguirá creciendo (o disminuirá hasta que se extinga), pero la distribución por edades eventualmente dejará de cambiar.

Lo interesante es que la distribución por edades final depende de la matriz de Leslie (y por lo tanto de las tasas de fecundidad y mortalidad) pero no de la distribución por edades inicial. Esta es la idea central detrás de la teoría de la población estable .