Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Matemática II-Engenharias Química e de Materiais

Tabelas de Primitivas

PRIMITIVAS IMEDIATAS

Na lista de primitivas que se segue considera-se uma função $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável em I, onde I é um intervalo de $\mathbb{R}$. Além disso, denotamos por C a constante de primitivação (arbitrária) e por a uma constante.

Função	Primitiva
a	$ax + C$
$f^m \cdot f'$	$\dfrac{f^{m+1}}{m+1} + C \ (m \in \mathbb{R}\backslash\{-1\})$
$\dfrac{f'}{f}$	$\ln\lvert f\rvert + C$
$a^f \cdot f'$	$\dfrac{a^f}{\ln a} + C \ (a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\})$

Função	Primitiva
$f' \cdot \operatorname{sen} f$	$-\cos f + C$
$f' \cdot \cos f$	$\operatorname{sen} f + C$
$f' \cdot \operatorname{tg} f$	$-\ln\lvert\cos f\rvert + C$
$f' \cdot \operatorname{cotg} f$	$\ln\lvert\operatorname{sen} f\rvert + C$
$f' \cdot \sec f$	$\ln\lvert\sec f + \operatorname{tg} f\rvert + C$
$f' \cdot \operatorname{cosec} f$	$\ln\lvert\operatorname{cosec} f - \operatorname{cotg} f\rvert + C$
$f' \cdot \sec^2 f$	$\operatorname{tg} f + C$
$f' \cdot \operatorname{cosec}^2 f$	$-\operatorname{cotg} f + C$
$f' \cdot \sec f \cdot \operatorname{tg} f$	$\sec f + C$
$f' \cdot \operatorname{cosec} f \cdot \operatorname{cotg} f$	$-\operatorname{cosec} f + C$
$\dfrac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$	$\operatorname{arc\,sen} f + C$ ou $-\operatorname{arc\,cos} f + C$
$\dfrac{f'}{1+f^2}$	$\operatorname{arc\,tg} f + C$ ou $-\operatorname{arc\,cotg} f + C$
$\dfrac{f'}{\lvert f\rvert \cdot \sqrt{f^2-1}}$	$\operatorname{arc\,sec} f + C$ ou $-\operatorname{arc\,cosec} f + C$

Função	Primitiva
$f' \cdot \operatorname{senh} f$	$\cosh f + C$
$f' \cdot \cosh f$	$\operatorname{senh} f + C$
$f' \cdot \operatorname{tgh} f$	$\ln\lvert\cosh f\rvert + C$
$f' \cdot \operatorname{cotgh} f$	$\ln\lvert\operatorname{senh} f\rvert + C$
$f' \cdot \operatorname{sech}^2 f$	$\operatorname{tgh} f + C$
$f' \cdot \operatorname{cosech}^2 f$	$-\operatorname{cotgh} f + C$
$f' \cdot \operatorname{sech} f \cdot \operatorname{tgh} f$	$-\operatorname{sech} f + C$
$f' \cdot \operatorname{cosech} f \cdot \operatorname{cotgh} f$	$-\operatorname{cosech} f + C$
$\dfrac{f'}{\sqrt{1+f^2}}$	$\operatorname{arg\,senh} f + C$
$\dfrac{f'}{\sqrt{f^2-1}}$	$\operatorname{arg\,cosh} f + C$
$\dfrac{f'}{1-f^2}$	$\operatorname{arg\,tgh} f + C$, se $\lvert f(x)\rvert < 1$ ou $\operatorname{arg\,cotgh} f + C$, se $\lvert f(x)\rvert > 1$
$\dfrac{f'}{\lvert f\rvert \cdot \sqrt{1-f^2}}$	$-\operatorname{arg\,sech} f + C$
$\dfrac{f'}{\lvert f\rvert \cdot \sqrt{1+f^2}}$	$\operatorname{arg\,cosech} f + C$

PRIMITIVAÇÃO POR PARTES

$$\int f(x)\cdot g(x)\,dx = F(x)\cdot g(x) - \int F(x)\cdot g'(x)\,dx,$$

sendo F uma primitiva de f.

REGRAS DE PRIMITIVAÇÃO

Potências de funções trigonométricas e hiperbólicas

1. *Potências ímpares de* $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{senh} x$ *e* $\cosh x$.

