Aula 15 – Teste de hipótese

Provar a veracidade de uma hipótese. Hipóteses divididas em hipóteses nulas e alternativas. Qualquer hipótese pode ser a afirmativa original.

Hipótese nula é uma hipótese que contém uma afirmação com igualdade, ou seja, >=, = ou <=.

Hipótese afirmativa é o complemento da hipótese nula, ela pode ser aceita como verdadeira se a hipótese nula for considerada falsa e ela contem o lado da desigualdade, ou seja, >, != ou <.

Se o valor da afirmação é em relação a e o parâmetro populacional é , então alguns pares possíveis de hipóteses nula e alternativa são:

$$\begin{cases} H_0\colon \mu \le k \\ H_a\colon \mu > k \end{cases} \quad \begin{cases} H_0\colon \mu \ge k \\ H_a\colon \mu < k \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} H_0\colon \mu = k \\ H_a\colon \mu \ne k \end{cases}$$

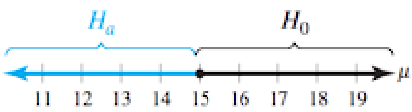
Exemplo de como montar a afirmação

EXEMPLO **Estabelecendo as hipóteses nula e alternativa**

Escreva a afirmação como uma sentença matemática. Formule as hipóteses nula e alternativa e identifique qual representa a afirmação.

1. Uma concessionária de automóveis anuncia que o tempo médio para uma troca de óleo é menor que 15 minutos.

A afirmação *"tempo médio... é menor que 15 minutos"* pode ser escrita como . Seu complemento é . Uma vez que contém a igualdade, ela se torna a hipótese nula. Nesse caso, a hipótese alternativa representa a afirmação.



H_0: $\mu \ge 15$ minutos

H_a: $\mu < 15$ minutos (Afirmação.)

Existe duas decisões possíveis, uma delas sendo aceitar a hipótese nula ou rejeitá-la.

Existem dois tipos de erros:

Um erro tipo I ocorre se a hipótese nula é rejeitada quando na realidade é verdadeira.

Um erro tipo II ocorre se a hipótese nula não é rejeitada quando na realidade é falsa

Resultados possíveis de um teste de hipótese.

	Realidade de H_0	
Decisão	**H_0 é verdadeira**	**H_0 é falsa**
Não rejeita H_0	Decisão correta	Erro tipo II
Rejeita H_0	Erro tipo I	Decisão correta

Nível de significância

Definição

Em um teste de hipótese, **o nível de significância** é a probabilidade máxima permitida de cometer um erro do tipo I. Ele é simbolizado por α (letra grega minúscula alfa).

A probabilidade de um erro tipo II é simbolizada por β (letra grega minúscula beta).

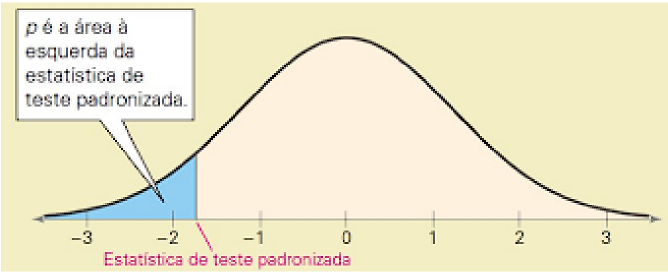
Teste estatísticos e valores P

Definição

Supondo a hipótese nula verdadeira, então um **valor *p*** (ou ***p-value***) de um teste de hipótese é a probabilidade da estatística amostral assumir um valor tão extremo ou maior que aquele determinado em função dos dados da amostra. Quando o valor p for menor ou igual que o nível de significância, rejeita-se H_0.

- O valor de um teste de hipótese depende da natureza do teste. Há três tipos: *teste unilateral à esquerda, unilateral à direita e bilateral*. O tipo depende da localização da região da distribuição amostral que favorece a rejeição de . Essa região é indicada pela hipótese alternativa.

1 Se a hipótese alternativa contém o símbolo "menor que" (<), então o teste de hipótese é um teste unilateral à esquerda.



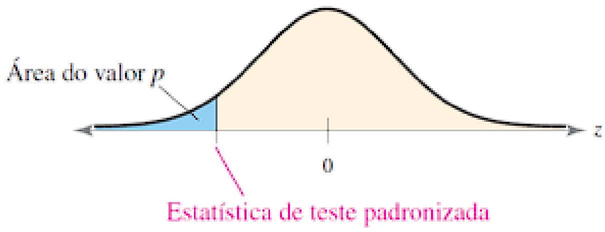
2 Se a hipótese alternativa contém o símbolo "maior que" (>), então o teste de hipótese é um teste unilateral à direita.

3 Se a hipótese alternativa contém o símbolo "diferente de" (≠), então o teste de hipótese é um teste bilateral.

1 Uma concessionária de automóveis anuncia que o tempo médio para uma troca de óleo é menor que 15 minutos.

H_0: $\mu \geq 15$ min	O tempo médio para uma troca de óleo é maior ou igual a 15 minutos.
$\boxed{H_a\text{: } \mu < 15 \text{ min}}$	O tempo médio para uma troca de óleo é menor que 15 minutos.

Teste de hipótese unilateral à esquerda



Como tomar a decisão e interpretá-la

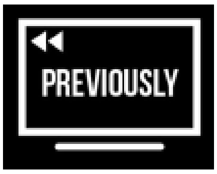
Regra de decisão baseada no valor p

Para usar um valor p para tomar uma decisão em um teste de hipótese, compare o valor p com α.

1. Se $p \leq \alpha$, então rejeite H_0.
2. Se $p > \alpha$, não rejeite H_0.

	Afirmação inicial	
Decisão	**Afirmação está em H_0**	**Afirmação está em H_a**
Rejeita H_0	Há evidência suficiente para rejeitar a afirmação.	Há evidência suficiente para apoiar a afirmação.
Não rejeita H_0	Não há evidência suficiente para rejeitar a afirmação.	Não há evidência suficiente para apoiar a afirmação.

Aula 16 – Teste de hipótese para média



- Pelo TLC, *quando a amostra é composta por ao menos 30 elementos / indivíduos*, a distribuição amostral de (a média amostral) *é normal*.
- A conclusão em um *teste de hipótese emprega o valor para a estatística de teste*, tal como .

Probabilidade de se obter uma estatística amostral com um valor tão extremo ou maior que aquele determinado a partir dos dados da amostra

Encontrando o valor *p* em um teste de hipótese

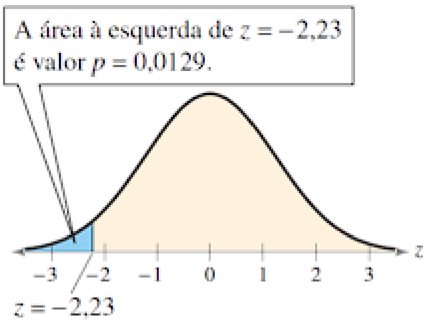
Após determinar a estatística de teste e sua correspondente padronizada (z), determine a área, a que representa o valor p, considerando as seguintes situações.

a. Para um teste unilateral à esquerda, valor p = (área na cauda esquerda).

b. Para um teste unilateral à direita, valor p = (área na cauda direita).

c. Para um teste bilateral, valor p = (área na cauda esquerda + área na cauda direita) = 2(área na cauda da estatística de teste).

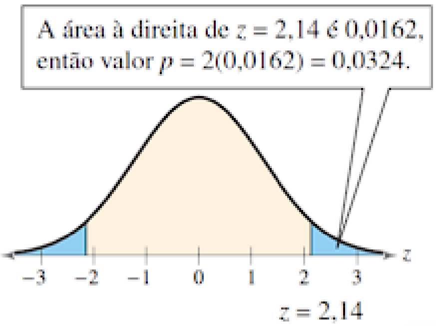
EXEMPLO Encontre o valor p em um teste de hipótese unilateral à esquerda com uma estatística de teste padronizada $z = -2{,}23$. Decida se rejeita H_0 quando o nível de significância é $\alpha = 0{,}01$.



