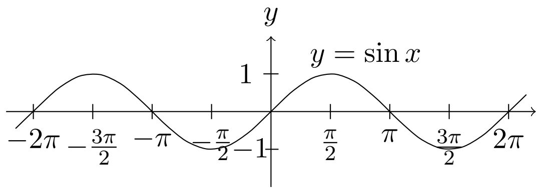
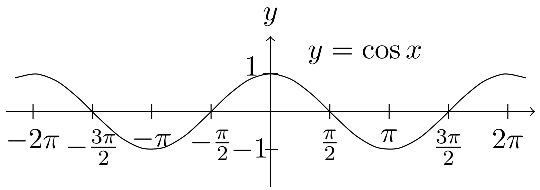
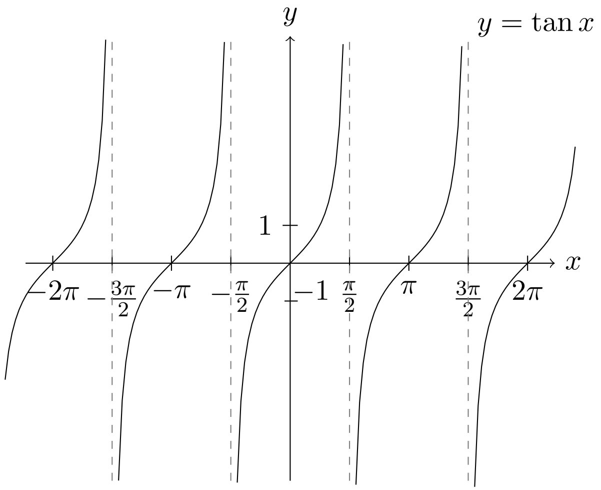
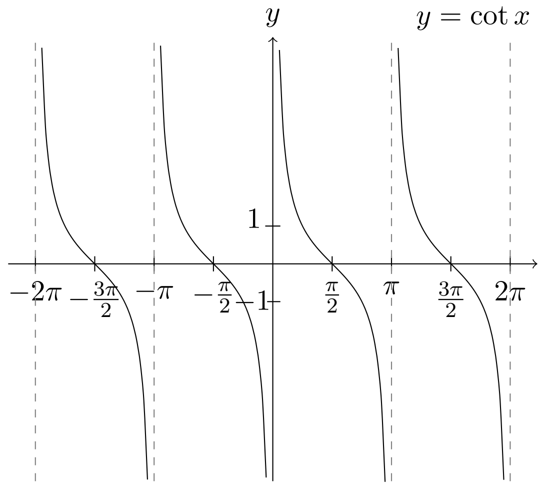
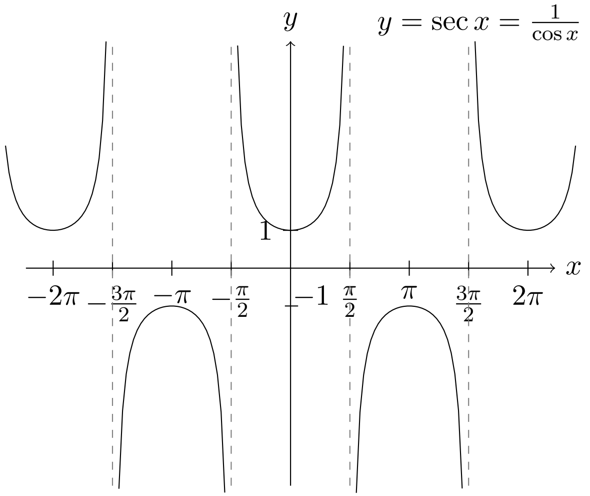
↙ Funções trigonométricas

