UNIVERSIDADE DE AVEIRO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
3810-193 AVEIRO

Mecânica e Campo Eletromagnético

Ano letivo 2015/2016

Capítulo 3. Campos elétrico e magnético

1ª serie

Distribuições de carga

1. A densidade linear de carga dum bastão de comprimento **L** é dada por : $\lambda = \lambda_0 + 2x$ (onde $0 \leq x \leq L$). Qual é a carga total do bastão?

Solução: $Q = \lambda_o L + L^2$

2. Uma placa quadrada, com 2m de lado, situada segundo os eixos **x** e **y** e com um vértice na origem, tem uma densidade superficial de carga dada por **σ**=(2-y**)** Cm^{-2}. Calcule a carga total da placa.

Solução: $Q = 4$ C

3. Um disco de raio **R** tem uma densidade de carga dada por **σ** = 3r. Calcule a carga total do disco.

Solução: $Q = 2\pi R^3$

4. Uma coroa esférica de raios $\mathbf{r_1}$ e $\mathbf{r_2}$ ($r_1 < r_2$) tem uma densidade de carga que é inversamente proporcional ao raio. Sabendo que a carga total da coroa é **Q**, obtenha uma expressão para a densidade de carga.

Solução: $\rho = \dfrac{Q}{2\pi \left(r_2^2 - r_1^2\right) r}$

Lei de Coulomb. Campo e Potencial Eléctricos

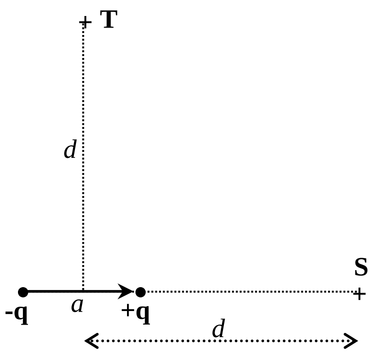
5. Quatro cargas +q,+q, –q,–q estão colocadas nos vértices dum quadrado de lado **a**.

a) Determine, para os dois casos de distribuição das cargas, o campo elétrico e o potencial no centro do quadrado.

b) Escolha uma linha apropriada e verifique que $\int_\Gamma \vec{E}.\vec{dl} = 0$

Solução: $\vec{E} = \dfrac{q\sqrt{2}}{\pi \varepsilon_o a^2}\,\hat{k}$ e $V = 0$; $\vec{E} = \vec{0}$ e $V = 0$

6. Duas cargas iguais e de sinais contrários, com uma distância constante entre si constituem um dipolo (ver figura).



a) Mostre que o campo elétrico em **S** é paralelo ao vetor $\vec{a}$, e em **T** tem o sentido contrário.

b) Determine o campo elétrico em **T** e em **S**, fazendo aproximações adequadas (***d>>a***). Introduza no resultado o vector momento dipolar elétrico, $\vec{P} = q\vec{a}$

c) Mostre que um dipolo colocado num campo elétrico uniforme $\vec{E}$ fica sujeito a um binário cujo momento é dado por $\vec{M} = \vec{P} \times \vec{E}$.

Solução: $\vec{E}(S) = \dfrac{1}{2\pi\varepsilon_o}\dfrac{\vec{p}}{d^3}$; $\vec{E}(T) = -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}\dfrac{\vec{p}}{d^3}$

7. Considere um anel de raio **R** carregado uniformemente com uma carga total **Q**.

a) Calcule o campo elétrico no centro do anel.

b) Calcule o campo elétrico num ponto do eixo do anel, distante de **d** do seu centro

i) a partir da lei de Coulomb.

ii) A partir do potencial

Solução: $\vec{E}(O) = \vec{0}$; $E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}\dfrac{Q\,d}{\left(R^2+d^2\right)^{3/2}}$; $V = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}\dfrac{Q}{\left(R^2+d^2\right)^{1/2}}$

8. Um fio semi-circular de raio **R** está uniformemente carregado com uma carga total **Q**. Encontre o vetor campo elétrico no centro de curvatura.

Solução: $E = \dfrac{Q}{2\varepsilon_o \pi^2 R^2}$

9. Determine a partir da lei de Coulomb o campo e o potencial criados por um fio infinito, carregado com uma densidade linear de carga constante λ.

