1

a) $\forall x \left(\text{Filo}(x) \to \exists y \left(\text{Livro}(x) \wedge \text{Escrever}(x,y)\right)\right)$

b) $\forall x \forall y \big((\text{Filo}(x) \wedge \text{AlunoDe}(x,y))$

$\to \exists z\, (\text{Livro}(z) \wedge \text{Escrever}(y,z)$

$\wedge \text{Ler}(x,z))\big)$

2 Aqui consideremos

- $\varphi_1 = \forall x \exists y\, (P(x,y) \wedge Q(x,y))$

Introduzimos o símbolo de função f de um argumento:

$$\forall x \left(P(x,f(x)) \wedge Q(x,f(x))\right)$$

- $\varphi_2 \equiv \forall x \big((\neg \exists y P(x,y)) \vee (\neg \exists z\, Q(x,z))$

$\vee (\exists w\, R(x,w))\big)$

$\equiv \forall x \exists w \forall y \forall z\, (\neg P(x,y) \vee \neg Q(x,z) \vee R(x,w))$

Introduzimos o símbolo de função g de uma variável:

$$\forall x \forall y \forall z (\neg P(x,y) \vee \neg Q(x,z) \vee R(x, g(x))$$

Finalmente, consideremos

$$\neg \psi \equiv \exists x \forall w \neg R(x,w)$$

Introduzimos o símbolo de constante c:

$$\forall w \neg R(c,w)$$

Portanto, obtém-se as cláusulas

$$P(x_1, f(x_1)) \ , \ Q(y_1, f(y_1))$$

$$\neg P(x_2, y_2) \vee \neg Q(x_2, z_2) \vee R(x_2, g(x_2)),$$

$$\neg R(c,w)$$

A dedução:

1) $P(x_1, f(x_1))$ H

2) $\neg P(x_2, y_2) \vee \neg Q(x_2, z_2) \vee R(x_2, g(x_2))$ H

3) $\neg Q(x_2, z_2) \vee R(x_2, g(x_2))$

Res(1,2),

$mgu(P(x_1, f(x_1)), P(x_2, y_2))$

$= \{x_2/x_1, f(x_1)/y_2\}$

4) $Q(y_1, f(y_1))$ H

5) $R(y_1, g(y_1))$ Res(3,4)

$mgu(Q(x_2, z_2), Q(y_1, f(y_1)))$

$= \{y_1/x_2, f(y_1)/z_2\}$

6) $\neg R(c, w)$ H

7) $\bot$ Res(5,6)

$mgu(R(y_1, g(y_1)), R(c, w)) = \{c/y_1, g(c)/w\}$

Assim, podemos concluir que

$$\{\varphi_1, \varphi_2, \neg\psi\}$$

é inconsistente, portanto,

$$\varphi_1, \varphi_2 \models \psi,$$

Parte B

3. **Resolução 1:**
   Número de maneiras de escolher um livro em francês e um livro em espanhol: $5 \times 7 = 35$
   Número de maneiras de escolher um livro em francês e um livro em português: $5 \times 11 = 55$
   Número de maneiras de escolher um livro em espanhol e um livro em português: $7 \times 11 = 77$
   Número de maneiras de escolher dois livros em línguas diferentes:

$$5 \times 7 + 5 \times 11 + 7 \times 11 = 35 + 55 + 77 = 167.$$

   Resolução 2:
   Número de maneiras de escolher dois livros: $\binom{5+7+11}{2} = \binom{23}{2} = \frac{23\times 22}{2} = 23 \times 11 = 253$
   Número de maneiras de escolher dois livros em francês: $\binom{5}{2} = 10$
   Número de maneiras de escolher dois livros em espanhol: $\binom{7}{2} = 21$
   Número de maneiras de escolher dois livros em português: $\binom{11}{2} = 55$
   Número de maneiras de escolher dois livros em línguas diferentes:

$$\binom{23}{2} - \binom{5}{2} - \binom{7}{2} - \binom{11}{2} = 253 - 10 - 21 - 55 = 167.$$

4. (a) $\binom{4+7+1+2}{4\,,\,7\,,\,1\,,\,2} = \binom{14}{4\,,\,7\,,\,1\,,\,2} = \dfrac{14!}{4!7!2}$.
   (b) $\binom{1+7+1+2}{1\,,\,7\,,\,1\,,\,2} = \binom{11}{1\,,\,7\,,\,1\,,\,2} = \dfrac{11!}{7!2}$.