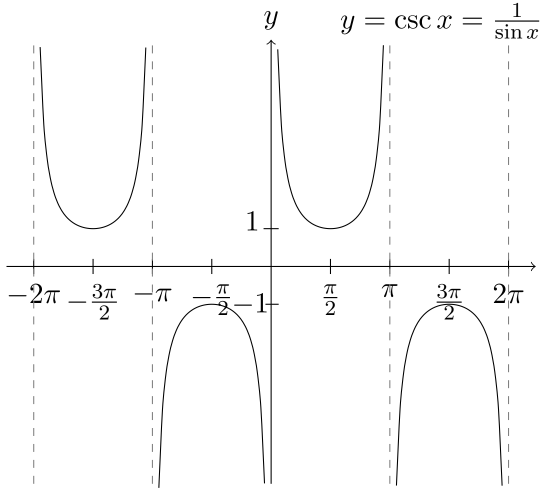




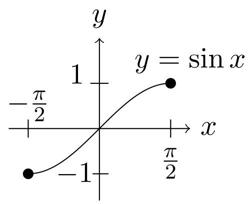


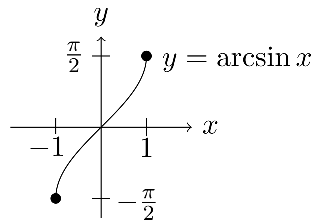


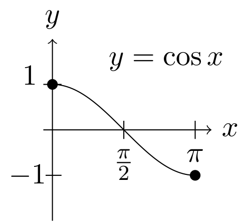


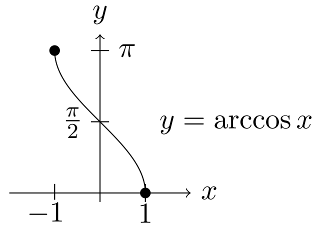


↓ Restrições principais das funções trigonométricas e suas inversas

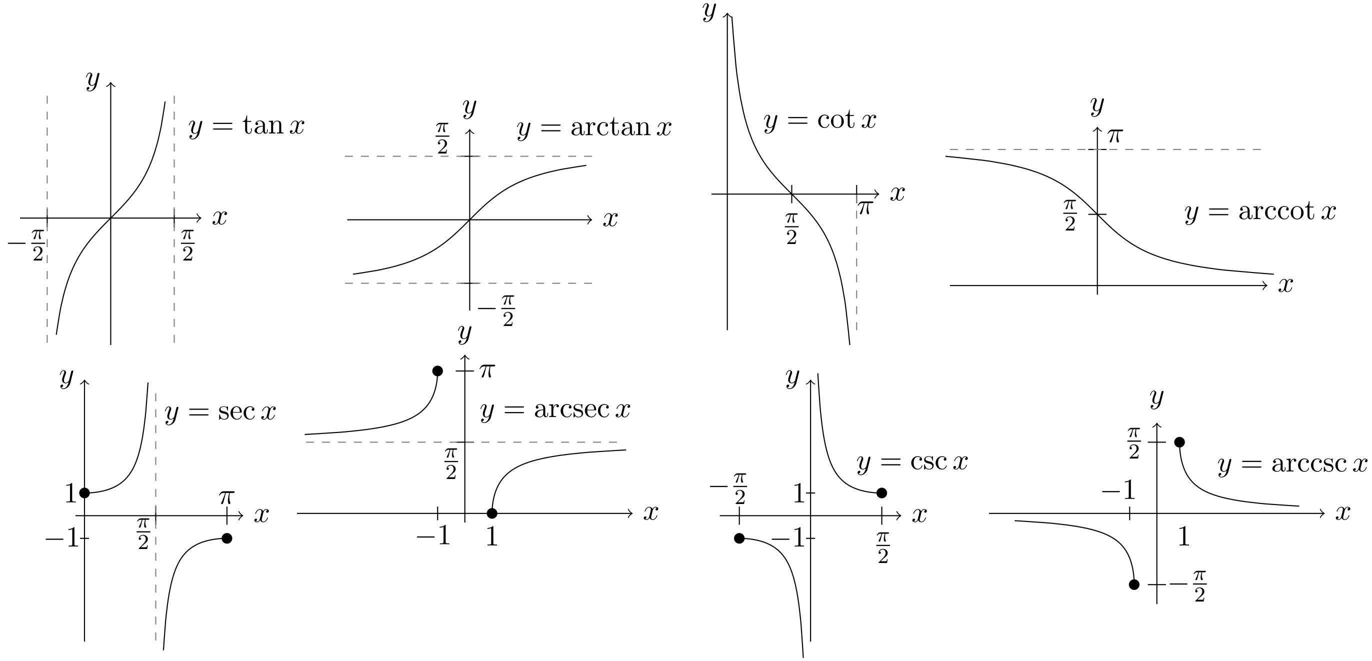








Restrições principais das funções trigonométricas e suas inversas ↘



Funções hiperbólicas e suas inversas ↴

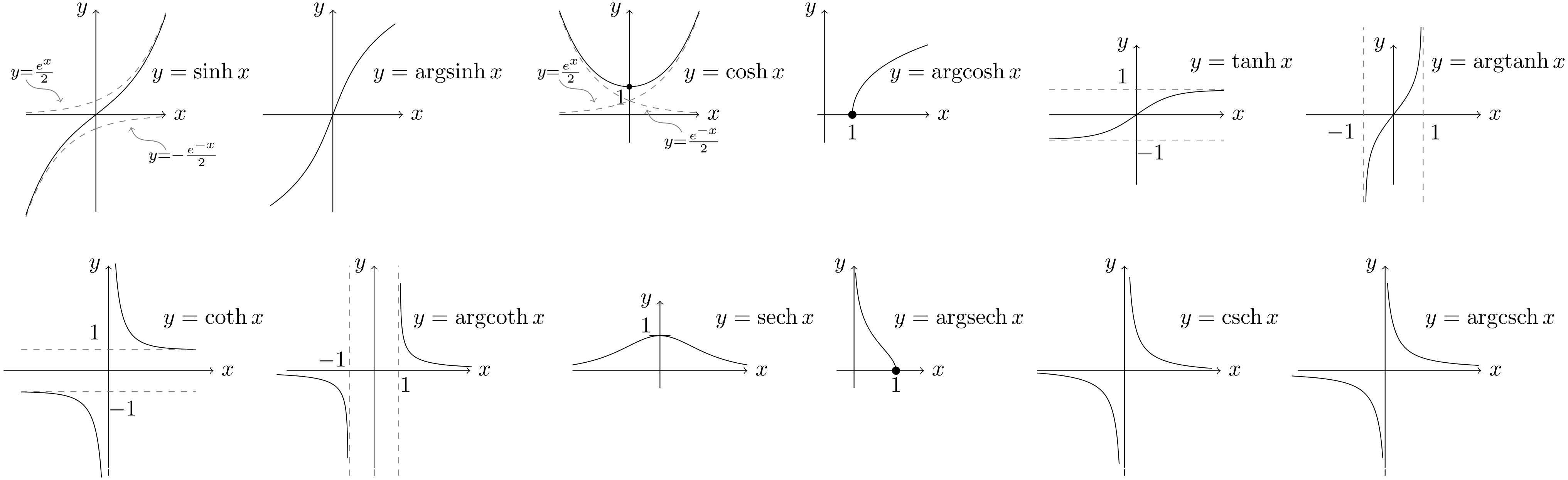


Tabela de Primitivas Imediatas

Função	Primitiva
a	$ax + C$
$\frac{f'}{f}$	$\ln\lvert f\rvert + C$
$f^m \cdot f'$	$\dfrac{f^{m+1}}{m+1} + C,$ onde $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
$f' \cdot a^f$	$\dfrac{a^f}{\ln a} + C,$ onde $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$
$f' \cdot \sin f$	$-\cos f + C$
$f' \cdot \cos f$	$\sin f + C$
$f' \cdot \tan f$	$-\ln\lvert\cos f\rvert + C$
$f' \cdot \cot f$	$\ln\lvert\sin f\rvert + C$

Função	Primitiva
$f' \cdot \sec f$	$\ln\lvert\sec f + \tan f\rvert + C$
$f' \cdot \csc f$	$\ln\lvert\csc f - \cot f\rvert + C$
$f' \cdot \sec^2 f$	$\tan f + C$
$f' \cdot \csc^2 f$	$-\cot f + C$
$f' \cdot \sec f \cdot \tan f$	$\sec f + C$
$f' \cdot \csc f \cdot \cot f$	$-\csc f + C$
$\dfrac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$	$\arcsin f + C$ ou $-\arccos f + C$
$\dfrac{f'}{1+f^2}$	$\arctan f + C$ ou $-\operatorname{arccot} f + C$
$\dfrac{f'}{\lvert f\rvert\sqrt{f^2-1}}$	$\operatorname{arcsec} f + C$ ou $-\operatorname{arccsc} f + C$
$f' \cdot \sinh f$	$\cosh f + C$
$f' \cdot \cosh f$	$\sinh f + C$