Conclusão

Como o valor , não rejeitamos . Em outras palavras, *não há evidências estatísticas que permitam refutar a hipótese nula*.

EXEMPLO Obtenha o valor p para um teste de hipótese bilateral com uma estatística de teste padronizada $z = 2{,}14$. Decida se rejeita H_0 quando o nível de significância é $\alpha = 0{,}05$.



Conclusão

Como o valor , rejeitamos . Em outras palavras, *há evidências estatísticas que permitem refutar a hipótese nula* (é <u>*provavelmente*</u> falsa).

Vamos investigar como usar valores em um teste de hipótese sobre a média supondo que o desvio padrão é conhecido!

Usando valores P em um teste Z

1. A amostra é aleatória.
2. Pelo menos um dos seguintes requisitos é verdade: a população é normalmente distribuída ou $n \geq 30$.

Lembre-se de que $\sigma/\sqrt{n}$ é o erro padrão da média, $\sigma_{\bar{x}}$.

Exemplo:

EXEMPLO 1 é conhecido , a amostra é aleatória e o núemro de elementos na amostra é . Logo, podemos empregar o teste .

2 A afirmação é *"o tempo médio no pit stop é menor que 13 segundos"*. As hipóteses são:

H_0: $\mu \geq 13$ segundos e H_a: $\mu < 13$ segundos (Afirmação.)

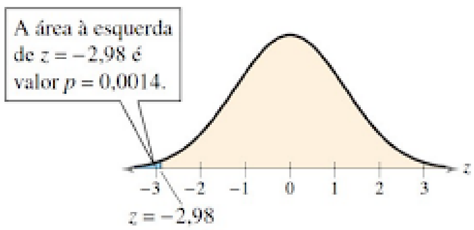
3 O nível de significância é .

EXEMPLO 4 A estatística de teste padronizada é:

$$z = \frac{\overline{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{12, - 13}{0{,}19/\sqrt{32}} \approx -2{,}98$$

5 Usando a tabela da distribuição normal padronizada, a área correspondente a é .

6 Como o teste é unilateral à esquerda, o valor é igual a área à esquerda de . Então, valor .



EXEMPLO 7 Uma vez que o valor , rejeitamos a hipótese nula.

8 *Interpretação:* Há evidência suficiente ao nível de significância de 1% para concordar com a afirmação de que o tempo médio no *pit stop* é menor que 13 segundos.

Exemplo em python no notebook aula 16 - exercício 1

Aqui usaremos a **média**, **média amostral**, **número de amostra, sigma** e **valor de confiança**.

Aula 17 – Teste de hipótese para a média - 02

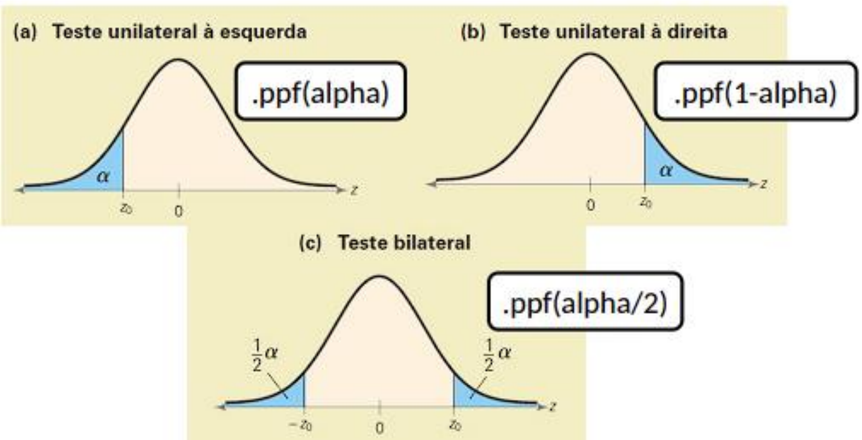
Outro método para decidir se rejeitaremos a hipótese nula é verificar se a estatística de teste padronizada está contida em um intervalo de valores denominado de região de rejeição da distribuição amostral.

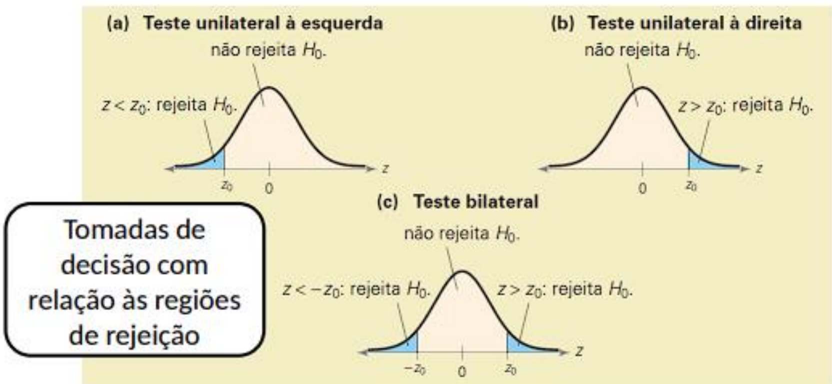
Definição

Uma **região de rejeição** (ou **região crítica**) da distribuição amostral é um intervalo de valores para o qual a hipótese nula não é provável. Se uma estatística de teste padronizada cai nessa região, então a hipótese nula é rejeitada. Um **valor crítico** z_0 separa a região de rejeição da região de não rejeição.

Calculando o valor crítico numa distribuição normal

1. Especifique o nível de significância α.
2. Determine se o teste é unilateral à esquerda, unilateral à direita ou bilateral.
3. Calcule o(s) valor(es) crítico(s) z_0. Quando o teste de hipótese é:
   a. *unilateral à esquerda*, encontre o escore-z que corresponde a uma área de α.
   b. *unilateral à direita*, encontre o escore-z que corresponde a uma área de $1 - \alpha$.
   c. *bilateral*, encontre os escores-z que correspondem a $\frac{1}{2}\alpha$ e $1 - \frac{1}{2}\alpha$.
4. Esboce a distribuição normal padrão. Desenhe uma linha vertical em cada valor crítico e sombreie a(s) região(ões) de rejeição.





Exemplo

EXEMPLO Funcionários de uma companhia de construção e mineração afirmam que o salário médio dos engenheiros mecânicos que lá trabalham é menor que o de um de seus concorrentes, que é de \$ 68.000. Uma amostra aleatória de 20 engenheiros mecânicos da companhia tem um salário médio de \$ 66.900. Suponha que o desvio padrão da população é de \$ 5.500 sendo esta normalmente distribuída. Para , teste a afirmação dos funcionários.

1 é conhecido , a amostra é aleatória e a população é normalmente distribuída. Logo, podemos empregar o teste .

2 A afirmação é *"o salário médio é menor que \$ 68.000"*. As hipóteses são:

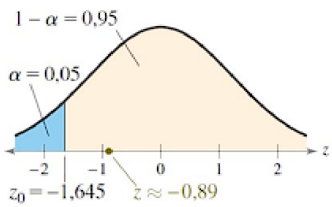
$$H_0: \mu \geq \$\,68.000 \quad \text{e} \quad H_a: \mu < \$\,68.000 \quad \text{(Afirmação.)}$$

3 O teste é unilateral à esquerda e o nível de significância é .

4 Usando a tabela da distribuição normal padronizada, temos que o valor crítico é e a região de rejeição é então .

5 A estatística padronizada é: $z = \dfrac{\overline{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \dfrac{66900 - 68000}{5500/\sqrt{20}} \approx -0{,}89$

6 Como não está na região de rejeição, não rejeitamos a hipótese nula.



Nível de significância de 5%

7 *Interpretação:* Não há evidência suficiente ao nível de significância de 5% para concordar com a afirmação dos funcionários de que o salário médio é menor que \$ 68.000.