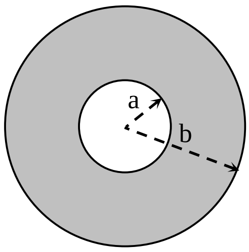
Solução: $\vec{E} = \dfrac{\lambda}{2\pi\,\varepsilon_o\, r}\,\hat{u}_r$ e $V = \dfrac{-\lambda}{2\pi\,\varepsilon_o}\ln r + const.$ há cargas no infinito…

10. Determine, a partir da lei de Coulomb o, campo e o potencial criados num ponto do eixo (à distância **x**) dum disco de raio **R**, uniformemente carregado com uma densidade superficial de carga □□□Estude o caso limite $R \to \infty$?

Solução: $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}})\,\hat{u}_x$ e $V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}(\sqrt{x^2 + R^2} - |x|)$

quando $R \to \infty,\ E \to \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ como o caso do plano infinito (σ)

11. Um anel circular, de raio interior **a** e de raio exterior **b** (a<b), tem uma densidade superficial de carga ⍰ constante.



a) Calcule o potencial num ponto P do eixo da coroa, à distância **x** do centro.

b) Deduza a expressão do campo elétrico em P.

c) Verifique que no limite em que a $\to$ 0, as expressões acima tendem para o caso do disco uniformemente carregado.

Solução:

$$V(P) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\left(\sqrt{x^2 + b^2} - \sqrt{x^2 + a^2}\right) \quad e \quad \vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + b^2}}\right)\hat{u}_x$$

12. Uma superfície hemisférica fina de raio **R**, com a base situada no plano **xy**, tem uma carga **Q** uniformemente distribuída. Encontre o campo elétrico e o potencial no centro de curvatura **O**, origem do sistema de eixos.

Solução: $\vec{E}(O) = -\frac{\sigma}{4\varepsilon_o}\,\hat{u}_z = -\frac{Q}{8\pi\varepsilon_o R^2}\,\hat{u}_z$; $V(O) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}R$

13. Um fio de comprimento **L**, centrado na origem dum sistema de eixos **xy** e paralelo a **x'x**, está carregado uniformemente com uma densidade de cargas dada por ⍰ ***Cm***$^{-1}$.

a) Determine a expressão do campo elétrico num ponto genérico ao longo do fio, fora e dentro do fio.

b) Determine o campo elétrico nos pontos que se situam ao longo da reta que é perpendicular ao fio e passa pelo ponto médio deste.

Solução: $E_{fora}(x) = \dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{1}{x-\dfrac{L}{2}} - \dfrac{1}{x+\dfrac{L}{2}}\right];$

$$E_{dentro}(x) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\dfrac{L}{2}-x} - \frac{1}{\dfrac{L}{2}+x}\right];$$

$$E(y) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{L}{y\left(L^2+4y^2\right)^{1/2}}\right]$$

Aplicações do teorema de Gauss

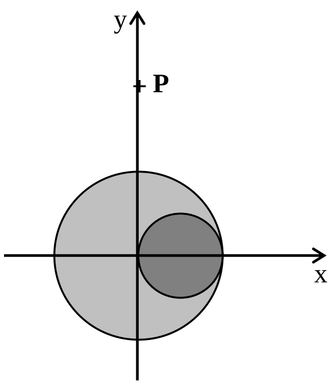
14. Uma esfera de centro A e de raio **a** está carregada com uma densidade volúmica uniforme ρ, exceto numa cavidade esférica de centro B e de raio **b,** que não contem cargas. Mostre que o campo eléctrico dentro da cavidade é uniforme e encontre uma expressão para ele.

Solução: $\vec{E} = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_o}\vec{AB}$

15. Linhas de *força* emergem radialmente duma superfície esférica e têm uma densidade uniforme ao longo da superfície. Quais são as possíveis distribuições de carga dentro da esfera?