Função	Primitiva
$f' \cdot \tanh f$	$\ln\lvert\cosh f\rvert + C$
$f' \cdot \coth f$	$\ln\lvert\sinh f\rvert + C$
$f' \cdot \operatorname{sech}^2 f$	$\tanh f + C$
$f' \cdot \operatorname{csch}^2 f$	$-\coth f + C$
$f' \cdot \operatorname{sech} f \cdot \tanh f$	$-\operatorname{sech} f + C$
$f' \cdot \operatorname{csch} f \cdot \coth f$	$-\operatorname{csch} f + C$
$\dfrac{f'}{\sqrt{1+f^2}}$	$\operatorname{argsinh} f + C$
$\dfrac{f'}{\sqrt{f^2-1}}$	$\operatorname{argcosh} f + C$
$\dfrac{f'}{1-f^2}$	$\operatorname{argtanh} f + C,$ se $\lvert f(x)\rvert < 1$ $\operatorname{argcoth} f + C,$ se $\lvert f(x)\rvert > 1$
$\dfrac{f'}{\lvert f\rvert\sqrt{1-f^2}}$	$-\operatorname{argsech} f + C$
$\dfrac{f'}{\lvert f\rvert\sqrt{1+f^2}}$	$\operatorname{argcsch} f + C$

Regras de Primitivação de funções trigonométricas e hiperbólicas

I - Potências de funções trigonométricas e hiperbólicas

1. *Potências ímpares de* $\sin x$, $\cos x$, $\sinh x$ *e* $\cosh x$.

   Destaca-se uma unidade à potência ímpar e passa-se o fator resultante para a co-função através das fórmulas fundamentais:

   $$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \qquad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

2. *Potências pares de* $\sin x$, $\cos x$, $\sinh x$ *e* $\cosh x$.

   Passam-se para o arco duplo através das fórmulas:

   $$\sin^2 x = \tfrac{1}{2}(1-\cos(2x)) \qquad \cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1+\cos(2x))$$
   $$\sinh^2 x = \tfrac{1}{2}(\cosh(2x)-1) \qquad \cosh^2 x = \tfrac{1}{2}(\cosh(2x)+1)$$

3. *Potências pares e ímpares de* $\tan x$, $\cot x$, $\tanh x$ *e* $\coth x$.

   Destaca-se $\tan^2 x$ ($\tanh^2 x$) ou $\cot^2 x$ ($\coth^2 x$) e aplica-se uma das fórmulas:

   $$\tan^2 x = \sec^2 x - 1 \qquad \cot^2 x = \csc^2 x - 1$$
   $$\tanh^2 x = 1 - \operatorname{sech}^2 x \qquad \coth^2 x = 1 + \operatorname{csch}^2 x$$

4. *Potências pares de* $\sec x$, $\csc x$, $\operatorname{sech} x$ *e* $\operatorname{csch} x$.

   Destaca-se $\sec^2 x$ ($\operatorname{sech}^2 x$) ou $\csc^2 x$ ($\operatorname{csch}^2 x$) e ao fator resultante aplica-se uma das fórmulas:

   $$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x \qquad \csc^2 x = 1 + \cot^2 x$$
   $$\operatorname{sech}^2 x = 1 - \tanh^2 x \qquad \operatorname{csch}^2 x = \coth^2 x - 1$$

5. *Potências ímpares de* $\sec x$, $\csc x$, $\operatorname{sech} x$ *e* $\operatorname{csch} x$.

   Destaca-se $\sec^2 x$ ($\operatorname{sech}^2 x$) ou $\csc^2 x$ ($\csc^2 x$) e primitiva-se por partes começando por esse fator.

II - Produtos de potências das funções $\sin x$ e $\cos x$ ($\sinh x$ e $\cosh x$)

1. *Potência ímpar de* $\sin x$ ($\sinh x$) *por qualquer potência de* $\cos x$ ($\cosh x$).

   Destaca-se $\sin x$ ($\sinh x$) e passa-se o fator resultante para a co-função, através das fórmulas fundamentais:

   $$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x \qquad \sinh^2 x = \cosh^2 x - 1$$

2. *Potência ímpar de* $\cos x$ ($\cosh x$) *por qualquer potência de* $\sin x$ ($\sinh x$).

   Destaca-se $\cos x$ ($\cosh x$) e passa-se o fator resultante para a co-função, através da fórmula fundamental:

   $$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x \qquad \cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$$

3. *Potência par de* $\sin x$ ($\sinh x$) *por potência par de* $\cos x$ ($\cosh x$).

