

MD 2021/2022: TESTE 2 QUESTÃO 1 (EXAME FINAL Q4)

(a) Conjunto das carruagens do comboio  $X$ ,  $|X| = 14 = n$

$n_1 = 4$  carruagens de primeira classe (indistinguíveis)

$n_2 = 7$  " " segunda classe ( " )

$n_3 = 1$  " restaurante ( " )

$n_4 = 2$  " de bagagem ( " )

$$|X| = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$$

Para formar seqüências diferentes com os 4 tipos de carruagens começamos, por exemplo, por escolher os lugares para as carruagens  $n_1$ ,  $\binom{n}{n_1} = \binom{14}{4}$ , entre os restantes  $n - n_1 = 10$  lugares escolhemos 7

para as carruagens  $n_2$ ,  $\binom{n - n_1}{n_2} = \binom{10}{7}$ , dos restantes

$n - n_1 - n_2 = 3$  lugares escolhemos 1 para a carruagem  $n_3$ ,

$\binom{n - n_1 - n_2}{n_3} = \binom{3}{1}$ , sobrando  $n - n_1 - n_2 - n_3 = 2$  lugares

onde devem estar as carruagens  $n_4$ ,  $\binom{n - n_1 - n_2 - n_3}{n_4} = \binom{2}{2}$ ,

pelo que, o número de possíveis seqüências, sem restrições, é

$$\binom{14}{4} \binom{10}{7} \binom{3}{1} \binom{2}{2} = \frac{14!}{4! 10!} \frac{10!}{7! 3!} \frac{3!}{1! 2!} \frac{2!}{2! 0!} = \frac{14!}{4! 7! 1! 2!}$$

$$= \binom{n}{n_1 n_2 n_3 n_4}, \text{ número de permutações com repetições de elementos } n_1, n_2, n_3, n_4.$$

Coincide com o número de seqüências  $(A_1, A_2, A_3, A_4)$  de 4 subconjuntos de  $X$  dois a dois disjuntos com  $|A_i| = n_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ .

(b) Com as carruagens de primeira classe juntas tem-se um só bloco com  $n_1^* = 1$  podendo proceder-se de modo análogo, como em (a), vindo  $n_1^* + n_2 + n_3 + n_4 = 11$ , donde, o número de seqüências diferentes de carruagens é

$$\underbrace{\binom{11}{1}}_{11} \binom{10}{7} \binom{3}{1} \binom{2}{2} = \frac{11!}{1! 7! 1! 2!} = \binom{11}{1 7 1 2}.$$