   Destaca-se uma unidade à potência ímpar e o factor resultante passa-se para a co-função através das fórmulas fundamentais:

$$\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1, \qquad \cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1.$$

2. *Potências pares de* $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{senh} x$ *e* $\cosh x$.

   Passam-se para o arco duplo através das fórmulas:

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x), \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

$$\operatorname{senh}^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1) \qquad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1).$$

3. *Potências pares e ímpares de* $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$, $\operatorname{tgh} x$ *e* $\operatorname{cotgh} x$.

   Destaca-se $\operatorname{tg}^2 x$ ($\operatorname{tgh}^2 x$) ou $\operatorname{cotg}^2 x$ ($\operatorname{cotgh}^2 x$) e aplica-se uma das fórmulas:

$$\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1 \qquad (\operatorname{tgh}^2 x = 1 - \operatorname{sech}^2 x)$$

$$\operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x - 1 \qquad (\operatorname{cotgh}^2 x = 1 + \operatorname{cosech}^2 x).$$

4. *Potências pares de* $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$, $\operatorname{sech} x$ *e* $\operatorname{cosech} x$.

   Destaca-se $\sec^2 x$ ($\operatorname{sech}^2 x$) ou $\operatorname{cosec}^2 x$ ($\operatorname{cosech}^2 x$) e ao factor resultante aplica-se uma das fórmulas:

$$\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x \qquad (\operatorname{sech}^2 x = 1 - \operatorname{tgh}^2 x)$$

$$\operatorname{cosec}^2 x = 1 + \operatorname{cotg}^2 x \qquad (\operatorname{cosech}^2 x = \operatorname{cotgh}^2 x - 1).$$

5. *Potências ímpares de* $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$, $\operatorname{sech} x$ *e* $\operatorname{cosech} x$.

   Destaca-se $\sec^2 x$ ($\operatorname{sech}^2 x$) ou $\operatorname{cosec}^2 x$ ($\operatorname{cosech}^2 x$) e primitiva-se por partes começando por esse factor.

Produtos de potências das funções $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ ($\operatorname{senh} x$ e $\cosh x$)

1. *Potência ímpar de* $\operatorname{sen} x$ *(*$\operatorname{senh} x$*) por qualquer potência de* $\cos x$ *(*$\cosh x$*).*

   Destaca-se $\operatorname{sen} x$ ($\operatorname{senh} x$) e passa-se o factor resultante para a co-função, através da fórmula fundamental:

$$\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x \qquad (\operatorname{senh}^2 x = \cosh^2 x - 1).$$

2. *Potência ímpar de* $\cos x$ *(*$\cosh x$*) por qualquer potência de* $\operatorname{sen} x$ *(*$\operatorname{senh} x$*).*

   Destaca-se $\cos x$ ($\cosh x$) e passa-se o factor resultante para a co-função, através da fórmula fundamental:

$$\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x \qquad (\cosh^2 x = 1 + \operatorname{senh}^2 x).$$

3. *Potência par de* $\operatorname{sen} x$ *(*$\operatorname{senh} x$*) por potência par de* $\cos x$ *(*$\cosh x$*).*

   Aplicam-se as fórmulas:

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x \qquad (\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x)$$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \qquad \left(\operatorname{senh}^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}\right)$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \qquad \left(\cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2}\right).$$

Produtos em que aparecem factores do tipo $\operatorname{sen} mx$ ou $\cos nx$, ou produtos em que aparecem factores do tipo $\operatorname{senh} mx$ ou $\cosh nx$

Aplicam-se as fórmulas:

$$\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \tfrac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)) \qquad \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y = \tfrac{1}{2}(\cosh(x+y) - \cosh(x-y))$$

$$\cos x \cos y = \tfrac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y)) \qquad \cosh x \cosh y = \tfrac{1}{2}(\cosh(x+y) + \cosh(x-y))$$

$$\operatorname{sen} x \cos y = \tfrac{1}{2}(\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y)) \qquad \operatorname{senh} x \cosh y = \tfrac{1}{2}(\operatorname{senh}(x+y) + \operatorname{senh}(x-y))$$

FRACÇÕES RACIONAIS

Consideremos a fracção $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, em que $f(x)$ e $g(x)$ são polinómios.

1. *Se o grau do numerador for maior ou igual ao grau do denominador, efectua--se a divisão de* $f(x)$ *por* $g(x)$; obtém-se então

$$\frac{f(x)}{g(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{g(x)},$$

   sendo agora $\dfrac{R(x)}{g(x)}$ uma fracção própria.