Solução: $\rho(r);\ \sigma(r)$

16. Considere uma esfera isoladora de raio **R** que tem uma carga distribuída uniformemente com densidade volúmica ρ, exceto numa região esférica de raio **R/2**, como se representa na figura. Nessa região a densidade volúmica é **2**ρ.



a) Calcule o campo elétrico em qualquer ponto do eixo ***xx***. Considere as várias regiões onde o campo é diferente.

b) Calcule o campo elétrico no ponto **P** do eixo ***yy***, à distância ***2R***, do centro da esfera.

c) Qual o valor do campo elétrico no ponto ***P***, se a esfera de raio **R/2** fosse comprimida até ficar com raio nulo, mantendo a carga total das duas regiões constante.

d) Determine o fluxo através de uma esfera concêntrica com a esfera na origem, e que passa por **P**.

17. Determine o campo elétrico em qualquer ponto do espaço devido a um plano infinito uniformemente carregado:

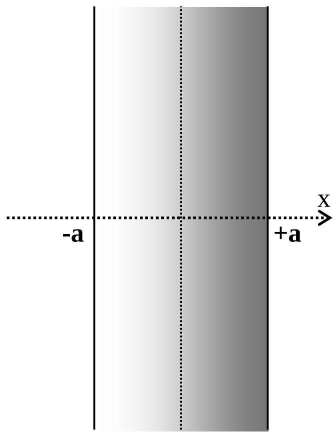
a) A partir da lei de Coulomb.

b) Usando a lei de Gauss.

Justifique o cálculo.

Solução: $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n}$

18. Considere que no espaço limitado por dois planos infinitos e paralelos (***x=a*** e ***x=-a***), existe uma distribuição de carga ⍰ =⍰**x**.



a) Determine a carga por unidade de área existente entre os planos.

b) Mostre que o campo no exterior é nulo.

c) Determine o campo em cada ponto no interior dos planos.

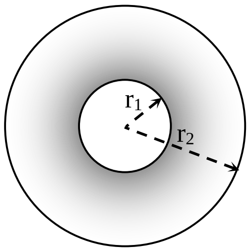
d) Represente graficamente $|\vec{E}|$ em função de ***x***.

e) Que densidade de carga σ deveria ter a superfície dos planos, sem carga no interior, para o campo ter o mesmo valor em ***x=0*** que na situação anterior?

Solução: **a)** Q=0 **b)** $\vec{E}_{ext} = \vec{0}$ **c)** $E_{int} = \frac{\alpha}{2\varepsilon_o}\left(a^2 - x^2\right)$

d) porção de parábola para $-a \le x \le +a$ **e)** $\sigma = \frac{\alpha a^2}{2}$

19. Considere uma coroa esférica de raios interno $\boldsymbol{r_1}$ e externo $\boldsymbol{r_2}$ com uma densidade de carga $\rho = \dfrac{\alpha}{r}$.



a) Determine o campo elétrico em qualquer ponto do espaço.

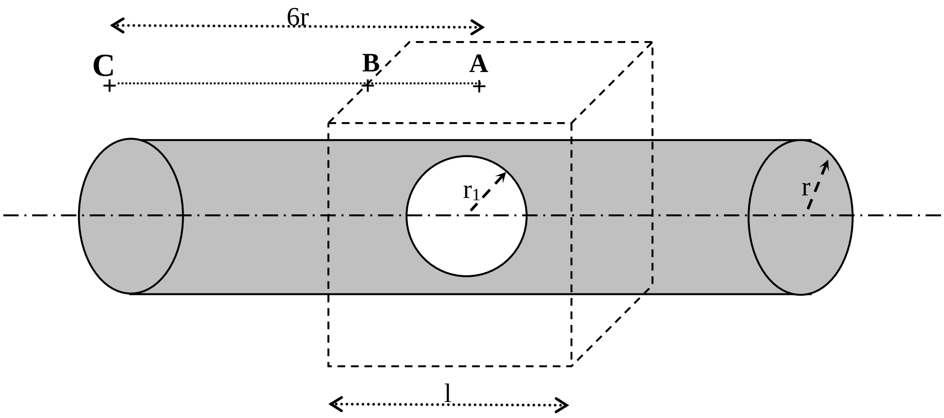
b) Que tipo de distribuição poderia criar um campo uniforme no interior da coroa esférica?

