Departamento de Engenharia Informática,

Faculdade de Ciências e Tecnologias da Universidade de Coimbra

Bruno Madureira nº 2011161942

Fábio Silva nº2010147721

Análise e Transformação de Dados

TP3

1. Considere o seguinte sinal de tempo contínuo e periódico:

$$x(t) = -1 + 3\sin(30\pi t) + 4\,\mathrm{mod}(G\#, 2)\sin(12\pi t - \pi/4)\cos(21\pi t) + 4\,\mathrm{mod}(1 + G\#, 2)\cos(20\pi t + \pi/4)\sin(45\pi t)$$

em que G# é o número do Grupo de Trabalho.

1.1. Aplicando o Teorema da Amostragem, escolha uma frequência de amostragem f_s adequada, que seja múltipla da frequência fundamental f_0. Obtenha a expressão de $\boldsymbol{x[n]}$.

X(t)=-1+3sin(30π)+0+4cos(20πt+(π/4))sin (45π)

⇔ X(t)=-1+3sin((π/2)- 30π)+$\frac{1}{2}$(4sin(20πt+(π/4)+ (45π))x4sin(45π)

⇔ X(t)=-1+3sin((π/2)- 30π)+$\frac{1}{2}$(4sin(20πt+(π/4)+ (45π))-4sin(45π-20πt-($\frac{\pi}{4}$)

⇔ X(t)=-1+3sin((π/2)- 30π)+2sin(65πt+$\frac{\pi}{4}$)-2sin(25πt+$\frac{\pi}{4}$)

⇔ X(t)=-1+3sin((π/2)- 30π)+2cos($\frac{\pi}{2}$ - $\frac{\pi}{4}$-65πt)-2cos($\frac{\pi}{2}$ - $\frac{\pi}{4}$-25πt)

⇔ X(t)=cos(-π)+3sin((π/2)- 30π)+2cos(65πt - $\frac{\pi}{4}$)-2cos(25πt- $\frac{3\pi}{4}$)

⇔ X(t)=cos(-π)+3sin(30π+(π/2))+2cos(65πt - $\frac{\pi}{4}$)-2cos(25πt- $\frac{3\pi}{4}$)

ω_0={30π,65π,25π}

m.d.c(30π,65π,25π)=5π

$f_0 = \frac{5\pi}{2\pi} = \frac{5}{2}$

ωmax=65π ⇔fmax=$\frac{65\pi}{2\pi}$=32.5 Hz

logo fs>2x32,5

fs>65

escolhemos fs= 70Hz

ts=$\frac{1}{70}$s

N=$\frac{fs}{f_0}$=$\frac{\frac{70}{1}}{\frac{5}{2}}$=2,5

utilizamos ts=$\frac{1}{70}$s

x[n]= cos(-π)+3sin($\frac{30\pi t}{70}$+(π/2))+2cos($\frac{65\pi t}{70}$ - $\frac{\pi}{4}$)-2cos($\frac{25\pi t}{70}$- $\frac{3\pi}{4}$)

1.2. Indique as frequências angulares (ω e Ω), as frequências fundamentais (ω_0 e Ω_0) e os períodos fundamentais (T_0 e N) dos sinais de tempo contínuo $\boldsymbol{x(t)}$ e de tempo discreto $\boldsymbol{x[n]}$.

ω= 30 π, 65 π ,25π

$\Omega = (30/70)\ \pi, (\ 65/70)\ \pi\ \ , (25/70)\pi$

ω=5π

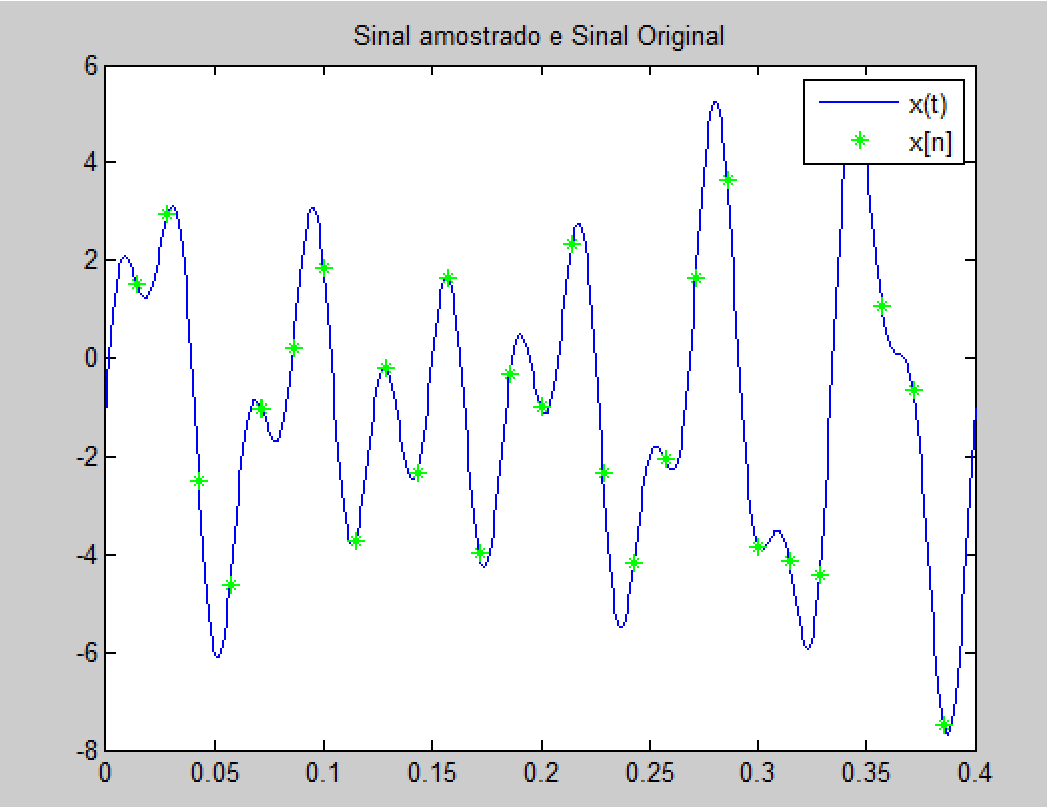
Ω = (5/70)π

$T_0 = \frac{2}{5}$

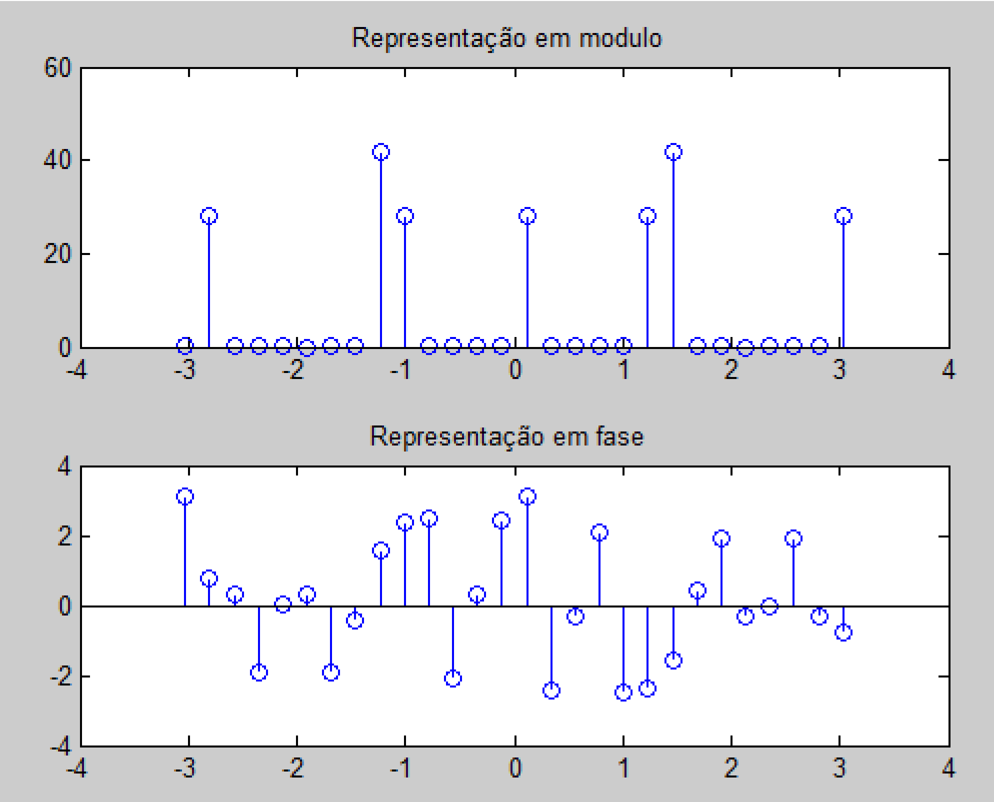
N=28

1.3. Represente graficamente a sobreposição do sinal de tempo contínuo (com um passo temporal reduzido e traço contínuo) e o correspondente sinal amostrado (ponto a ponto).

Para isto fazemos o plot de x(t) e x[n]:



1.4. Determine e represente graficamente a Transformada de Fourier Discreta (DFT) do sinal $x[n]$, usando as funções ***fft*** e ***fftshift***, em módulo e em fase, em função da frequência angular ω (em rad/s) e em função da frequência angular Ω (em rad).