2. *Decompõe-se o denominador da fracção própria em factores*; os factores obtidos são da forma

$$(x-a)^m,$$

   correspondendo a raízes reais a de multiplicidade m, ou da forma

$$[(x-p)^2 + q^2]^n,$$

   correspondendo estes às raízes complexas $p \pm qi$ de multiplicidade n.

3. *Decompõe-se então a fracção própria numa soma de elementos simples*, de acordo com os factores obtidos:

   (a) cada factor do tipo $(x-a)^m$ dá origem a

   $$\frac{A_1}{(x-a)^m}+\frac{A_2}{(x-a)^{m-1}}+\ldots+\frac{A_m}{x-a},$$

   com $A_1, A_2, \ldots, A_m$ constantes a determinar;

   (b) cada factor do tipo $[(x-p)^2+q^2]^n$ dá origem a

   $$\frac{P_1\,x+Q_1}{[(x-p)^2+q^2]^n}+\frac{P_2\,x+Q_2}{[(x-p)^2+q^2]^{n-1}}+\ldots+\frac{P_n\,x+Q_n}{(x-p)^2+q^2},$$

   com $P_1, Q_1, P_2, Q_2, \ldots, P_n, Q_n$ constantes a determinar.

4. *Cálculo das constantes*

   As constantes A_i, P_i e Q_i podem ser determinadas conjuntamnete pelo método dos coeficientes indeterminados. Há no entanto uma forma alternativa de calcular essas constantes, que descrevemos em seguida.

   (a) Cálculo dos coeficientes relativos a factores do tipo $(x-a)^m$ (seja $\psi(x)$ tal que $g(x)=\psi(x)(x-a)^m$):

      i. se $m=1$, apenas temos de determinar uma constante A_1, que é dada por:

      $$A_1=\left[\frac{R(x)}{\psi(x)}\right]_{x=a}.$$

      ii. se $m>1$, efectua-se a divisão

      $$\left[\frac{R(x)}{\psi(x)}\right]_{x=a+h}$$

      dispondo os polinómios por ordem crescente dos seus monómios, até chegar ao grau $m-1$:

      $$\left[\frac{R(x)}{\psi(x)}\right]_{x=a+h}=A_1+a_2\,h+A_3\,h^2+\ldots+A_m\,h^{m-1}+\ldots$$

      onde $A_1, A_2, \ldots, A_m$ são as constantes que pretendemos determinar.

   (b) Cálculo dos coeficientes relativos a factores do tipo $[(x-p)^2+q^2]^n$ (seja $\psi(x)$ tal que $g(x)=\psi(x)[(x-p)^2+q^2]^n$):

      i. se $n=1$, obtemos as constantes P_1 e Q_1 fazendo

      $$\left[P_1\,x+Q_1=\frac{R(x)}{\psi(x)}\right]_{x=p+qi}.$$

      ii. se $n>1$, as constantes calculam-se pelo método dos coeficientes indeterminados (as constantes P_1 e Q_1 ainda podem ser obtidas como em i.).

Nota: Caso apareçam elementos simples da forma

$$\frac{1}{[(x-p)^2+c]^n},$$

com $n>1$, estes podem ser primitivados usando a seguinte fórmula de recorrência:

$$P\left(\frac{1}{[(x-p)^2+c]^n}\right)=\frac{1}{c}\left[\frac{1}{2n-2}\times\frac{x-p}{[(x-p)^2+c]^{n-1}}+\frac{2n-3}{2n-2}\times P\left(\frac{1}{[(x-p)^2+c]^{n-1}}\right)\right]$$

PRIMITIVAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO

Sejam a, b, c e d constantes reais. A notação $R(...)$ indica que se trata de uma função racional (envolvendo apenas somas, diferenças, produtos e quocientes) do que se encontra entre parêntesis.

Tipo de Função	Substituição
$\frac{1}{(x^2+a^2)^k},\ k \in \mathbb{N},\ k>1$	$x = a \operatorname{tg} t$
$\frac{P(x)}{(ax^2+bx+c)^k},\ k \in \mathbb{N},\ k>1,\ b^2-4ac<0,$ onde $P(x)$ é um polinómio de grau inferior a $2k$	$ax + \frac{b}{2} = t$
$\frac{P(x)}{((x-p)^2+q^2)^k},\ k \in \mathbb{N},\ k>1,$ onde $P(x)$ é um polinómio de grau inferior a $2k$	$x = p + qt$
$\frac{x^{k-1}}{x^{2k} \pm a^2},\ k \in \mathbb{Q},\ k>1$	$x^k = at$
$R(a^{rx}, a^{sx}, ...)$	$a^{mx} = t$ onde $m = m.d.c.(r,s,...)$
$R(\log_a x)$	$t = \log_a x$
$R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p}{q}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}, ...\right)$	$\frac{ax+b}{cx+d} = t^m$ onde $m = m.m.c.(q,s,...)$
$R(x, (ax+b)^{\frac{p}{q}}, (ax+b)^{\frac{r}{s}}, ...)$	$ax+b = t^m$ onde $m = m.m.c.(q,s,...)$
$R(x, x^{\frac{p}{q}}, x^{\frac{r}{s}}, ...)$	$x = t^m$ onde $m = m.m.c.(q,s,...)$
$R(x, \sqrt{a^2-b^2x^2})$	$x = \frac{a}{b} \operatorname{sen} t$ ou $x = \frac{a}{b} \cos t$ ou $x = \frac{a}{b} \operatorname{tgh} t$
$R(x, \sqrt{a^2+b^2x^2})$	$x = \frac{a}{b} \operatorname{tg} t$ ou $x = \frac{a}{b} \operatorname{senh} t$
$R(x, \sqrt{b^2x^2-a^2})$	$x = \frac{a}{b} \sec t$ ou $x = \frac{a}{b} \cosh t$
$R(x, \sqrt{x}, \sqrt{a-bx})$	$x = \frac{a}{b} \operatorname{sen}^2 t$ ou $x = \frac{a}{b} \cos^2 t$
$R(x, \sqrt{x}, \sqrt{a+bx})$	$x = \frac{a}{b} \operatorname{tg}^2 t$

Tipo de Função	Substituição
$R(x, \sqrt{x}, \sqrt{bx-a})$	$x = \frac{a}{b}\sec^2 t$
$R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$	se $a > 0$ faz-se $\sqrt{ax^2+bx+c} = x\sqrt{a} + t$ se $c > 0$ faz-se $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{c} + tx$ se $ax^2+bx+c = a(x-r_1)(x-r_2)$, $\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-r_1)t$ ou $\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-r_2)t$
$x^m(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$	se $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$ faz-se $a+bx^n = t^q$ se $\frac{m+1}{n} + \frac{p}{q} \in \mathbb{Z}$ faz-se $a+bx^n = x^n t^q$
$R(\operatorname{sen} x, \cos x)$:	
(a) se R é ímpar em $\operatorname{sen} x$, isto é, $R(-\operatorname{sen} x, \cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$	$\cos x = t$
(b) se R é ímpar em $\cos x$, isto é, $R(\operatorname{sen} x, -\cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$	$\operatorname{sen} x = t$
(c) se R é par em $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$, isto é, $R(-\operatorname{sen} x, -\cos x) = R(\operatorname{sen} x, \cos x)$	$\operatorname{tg} x = t$, sendo então (supondo $x \in (0, \frac{\pi}{2})$) $\operatorname{sen} x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$
(d) nos restantes casos (e até nos anteriores)	$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, sendo então $\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$
$R(\operatorname{sen} mx, \cos mx)$	$mx = t$
$R(e^x, \operatorname{senh} x, \cosh x)$	$x = \ln t$
$R(\operatorname{senh} x, \cosh x)$:	
(a) R é ímpar em $\operatorname{senh} x$	$\cosh x = t$
(b) R é ímpar em $\cosh x$	$\operatorname{senh} x = t$
(c) R é par em $\operatorname{senh} x$ e $\cosh x$	$\operatorname{tgh} x = t$, sendo então $\operatorname{senh} x = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$, $\cosh x = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
(d) nos restantes casos (e até nos anteriores)	$\operatorname{tgh} \frac{x}{2} = t$, sendo então $\operatorname{senh} t = \frac{2t}{1-t^2}$, $\cosh x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$
$R(\operatorname{senh} mx, \cosh mx)$	$mx = t$

Observação: Quando se efectua uma substituição, aparece frequentemente uma expressão do tipo $\sqrt{f^2(t)}$. No caso geral terá de se escrever

$$\sqrt{f^2(t)} = |f(t)|.$$