2015/2016
Teste 1

1.

a) É Reflexiva: pois a página Web tem tantos visitantes como si própria logo xRx

b) É simétrica: pois se x tem tantos visitantes como a página y, y tem tantos visitantes com y: $xRy \Rightarrow yRx$

c) Não é antisimétrica: pois se ~~ti~~ considerar duas páginas diferentes x e y, tal que ~~xy~~ tem tantos visitantes como y, então tem-se que:

$$xRy \wedge yRx \Rightarrow x=y$$
$$1 \wedge 1 \Rightarrow 0$$
$$1 \Rightarrow 0$$

Implicação falsa

d) É transitiva: se x tem tantos visitantes com y e y tantos quanto z, então x tem tantos quanto z

$$xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$$

2.

a)

i) Não é injetiva pois $\cos(2\pi)=1=\cos(0)$ mas $2\pi \neq 0$

ii) Para ser sobrejetiva, $\forall y \in \mathbb{R}\ \exists x: f(x)=y$

Se $y=2$, $f(x)=2 \Leftrightarrow \cos(x)=2$ condição impossível

b) $f(x)=1 \Leftrightarrow \cos(x)=1 \Leftrightarrow$ ~~$2k\pi=1$, $k\in\mathbb{Z}$~~ $x=2k\pi$

$$g: \mathbb{Z} \to A \quad \text{bijetiva}$$
$$k \to 2k\pi$$

$i: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ (slides) bijetiva

$$i=\begin{cases} 2(n+1), \text{ se } n\geq 0 \\ -(2n+1), \text{ se } n<0 \end{cases}$$

Sendo $h=g^{-1}$ $\quad h: A \to \mathbb{Z}$
$$x \to \frac{x}{2\pi}$$

$(h \circ i)(x)$ é bijetiva pois é uma função composta por duas funções bijetivas

4

a) Se $n=1$

$$\sum_{k=0}^{1} 3^k = 3^0+3^1 = 1+3=4$$

$$\frac{3^{1+1}-1}{2} = \frac{9-1}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\sum_{k=0}^{n} 3^k = \frac{3^{n+1}-1}{2} \Rightarrow \sum_{k=0}^{n+1} 3^k = \frac{3^{n+2}-1}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} 3^k = 3^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} 3^k = 3^{n+1} + \frac{3^{n+1}-1}{2} = \frac{2\cdot 3^{n+1}+3^{n+1}-1}{2} = \frac{3^{n+1}(2+1)-1}{2} = \frac{3^{n+2}-1}{2}$$ ✓

b)

Há 2 cores, para ter pelo menos 3 bolas da mesma cor:

$2+2+1=5$

5

$|X|=100$

$|F|=55$ $\quad |D\cap M|=15$

$|D|=45$ $\quad |M\cap F|=25$

$|M|=50$ $\quad |D\cap F|=15$

a) $|X|-|F\cup D\cup M|=0$

$|X|=|F\cup D\cup M|=100$

$|F\cup D\cup M|=|F|+|D|+|M|-|F\cap D|-|F\cap M|-|D\cap M|+|F\cap M\cap D|$

$100=55+45+50-15-25-15+|F\cap M\cap D|$

$100-95=|F\cap M\cap D|$

$|F\cap M\cap D|=5$

b) $|D|-|D\cap M|-|D\cap F|+|D\cap F\cap M|=45-15-15+5=20$

6

a) $\pi(\alpha)=\lambda$ $\quad \pi(\beta)=c$ $\quad \pi(\delta)=\delta$

$\pi(\lambda)=\kappa$ $\quad \pi(c)=a$

$\pi(\kappa)=\theta$ $\quad \pi(a)=\beta$

$\pi(\theta)=d$

$\pi(d)=b$

$\pi(b)=\alpha$

$\{\{\alpha,\lambda,\kappa,\theta,d,b\},\{c,a,\beta\},\{\delta\}\}$ $\quad 1^1 3^1 5^1$

b) $sgn(\pi)=(-1)^1=-1$

par

7

a)

a	b	c
d	e	f

$~~10~~\ 10^6$

b) $10\times 9\times 8\times 10^3$

Exame Final ~~2010/2011~~

1

1.1. $S=\{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\}$

$R=\{(1,2),(1,1),(2,2),(2,1),(3,3),(4,4),(4,3),(3,4),(5,5),(6,6),(5,6),(6,5)\}$

1.2. R é reflexiva porque x pertence ao mesmo grupo S que ele ~~p~~ próprios $\Rightarrow xRx$

É simétrica, se x pertence ao mesmo grupo que y, então y pertence ao mesmo grupo que ~~y~~ x, logo

$$xRy \Rightarrow yRx$$

É transitiva, se x pertence ao mesmo conjunto que y e y ao mesmo que z, então, x pertence ao mesmo conjunto que z

$$xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$$

2

2.1. Por indução

$$P(n) = \frac{(2n)!}{n!} = 2 \times 6 \times 10 \times \ldots (4n-2) = M(n)$$

$$P(1) = \frac{(2 \cdot 1)!}{1!} = \frac{2!}{1} = 2$$

$M(1) = 2$

$$P(1) = M(1)$$

$$(P(n) = M(n)) \Rightarrow (P(n+1) = M(n+1))$$

$$\cancel{P(n+1)}$$

$$M(n+1) = \overbrace{2 \times 6 \times 10 \times \ldots \times (4n-2)}^{P(n)} \times (4(n+1)-2))$$

$$= \frac{(2n)!}{n!} \times (4n+2) =$$

$$= \frac{(2n)!}{n!} \times 2(2n+1) = \frac{(2n+1)!}{n!} \times \frac{2 \times (n+1)}{(n+1)}$$

$$= \frac{(2n+1)! \times (2n+2)}{(n+1)!} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!} = \frac{(2(n+1))!}{(n+1)!} = P(n+1)$$

2.2. ~~Num conjunto de 15 inteiros~~

Para que a diferença entre 2 números, a e b, seja múltiplo de 14, então

$$a - b = 14n \quad , n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow a - b = 14, 21, 42, \ldots$$

~~Assim, escolhendo 15 números ao acaso~~

Assim, entre os múltiplos de 14, existem 13 possíveis diferenças, ou seja, ~~escolhendo~~ 14 números cuja diferença nunca será igual a 14.

Ao escolher 15 números, garante-se que pelo menos 1 deles tenha uma diferença de $14n$

4. Se todas as crianças receberam pelo menos ~~10~~ 1 rebuçado, existem 13 rebuçados que sobram, portanto

$$\binom{13+7-1}{13} \times \{7^{10}$$

ER

1, 2, 3 Foi feito ~~[illegible]~~

4.

a) $\cancel{A}\ {}^{10}A_3$

b) $3 \times {}^{9}A_2$