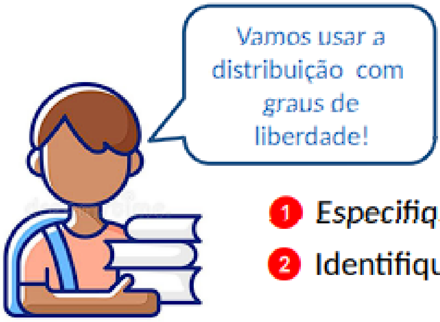
Embora a *amostra tenha uma média de \$ 66.900*, não podemos (ao nível de significância de 5%) concordar com a afirmação de que a *média dos salários de todos os engenheiros mecânicos é menor que \$ 68.000*.
A diferença entre a estatística de teste (e a média hipotética () é provavelmente devida a erro de amostragem.

Exemplo em python no notebook aula 17 - exercício 1

Aqui usaremos a **média**, **média amostral**, **número de amostra, sigma** e **valor de confiança**.

Aula 18 – Teste de hipótese para a média – 03

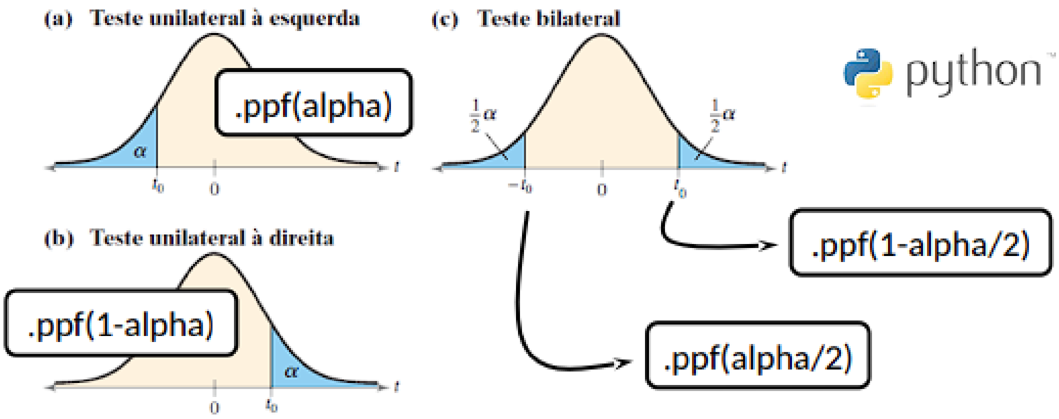
Em muitas situações, o desvio padrão populacional não é conhecido. Ainda assim, se a população tem uma distribuição normal ou o tamanho da amostra é pelo menos 30, é possível testar a média populacional.



Instruções

Calculando valores críticos em uma distribuição *t*

1. *Especifique o nível de significância .*
2. Identifique os graus de liberdade, .
3. Calcule o(s) valor(es) crítico(s) com graus de liberdade.



- Para testar uma afirmação sobre uma média quando não é conhecido, devemos usar uma distribuição amostral .

$$t = \frac{(\text{média amostral}) - (\text{média hipotética})}{\text{erro padrão}}$$

Como não é conhecido, a estatística de teste padronizada é calculada usando o desvio padrão amostral .

Teste *t* para uma média μ

O **teste *t* para uma média μ** é um teste estatístico para uma média populacional. A **estatística de teste** é a média amostral $\bar{x}$. A **estatística de teste padronizada** é:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s / \sqrt{n}}$$

$\boxed{g.l. = n - 1}$

Estatística de teste padronizada para μ (σ desconhecido).

1. A amostra é aleatória.
2. A população é normalmente distribuída ou

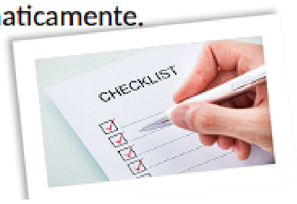
.

Instruções

Usando o teste *t* para uma média μ (σ desconhecido)

1. Verifique se não é conhecido, se a amostra é aleatória, e se a população é normalmente distribuída ou .

2. Expresse a afirmação investigada verbal e matematicamente. Identifique as hipóteses nula e alternativa .



3. Especifique o nível de significância .

4. Identifique os graus de liberdade (.

5. Determine o(s) valor(es) crítico(s) .

6. Determine a(s) região(ões) de rejeição.

7. Calcule a estatística de teste padronizada. $t = \dfrac{\overline{x} - \mu}{s/\sqrt{n}}$

8. Tome uma decisão para rejeitar ou não rejeitar a hipótese nula.

9. Interprete a decisão no contexto da afirmação original.

Se está na região de rejeição, então rejeitamos .
Caso contrário, não rejeitamos .

Exemplo

EXEMPLO Um vendedor de carros usados diz que o preço médio do sedan de dois anos (em boas condições) é de pelo menos US$ 20.500. Você suspeita que essa afirmação é incorreta e descobre que uma amostra aleatória de 14 veículos similares tem um preço médio de US$ 19.850 e desvio padrão de US$ 1.084. Há evidência suficiente para rejeitar a afirmação do vendedor para o nível de significância ? Suponha que a população é normalmente distribuída.

1. é desconhecido, a amostra é aleatória e a população é normalmente distribuída. Logo, podemos empregar o teste .

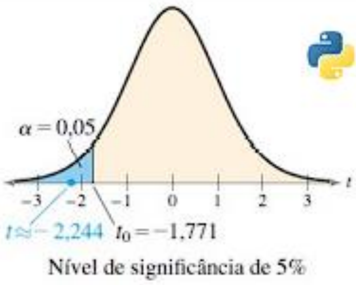
2. A afirmação é *"o preço médio é de pelo menos US$ 20.500"*. As hipóteses nula e alternativa são:

3. O teste é unilateral à esquerda, o nível de significância é e os graus de liberdade são

4. O valor crítico é e a região de rejeição é .

5. A estatística padronizada é: $t = \dfrac{\overline{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} = \dfrac{19850 - 20500}{1084/\sqrt{14}} \approx -2{,}244$

6 Como está na região de rejeição, rejeitamos a hipótese nula.



7 *Interpretação:* Há evidência suficiente, ao nível de significância de 5%, para rejeitar a afirmação de que o preço médio de um sedan de dois anos é de pelo menos US$ 20.500.

Exemplo em python no notebook aula 18 - exercício 1

Aqui usaremos a **média**, **média amostral**, **número de amostra, sigma amostral** e **valor de confiança**.

Aula 19 – Teste de Hipótese para a Variância e o Desvio Padrão

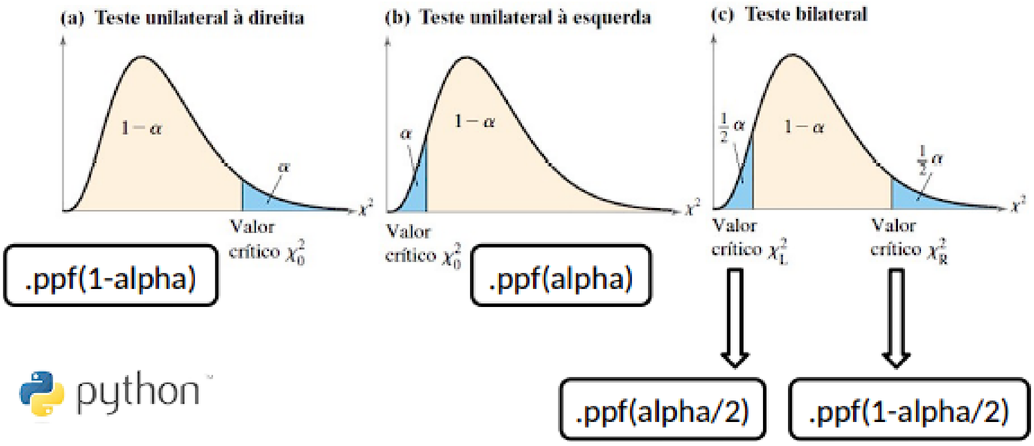
Valores críticos para um teste qui-qudrado

● Para uma *população normalmente distribuída*, testamos a variância e o desvio padrão usando a distribuição com graus de liberdade.

