Universidade Fedeal de Minas Gerais

Exercício sobre Aproximação Polinomial

Prof. Frederico Coelho

February 7, 2024

Aproximação Polinomial

Introdução Teórica

Considere um polinômio de grau p conforme representado na sua forma geral na Equação 0.1.

$$p(x) = w_p x^p + w_{p-1} x^{p-1} + \cdots + w_1 x + w_0 \tag{0.1}$$

em que x é o argumento e w_i é o coeficiente do termo de grau i.

Dadas as observações (x_i, y_i) representadas na forma do conjunto de dados $D = \{x_i, y_i\}_{i=1}^N$, deseja-se encontrar o polinômio de grau p que melhor aproxima a função geradora $f_g(x)$ do conjunto D. O objetivo é, a partir das amostras de dados, encontrar o grau p e os coeficientes w_i de forma tal que $p(x) \approx f_g(x)\ \forall x$. A aproximação de $f_g(x)$ é usualmente feita com base na minimização do erro dos termos quadráticos $(y_i - p(x_i))^2$ $(i = 1 \cdots N)$. Espera-se que o conjunto D contenha informação suficiente para que seja possível aproximar $f_g(x)$ por $p(x)$ com base somente nas suas N amostras. Os parâmetros de $p(x)$ são ajustados de forma tal que $y_i = w_p x_i^p + w_{p-1} x_i^{p-1} + \cdots + w_1 x_i + w_0\ \forall x_i \in D$, conforme representado no sistema de equações 0.2.

$$\begin{array}{llllll} y_1 = w_p x_1^p & +w_{p-1} x_1^{p-1} & + & \cdots & +w_1 x_1 & +w_0 \\ y_2 = w_p x_2^p & +w_{p-1} x_2^{p-1} & + & \cdots & +w_1 x_2 & +w_0 \\ \quad\vdots & \quad\vdots & \cdots & \vdots & & \\ y_N = w_p x_N^p & +w_{p-1} x_N^{p-1} & + & \cdots & +w_1 x_N & +w_0 \end{array} \tag{0.2}$$

O sistema representado em 0.2 possui N equações e p incógnitas, podendo também ser representado na forma matricial 0.3.

$$\mathbf{Hw} = \mathbf{y} \tag{0.3}$$

em que $\mathbf{H}$, $\mathbf{w}$ e $\mathbf{y}$ são representados em 0.4, 0.5 e 0.6.

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} x_1^p & x_1^{p-1} & \cdots & x_1 & 1 \\ x_2^p & x_2^{p-1} & \cdots & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \\ x_N^p & x_N^{p-1} & \cdots & x_N & 1 \end{bmatrix} \tag{0.4}$$

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_p \\ w_{p-1} \\ \vdots \\ w_1 \\ w_0 \end{bmatrix} \tag{0.5}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} \tag{0.6}$$

A matriz $\mathbf{H}$ possui um papel importante na resolução do problema de aproximação, pois ela contém os termos não-lineares que compõem o polinômio $p(x)$, os quais serão responsáveis pela projeção dos elementos x_i no espaço composto pelo sistema de coordenadas caracterizado pelas colunas de $\mathbf{H}$. Como $\mathbf{H}$ e $\mathbf{y}$ são dados pelo problema, a solução da Equação 0.3 pode ser obtida por meio da pseudoinversa, conforme Equação 0.7.

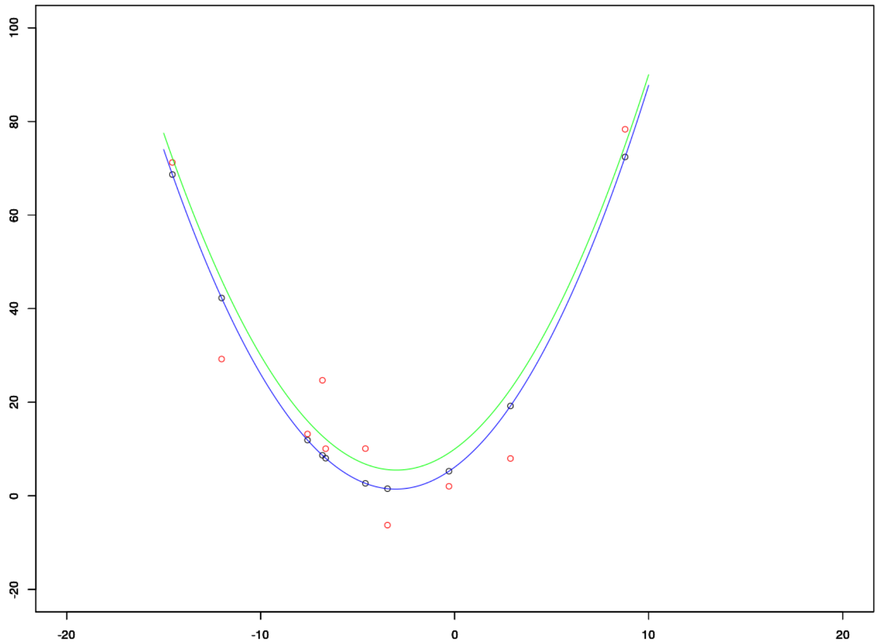
$$\mathbf{w} = \mathbf{H}^{+}\mathbf{y} \tag{0.7}$$

em que $\mathbf{H}^{+}$ é a pseudoinversa de $\mathbf{H}$.

Exercícios

Considerando a aproximação polinomial das seções anteriores, faça:

1. Obtenha aproximações polinomiais da função geradora $f_g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 10$ somadas com um ruído gaussiano $N(mean = 0, sd = 4)$ amostradas entre $x = -15$ e $x = 10$, com um número de amostras $N = 10$ e grau do polinônimo variando entre $p = 1$ a $p = 8$. Para cada aproximação, mostre um gráfico com a função geradora, as amostras e a curva do polinômio obtido. como na figura de exemplo abaixo:

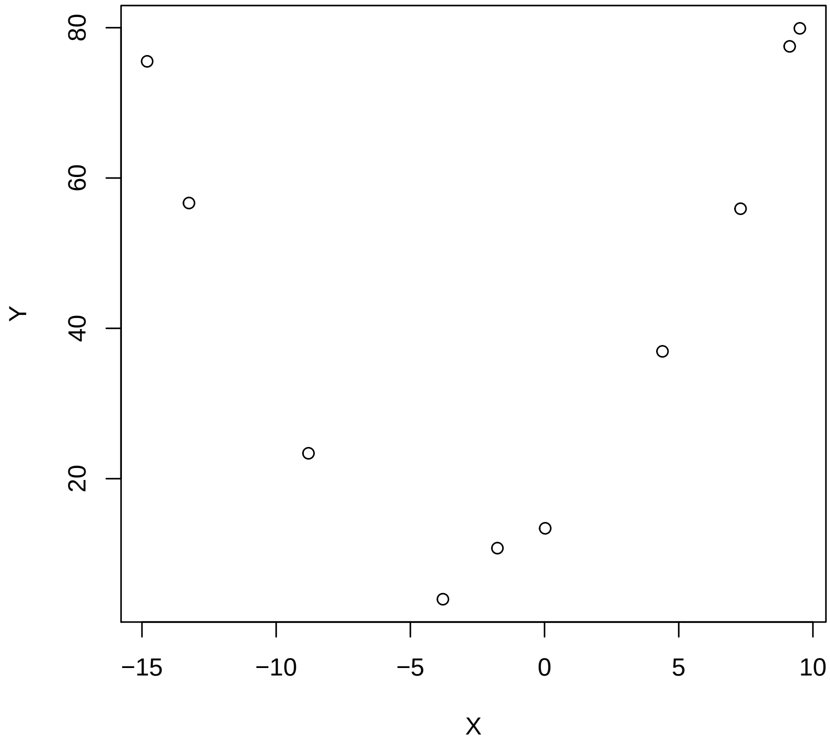


2. Responda: Ocorreu Overfitting? Ocorreu Underfitting? Em quais casos ocorreu estes fenômenos?

3. Repita o procedimento para 100 amostras ao invés de 10. Qual o impacto do número de amostras na aproximação polinomial?

Para o cálculo da pseudo-inversa o aluno deverá usar o pacote *library("corpcor")*.
Exemplo de código para gerar as 10 amostras pedidas:

```
> Namostras = 10
> X <- runif(n = Namostras,min = -15,max = 10)
> Y <- (1/2)*X^2+3*X+10+rnorm(length(X),0,4)
> plot(X,Y)
```



Forma de Entrega: Relatório em .pdf, descrevendo o que foi feito, mostrando os gráficos e as informações solicitadas e explicando os resultados obtidos. O relatório deve ser entregue via Moodle.

Baseado nos exercícios do Prof. A.P. Braga