   Aplicam-se as fórmulas:

   $$\sin(2x) = 2\sin x\cos x, \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2},$$
   $$\sinh(2x) = 2\sinh x\cosh x, \quad \sinh^2 x = \frac{\cosh(2x)-1}{2}, \quad \cosh^2 x = \frac{\cosh(2x)+1}{2}.$$

III - Produtos em que aparecem fatores do tipo $\sin(mx)$ ou $\cos(nx)$ ou produtos em que aparecem fatores do tipo $\sinh(mx)$ ou $\cosh(nx)$

Aplicam-se as fórmulas:

$$\sin x \sin y = \tfrac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)) \qquad \sinh x \cosh y = \tfrac{1}{2}(\cosh(x+y) - \cosh(x-y))$$

$$\cos x \cos y = \tfrac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y)) \qquad \cosh x \cosh y = \tfrac{1}{2}(\cosh(x+y) + \cosh(x-y))$$

$$\sin x \cos y = \tfrac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y)) \qquad \sinh x \cosh y = \tfrac{1}{2}(\sinh(x+y) + \sinh(x-y))$$

Primitivação de frações racionais

Consideremos a fração $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, em que $f(x)$ e $g(x)$ são polinómios.

1. *Se o grau do numerador for maior ou igual ao grau do denominador, efetua-se a divisão de $f(x)$ por $g(x)$*; obtendo-se

$$\frac{f(x)}{g(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{g(x)},$$

sendo agora $\dfrac{R(x)}{g(x)}$ uma fração própria.

2. *Decompõe-se o denominador da fração própria em fatores*, que são da forma

$$(x-a)^m,$$

quando correspondem a uma raiz real a de multiplicidade m, ou da forma

$$[(x-p)^2+q^2]^n,$$

quando correspondem a raízes complexas $p \pm qi$ de multiplicidade n.

3. *Decompõe-se então a fração própria numa soma de elementos simples, de acordo com os fatores obtidos:*

   (a) cada fator do tipo $(x-a)^m$ dá origem a

$$\frac{A_1}{(x-a)^m} + \frac{A_2}{(x-a)^{m-1}} + \cdots + \frac{A_m}{x-a},$$

   com $A_1, A_2, \ldots, A_m$ constantes a determinar;

   (b) cada fator do tipo $[(x-p)^2+q^2]^n$ dá origem a

$$\frac{P_1x+Q_1}{[(x-p)^2+q^2]^n} + \frac{P_2x+Q_2}{[(x-p)^2+q^2]^{n-1}} + \cdots + \frac{P_nx+Q_n}{(x-p)^2+q^2},$$

   com $P_1, Q_1, P_2, Q_2, \ldots, P_n, Q_n$ constantes a determinar.

4. *Cálculo das constantes*

   As constantes A_i, P_i, Q_i podem ser determinadas conjuntamente pelo método dos coeficientes indeterminados. Há, no entanto, uma forma alternativa de calcular essas constantes, que descrevemos de seguida.

   (a) Cálculo dos coeficientes relativos a fatores do tipo $(x-a)^m$ (seja $\psi(x)$ tal que $g(x) = \psi(x)(x-a)^m$):

   (i) se $m = 1$, apenas temos de determinar A_1, que é dado por:

$$A_1 = \left[\frac{R(x)}{\psi(x)}\right]_{x=a}$$

   (ii) Se $m > 1$, as constantes calculam-se pelo método dos coeficientes indeterminados (**mas A_1 ainda pode ser obtida como em (i)**).

   (b) Cálculo dos coeficientes relativos a fatores do tipo $[(x-p)^2+q^2]^n$ (seja $\psi(x)$ tal que $g(x) = \psi(x)[(x-p)^2+q^2]^n$):

   (i) se $n = 1$, obtemos as constantes P_1 e Q_1 fazendo

$$\left[P_1x + Q_1 = \frac{R(x)}{\psi(x)}\right]_{x=p+qi}$$

   (ii) se $n > 1$, as constantes calculam-se pelo método dos coeficientes indeterminados (**as constantes P_1 e Q_1 ainda podem ser obtidas como em (i)**).