Instruções

Encontrando valores críticos para um teste qui-quadrado

1. Especifique o nível de significância .
2. Identifique os graus de liberdade, .
3. Determine o(s) valor(es) crítico(s), de acordo com o tipo de teste.



● O *teste qui-quadrado* para uma variância ou desvio padrão *não é tão robusto* quanto os testes para a média da população.

É essencial que a população seja normalmente distribuída. Os resultados podem ser equivocados caso esse requisito não seja atendido.

Teste qui-quadrado para uma variância σ^2 ou desvio padrão σ

O **teste qui-quadrado para uma variância σ^2 ou desvio padrão σ** é um teste estatístico para uma variância ou um desvio padrão populacional. O teste qui-quadrado só pode ser usado quando a população é normal. A **estatística de teste** é s^2 e a **estatística de teste padronizada**:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$$ Estatística de teste padronizada para σ^2 ou σ.

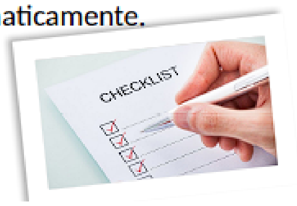
segue uma distribuição qui-quadrado com graus de liberdade g.l. = $n - 1$.

Instruções

Usando o teste qui-quadrado para uma variância σ^2 ou desvio padrão σ

1. Verifique se a amostra é aleatória e se a população é normalmente distribuída.

2. Expresse a afirmação investigada verbal e matematicamente. Identifique as hipóteses nula e alternativa .



3. Especifique o nível de significância .

4. Identifique os graus de liberdade (.

5. Determine o(s) valor(es) crítico(s) .

6. Determine a(s) região(ões) de rejeição.

7. Calcule a estatística de teste padronizada.

$$\chi^2=\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$$

8. Tome uma decisão para rejeitar ou não rejeitar a hipótese nula.

9. Interprete a decisão no contexto da afirmação original.

Se está na região de rejeição, então rejeitamos .
Caso contrário, não rejeitamos .

Exemplo

EXEMPLO Uma empresa de processamento de laticínios afirma que a variância da quantidade de gordura no leite integral processado por ela é não mais que 0,25. Você suspeita que essa afirmação esteja errada e descobre que uma amostra aleatória de 41 recipientes de leite tem uma variância de 0,27. Para um nível de significância a = 0,05, há evidência suficiente para rejeitar a afirmação da empresa? Suponha que a população é normalmente distribuída.

1. A amostra é aleatória e a população é normalmente distribuída. Logo, podemos empregar o teste .

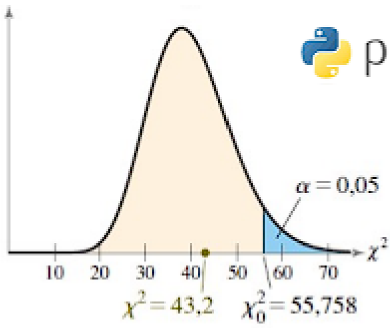
❷ A afirmação é *“a variância é não mais que 0,25”*. As hipóteses nula e alternativa são:

❸ O teste é unilateral à direita, o nível de significância é e os graus de liberdade são

❹ O valor crítico é e a região de rejeição é .

❺ A estatística padronizada é: $\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \frac{(41-1)\cdot 0{,}27}{0{,}25} \approx 43{,}2$

❻ Como não está na região de rejeição, não rejeitamos a hipótese nula.



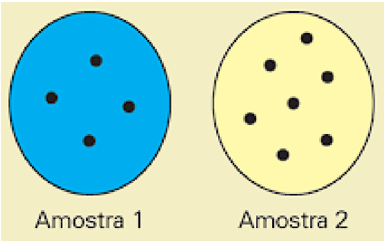
❼ *Interpretação:* Não há evidência suficiente, ao nível de significância de 5%, para rejeitar a afirmação da empresa de que a variância da quantidade de gordura no leite integral é não mais que 0,25.

Exemplo em python no notebook aula 19 - exercício 1

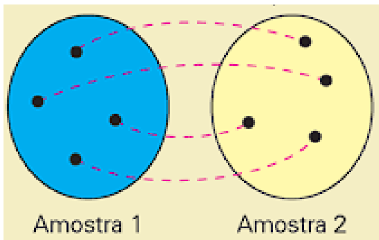
Aqui usaremos a variância populacional, **variância amostral**, **número de amostra,** e **valor de confiança**.

Aula 20 – Teste de Hipótese usando duas amostras 01

● Duas amostras são *independentes* quando a amostra selecionada de uma população não é relacionada à amostra selecionada da segunda população.



● Duas amostras são *dependentes (pareadas ou emparelhadas)* quando cada elemento de uma amostra corresponde a um elemento da outra amostra.



Entenda

Amostras dependentes frequentemente envolvem resultados de pesquisas "antes e depois" para a mesma pessoa ou objeto (tais como o peso de uma pessoa antes de iniciar uma dieta e após 6 semanas), ou resultados de indivíduos pareados para características específicas (tais como gêmeos idênticos).

EXEMPLO

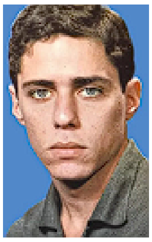
1 *Amostra 1:* pesos de 65 calouros universitários antes do início das aulas. *Amostra 2:* pesos dos mesmos 65 calouros após o primeiro ano.

Amostras dependentes

2 *Amostra 1:* pontuações de 38 homens adultos em um teste de QI. *Amostra 2:* pontuações de 50 mulheres adultas em um teste de QI.

Amostras independentes

● Um provedor de serviço de internet está desenvolvendo um plano de *marketing* para determinar se há *diferença nos tempos que estudantes universitários do sexo masculino e feminino* passam conectados por dia.



A única forma de se ter certeza sobre a questão é fazendo um censo de todos os universitários, o que não é prático...

No entanto, é possível determinar com algum grau de certeza se tal diferença existe.

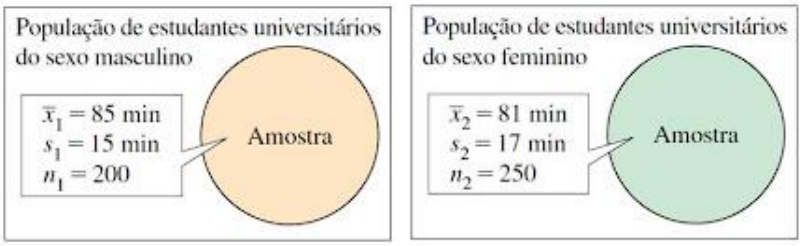
● Para determinar se existe uma diferença, o provedor de serviço de internet *começa assumindo que não há diferença no tempo médio das duas populações*.

