①

Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro		Matemática Discreta
Teste 2, 29 de Junho de 2022, Duração: **1h30m**	**3**	Classificação: ______
Exame final — questão 5		
Nome: ______		Nrº Mec.: ______
Curso: ______		Turma: ______
Declaro que desisto: ______		Folhas supl.: ______

(3) Considere a sucessão $(a_n)_{n\geq 0}$, onde $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + 3$, para $n \geq 2$. Determine uma fórmula não recursiva para a_n.

Equação característica e raízes características:

$$x^n = 4x^{n-1} - 4x^{n-2} \Leftrightarrow x^n - 4x^{n-1} + 4x^{n-2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^{n-2}(x^2 - 4x + 4) = 0 \overset{\text{porque } x \neq 0}{\Longleftrightarrow} \boxed{x^2 - 4x + 4 = 0}$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ (multiplicidade 2)}$$

Solução geral da $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$

$$a_n^{(h)} = (c_1 + c_2 n)2^n, \quad c_1, c_2 - \text{constantes}$$

Solução particular de $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + 3$

Como 3 é um polinómio de grau 0 e 1 não é raiz característica, uma solução particular é do tipo

$$a_n^{(p)} = A, \quad A - \text{constante}$$

$$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + 3 \Rightarrow A = 4A - 4A + 3$$

$$\Updownarrow$$

$$A = 3$$

$$a_n^{(p)} = 3$$

(2)

Solução geral de $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + 3$

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = (c_1 + c_2 n) 2^n + 3$$

Determinação das constantes c_1 e c_2:

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 + 3 = 1 \\ 2c_1 + 2c_2 + 3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = -2 \\ -4 + 2c_2 + 3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = -2 \\ c_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Solução:

$$a_n = \left(-2 + \tfrac{1}{2} n\right) 2^n + 3, \quad n \geq 0$$

Alternativa: aplicar o método da série geradora

$$\mathcal{A} = \sum_{n\geq 0} a_n x^n = 1 + \sum_{n\geq 2} (4a_{n-1} - 4a_{n-2}) x^n$$

$$+ 3\sum_{n\geq 2} x^n = 1 + 4x \sum_{n\geq 2} a_{n-1} x^{n-1} - 4x^2 \sum_{n\geq 2} a_{n-2} x^{n-2}$$

$$+ 3x^2 \sum_{n\geq 2} x^{n-2} = 1 + 4x \sum_{n\geq 1} a_n x^n - 4x^2 \sum_{n\geq 0} a_n x^n$$

$$+ 3x^2 \underbrace{\sum_{n\geq 0} x^n}_{=\frac{1}{1-x}} = 1 + 4x(\mathcal{A} - \underset{a_0}{1}) - 4x^2 \mathcal{A} + \frac{3x^2}{1-x}$$

$$= 1 - 4x + \frac{3x^2}{1-x} + (4x - 4x^2)\mathcal{A}$$

Daqui obtém-se,

$$(1 - 4x + 4x^2)\mathcal{A} = \frac{(1-4x)(1-x) + 3x^2}{1-x} \iff \mathcal{A} = \frac{1 - 5x + 7x^2}{(1-x)(1-2x)^2}$$

Cálculos auxiliares:

$$\frac{1-5x+7x^2}{(1-x)(1-2x)^2} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1-2x} + \frac{Cx}{(1-2x)^2}$$

Daqui obtém-se

$$A(1-2x)^2 + B(1-x)(1-2x) + Cx(1-x) = 1-5x+7x^2$$

$$\Leftrightarrow A(1-4x+4x^2) + B(1-3x+2x^2) + Cx - Cx^2 = 1-5x+7x^2$$

$$\Leftrightarrow (A+B) + (-4A-3B+C)x + (4A+2B-C)x^2 = 1-5x+7x^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ -4A-3B+C=-5 \\ 4A+2B-C=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1-B \\ -4+4B-3B+C=-5 \\ 4-4B+2B-C=7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\hphantom{B+C}} \\ B+C=-1 \\ -2B-C=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\hphantom{C=-1-B}} \\ C=-1-B \\ -2B+1+B=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=3 \\ C=1 \\ B=-2 \end{cases}$$

Então

$$\mathcal{A} = \frac{3}{1-x} - \frac{2}{1-2x} + \frac{x}{(1-2x)^2}$$

$$= 3\sum_{n\geq 0} x^n - 2\sum_{n\geq 0} 2^n x^n + \sum_{n\geq 0} \overbrace{\binom{n+1}{n}}^{=n+1} 2^n x^{n+1}$$

substituir n por n-1

$$= \sum_{n\geq 0} (3-2\cdot 2^n)x^n + \sum_{n\geq 1} n2^{n-1}x^n = (3-2(2^0))$$

$$+ \sum_{n\geq 1} (3-2(2^n)+n2^{n-1})x^n = 1 + \sum_{n\geq 1} (3-2^{n+1}+n2^{n-1})x^n$$

Como para $n=0$,

$$3-2^{0+1}+0\,2^{0-1}=3-2=1$$

então

$$f_0=\sum_{n\geq 0}\left(3-2^{n+1}+n2^{n-1}\right)x^n$$

concluindo-se que

$$a_n=3-2^{n+1}+n2^{n-1}, \text{ para } n\geq 0.$$

OBS:

Note-se que $a_n = 3+2^n\left(-2+n2^{-1}\right)$
$= 3+2^n\left(-2+\frac{n}{2}\right)$,

obtendo-se a mesma expressão que foi obtida através do método da equação caraterística.