Solução: $r < r_1 \quad \Rightarrow \quad E=0$

$r_1 < r < r_2 \quad \Rightarrow \quad E = \dfrac{\alpha}{2\varepsilon_0 r^2}\left(r^2 - r_1^2\right)$

$r > r_2 \quad \Rightarrow \quad E = \dfrac{\alpha}{2\varepsilon_0 r^2}\left(r_2^2 - r_1^2\right)$

20. Considere a seguinte distribuição de cargas livres ρ num cilindro infinito de raio $\boldsymbol{r}$, onde existe um vazio esférico de raio $\boldsymbol{r_1 < r}$ e com centro sobre o eixo.



a) Determine o fluxo do campo elétrico através de um cubo de aresta $\boldsymbol{l > 2r}$, de tal modo que o cilindro o atravesse, nos casos em que:

   i - no interior do cubo se encontra o espaço vazio.

   ii - o interior do cubo não inclui esse espaço.

b) Mostre que estes cálculos não lhe permitem calcular o campo $\vec{E}$ em qualquer ponto do espaço.

c) Usando o princípio da sobreposição determine o campo elétrico nos pontos ***A***, ***B*** e ***C***.

Solução: **a)** ***i)*** $\phi = \dfrac{\rho\pi}{\varepsilon_0}\left(r^2 l - \dfrac{4}{3} r_1^3\right)$ **a)** ***ii)*** $\phi = \dfrac{\rho\pi}{\varepsilon_0} r^2 l$

c) $\vec{E}_A = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\left(\dfrac{r^2}{l} - \dfrac{4}{3}\dfrac{r_1^3}{l^2}\right)\hat{r}$ **;** $\vec{E}_B = \left(-\dfrac{\rho\, r_1^3\sqrt{2}}{3\varepsilon_0 l^2} + \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\dfrac{r^2}{l}\right)\hat{r}_{cil} \pm \dfrac{\rho\, r_1^3\sqrt{2}}{3\varepsilon_0 l^2}\hat{z}$

$$\vec{E}_C = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\left(\frac{r^2}{l} - \frac{r_1^3\, l}{6\left(l^2/4 + 36 r^2\right)^{3/2}}\right)\hat{r}_{cil} \pm \frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{2 r_1^3\, r}{\left(l^2/4 + 36 r^2\right)^{3/2}}\hat{z}$$

Relações campo-potencial e equações locais do campo

21. Uma esfera de raio **R** contém uma distribuição volúmica de cargas **ρ**, de simetria esférica.

a) Determine a função ⍰⍰ sabendo que o campo elétrico dentro da esfera é radial com um módulo constante $\mathbf{E_0}$:

  i) aplicando a forma local do teorema de Gauss.

  j) aplicando a forma integral do teorema de Gauss.

b) Calcule a carga total **Q** contida na esfera e determine o campo elétrico ao exterior da esfera. Verifique a continuidade do campo na fronteira interior/exterior da esfera.

Solução: $\rho(r) = \dfrac{2\varepsilon_o}{r} E_0$; $Q = 4\pi\varepsilon_o E_0 R^2$; $E(r) = \dfrac{E_0 R^2}{r^2}$

22. O chamado "potencial de Yukawa" é uma maneira de representar as forças nucleares, cujo alcance é muito mais curto do que as forças coulombianas:

$V = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_o}\dfrac{\exp(-r/a)}{r}$ onde a >0 representa o alcance da interação.

Determine a distribuição volúmica de carga ⍰ que cria este potencial.

Solução: $\rho = -\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\exp(-r/a)}{r a^2}$

23. O espaço entre dois cilindros coaxiais infinitos, de raios $\mathbf{R_1 < R_2}$, está carregado com uma densidade volúmica de carga **ρ = a/r**.

a) Determine o campo elétrico em qualquer ponto do espaço.

b) Deduza as expressões do potencial elétrico, sob a hipótese que $V(R_1) = 0$.

Solução:

a) $E_I = 0 \quad ; \quad E_2 = \frac{a}{\varepsilon_o}\frac{r - R_1}{r} \quad ; \quad E_3 = \frac{a}{\varepsilon_o}\frac{R_2 - R_1}{r}$

b)

$$V_I = 0 \quad ; \quad V_2 = \frac{a}{\varepsilon_o}\left(R_1 \mathrm{Ln}\frac{r}{R_1} - r + R_1\right) \quad ; \quad V_3 = \frac{a}{\varepsilon_o}\left\{(R_1 - R_2)(1 + \mathrm{Ln}\, r) - R_1 \mathrm{Ln}\, R_1 + R_2 \mathrm{Ln}\, R_2\right\}$$

24. Um longo cilindro de raio **a** tem uma carga uniforme por unidade de comprimento **Q** C/m. Encontre a d.d.p. entre dois pontos situados à distância $\mathbf{r_1}$ e $\mathbf{r_2}$ do eixo do cilindro ($\mathbf{a} < \mathbf{r_1} < \mathbf{r_2}$).

Solução: $V_1 - V_{21} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_o}\mathrm{Ln}\frac{r_2}{r_1}$

25. Ao longo de um plano o potencial é dado por: $V = \frac{a\cos\theta}{r^2} + \frac{b}{r}$ em que **r** e $\boldsymbol{\theta}$ são as variáveis do sistema polar de coordenadas e **a** e **b** são duas constantes.
Encontre as componentes $\mathbf{E}_\rho$ e $\mathbf{E}_\theta$ do campo elétrico, em qualquer ponto.

Solução: $E_r = -\frac{2a\cos\theta}{r^3} - \frac{b}{r^2} \quad ; \quad E_\theta = -\frac{a\,\mathrm{sen}\theta}{r^3} + \frac{b}{r^2}$

26. Dada a função vectorial de componentes:

$A_x = 6xy$ $\qquad$ $A_y = 3x^2 - 3y^2$ $\qquad$ $A_z = 0$

a) Calcule o integral de linha de $\vec{A}$, do ponto ***(0,0,0)*** para o ponto ***(2,4,0)***, através do caminho mais curto. Repita o cálculo para um caminho parabólico. Tire conclusões.
b) Verifique que o campo $\vec{A}$ pode representar um campo eletrostático.
c) Calcule a divergência do campo $\vec{A}$ e interprete o resultado atendendo ao significado físico de $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$.

Solução: **a)** −16 **b)** $\mathrm{rot}\vec{A} = \vec{0} \Rightarrow \left(\exists V \,\middle|\, \vec{A} = -\vec{\nabla} V\right)$ **c)**

$\mathrm{div}\vec{A} = 0 \Rightarrow \rho = 0$

27. Numa determinada região do espaço o campo elétrico é dado por:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\hat{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\hat{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\hat{k}\right)$$

Verifique se nessa região do espaço existe ou não uma distribuição de carga elétrica.

Solução: $\rho = \dfrac{1}{2\pi r}$

28. Considere uma esfera carregada com uma densidade de carga $\rho = \alpha r$.

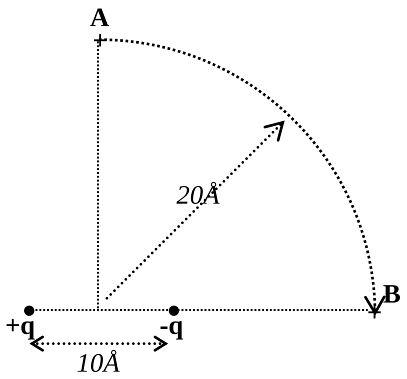
a) Determine a divergência de $\vec{E}$ no interior da esfera.

b) Atendendo à simetria do sistema, calcule a menos de uma constante, o campo elétrico, em qualquer ponto.

Solução: **a)** $\mathrm{div}\vec{E} = \dfrac{\alpha r}{\varepsilon_0}$ **b)** $\vec{E}_{int} = \dfrac{\alpha}{4\varepsilon_0} r^2\,\hat{r}$; $\vec{E}_{ext} = \dfrac{\alpha R^4}{4\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2}\,\hat{r}$

Trabalho das forças elétricas. Energia eletrostática

29. Um electro está colocado num ponto ***A***, no campo dum dipolo de cargas ***+q*** e ***–q*** distanciadas de ***a=10 Å***.



a) Qual será o trabalho realizado se o electro fizer uma volta circular de raio ***d=20 Å***, partindo do ponto ***A*** e voltando ao mesmo ponto. Considerando as linhas de campo dum dipolo, indique onde o trabalho é positivo ou negativo.

b) Determine o trabalho realizado no caminho circular de ***A*** para ***B***.

Solução: **a)** $W_{A\to A} = 0$ **b)** $W_{A\to B} = -e\cdot\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{a}{d^2-\left(a^2/4\right)}$

30. Calcule a energia eletrostática **W** duma esfera de raio R e de densidade de carga ⍰ uniforme, colocada no vácuo, pelos dois métodos seguintes

a) A partir da densidade de energia.

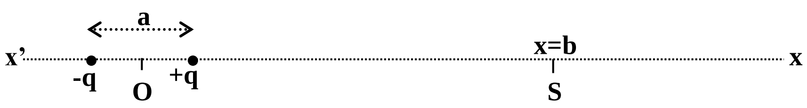
c) Usando a lei $W = \frac{1}{2}\int \rho V\, dv$ ou calculando o trabalho necessário para carregar a esfera, a partir de $W = \int_0^Q V\, dq$.

d) A esfera representa um eletrão. A sua energia total pode ser vista como a energia duma partícula em repouso (seja W = m.c^2), ou pode ser vista como energia eletrostática. Na base desta equivalência, calcule o raio equivalente do eletrão (chamado "raio clássico" do eletrão).

$$m \cong 10^{-30}\,\mathrm{kg} \quad ; \quad c = 3.10^{8}\,\mathrm{m/s} \quad ; \quad e = 1{,}6.10^{-19}\,\mathrm{C}$$

Solução: $W = \frac{4}{15}\frac{\pi \rho^2 R^5}{\varepsilon_0} \quad ; \quad R \cong 1{,}5.10^{-15} m$

31. Um dipolo de carga **±q** e separação **a** está colocado ao longo do eixo **x'x**.



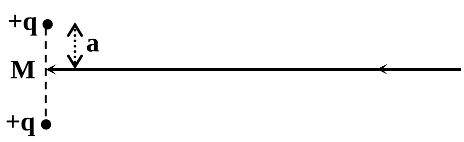
a) Calcule o trabalho necessário para trazer uma carga **+Q** desde o infinito até ao ponto **S**, em x = b.

b) Escreva uma aproximação para o potencial em **S**, na condição b>>a.

c) Use o resultado da alínea anterior para obter a amplitude e direção do campo elétrico no ponto **S**.

Solução: $W = \frac{Q\,q\,a}{4\pi\varepsilon_o\left(b^2 - a^2/4\right)} \quad ; \quad V_S = \frac{q\,a}{4\pi\varepsilon_o b^2} \quad ; \quad \vec{E} = \frac{2\,q\,a}{4\pi\varepsilon_o b^3}\,\hat{x}$

32. Duas cargas pontuais idênticas de valor **+q** estão separadas de uma distância **2a** como mostra a figura.



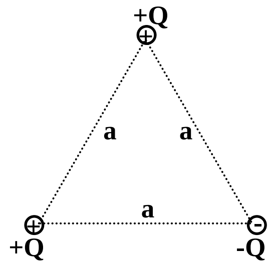
Calcule o trabalho por unidade de carga para trazer uma carga desde o infinito ao longo de uma linha representada na figura e até ao ponto **M** :

a) calculando o integral de linha

b) usando o conceito de potencial

Solução: $W = \frac{q}{2\pi\varepsilon_o a}$

33. Calcule a energia potencial do sistema de cargas ilustrado na figura.



Nota: a energia potencial de um sistema de cargas pontuais é igual ao trabalho necessário para trazer as cargas para as suas posições finais, desde muito longe (do infinito).

Solução: $E_p = -\dfrac{Q^2}{4\pi\varepsilon_o a}$

Condutores

34. Uma esfera metálica tem o raio **R** e está isolada de todos os outros corpos.

a) Expresse o potencial da superfície da esfera como função da carga nela colocada.

b) Integre a expressão da alínea anterior para determinar o trabalho necessário para carregar a esfera a um potencial **V**.

Solução: $V = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_o R}$; $W = \dfrac{Q^2}{8\pi\varepsilon_o R}$