$\mu_1 - \mu_2 = 0.$ Suponha que não há diferença

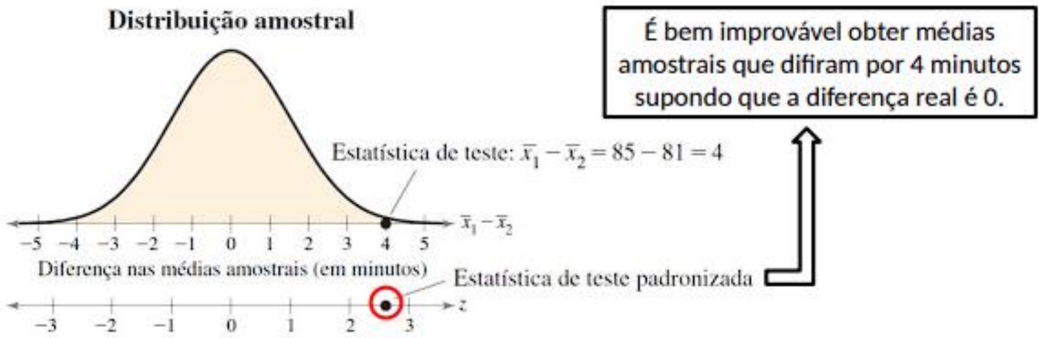
● Retirando *uma amostra aleatória de cada população*, um teste de hipótese baseado nas duas amostras é realizado usando a estatística de teste:

$\bar{x}_1 - \bar{x}_2.$ Estatística de teste

● O provedor de serviço de internet obtém os seguintes resultados:



● A seguir, é construída uma *distribuição amostral de* para um *grande número de amostras* similares retiradas dessas duas populações das quais .



● A diferença das médias amostrais seria *mais que 2,5* erros padrão da diferença hipotética de 0.

● Realizando um *teste de hipótese para duas amostras* usando um nível de significância de , o provedor pode concluir que *existe uma diferença* nas quantidades de tempo que estudantes universitários do sexo masculino e do sexo feminino passam conectados cada dia.

Definição

Para um teste de hipótese baseado em duas amostras independentes:

1. A **hipótese nula H_0** é uma hipótese estatística que geralmente diz que não há diferença entre os parâmetros de duas populações. A hipótese nula sempre contém o símbolo $\leq$, $=$ ou $\geq$.
2. A **hipótese alternativa H_a** é uma hipótese estatística que é verdadeira quando H_0 é falsa. A hipótese alternativa contém o símbolo $>$, $\neq$ ou $<$.

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 \\ H_a: \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} H_0: \mu_1 \leq \mu_2 \\ H_a: \mu_1 > \mu_2 \end{cases}, \quad \text{e} \quad \begin{cases} H_0: \mu_1 \geq \mu_2 \\ H_a: \mu_1 < \mu_2 \end{cases}.$$

● Independentemente da hipótese adotada, ao *iniciar o teste sempre assumiremos que não há diferença entre as médias populacionais*, ou seja, .

Teste z com duas amostras

- As condições para a realização do teste *z* são listadas a seguir:

> **1.** Os desvios padrão populacionais são conhecidos.
> **2.** As amostras são selecionadas aleatoriamente.
> **3.** As amostras são independentes.
> **4.** As populações são normalmente distribuídas *ou* cada tamanho de amostra é de pelo menos 30.

- Nessas condições, a *distribuição amostral* para é uma distribuição normal com:

$$M\acute{e}dia = \mu_1 - \mu_2 e \; Desvio\; padr\tilde{a}o = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

- A estatística de teste é: $z = \dfrac{\text{(diferença observada)} - \text{(diferença hipotética)}}{\text{erro padrão}}$

Ao ler a definição e as instruções para um teste z, note que se a hipótese nula afirma que , ou , então ao iniciar o teste presume-se que e a expressão resulta igual a 0.

EXEMPLO Um grupo de acompanhamento de cartão de crédito afirma que existe diferença entre as médias dos débitos em cartões de crédito de domicílios na Califórnia e em Illinois. Os resultados de uma pesquisa de 250 domicílios de cada estado estão na tabela a seguir.

Califórnia	Illinois
$\bar{x}_1$ = US$ 4.777	$\bar{x}_2$ = US$ 4.866
$n_1 = 250$	$n_2 = 250$

As duas amostras são independentes. Suponha que US$ 1.045 para a Califórnia e US$ 1.350 para Illinois. O resultado confirma a afirmação do grupo? Use 0,05.
(Fonte: *PlasticEconomy.com*)

1 Os desvios padrão populacionais e são conhecidos, as amostras são aleatórias e independentes e ambos e são pelo menos 30. Então, podemos usar o teste z.

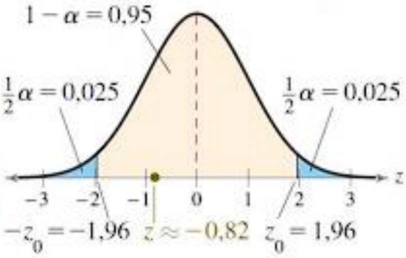
2 A afirmação é *"existe diferença entre as médias dos débitos em cartões de crédito de domicílios na Califórnia e em Illinois"*. Assim, as hipóteses nula e alternativa são:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 \quad \text{e} \quad H_a: \mu_1 \neq \mu_2. \quad \text{(Afirmação.)}$$

Teste bilateral!

❸ Como o teste é bilateral e o nível de significância é , então os valores críticos são e . As regiões de rejeição são e . A estatística de teste padronizada é:

$$z=\frac{\overline{x}_1-\overline{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}=\frac{4777-4866}{\sqrt{\frac{1045^2}{250}+\frac{1350^2}{250}}}\approx -0{,}82$$



Exemplo em python no notebook aula 20 - exercício 1

Aqui usaremos média amostral sigma, número de amostras intervalo de confiança e tipo de teste.

Teste T com duas amostras

- As condições para a realização do teste *t* são listadas a seguir:

1. Os desvios padrão populacionais são desconhecidos.
2. As amostras são selecionadas aleatoriamente.
3. As amostras são independentes.
4. As amostras são normalmente distribuídas *ou* cada tamanho de amostra é de pelo menos 30.

- Nessas condições, a *distribuição amostral* para é aproximada por uma distribuição com média .

- O *erro padrão e os graus de liberdade* da distribuição amostral *dependem* se as *variâncias* das populações e são consideradas *iguais ou não*.

- A estatística de teste é:

$$t=\frac{\overline{x}_1-\overline{x}_2}{s_{\overline{x}_1-\overline{x}_2}}$$

Variâncias são iguais: Se as variâncias populacionais são consideradas iguais, então as variâncias das duas amostras são combinadas para se calcular uma **estimativa conjunta do desvio padrão $\hat{\sigma}$**

$$\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}}$$

O erro padrão para a distribuição amostral de $\overline{x}_1-\overline{x}_2$ é:

$$s_{\overline{x}_1-\overline{x}_2}=\hat{\sigma}\cdot\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$$ Variâncias iguais.

e g.l. $= n_1+n_2-2$.

● O *erro padrão e os graus de liberdade* da distribuição amostral *dependem* se as *variâncias* das populações e são consideradas *iguais ou não*.

● A estatística de teste é:

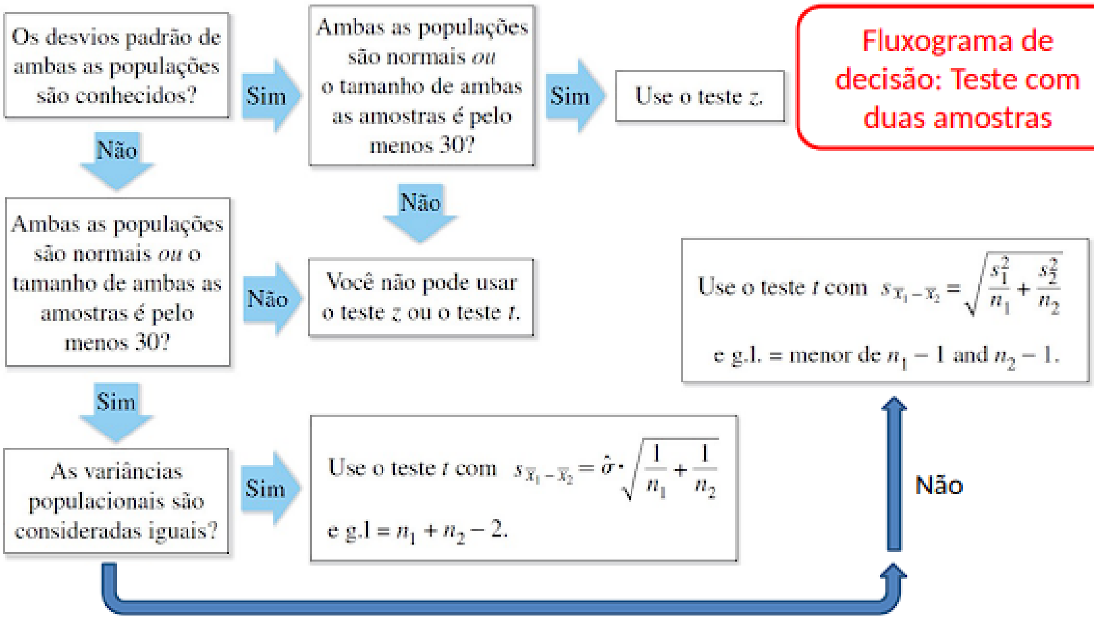
$$t = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{s_{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}}$$

Variâncias não são iguais: Se as variâncias populacionais não são iguais, então o erro padrão é:

$$s_{\overline{x}_1 - \overline{x}_2} = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} \qquad \text{Variâncias não iguais.}$$

e g.l = menor de $n_1 - 1$ e $n_2 - 1$.

Fluxograma de decisão: Teste com duas amostras



EXEMPLO Os resultados de um teste estadual de matemática para amostras aleatórias de estudantes ensinados por dois professores diferentes na mesma escola estão na tabela a seguir.

Professor 1	Professor 2
$\overline{x}_1 = 473$	$\overline{x}_2 = 459$
$s_1 = 39,7$	$s_2 = 24,5$
$n_1 = 8$	$n_2 = 18$

Podemos concluir que há diferença nas pontuações médias dos testes de matemática para todos os estudantes dos dois professores? Use . Suponha que as populações são normalmente distribuídas e que as variâncias populacionais não são iguais.

❶ Os desvios padrão populacionais e são desconhecidos, as amostras são aleatórias e independentes e as populações são normalmente distribuídas. Então, podemos usar o teste *t*.

❷ A afirmação é *"há diferença nas pontuações médias dos testes de matemática para os estudantes dos dois professores"*. Assim, as hipóteses nula e alternativa são:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 \quad \text{e} \quad H_a: \mu_1 \neq \mu_2. \quad \text{(Afirmação.)}$$

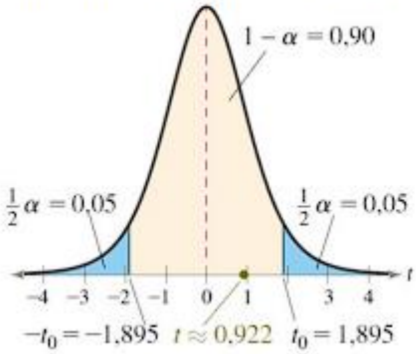
Teste bilateral!

❸ Como as variâncias populacionais não são iguais e o menor tamanho de amostra é 8, usar .

❹ Sendo o teste bilateral com e , os valores críticos são e . As regiões de rejeição são e . A estatística de teste padronizada é:

$$t = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{473 - 459}{\sqrt{\frac{39{,}7^2}{8} + \frac{24{,}5^2}{18}}} \approx 0{,}922$$

❺ A figura mostra a localização das regiões de rejeição e a estatística de teste padronizada . Como não está na região de rejeição, não rejeitamos a hipótese nula.



Exemplo em python no notebook aula 20 - exercício 5

Aqui usaremos média amostral, erro padrão, número de amostras intervalo de confiança e tipo de teste.

Aula 21 – Teste de Hipótese usando duas amostras 02

Teste t para diferença entre médias

● Para realizar um teste de hipótese usando *duas amostras dependentes*, primeiramente calculamos a *diferença entre os elementos de cada par de dados*:

$$d = (valor\ na\ 1^{a}\ amostra) - (correspondente\ valor\ na\ 2^{a}\ amostra)$$

● A estatística de teste é a média dessas diferenças:

$\bar{d} = \dfrac{\Sigma d}{n}$. Média das diferenças entre valores de dados emparelhados nas amostras dependentes.

Quando podemos usar o teste *t* para a diferença entre duas médias?

● *Condições* para uso do teste *t*:

1. As amostras são selecionadas aleatoriamente.
2. As amostras são dependentes (emparelhadas).
3. As populações são normalmente distribuídas *ou* o número *n* de pares de dados é pelo menos 30.

● Quando essas condições são satisfeitas, a *distribuição amostral para* , a média das diferenças dos valores dos dados emparelhados nas amostras dependentes, é *aproximada por uma distribuição com graus de liberdade*, em que é o número de pares de dados.

● O *desvio padrão* das diferenças entre os valores dos dados emparelhados nas amostras dependentes é expresso por:

$$s_d = \sqrt{\frac{\sum (d - \bar{d})^2}{n-1}}$$

● A(s) região(ões) de rejeição do teste é (são) determinada(s) pelo nível de significância . Se a *estatística de teste padronizada* está na região de rejeição, rejeitamos a hipótese nula . Caso contrário, não rejeitamos .

$$t = \frac{\bar{d} - \mu_d}{s_d / \sqrt{n}}$$

EXEMPLO Um fabricante de calçados afirma que os atletas podem aumentar a altura de seus saltos verticais usando o calçado de treinamento do fabricante. As alturas dos saltos verticais de oito atletas aleatoriamente selecionados são medidas.

Após usarem os calçados por 8 meses, suas alturas nos saltos verticais são novamente medidas. As alturas dos saltos verticais (em polegadas) para cada atleta estão na tabela do próximo *slide*.

Para , há evidência suficiente para aceitar a afirmação do fabricante? Suponha que as alturas dos saltos verticais são normalmente distribuídas. (Adaptado de: *Coaches Sports Publishing*)

EXEMPLO

Atleta	1	2	3	4	5	6	7	8
Altura do salto vertical (antes de usar o calçado)	24	22	25	28	35	32	30	27
Altura do salto vertical (após usar o calçado)	26	25	25	29	33	34	35	30

1 As amostras são aleatórias e dependentes, e as populações normalmente distribuídas. Logo, podemos empregar o teste .

2 A afirmação diz que *"os atletas podem aumentar a altura de seus saltos verticais"*. Ou seja, o fabricante afirma que a altura do salto vertical de um atleta *antes* de usar o calçado será *menor que a altura após usar o calçado*.

3 Cada diferença é dada por:

4 As hipóteses nula e alternativa são:

$$H_0: \mu_d \geq 0 \qquad \text{e} \qquad H_a: \mu_d < 0. \quad \text{(Afirmação.)}$$

Teste unilateral à esquerda!