5. O número de soluções pedido é o mesmo que o número de soluções da equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15 - 3 = 12$$

   com $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{N}$ e $x_1 \leq 2$.

   Resolução 1: Notamos que $x_1 \in \{0, 1, 2\}$.
   Quando $x_1 = 0$, a equação $x_2 + x_3 + x_4 = 12$ tem $\left(\!\binom{3}{12}\!\right) = \binom{3+12-1}{12} = \binom{14}{12} = \frac{14\times 13}{2} = 91$ soluções.
   Quando $x_1 = 1$, a equação $x_2 + x_3 + x_4 = 12 - 1 = 11$ tem $\left(\!\binom{3}{11}\!\right) = \binom{3+11-1}{11} = \binom{13}{11} = \frac{13\times 12}{2} = 78$ soluções.
   Quando $x_2 = 2$, a equação $x_2 + x_3 + x_4 = 12 - 2 = 10$ tem $\left(\!\binom{3}{10}\!\right) = \binom{3+10-1}{10} = \binom{12}{10} = \frac{12\times 11}{2} = 66$ soluções.
   Número de soluções que satisfazem as condições do enunciado:

$$\left(\!\binom{3}{12}\!\right) + \left(\!\binom{3}{11}\!\right) + \left(\!\binom{3}{10}\!\right) = 91 + 78 + 66 = 235.$$

   Resolução 2: O número de soluções da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$ é

$$\left(\!\binom{4}{12}\!\right) = \binom{4+12-1}{12} = \binom{15}{12} = \frac{15 \times 14 \times 13}{3 \times 2} = 5 \times 7 \times 13 = 455.$$

   O número de soluções da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$ em que $x_1 \geq 3$ é o mesmo que o número de soluções da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12 - 3 = 9$, ou seja,

$$\left(\!\binom{4}{9}\!\right) = \binom{4+9-1}{9} = \binom{12}{9} = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2} = 2 \times 11 \times 10 = 220.$$

   Número de soluções que satisfazem as condições do enunciado:

$$\left(\!\binom{4}{12}\!\right) - \left(\!\binom{4}{9}\!\right) = 455 - 220 = 235.$$

6 a) Se existissem 9 pessoas com alturas distintas então era possível escolher um conjunto de 9 pessoas com alturas diferentes. Logo existem no máximo 8 alturas diferentes.

$$\begin{array}{ccc} f: X & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{pessoas} & & \text{alturas} \end{array} \quad \text{não injetiva}$$

$$|A| < |X| = 9$$

b) Seja P o conjunto das 33 pessoas

$$|P| = 33 > 4 \cdot 8$$

Pelo princípio da gaiola de pombos generalizado, existem pelo menos 5 pessoas com a mesma altura.

7. $M_i = \{$ multiplos de i inferiores a 2001 $\}$

$$|M_3 \cup M_4| = |M_3| + |M_4| - |M_3 \cap M_4|$$

$$= \left\lfloor \frac{2000}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2000}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2000}{12} \right\rfloor$$

$$= 666 + 500 - 166 = 1000$$

$$|(M_3 \cup M_4) \cap M_5| = |(M_3 \cap M_4) \cup (M_4 \cap M_5)|$$

$$= |M_3 \cap M_4| + |M_4 \cap M_5| - |M_3 \cap M_4 \cap M_5|$$

$= \left\lfloor \frac{2000}{12} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2000}{20} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2000}{60} \right\rfloor = 133 + 100 - 33$

$= 200$

$|(M_3 \cap M_4) \cap \overline{M_5}| = 1000 - 200 = 800$

Resposta: 800 números.