Nota: Caso apareçam elementos simples da forma

$$\frac{1}{[(x-p)^2+c]^n}, \quad \text{com} \quad n > 1,$$

estes podem ser primitivados usando a seguinte fórmula de recorrência:

$$P\left(\frac{1}{[(x-p)^2+c]^n}\right) = \frac{1}{c}\left[\frac{1}{2n-2}\cdot\frac{x-p}{[(x-p)^2+c]^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\cdot P\left(\frac{1}{[(x-p)^2+c]^{n-1}}\right)\right]$$

Primitivação por substituição

Tipo de Função	Substiuição
$\frac{1}{(x^2+a^2)^k}$, $k \in \mathbb{N}, k > 1$	$x = a \tan t$
$\frac{P(x)}{(ax^2+bx+c)^k}$, $k\in\mathbb{N}, k>1, b^2-4ac<0, \deg P(x)<2k$	$ax + \frac{b}{2} = t$
$\frac{P(x)}{((x-p)^2+q^2)^k}$, $k\in\mathbb{N}, k>1, \deg P(x)>2k$	$ax + \frac{b}{2} = t$
$R(a^{rx}, a^{sx}, ...)$	$a^{mx} = t$, onde $m = \mathrm{mdc}(r, s, \dots)$
$R(\log_a x)$	$t = \log_a x$
$R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p}{q}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}, ...\right)$	$\frac{ax+b}{cx+d} = t^m$, onde $m = \mathrm{mmc}(q, s, \dots)$
$R(x, (ax+b)^{\frac{p}{q}}, (ax+b)^{\frac{r}{s}})$	$ax + b = t^m$, onde $m = \mathrm{mmc}(q, s, \dots)$
$R(x, x^{\frac{p}{q}}, x^{\frac{r}{s}}, \cdots)$	$x = t^m$ onde $m = \mathrm{mmc}(q, s, \dots)$
$R(x, \sqrt{a^2 - b^2x^2})$	$x = \frac{a}{b}\sin t$ ou $x = \frac{a}{b}\cos t$ ou $x = \frac{a}{b}\tanh t$
$R(x, \sqrt{a^2 + b^2x^2})$	$x = \frac{a}{b}\tan t$ ou $x = \frac{a}{b}\sinh t$
$R(x, \sqrt{b^2x^2 - a^2})$	$x = \frac{a}{b}\sec t$ ou $x = \frac{a}{b}\cosh t$
$R(x, \sqrt{x}, \sqrt{a - bx})$	$x = \frac{a}{b}\sin^2 t$ ou $x = \frac{a}{b}\cos^2 t$
$R(x, \sqrt{x}, \sqrt{a + bx})$	$x = \frac{a}{b}\tan^2 t$
$R(x, \sqrt{x}, \sqrt{bx - a})$	$x = \frac{a}{b}\sec^2 t$

Tipo de Função	Substiuição
$R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$	se $a > 0$ faz-se $\sqrt{ax^2+bx+c} = x\sqrt{a} + t$ se $c > 0$ faz-se $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{c} + tx$ se $ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2)$, faz-se $\sqrt{ax^2+bx+c}$ igual a $(x - r_1)t$ ou $(x - r_2)t$
$x^m(a + bx^n)^{\frac{p}{q}}$	se $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$ faz-se $a + bx^n = t^q$ se $\frac{m+1}{n} + \frac{p}{q} \in \mathbb{Z}$ faz-se $a + bx^n = x^n t^q$
$R(\sin x, \cos x)$	• se $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ faz-se $\cos x = t$, • se $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ faz-se $\sin x = t$, • se $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ faz-se $\tan x = t$, (sendo então, se $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$), • nos restantes casos (e até nos anteriores) faz-se $\tan\frac{x}{2} = t$, (sendo então, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$)
$R(\sin(mx), \cos(mx))$	$mx = t$
$R(e^x, \sinh x, \cosh x)$	$x = \ln t$
$R(\sinh x, \cosh x)$	• se $R(-\sinh x, \cosh x) = -R(\sinh x, \cosh x)$ faz-se $\cosh x = t$, • se $R(\sinh x, -\cosh x) = -R(\sinh x, \cosh x)$ faz-se $\sinh x = t$, • se $R(-\sinh x, -\cosh x) = R(\sinh x, \cosh x)$ faz-se $\tanh x = t$, (sendo então, $\sinh x = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$, $\cosh x = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$), • nos restantes casos (e até nos anteriores) faz-se $\tanh\frac{x}{2} = t$, (sendo então, $\sinh x = \frac{2t}{1-t^2}$, $\cosh x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$)
$R(\sinh(mx), \cosh(mx))$	$mx = t$

Aqui, a, b, c e d são constantes reais. A notação $R(\cdots)$ denota uma função racional (envolvendo apenas somas, diferenças, produtos e quocientes) do que está entre parêntesis.