5 O nível de significância é e . Logo, o valor crítico é . A região de rejeição é .

6 Cálculo da estatística de teste padronizada:

$$\bar{d} = \frac{\sum d}{n} = -\frac{14}{8} = -1{,}75$$

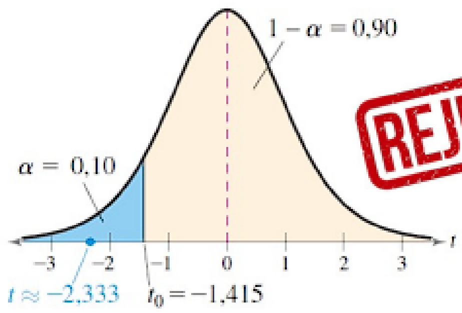
Fórmula alternativa para o desvio padrão

$$s_d = \sqrt{\frac{\sum d^2 - \left[\frac{\left(\sum d\right)^2}{n}\right]}{n-1}} = \sqrt{\frac{56 - \frac{(-14)^2}{8}}{8-1}} \approx 2{,}1213$$

$$t = \frac{\bar{d} - \mu_d}{s_d/\sqrt{n}} \approx \frac{-1{,}75 - 0}{\frac{2{,}1213}{\sqrt{8}}} \approx -2{,}333$$

Antes	Depois	d	d^2
24	26	−2	4
22	25	−3	9
25	25	0	0
28	29	−1	1
35	33	2	4
32	34	−2	4
30	35	−5	25
27	30	−3	9
		Σ = −14	Σ = 56

7 Cálculo da estatística de teste padronizada:



Há evidência suficiente, ao nível de significância de 10%, para concordar com a afirmação do fabricante de calçados de que os atletas podem aumentar a altura de seus saltos verticais usando o calçado de treinamento do fabricante.

Exemplo em python no notebook aula 21 - exercício 1

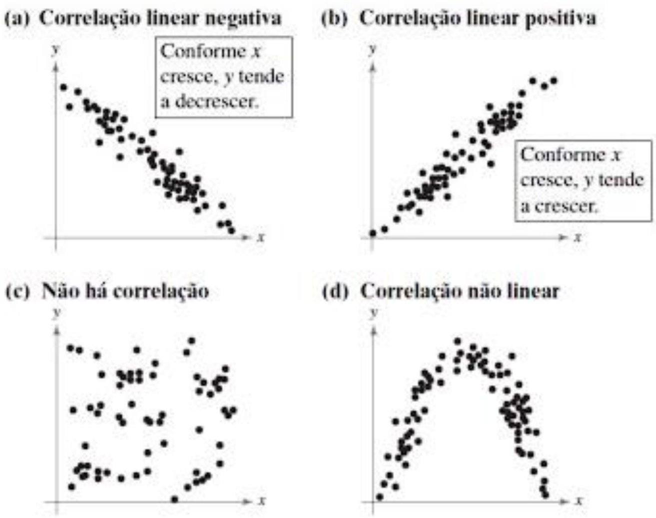
Aqui usaremos os dados puros para o cálculo e o nível de confiança

Aula 22 – Correlação Linear

- Existe relação entre o *número de horas de treinamento* para um funcionário e o *número de acidentes* envolvendo este funcionário?
- Existe relação entre o *número de horas que uma pessoa dorme* a cada noite e o *tempo de reação* dessa pessoa?

Definição

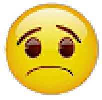
Uma **correlação** é uma relação entre duas variáveis. Os dados podem ser representados por pares ordenados (x, y), sendo x a **variável independente** (ou **explanatória**) e y a **variável dependente** (ou **resposta**).



EXEMPLO Um economista quer determinar se existe relação linear entre o produto interno bruto (PIB) de países e as respectivas emissões de dióxido de carbono (CO2). Exiba os dados em um diagrama de dispersão e descreva o tipo de correlação.

PIB (em trilhões de dólares), x	Emissões de CO_2 (em milhões de toneladas métricas), y
1,7	552,6
1,2	462,3
2,5	475,4
2,8	374,3
3,6	748,5
2,2	400,9
0,8	253,0
1,5	318,6
2,4	496,8
5,9	1.180,6

Interpretação: Conforme o PIB cresce, as emissões de CO_2 também tendem a crescer. Há indícios de uma correlação linear positiva entre as variáveis.



Interpretar a correlação usando um diagrama de dispersão pode ser subjetivo... É preciso empregar um índice de mérito analítico.

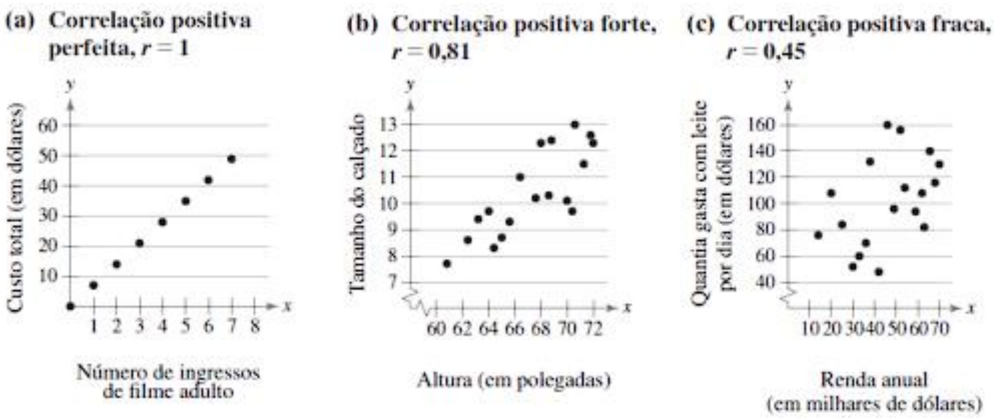
Definição Coeficiente de correlação produto-momento de Pearson

O **coeficiente de correlação** é uma medida da força e da direção de uma relação linear entre duas variáveis. O símbolo r representa o coeficiente de correlação amostral. Uma fórmula para r é:

$$r = \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}\,\sqrt{n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}}$$ coeficiente de correlação amostral

em que n é o número de pares de dados.

O coeficiente de correlação populacional é representado por .



Correlação populacional

● Uma vez calculado o *coeficiente de correlação amostral* , devemos determinar se há evidência suficiente para *decidir* se o *coeficiente de correlação populacional é significativo*.

Em outras palavras, tomando por base alguns poucos pares de dados, podemos fazer uma inferência sobre a população de todos esses pares de dados?

Vamos conduzir um *teste de hipótese* para determinar se o coeficiente de *correlação amostral* fornece *evidência suficiente* para concluir que o *coeficiente de correlação populacional* é de fato *significativo*.

Teste t para correlação populacional

O teste *t* para o coeficiente de correlação

Um **teste *t*** pode ser usado para testar se a correlação entre duas variáveis é significativa. A **estatística de teste** é ***r*** e a **estatística de teste padronizada**

$$t = \frac{r}{\sigma_r} = \frac{r}{\sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}}$$

segue uma distribuição *t* com $n - 2$ graus de liberdade, em que n é o número de pares de dados.

❶ Identifique as hipóteses nula e alternativa.

$$\begin{cases} H_0\!: \rho = 0 \text{ (não há correlação significativa)} \\ H_a\!: \rho \neq 0 \text{ (correlação significativa)} \end{cases}$$

❷ Especifique o *nível de significância* .

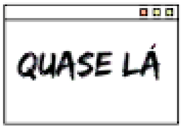
❸ Identifique os *graus de liberdade*: , em que é o número de pares de dados disponíveis.

❹ Determine os *valores críticos* e as *regiões de rejeição*: uma vez que o teste é bilateral, usaremos .ppf(alpha/2).

$$\begin{cases} H_0\!: \rho = 0 \\ H_a\!: \rho \neq 0 \end{cases}$$

❺ Calcule *a estatística de teste padronizada*:

$$t = \frac{r}{\sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}}$$



❻ Tome uma *decisão* para rejeitar ou não rejeitar a hipótese nula:

> "Seestá na região de rejeição, então rejeitar . Caso contrário, não rejeitar ."

❼ Interprete a decisão no contexto da afirmação original.

EXEMPLO No Exercício 04, empregamos 10 pares de dados para determinar . Vamos testar a significância desse coeficiente de correlação, usando .

❶ As hipóteses nula e alternativa são:

$$H_0: \rho = 0 \text{ (não há correlação)} \quad \text{e} \quad H_a: \rho \neq 0 \text{ (correlação significativa).}$$

❷ O nível de significância é de 5%, ou seja, .

❸ Por haver 10 pares de dados na amostra, há graus de liberdade.

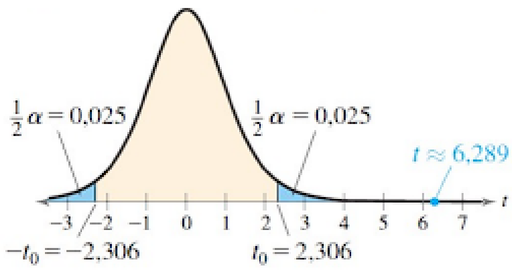
❹ Como o teste é bilateral, e , os valores críticos são
e . Assim, as regiões de rejeição são e .

❺ Usando o teste , a estatística de teste padronizada é:

$$t = \frac{r}{\sqrt{\dfrac{1-r^2}{n-2}}} \approx \frac{0{,}912}{\sqrt{\dfrac{1-0{,}912^2}{10-2}}} \approx 6{,}289$$

❻ Tomada de decisão:

Como está na região de rejeição, rejeitamos a hipótese nula.



❼ *Interpretação:* Há evidência suficiente, ao nível de significância de 5%, para concluir que há correlação linear entre o produto interno bruto e as emissões de dióxido de carbono.

python

O fato de duas variáveis serem fortemente correlacionadas não implica, em si, numa relação de *causa e efeito* entre elas.

Um estudo mais profundo é usualmente necessário para determinar se há uma relação causal entre as variáveis.

- Quando há uma *correlação significativa* entre duas variáveis, um pesquisador deve considerar as seguintes possibilidades.

1. Há uma relação direta de causa e efeito entre as variáveis? Ou seja, causa ?
2. Há uma relação reversa de causa e efeito entre as variáveis? Ou seja, causa ?
3. É possível que a relação entre as variáveis possa ser causada por uma terceira variável ou talvez pela combinação de diversas outras variáveis?
4. É possível que a relação entre duas variáveis seja uma coincidência?

Exemplo em python no notebook aula 22 - exercício 1

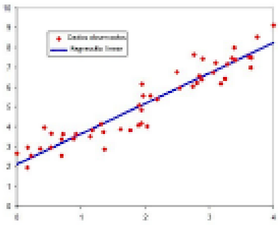
Aula 23 – Regressão Linear 01

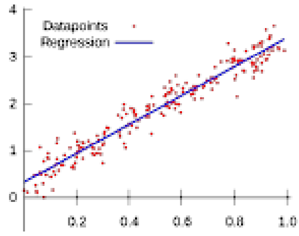
- A *correlação linear* entre duas variáveis é *significativa*.

Determinar a *equação da reta* que melhor modela os dados.

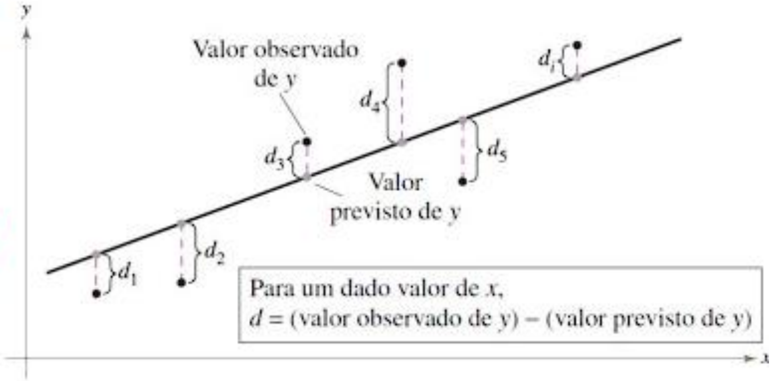
Reta de regressão

Usada para predizer os valores da variável dependente para um dado valor da variável independente.





- Considere o diagrama de dispersão e a reta mostrados na figura. Para cada ponto, representa a *diferença entre o valor observado* de *e o valor previsto* de para um dado valor de .



De todas as retas possíveis que podem ser desenhadas através de um conjunto de pontos, a reta de regressão é a reta para a qual a soma dos quadrados dos resíduos é mínima.

A equação de uma reta de regressão

A equação de uma reta de regressão para uma variável independente x e uma variável dependente y é:

$$\hat{y} = mx + b$$

em que $\hat{y}$ é o valor previsto de y para um dado valor de x. A inclinação m e o intercepto em y, b, são dados por:

$$m = \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \quad \text{e} \quad b = \bar{y} - m\bar{x} = \frac{\Sigma y}{n} - m\frac{\Sigma x}{n}$$

Em que $\hat{y}$ é a média dos valores de y no conjunto de dados, e $\bar{x}$ é a média dos valores de x e n é o número de pares de dados. A reta de regressão sempre passa pelo ponto $(\bar{x}, \bar{y})$.

EXEMPLO Determine a equação da reta de regressão para os dados do produto interno bruto e emissão de dióxido de carbono usados na aula passada.

PIB (em trilhões de dólares), x	Emissões de CO_2 (em milhões de toneladas métricas), y
1,7	552,6
1,2	462,3
2,5	475,4
2,8	374,3
3,6	748,5
2,2	400,9
0,8	253,0
1,5	318,6
2,4	496,8
5,9	1.180,6

EXEMPLO Determine a equação da reta de regressão para os dados do produto interno bruto e emissão de dióxido de carbono usados na aula passada.

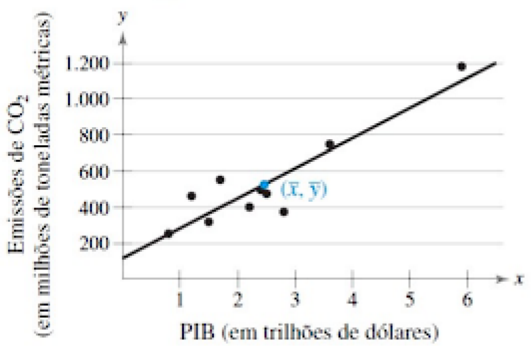
PIB (em trilhões de dólares), x	Emissões de CO_2 (em milhões de toneladas métricas), y
1,7	552,6
1,2	462,3
2,5	475,4
2,8	374,3
3,6	748,5
2,2	400,9
0,8	253,0
1,5	318,6
2,4	496,8
5,9	1.180,6

$$b = \overline{y} - m\,\overline{x} \approx \frac{5263}{10} - 166,900 \cdot \frac{24,6}{10} \approx 115,725$$

Portanto:

YEAH

Relação entre PIB e emissões de CO_2: diagrama de dispersão e a reta de regressão.



● Quando a *correlação linear* entre e é *significativa*, a equação de uma *reta de regressão* pode ser usada para *prever valores* de para certos valores de .

● Os valores previstos têm sentido somente para os *valores de pertencentes ao (ou próximo do) intervalo dos valores observados*.

Como fazer a previsão (ou predição)?

Para prever valores de , substitua o valor desejado de na equação de regressão e então calcule , o valor previsto de .

EXEMPLO A equação de regressão para os dados do produto interno bruto (em trilhões de dólares) e as emissões de dióxido de carbono (em milhões de toneladas métricas) é: . Use essa equação para prever as *emissões de dióxido de carbono esperadas* para cada produto interno bruto.

1. US$ 1,2 trilhão. **2.** US$ 2,0 trilhões. **3.** US$ 2,5 trilhões.

$$\hat{y} = 166{,}900 \cdot 1{,}2 + 115{,}725 = 316{,}005\,(Mt)$$

$$\hat{y} = 166{,}900 \cdot 2{,}0 + 115{,}725 = 449{,}525\,(Mt)$$

$$\hat{y} = 166{,}900 \cdot 2{,}5 + 115{,}725 = 532{,}975\,(Mt)$$

Exemplo em python no notebook aula 23 - exercício 1

Aqui usaremos os dados puros para o cálculo e o nível de confiança