1.5. Determine os coeficientes da Série de Fourier complexa do sinal, c_m, a partir da DFT.

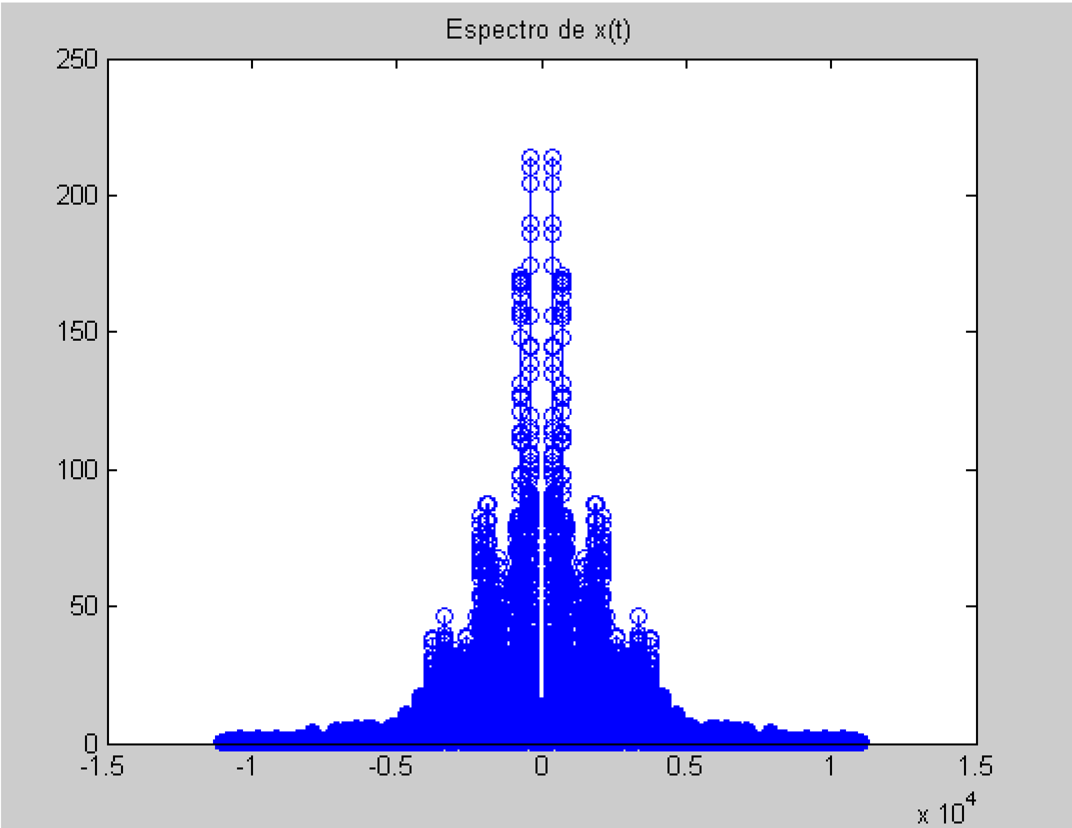
```
  1.0e+02 *

Columns 1 through 4

-0.0000              0.4950 + 0.4950i   0.0000 + 0.0000i  -0.0000 - 0.0000i

Columns 5 through 8

 0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i  -0.0000 - 0.0000i   0.0000 - 0.0000i

Columns 9 through 12

 0.0000 + 1.0500i  -0.4950 + 0.4950i  -0.0000 + 0.0000i  -0.0000 - 0.0000i

Columns 13 through 16

 0.0000 + 0.0000i  -0.0000 + 0.0000i  -0.7000             -0.0000 - 0.0000i

Columns 17 through 20

 0.0000 - 0.0000i  -0.0000 + 0.0000i  -0.0000 - 0.0000i  -0.4950 - 0.4950i

Columns 21 through 24

 0.0000 - 1.0500i   0.0000 + 0.0000i  -0.0000 + 0.0000i   0.0000 - 0.0000i

Columns 25 through 28

 0.0000 - 0.0000i  -0.0000 + 0.0000i   0.0000 - 0.0000i   0.4950 - 0.4950i
```

1.6. Determine e represente graficamente os parâmetros da Série de Fourier trigonométrica (**C_m** e **θ_m**) do sinal. Justifique os cálculos que efectuar.

1.7. Reconstrua o sinal ***x*(*t*)** a partir dos parâmetros da Série de Fourier trigonométrica, obtidos em 1.6. Compare graficamente com o sinal original.

2. Considere o sinal áudio presente no ficheiro 'saxriff.wav':

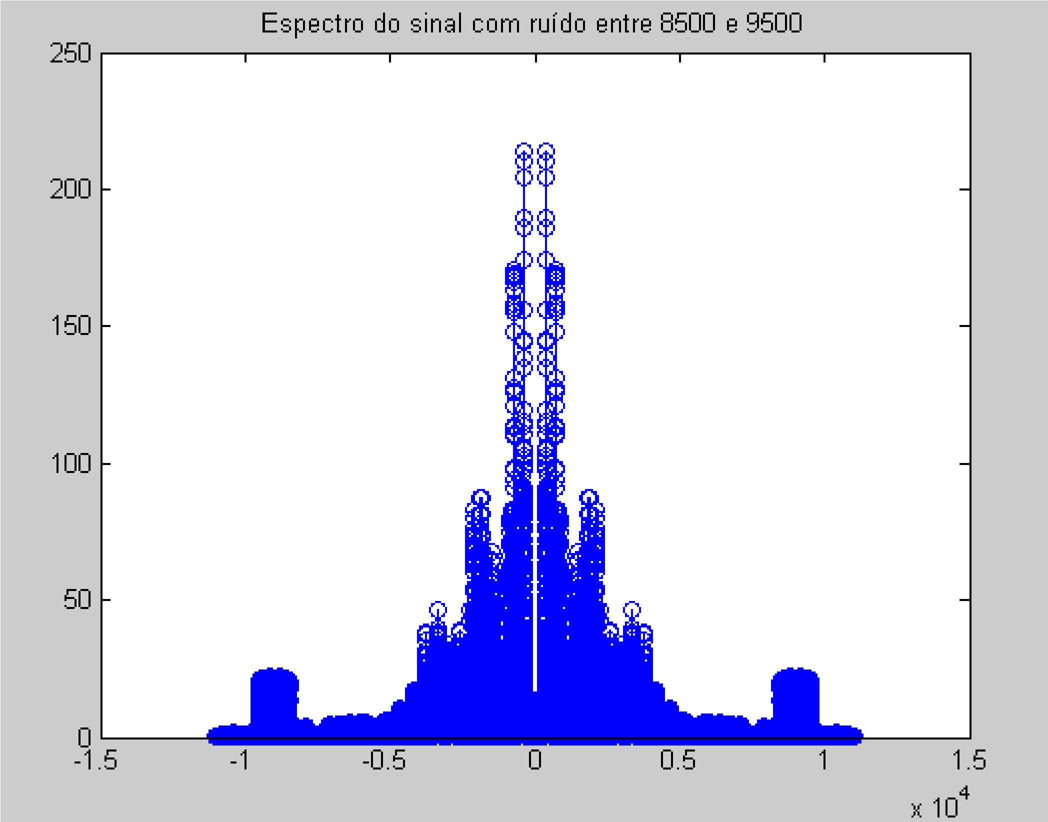
2.1. Escute o sinal e represente graficamente o seu espectro em módulo, em função da frequência *f*. Utilize as funções ***wavplay***, ***wavread***, ***fft***, ***fftshift*** e ***abs***.



2.2. Obtenha a amplitude máxima da DFT e a frequência correspondente do sinal, em *Hz*.

```
A  frequência da componente com aplitude máxima é 374.475861, e a sua frequencia 213.682044
```

2.3. No domínio da frequência, adicione ruído uniforme fora da banda de frequência do sinal original (e.g., entre 8.5 e 9.5 KHz); utilize a função ***rand*** e defina a amplitude máxima do espectro do ruído como 10% da amplitude máxima do espectro do sinal. Represente graficamente o resultado (magnitude do espectro do sinal com ruído em função da frequência *f*).



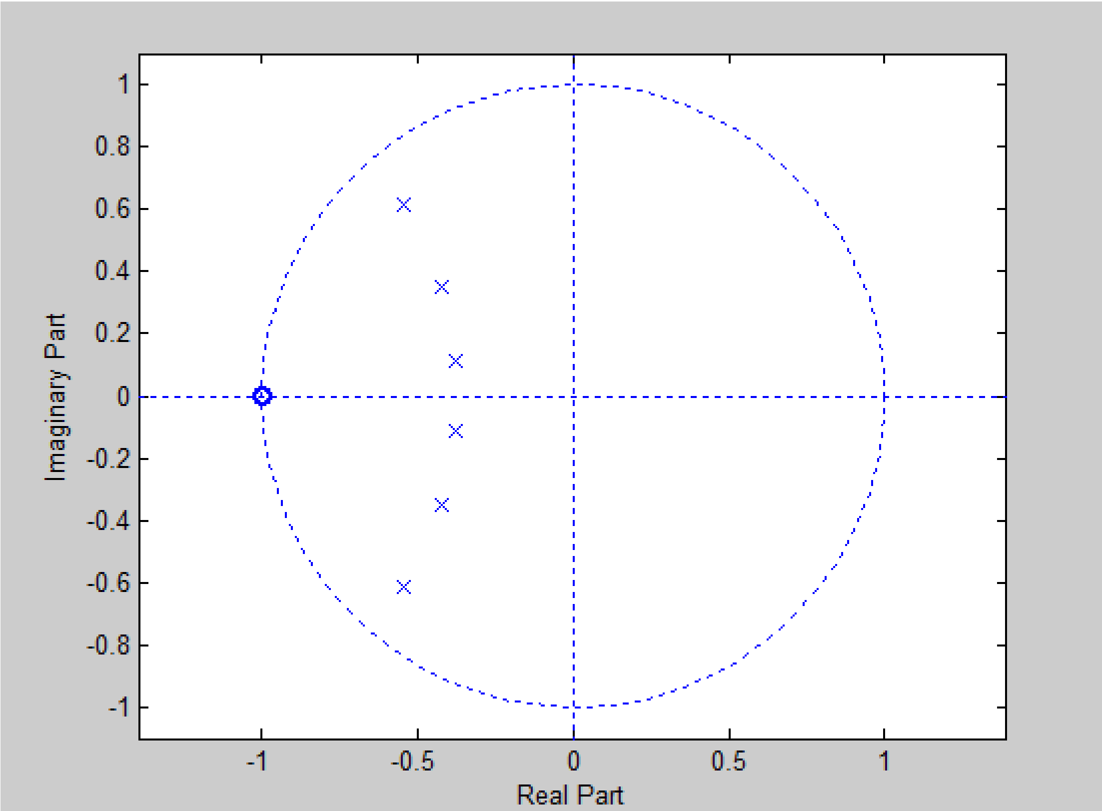
Verifica-se que o ruído se apresenta fora das zonas de frequências principais.

2.4. Obtenha o sinal com ruído no domínio temporal; utilize a função ***ifft*** (caso o sinal contenha valores imaginários, extraia a componente real com a função ***real***). Escute o novo sinal e compare-o com o original. O que conclui?

Ao reproduzir o sinal ouve-se um ligeiro ruído de fundo no sinal. Parecido com um grilo.

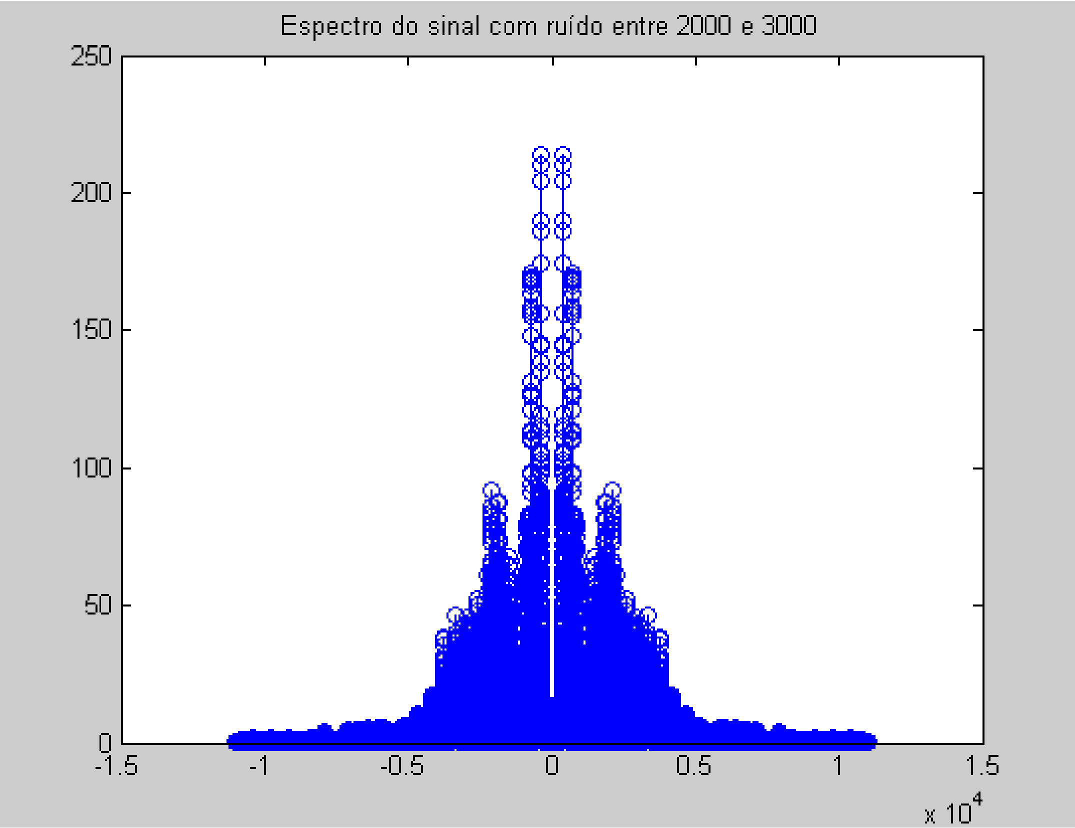
2.5. Tente eliminar o ruído gerado anteriormente. Para tal, implemente um filtro passa-baixo do tipo Butterworth de ordem 6, com frequência de corte ***fc*** = 8 KHz.
Poderá utilizar a função **[b, a] = butter(Nf,wn);** em que **Nf** define a ordem do filtro e **wn** determina a frequência de corte em função de metade da frequência de amostragem (i.e., **wn**=1.0 => ***fc*** = ***fs*** / 2; **wn**=0.5 => ***fc*** = ***fs*** / 4). A função devolve os coeficientes dos polinómios em **z** correspondentes ao numerador (**b**) e ao denominador (**a**) da função de transferência do filtro.
Para filtrar o sinal, poderá aplicar a função **y = filter(b, a, x);** em que **x** corresponde à entrada no domínio temporal, **a** e **b** representam a função de transferência tal como foi descrito e **y** indica a saída temporal do filtro.
Apresente os resultados (função de transferência, pólos e zeros do filtro e a representação gráfica da magnitude do espectro do sinal com ruído filtrado em função da frequência *f*).

```
exercicio 2.5

Pólos:
  -0.5440 + 0.6129i
  -0.5440 - 0.6129i
  -0.4236 + 0.3493i
  -0.4236 - 0.3493i
  -0.3756 + 0.1134i
  -0.3756 - 0.1134i

Zeros:
  -1.0048
  -1.0024 + 0.0042i
  -1.0024 - 0.0042i
  -0.9976 + 0.0042i
  -0.9976 - 0.0042i
  -0.9952

Coeficientes do numerador de G(Z):
    0.1765    1.0589    2.6473    3.5298    2.6473    1.0589    0.1765

Coeficientes do denominador de G(Z):
    1.0000    2.6863    3.5022    2.6179    1.1677    0.2901    0.0312
```



2.6. Repita as questões 2.3, 2.4 e 2.5 (com a devida adaptação das especificações) utilizando agora ruído na mesma banda de frequência do sinal original (e.g., entre 2 e 3 KHz). Apresente os resultados (função de transferência, pólos e zeros do filtro e a representação gráfica da magnitude do espectro do sinal com ruído filtrado em função da frequência *f*). Que conclui quanto à possibilidade de eliminação do ruído nesta situação?

Espectro de x(t) com ruído entre 2000 e 3000.

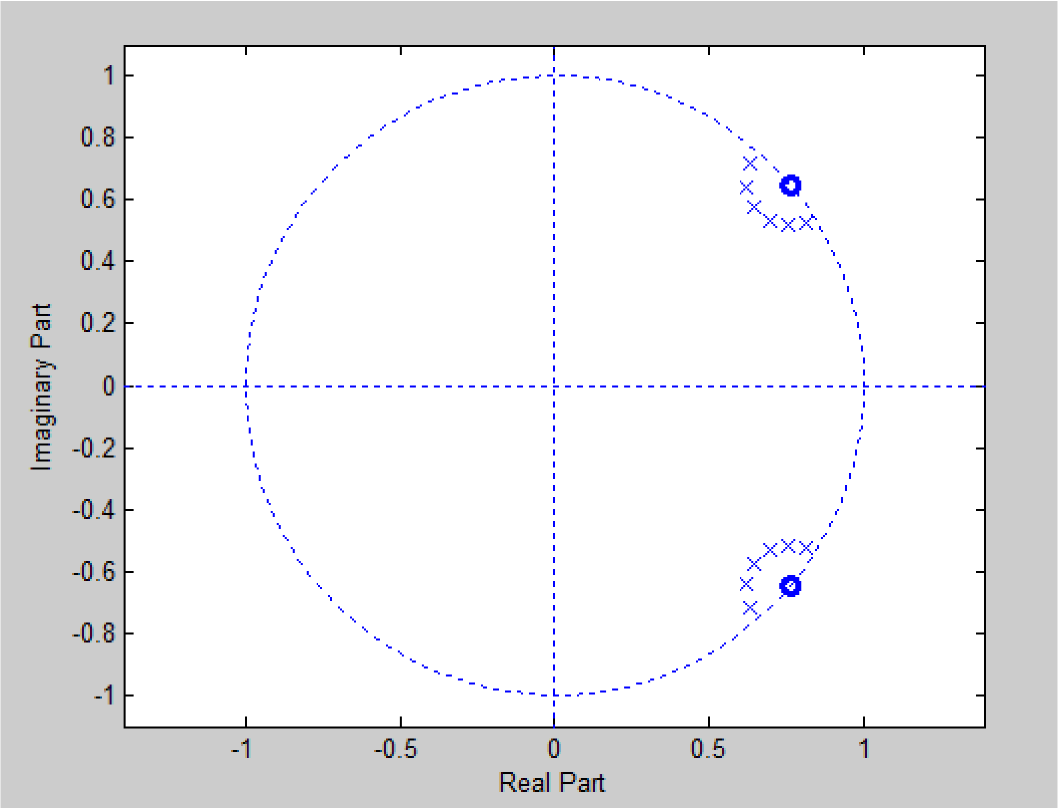


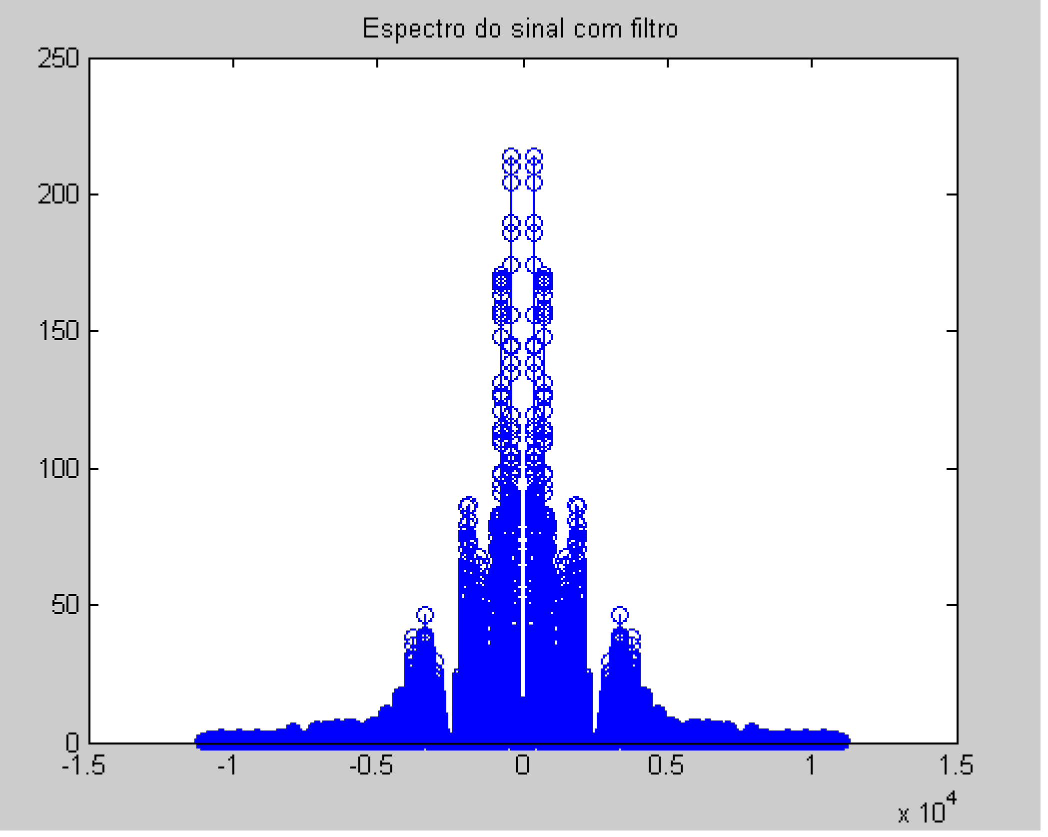
Pólos:
0.6335 + 0.7194i
0.6335 - 0.7194i
0.8150 + 0.5258i
0.8150 - 0.5258i
0.6205 + 0.6425i
0.6205 - 0.6425i
0.7561 + 0.5157i
0.7561 - 0.5157i
0.6456 + 0.5749i
0.6456 - 0.5749i
0.6960 + 0.5312i
0.6960 - 0.5312i

Zeros:
0.7678 + 0.6503i
0.7678 - 0.6503i
0.7612 + 0.6502i
0.7612 - 0.6502i

0.7712 + 0.6446i
0.7712 - 0.6446i
0.7580 + 0.6445i
0.7580 - 0.6445i
0.7679 + 0.6389i
0.7679 - 0.6389i
0.7613 + 0.6389i
0.7613 - 0.6389i

```
Coeficientes do numerador de G(Z):
  Columns 1 through 9

    0.5753   -5.2782   23.6292  -67.5290  136.5175 -205.0524  234.2814 -205.0524  136.5175

  Columns 10 through 13

  -67.5290   23.6292   -5.2782    0.5753

Coeficientes do denominador de G(Z):
  Columns 1 through 9

    1.0000   -8.3335   33.8853  -88.0133  161.8510 -221.3534  230.5152 -184.0844  111.9360

  Columns 10 through 13

  -50.6196   16.2070   -3.3150    0.3310
```



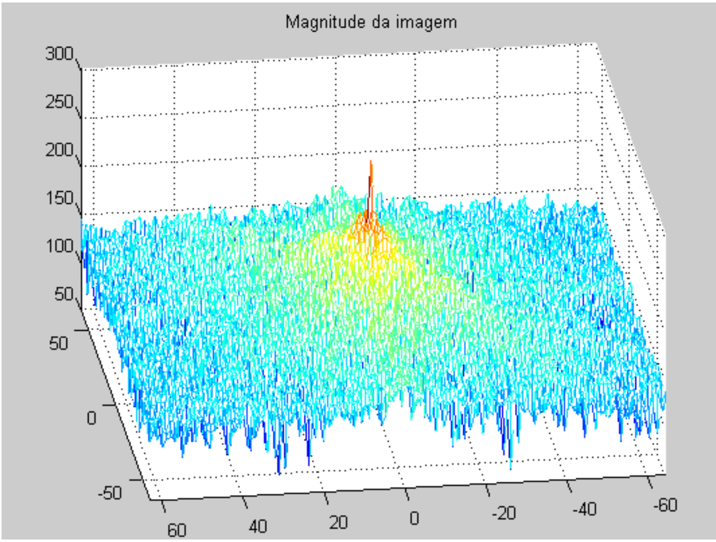


Neste caso, o filtro vai remover frequências mais importantes, pelo que o sinal depois de filtrado não se percebe tão bem como o anterior.

3. A Transformada de Fourier Discreta (DFT) possibilita o processamento de imagens permitindo, por exemplo, a análise computacional de imagens, a filtragem de imagens, a extracção de características, a compressão / reconstrução de imagens, etc. A aplicação da DFT permite decompor uma imagem em termos das suas componentes sinusoidais, aceitando como entrada uma imagem definida no domínio do espaço real, produzindo como saída uma imagem definida no domínio das frequências espaciais. Um ponto na imagem de saída corresponde a uma frequência na imagem de entrada. Por exemplo, o pixel no centro geométrico da imagem de saída corresponde à componente DC da imagem. Quando os restantes pixéis são percorridos do centro para a periferia obtêm-se valores crescentes de frequências na imagem de entrada. Considere a imagem do ficheiro 'lena.bmp'.
   3.1 Ler a imagem usando a função ***imread***.
   3.2 Representar a imagem original, usando a função ***imshow***.

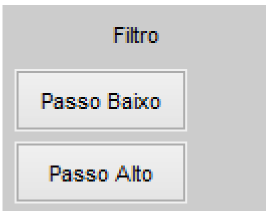
Ao utilizar as funções *imread* e *imshow* é representada a seguinte:

3.3 Obter as componentes de frequência da imagem usando as funções ***fft2*** e ***fftshift***. Representar graficamente a sua magnitude em função do domínio definido em termos das dimensões (entre -N/2 e N/2) da imagem (considere a função ***mesh*** e 20****log10***(***abs***( ))). Caracterize a magnitude do espectro da imagem e obtenha a cor média da imagem (vector do mapa de cores correspondente à componente DC da imagem ou à frequência zero).



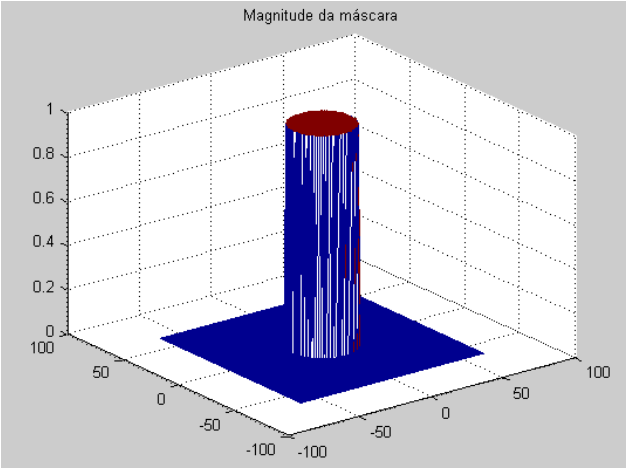
E tendo uma cor média:124,2999

3.4 Criar um menu que permita escolher o Tipo de Filtro a aplicar (Passa-Baixo ou Passa-Alto). Em várias situações é possível projectar um filtro ideal pela convolução da imagem original com uma imagem máscara. A convolução no domínio do espaço corresponde à multiplicação no domínio da frequência. A imagem máscara consiste numa imagem a preto e branco onde as áreas a preto correspondem às superfícies da imagem original que se pretendem eliminar e as áreas em branco correspondem às superfícies da imagem original que se pretendem conservar.

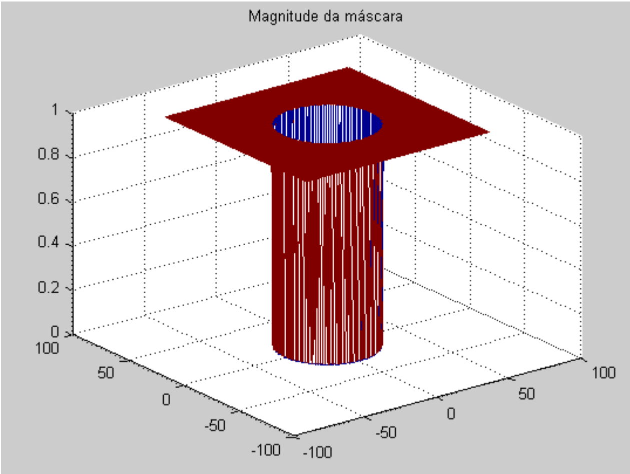


3.5 Considerar um filtro ideal Passa-Baixo (por ex. com f_c=20) e um Passa-Alto (por ex. com f_c=30), pedir o respectivo valor de frequência e construir as respectivas imagens máscara. Representar graficamente a magnitude de cada filtro, usando a função ***mesh***.

Com o Passa-Baixo com o exemplo de 20:

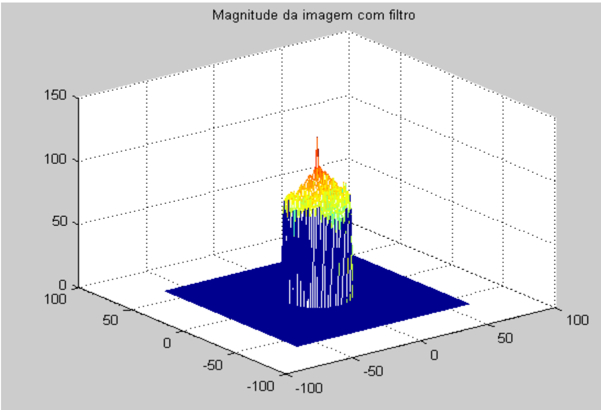


Com o Passa-Alto com o exemplo de 30:

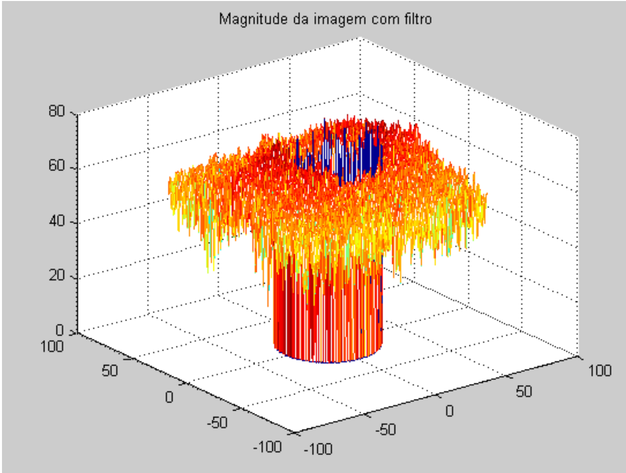


3.6 Aplicar cada um dos filtros, no domínio da frequência, à imagem original. Representar graficamente a magnitude dos respectivos espectros (use ***mesh*** e 20****log10***(***abs***( ))).

Com o Passa-Baixo com o exemplo de 20:



Com o Passa-Alto com o exemplo de 30:



3.7 Obter a imagem resultante da aplicação de cada filtro, usando as funções ***ifftshift*** e ***ifft2***.

3.8 Representar graficamente (usando ***imshow***) a imagem resultante da aplicação de cada filtro, permitindo a manipulação das imagens (com ***rotate3d***).

Juntando a 3.7 e a 3.8 podemos ver a diferença inicial e a final.

Com Passa-Baixo:

Antes:

Depois:

Com Passa-Alto:

Depois:

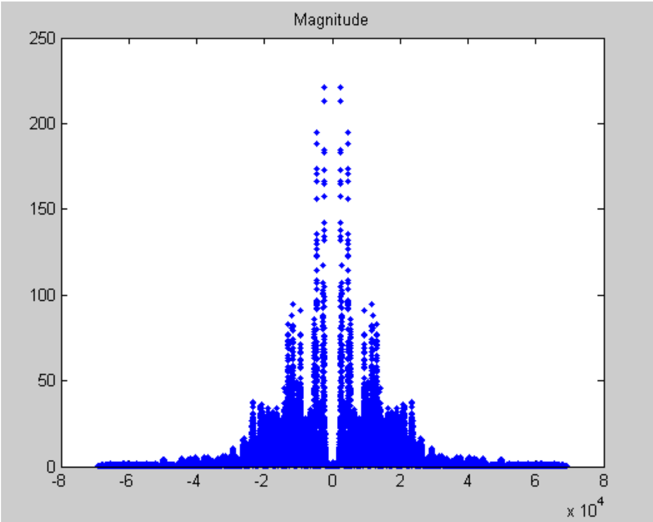
3.9 O que pode concluir sobre as características das imagens que resultaram da aplicação de cada filtro (passa-baixo e passa-alto) sobre a imagem original?

Como frequências altas são as responsáveis pelas transições abrutas em contraste com as frequências baixas são mais suaves. Quando criamos os filtros dependestes destas duas causas as restantes são anuladas.

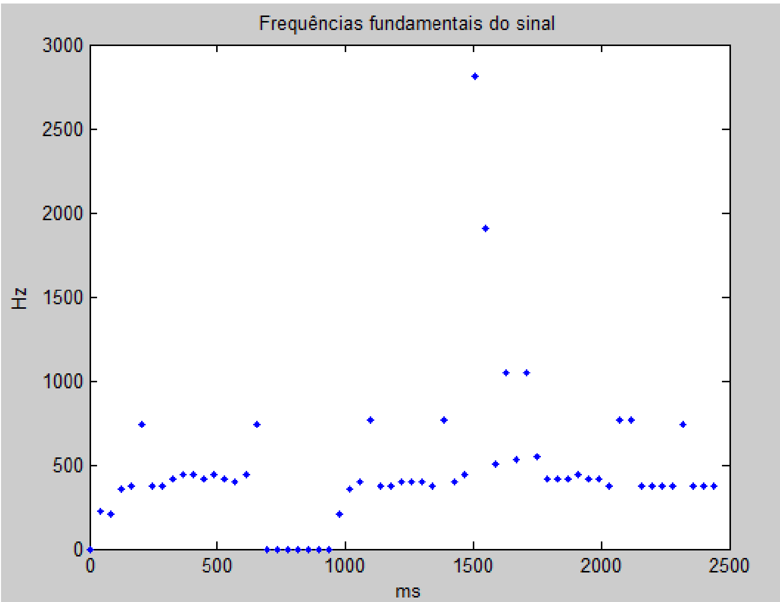
4. A Transformada de Fourier Discreta (DFT) também pode ser usada para efectuar a análise de sinais simultaneamente no tempo e na frequência, através da denominada Transformada de Fourier em Janelas (STFT – Short Time Fourier Transform), aplicando a DFT por janelas, possibilitando uma primeira abordagem para a detecção, em cada janela temporal, de frequências num sinal. Assim, pretende-se determinar a sucessão de frequências fundamentais no sinal acústico 'saxriff.wav', usado em 2.

4.1 Leia, escute e represente graficamente o sinal e o seu espectro (magnitude do espectro do sinal em função da frequência ***f***).

A Transformada de Fourier em Janelas permite fazer uma ligação entre a frequência e o tempo, permitindo estabelecer uma relação entre as frequências e a altura no tempo em que estas acontecem.



4.2 Determine a frequência fundamental em sucessivas janelas temporais com duração de 46.44ms e sobreposição de 5.8ms. Em cada janela, determine a magnitude do espectro recorrendo a uma janela de Hamming (função ***hamming***) e seleccione a frequência fundamental como sendo a frequência com amplitude máxima superior a 100 Hz. Represente graficamente a janela considerada e o respectivo espectro em função da frequência ***f***. Apresente o gráfico com a sucessão temporal de frequências fundamentais.

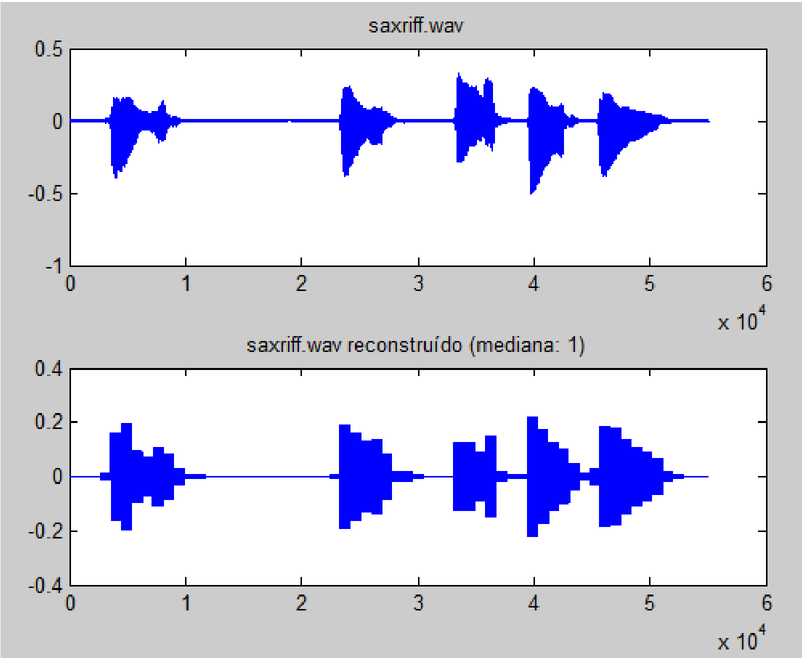


4.3 Tal como verificou na alínea anterior, existe algum ruído na sequência de frequências fundamentais extraídas. Verifica-se a presença, nomeadamente, de alguns *outliers*, i.e., valores de frequências fundamentais incorrectos, correspondentes a transições abruptas. Elimine-os implementando para tal um filtro do tipo mediana sobre o sinal. Teste janelas de diferentes dimensões, e.g., 5, 7 e 9, utilizando a função ***median***. Apresente os resultados, mostrando os gráficos com a sucessão temporal de frequências fundamentais para cada um dos casos da mediana.

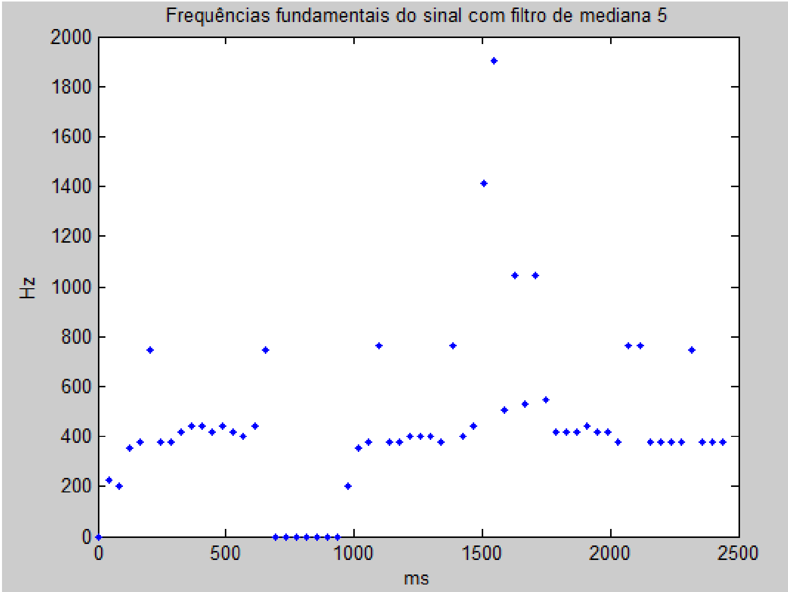
4.4 Sintetize novos sinais a partir das sequências temporais de frequências obtidas em 4.2 e 4.3. Deverá gerar para cada janela temporal um sinal sinusoidal com uma frequência fundamental, f_0, e com a amplitude correspondente, A. Genericamente, o sinal deverá ser gerado por: $x(t) = A*sin(2*pi*f0*t)$, em que o tempo, t, deverá ser definido num intervalo temporal correspondente à janela em causa e com um passo adequado.
Por exemplo, se na 1ª janela f_0 for de 440 Hz, teremos $f_0 = 440$ e t definido em [0, 40.64[ms. Na segunda janela, t será definido no intervalo [40.64, 81.28[ms, eventualmente com um valor de f_0 diferente. Deverá então gerar o sinal para todo o intervalo temporal, guardá-lo com a função ***wavwrite***, lê-lo com a função ***wavread*** e escutá-lo com a função ***wavplay***.
Represente graficamente cada um dos sinais obtidos.

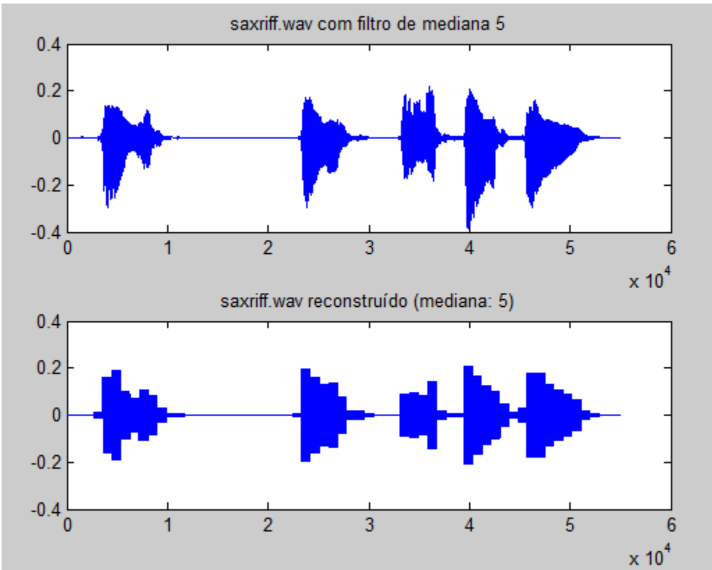
Resposta a 4.3 e 4.4

Com mediana a 1 :

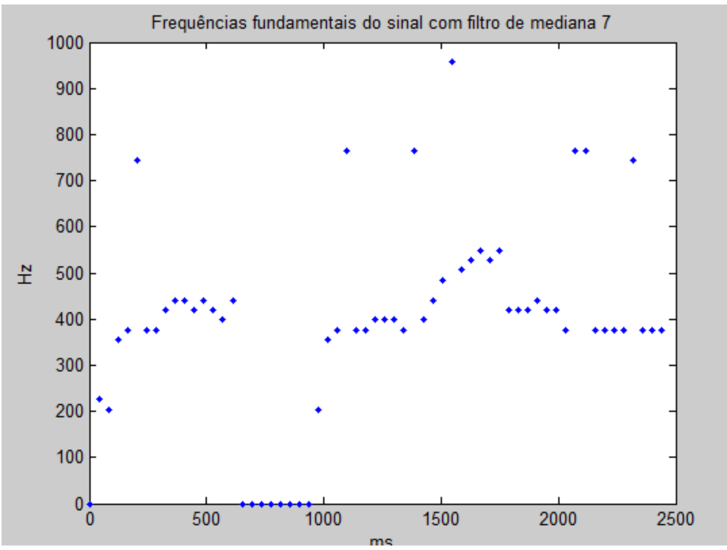


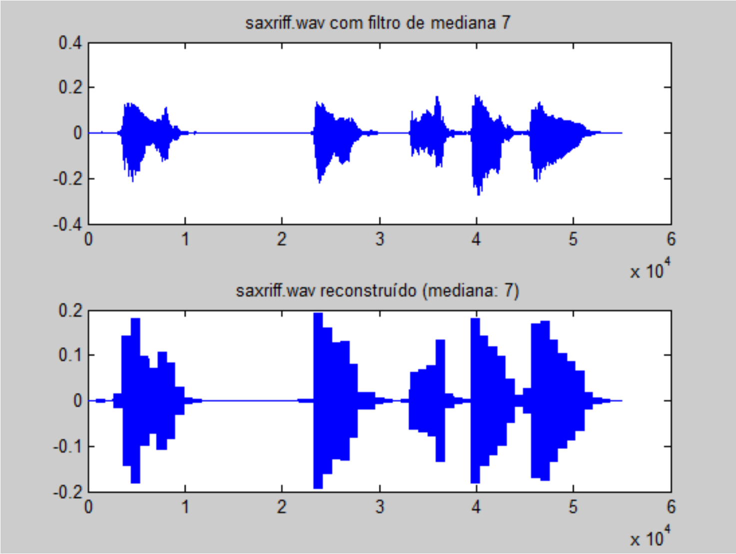
Com media a 5:



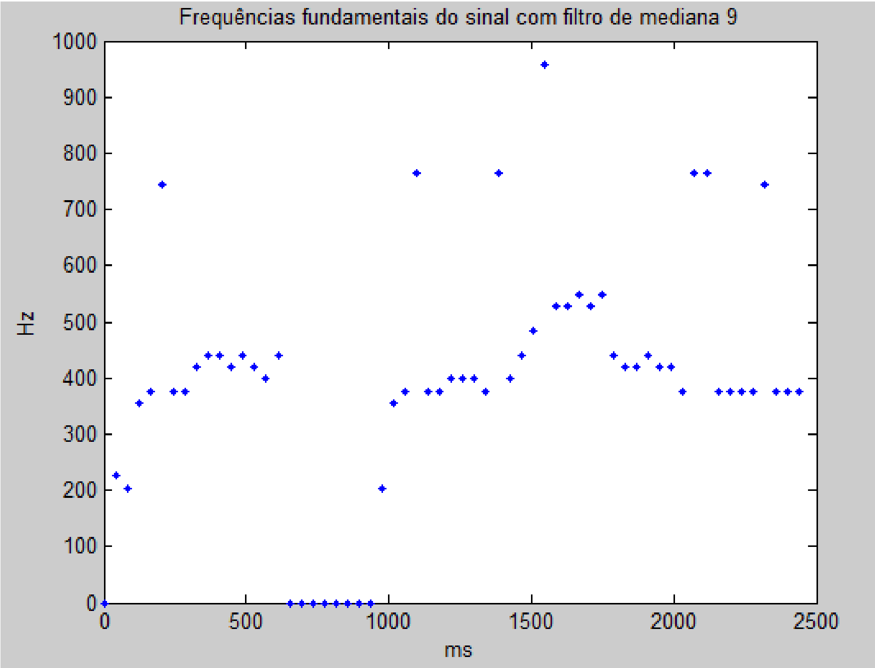


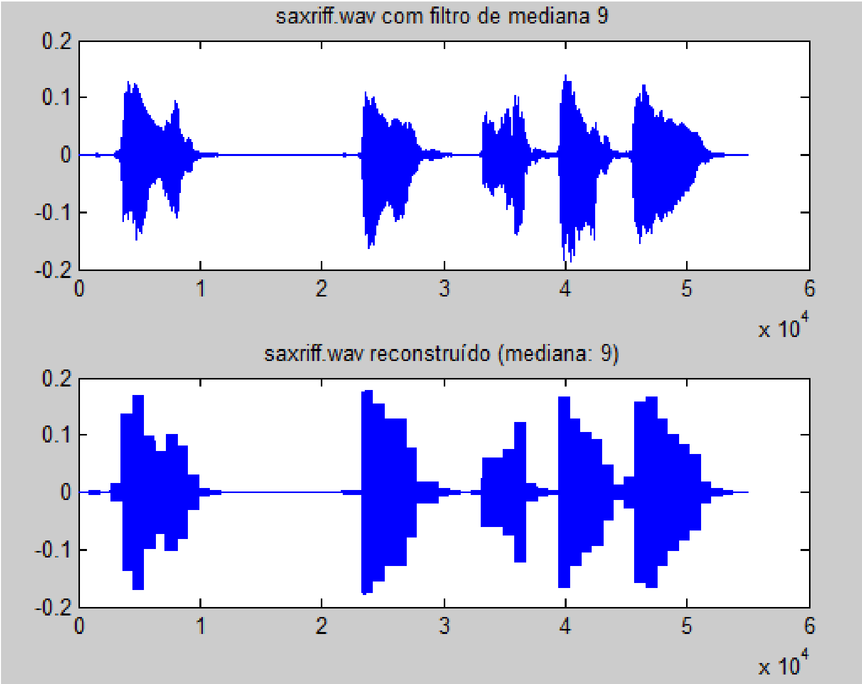
Com mediana a 7:





Com mediana a 9:





Uma vez que existia ruído na sequência de frequências fundamentais extraídas e alguns outliers foi implementado um filtro do tipo mediano sobre o sinal. O menu implementado permite escolher entre usar mediana de dimensão 1 (sinal orginal), 5, 7 ou 9.

Verifica-se que as frequências fundamentais descem e a amplitude máxima dos sinais desce também à medida que a dimensão da mediana sobe.

Ao escolher a mediana o programa para além dos gráficos sintetiza também um novo sinal a partir das sequências temporais obtidas anteriormente. O sinal é gerado por: *x*(*t*) = *A***sin*(2**pi***f*0**t*), em que o tempo, está definido num intervalo temporal correspondente à janela em causa.

4.5 Em termos perceptuais, como compara o sinal original com os sintetizados?

Ouvindo os sinais obtidos é verificável que a melodia representada é a mesma. No entanto os sinais representados são ainda bastante diferentes. O som obtido é menos natural e as frequências mais altas são menos evidentes.

Parecendo que é uma musica eletrónica.

5. A Transformada de Fourier em Janelas (STFT) também pode ser usada para identificar a sequência de notas musicais contidas num sinal, usando a seguinte tabela:

Dó	Dó$_{sust.}$	Ré	Ré$_{sust.}$	Mi	Fá	Fá$_{sust.}$	Sol	Sol$_{sust.}$	Lá	Lá$_{sust.}$	Si
262Hz	277Hz	294Hz	311Hz	330Hz	349Hz	370Hz	392Hz	415Hz	440Hz	466Hz	494Hz

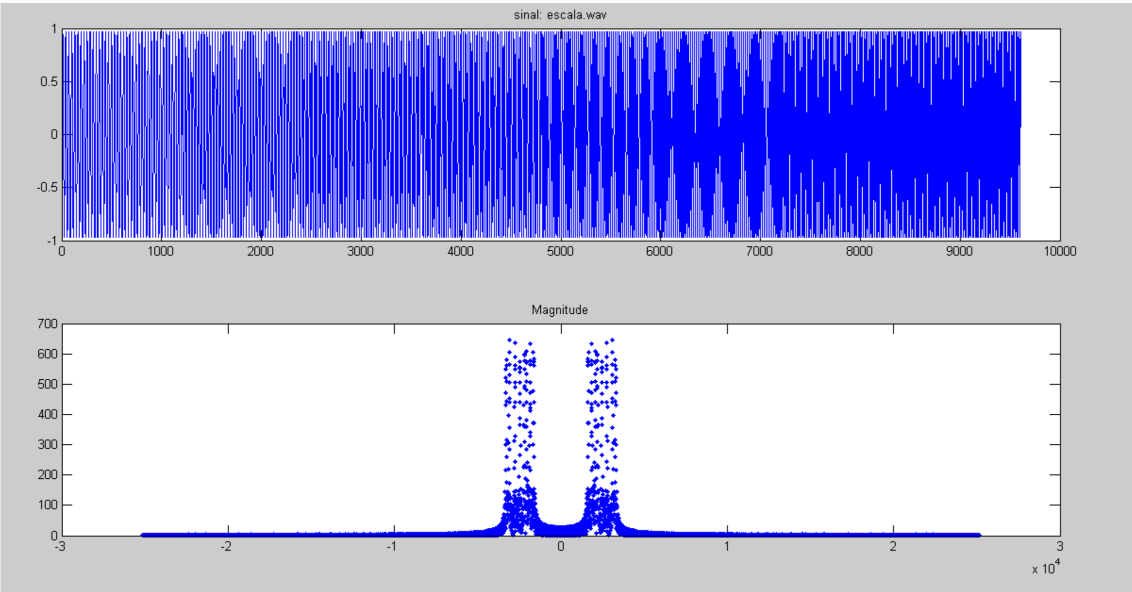
5.1 Considerando o ficheiro de áudio (som de piano) 'escala.wav', leia, escute e represente graficamente o sinal e o seu espectro (magnitude do espectro do sinal em função da frequência *f*).

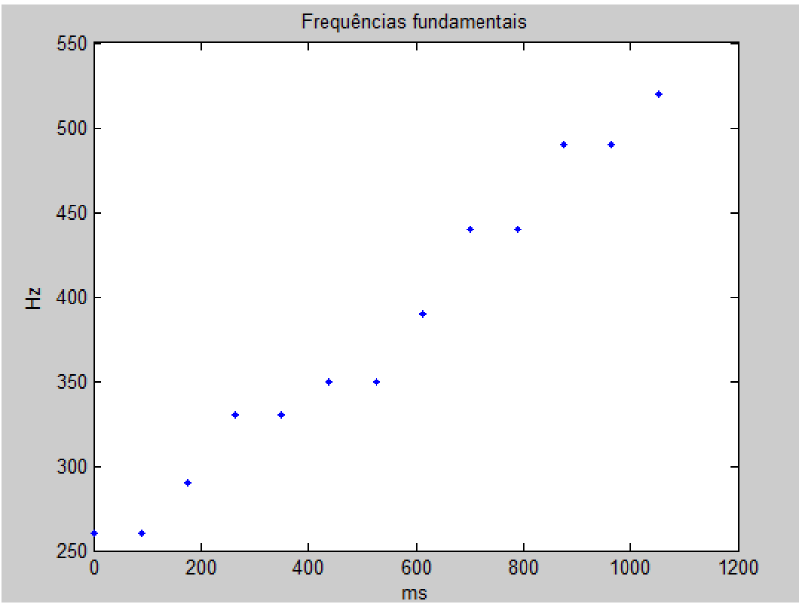
5.2 Determine a sequência de notas musicais, usando sucessivas janelas temporais com duração e sobreposição apropriadas (indique os valores considerados). Calcule e indique o valor da resolução em frequência e apresente os resultados (sequência temporal das notas musicais).

5.3 Considerando agora os ficheiros de áudio 'piano.wav' e 'flauta.wav', leia, escute e represente graficamente cada sinal e o respectivo espectro (magnitude do espectro do sinal em função da frequência *f*).
Dado que o sinal de áudio contido no ficheiro 'flauta.wav' foi obtido através de dois canais, considere apenas um dos canais ou efectue a fusão dos dois canais calculando a sua média.

5.4 Determine a sequência de notas musicais em cada sinal, usando sucessivas janelas temporais com duração e sobreposição apropriadas (indique os valores considerados). Calcule e indique o valor da resolução em frequência e apresente os resultados (sequências temporais das notas musicais)

Escala:



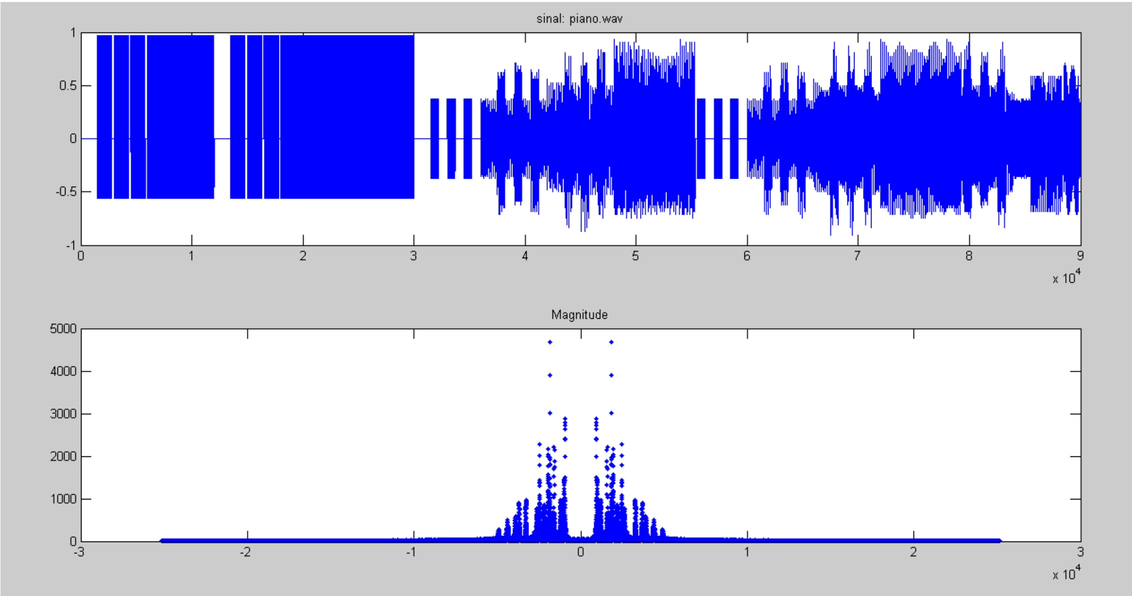


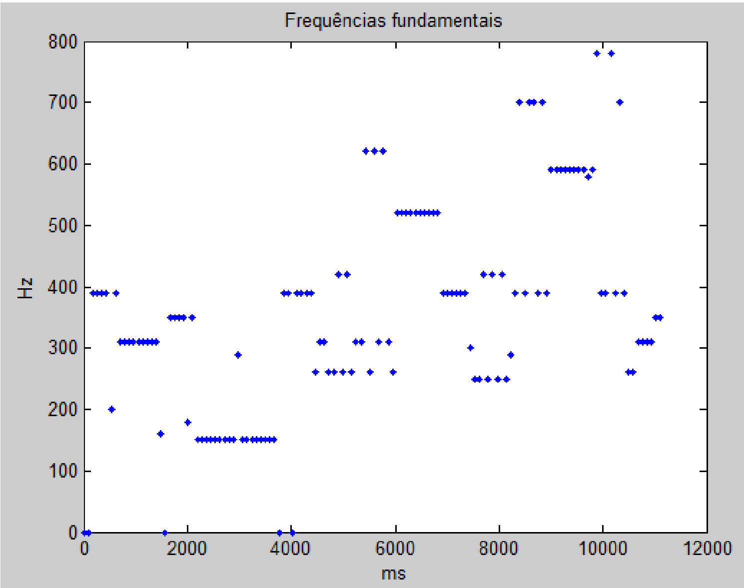
```
Resolução em frequência do som escala.wav = 10.00
```

Notas do som: escala.wav

Do	Re	Mi	Mi	Fa	Fa	Sol	La	La	Si
Si	Do								

Piano.wav



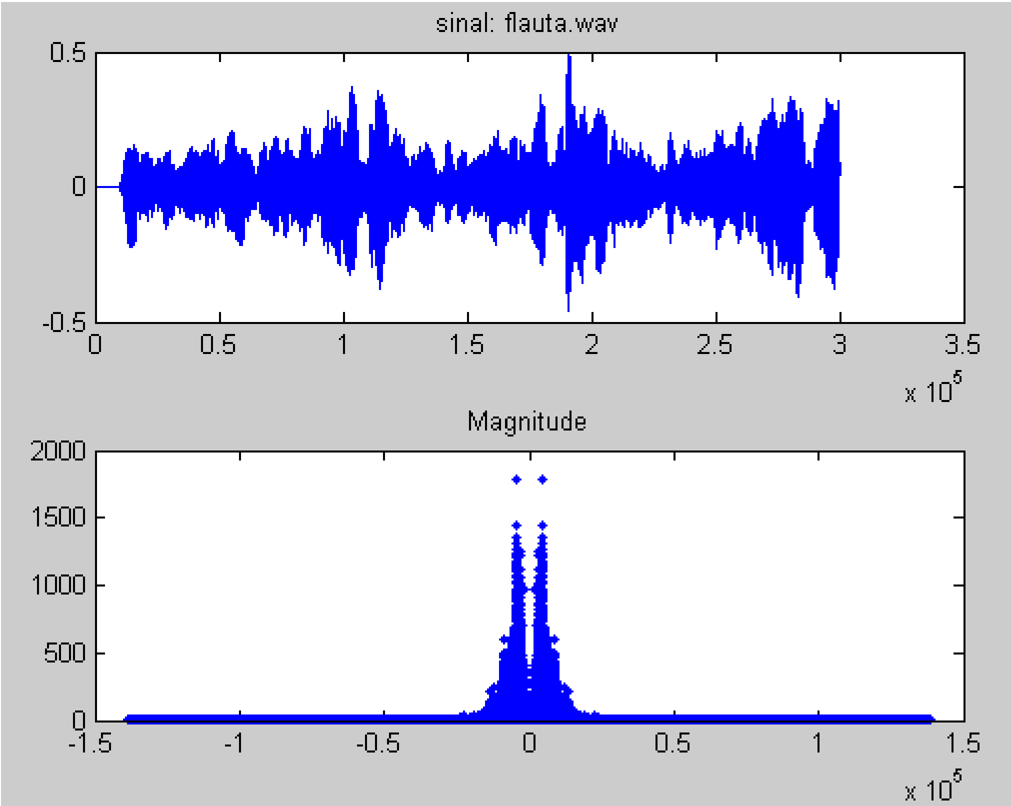


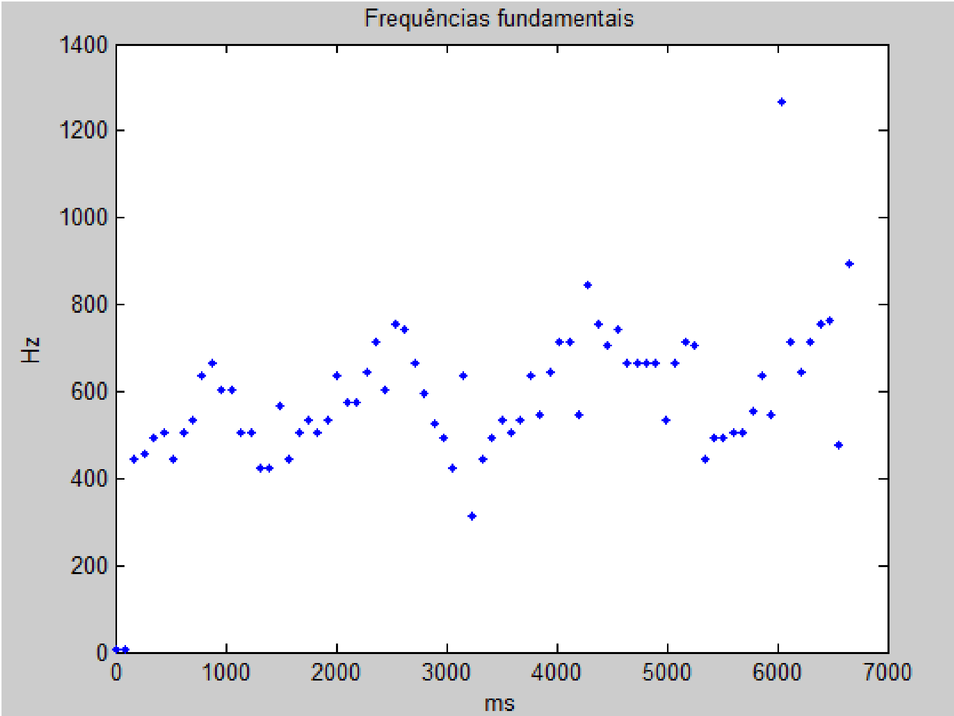
```
Resolução em frequência do som piano.wav = 10.00
```

Notas do som: piano.wav

Sol Sol Sol Sol Sol Sol Re# Re# Re# Re# Re# Re# Re# Re#
Re# Re# Fa Fa Fa Fa Fa# Fa Re Re Re Re Re Re Re
Re Re Re Re Re Re Re Re Re Re Re Sol Sol Sol Sol
Sol Sol Do Re# Re# Do Do Sol# Do Sol# Do Re# Re# Re# Do
Re# Re# Re# Re# Do Do Do Do Do Do Do Do Do Do
Do Sol Sol Sol Sol Sol Sol Re Do Do Sol# Do Sol# Do Sol#
Do Re Sol Fa Sol Fa Fa Sol Fa Sol Re Re Re Re Re
Re Re Re Re Re Sol Sol Sol Sol Sol Fa Sol Do Do Re#
Re# Re# Re# Fa Fa

Flauta.wav



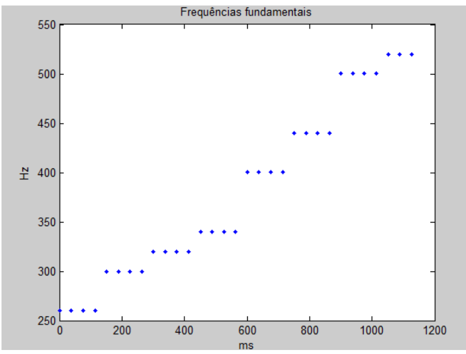


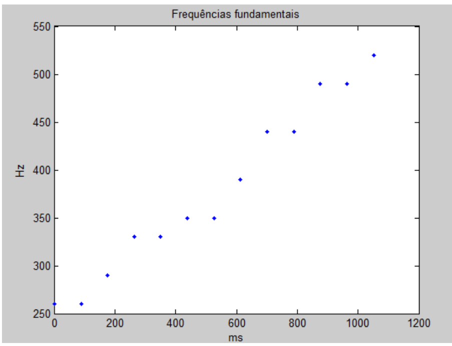
Resolução em frequência do som flauta.wav = 10.00

Notas do som: flauta.wav

Re# Re# La La# Do Do La Do Do Re# Mi Re Re Do Do
Sol# Sol# Do# La Do Do Do Do Re# Re Re Mi Fa Re Fa#
Fa# Mi Re Do Do Sol# Re# Re# La Do Do Do Do Re# Do#
Mi Fa Fa Do# Sol# Fa# Fa Fa# Mi Mi Mi Mi Do Mi Fa Fa
La Do Do Do Do Do# Re# Do# Re# Fa Mi Fa Fa# Sol La#
La

5.5 A dimensão da janela terá uma influência significativa na detecção da sequência de notas dos sinais? Justifique.





Como podemos ver com uma janela de 50 e o 1 caso podemos verificar que a janela de deteção e importante pois podemos verificar que no caso 2 detetamos muito menos notas.