Séries numéricas de termos não-negativos

Teorema (Critério do Integral). Seja f uma função contínua, positiva e decrescente em $[1,+\infty[$ e seja $a_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente se, e só se, o integral impróprio $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ for convergente. Por outras palavras,

(i) se o integral impróprio $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ for convergente, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente;

(ii) se o integral impróprio $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ for divergente, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente;

Observação. No critério do integral não é necessário que f esteja definida em $[1,+\infty[$, assim como não é necessário que a série comece em $n=1$. Podemos considerar uma função f contínua, positiva e decrescente em $[p,+\infty[$, com $p \in \mathbb{N}$, $a_n = f(n)$, $n \geq p$. Então a série $\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$ é convergente se, e só se, o integral impróprio $\int_p^{+\infty} f(x)\,dx$ for convergente.

Teorema (Primeiro Critério de Comparação). Sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ duas séries de termos <u>não-negativos</u>. Suponhamos que existe $M > 0$ tal que

$$0 \leq a_n \leq M b_n, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \quad \text{Então,}$$

(i) se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ for convergente, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ também é convergente;

(ii) se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ for divergente, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ também é divergente.

Teorema (Segundo Critério de Comparação). Sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ duas séries numéricas com $a_n \geq 0$ e $b_n > 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$. Seja $\lambda = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n}$ (que supomos existir). Então

(i) se $\lambda \in]0,+\infty[$, as séries $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ são da mesma natureza (ambas convergentes ou ambas divergentes);

(ii) se $\lambda = 0$ e

- (a) se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ for convergente, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ também é convergente;
- (b) se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ for divergente, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ também é divergente.

(iii) se $\lambda = +\infty$ e

- (a) se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ for convergente, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ também é convergente;
- (b) se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ for divergente, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ também é divergente.

Séries absolutamente convergentes

Definição. Uma série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é dita absolutamente convergente se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ de termos não-negativos (série dos módulos) for convergente.

Teorema. Se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ for absolutamente convergente, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ também é convergente. Além disso,

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|.$$

Teorema (Critério de Cauchy ou Teste da Raiz)**.** Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série numérica e suponhamos que existe o limite

$$\lambda = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

(i) Se $\lambda \in [0,1[$, então série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é absolutamente convergente.

(ii) Se $\lambda > 1$ ou $\lambda = +\infty$ ou $\lambda = 1^+$ (limite igual a 1, mas por valores superiores a 1), então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente.

(iii) Se $\lambda = 1$, nada se pode concluir sobre a natureza da série (a não ser que $\lambda = 1^+$ — ver alínea anterior).

Teorema (Critério de D'Alembert ou Teste da Razão)**.** Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série numérica de termos não nulos ($a_n \neq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$) e suponhamos que existe o limite

$$\lambda = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

(i) Se $\lambda \in [0,1[$, então série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é absolutamente convergente.

(ii) Se $\lambda > 1$ ou $\lambda = +\infty$ ou $\lambda = 1^+$ (limite igual a 1, mas por valores superiores a 1), então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente.

(iii) Se $\lambda = 1$, nada se pode concluir sobre a natureza da série (a não ser que $\lambda = 1^+$ — ver alínea anterior).

Séries simplesmente convergentes

Definição. Uma série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é dita condicionalmente convergente ou simplesmente convergente se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ for convergente e $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ for divergente.

Definição. Uma série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diz-se alternada se $a_n = (-1)^n b_n$, com $b_n \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$ ou $a_n = (-1)^{n+1} b_n$, com $b_n \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$. Ou seja, uma série é alternada se os seus termos tiverem sinal alternado (por exemplo: positivo, negativo, positivo, negativo,...)

Teorema (Critério de Leibniz ou Critério das Séries Alternadas)**.** Consideremos a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ com $a_n = (-1)^n b_n$ ou $a_n = (-1)^{n+1} b_n$, com $b_n \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$. Se

(i) a sucessão b_n for decrescente (em sentido lato), isto é:

$$b_n \geq b_{n+1}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

(ii) $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$,

então a série alternada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente.