Departamento de Engenharia Informática,

Faculdade de Ciências e Tecnologias da Universidade de Coimbra

Bruno Madureira nº 2011161942

Fábio Silva nº2010147721

Análise e Transformação de Dados

1. Considere o seguinte sinal de tempo contínuo:

$x_1(t) = A_1\sin(\omega_a t)\cos(\omega_b t) + A_2\cos(\omega_a t)\sin(\omega_b t) + A_3\cos(\omega_c t)^2 + A_4\sin(\omega_c t)^2$ em que:

$A_1 = 2\,\mathrm{mod}(G\#,2), A_2 = 3\,\mathrm{mod}(1+G\#,2), A_3 = 5\,\mathrm{mod}(G\#,2), A_4 = 4\,\mathrm{mod}(1+G\#,2),$

$\omega_a = \mathrm{mod}(G\#,5)+2, \omega_b = \mathrm{mod}(G\#,7)+7, \omega_c = \mathrm{mod}(G\#,9)+1,$

$G\#$ é o número do Grupo de Trabalho.

1.1. Obtenha analiticamente uma expressão equivalente do sinal na forma $x_1(t) = \sum_i C_i\cos(\omega_i t + \theta_i)$.

X(t)=0+sen(ω a t)cos(ωht)+3cos(5t)sen(8t)+0+4sen6(at)

⇔X(t)=3cos(5t).sin(8t)+4sen²(9t)

⇔X(t)= $\frac{3}{2}$ (sen(13t)-sen(-3t))+4sen²(9t)

⇔X(t)=$\frac{3}{2}$sen(10t) +4sen²(9t)

⇔X(t)= $\frac{3}{2}$ (10t)+ 2+2cos(18t)

⇔X(t)=2cos(0)+ $\frac{3}{2}$sen (16t)+2cos(18t)

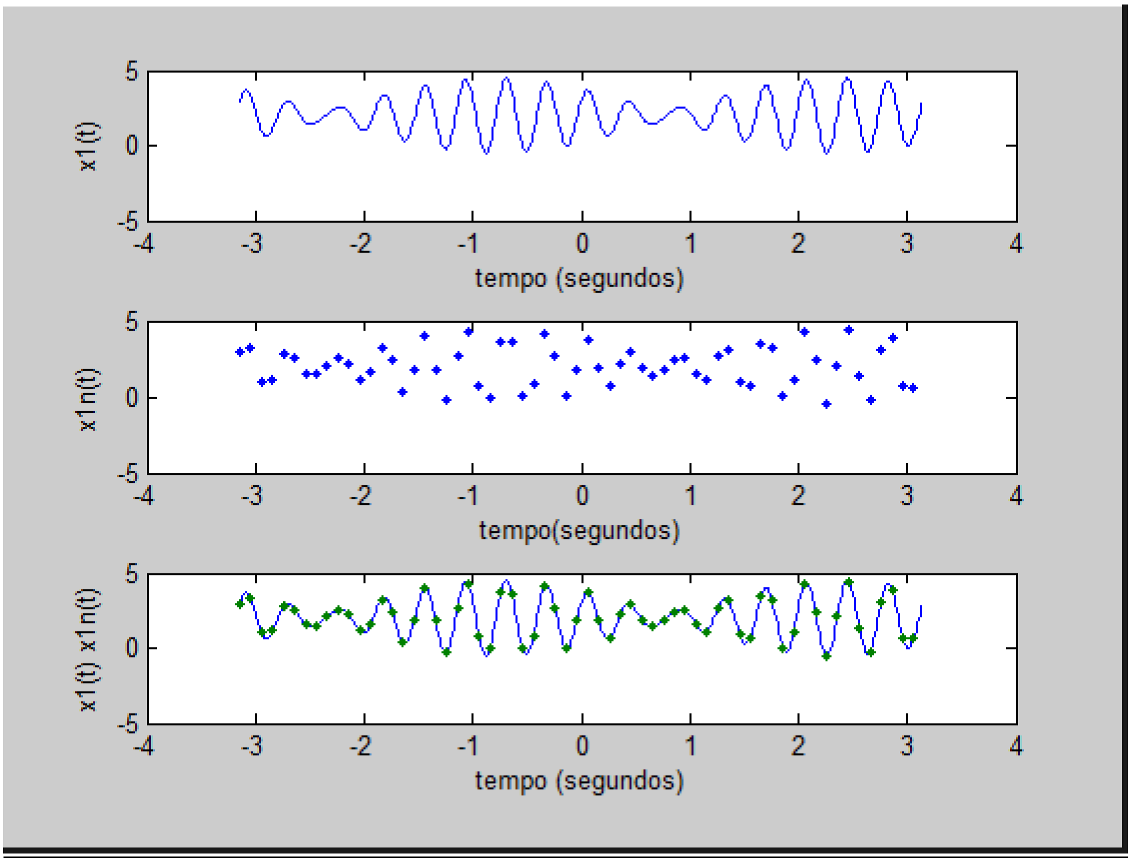
⇔X(t)=3cos(0)+ $\frac{3}{2}$cos ((π/2)-16t)+2cos(18t)

1.2. Obtenha a expressão do sinal de tempo discreto $x_1[n]$ que resulta de $x_1(t)$ usando $t = nT_s$.

X(t)=3cos(0)+ $\frac{3}{2}$cos (($\frac{\pi}{2}$)-16t)+2cos(18t)

⇔X₁[n]= 3cos(0)+ $\frac{3}{2}$cos (($\frac{\pi}{2}$)-16nt)+2cos(18nt)

1.3. Represente no mesmo gráfico o sinal $x_1(t)$ para $t \in [-\pi, \pi]s$, considerando t com 500 elementos e um traçado com linha contínua, e o sinal $x_1[n]$, considerando $T_s = 0.1s$, num intervalo para n correspondente a $t \in [-\pi, \pi]s$ e a representação apenas das amostras.




```
function [   ] = ex13(   )

ts=0.1;
t=linspace(-pi,pi,500); %gera 500 inteiros entre -pi e pi
x1=2*cos(0)+(3/2)*cos((pi/2)-16*t)+cos(18*t);
%plot da função
subplot(3,1,1);
plot(t,x1);
xlabel('tempo (segundos)');
ylabel('x1(t)');

%defenição dos valores de n
n = -pi:ts :pi; %t=n*ts
x1n=2*cos(0)+(3/2)*cos((pi/2)-16*n)+cos(18*n);


subplot(3,1,2);
plot(n,x1n,'.');
xlabel('tempo(segundos)');
ylabel('x1n(t)');
```

```
subplot(3,1,3);
plot(t,x1,n,x1n,'.');
xlabel('tempo (segundos)');
ylabel('x1(t) x1n(t)');
end
```

1.4. Calcule o valor da energia do sinal $x_1(t)$ de uma forma exacta, usando as funções de cálculo matemático simbólico, e de uma forma aproximada com erro inferior a 0.001, aplicando a regra dos trapézios e a regra de Simpson (usando implementações próprias e optimizadas das regras). Deve indicar os valores exacto e aproximados da energia do sinal, uma estimativa dos valores máximos do passo necessário para garantir o erro indicado, em cada uma das regras, e o tempo de cálculo de cada valor aproximado.
Sugestão: Compare também os tempos de cálculo usando o *Matlab* e o *Octave*.

```
function [  ] = ex14(  )

t=linspace(-pi,pi,500); %gera 500 inteiros entre -pi e pi
x1=2*cos(0)+(3/2)*cos((pi/2)-16*t)+cos(18*t);

%regra do trapezio TRAPZ
a=trapz(t,x1);

syms x;
func=@(x) 2*cos(0)+(3/2)*cos((pi/2)-16*x)+cos(18*x);
b=quad(func,-pi,pi);



t=trapezio(-pi,pi,56);
s=simpson(-pi,pi,82);
fprintf('trapezio pela defenição do matlab:,%f\n',a)
fprintf('trapezio pela nossa função:,%f\n',t)
fprintf('simpson pela defenição do matlab:%f\n',b)
fprintf('simpson pela nossa função:%f\n',s)
%regra do trapezio quadrado

end

function[somatorio]=trapezio(a,b,n) %valores de x, f é a função
t=linspace(a,b,n);
x1=2*cos(0)+(3/2)*cos((pi/2)-16*t)+cos(18*t);
deltax=((b-a)/n)/2;
somatorio=0;
%ciclo da soma
for i=1:1:length(t)
   if((i==1)||i==length(t))
       somatorio=somatorio+abs(x1(i));

   else
         somatorio=somatorio+2*abs(x1(i));


   end

end
somatorio=somatorio*deltax;
end
```

```
function[somatorio]=simpson(a,b,n)

t=linspace(a,b,n);
x1=2*cos(0)+(3/2)*cos((pi/2)-16*t)+cos(18*t);
h=((b-a)/n);
somatorio=0;
%ciclo da soma
for i=1:1:length(t)
   if((i==1)||i==length(t))
       somatorio=somatorio+abs(x1(i));
   elseif(mod(i,2)==0) %par
       somatorio=somatorio+4*abs(x1(i));

   elseif(mod(i,2)~=0) %impar
         somatorio=somatorio+2*abs(x1(i));



   end

end
somatorio=somatorio*(h/3);
end
```

Resultado da execução:

```
trapezio pela defenição do matlab:,12.566371
trapezio pela nossa função:12.567736
simpson pela defenição do matlab:12.566370
simpson pela nossa função:12.562253
>>
```

1.5. Calcule o valor da energia de $x_1[n]$ num intervalo para n correspondente a $t \in [-\pi, \pi]s$.

```
function [soma  ] = ex15(  )
ts=0.1;

n=-pi:ts:pi;
x1n=2*cos(0)+(3/2)*cos((pi/2)-16*n)+cos(18*n);
soma= sum(abs(x1n).^2)*ts;



end
```

```
>> ex15

ans =

   35.3786
```

2. Considere o sinal de tempo discreto $x[n] = 1.5\cos[0.025\pi n]\left(u[n+40] - u[n-40]\right)$ e os seguintes sistemas discretos:

$y_1[n] = b_{11}x[n-1] + b_{12}x[n-2] + b_{13}x[n-3] + b_{14}x[n-4]$,

$y_2[n] = b_2 x[2n-4]$,

$y_3[n] = b_3 x[n-2]x[n-3]$,

$y_4[n] = (n-2)x[n-3]$

em que:

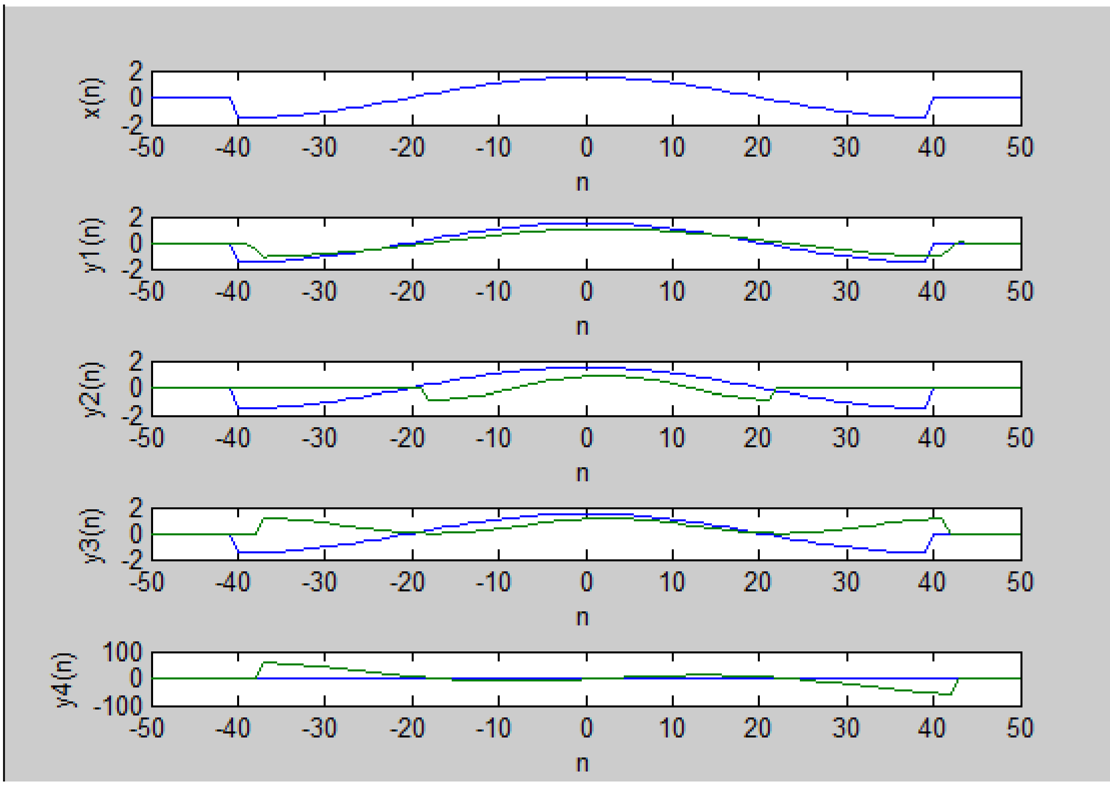
$b_{11} = 0.4\,\mathrm{mod}(G\#,2), b_{12} = 0.4\,\mathrm{mod}(1+G\#,2), b_{13} = 0.3(\mathrm{mod}(G\#,3)+1), b_{14} = -0.1(\mathrm{mod}(G\#,4)+1)$,

$b_2 = 0.6(\mathrm{mod}(G\#,2)+1), b_3 = 0.5(\mathrm{mod}(G\#,2)+1)$

$G\#$ é o número do Grupo de Trabalho.

O sinal $u[n\text{-}m]$ é um degrau unitário que tem o valor 0 para $n < m$ e o valor 1 para $n \geq m$.

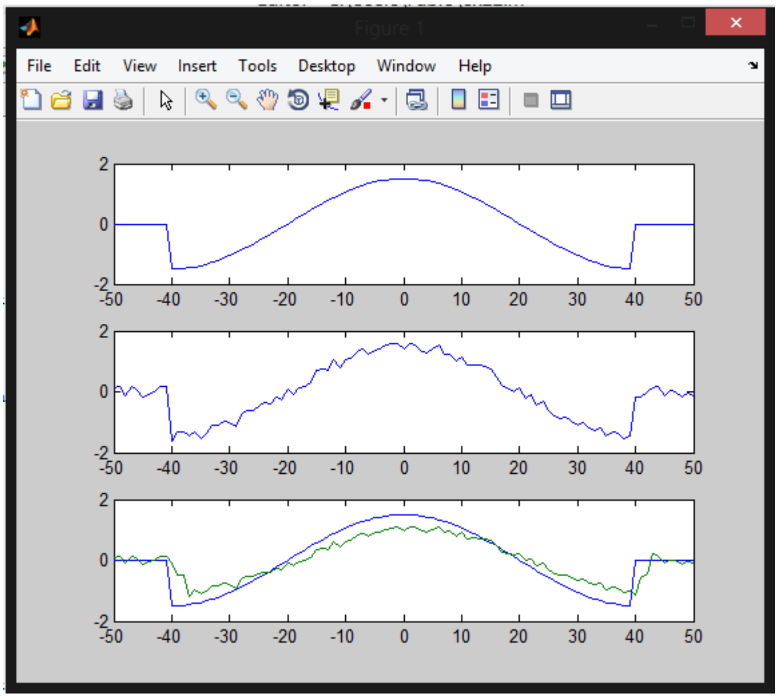
2.1. Obtenha e represente graficamente o sinal de entrada $x[n]$ e as respostas dos sistemas $y_1[n]$, $y_2[n]$, $y_3[n]$ e $y_4[n]$, para $-50 \leq n \leq 50$.




```
function [   ] = ex21(   )
u=zeros(100);
n=-50:50;

function u = unit(n)
u = zeros(size(n));
u(n>=0)  = 1;
end

function x = fx(n)
x = 1.5*cos(0.025*pi*n).*(unit(n+40)-unit(n-40));
end
```

```
x = fx(n);
y1=0.4*fx(n-2)+0.4*fx(n-3)-0.1*fx(n-4);
y2=0.6*fx(2*n-4);
y3=0.5*fx(n-2).*fx(n-3);
y4=(n-2).*fx(n-3);

subplot(5,1,1);
plot(n,x);
xlabel('n');
ylabel('x(n)');

subplot(5,1,2)
plot(n,x,n,y1);
xlabel('n');
ylabel('y1(n)');

subplot(5,1,3)
plot(n,x,n,y2);
xlabel('n');
ylabel('y2(n)');

subplot(5,1,4)
plot(n,x, n,y3);
xlabel('n');
ylabel('y3(n)');

subplot(5,1,5)
plot(n,x,n,y4);
xlabel('n');
ylabel('y4(n)');
end
```

2.2. Obtenha e represente graficamente o sinal de entrada $x[n]$ adicionado com ruído uniforme com amplitude no intervalo $[-0.2, 0.2]$ e a correspondente resposta do sistema $y_1[n]$ para $-50 \le n \le 50$.



```
function ex22()
u = zeros(100);
n = -50:50;

function u = unit(n)
u = zeros(size(n));
u(n >= 0) = 1;
end

function x = fx(n)
x = 1.5*cos(0.025*pi*n).*(unit(n+40)-unit(n-40));
end

x = fx(n);
function [result,ruidos] = ruido(values,n)
    ruidos = zeros(length(n),1);
    for i=1:length(n)
        ruidos(i) = 0.4*rand()-0.2;
    end
    result = zeros(length(n),1);
    for i=1:length(n)
        result(i) = values(i) + ruidos(i);
    end
end

[x1, ruidos_result] = ruido(x, n);
Yruido = 0.4 * (fx(n - 1) + ruidos_result') + 0.4 * (fx(n - 3) +
ruidos_result') + -0.1 * (fx(n - 4) + ruidos_result');

subplot(3,1,1)
plot(n, x);
subplot(3,1,2)
plot(n, x1);
subplot(3,1,3)
plot(n, x);
hold all;
plot(n,Yruido);
end
```

2.3. Analise a linearidade dos sistemas dados por $y_1[n]$, $y_2[n]$, $y_3[n]$ e $y_4[n]$.

$X[n]=1,5\cos[0,025\pi n](u[n+40]-u[n-40])$

$y_1[n]=0,4x[n-1]+0,4x[n-3]-0,1x[n-4]$

$y_2[n]=0,6x[2n-4]$

$y_3[n]=0,5x[n-2]x[n-3]$

$y_4[n]=(n-2)x[n-3]$

para y_1:

$y_1[n]=0,4x[n-1]+0,4x[n-3]-0,1x[n-4]$

$\Leftrightarrow T[y_1 [n]]= 0,4x_1 [n-1]+0,4x_1 [n-3]-0,1x_1 [n-4]$

$\Leftrightarrow T[y_2 [n]]= 0,4x_2 [n-1]+0,4x_2 [n-3]-0,1x_2 [n-4]$

$T[y_1[n]+ y_2 [n]]= 0,4(x_1 [n-1]+x_2 [n-1])+0,4(x_1 [n-3]+x_2 [n-3])-0,1(x_1 [n-4]+x_2 [n-4])$

$T[y_1[n]]+ [y_2 [n]]]= 0,4x_1 [n-2]+0,4x_1 [n-3]-0,1x_1 [n-4]+ 0,4x_2 [n-2]+0,4x_2 [n-3]-0,1x_2 [n-4]$

Logo como

$T[y_1[n]]+ [y_2 [n]]]= T[y_1[n]+ y_2 [n]]$

É linear

Para y_2:

$y_2[n]=0,6x [2n-4]$

$T[y_1[n]]=0,6x_1 [2n-4]$

$T[y_2[n]]=0,6x_2 [2n-4]$

$T[y_1[n]+ y_2 [n]]= 0,6(x_1 [2n-4]+ x_2 [2n-4])$

$T[y_1[n]]+ [y_2 [n]]]= 0,6x_1 [2n-4]+0,6 x_2 [2n-4]$

Logo como

$T[y_1[n]]+ [y_2 [n]]]= T[y_1[n]+ y_2 [n]]$

É linear

Para y_3:

$y_3[n]=0,5x[n-2]x[n-3]$

$T[y_1[n]]= 0,5x_1[n-2]x_1[n-3]$

$T[y_2[n]]= 0,5x_2[n-2]x_2[n-3]$

$T[y_1[n]+ y_2 [n]]= 0,5(x_1[n-2]+ x_2[n-2])x(x_1[n-3]+ x_2[n-3])$

$T[y_1[n]]+ [y_2 [n]]]= 0,5x_1[n-2]x_1[n-3]+ 0,5x_2[n-2]x_2[n-3]$

Logo como

$T[y_1[n]]+[y_2[n]]] \neq T[y_1[n]+y_2[n]]$

Para y_4:

$y_4[n]=(n-2)x[n-3]$

$T[y_1[n]]=(n-2)x_1[n-3]$

$T[y_2[n]]=(n-2)x_2[n-3]$

$T[y_1[n]+y_2[n]]=(n-2)(x_1[n-3]+x_2[n-3])$

$T[y_1[n]]+[y_2[n]]]=(n-2)x_1[n-3]+(n-2)x_2[n-3]$

Logo como

$T[y_1[n]]+[y_2[n]]]=T[y_1[n]+y_2[n]]$

Homogeneidade

Para y1:

$y_1[n]=0,4x[n-1]+0,4x[n-3]-0,1x[n-4]$

$T\{ax[n]\}=a0,4x[n-1]+a0,4x[n-3]-a0,1x[n-4]$

$\Leftrightarrow T\{ax[n]\}=a(0,4x[n-1]+0,4x[n-3]-0,1x[n-4])$

Como:

$T\{ax[n]\}=ay[n]$

Verifica a propriedade da Homogeneidade;

Para y2:

$y_2[n]=0,6x[2n-4]$

$T\{ax[n]\}=a\,0,6x[2n-4]$

Como:

$T\{ax[n]\}=ay[n]$

Verifica a propriedade da Homogeneidade;

Para y_3:

$y_3[n]=0,5x[n-2]x[n-3]$

$T\{ax[n]\}=a0,5x[n-2]ax[n-3]$

$T\{ax[n]\}= a^2(0,5x[n-2]x[n-3])$

Como:

$T\{ax[n]\}\neq ay[n]$

Não Verifica a propriedade da Homogeneidade;

Para y_4:

$y_4[n]=(n-2)x[n-3]$

$T\{ax[n]\}=a(n-2)x[n-3])$

Como:

$T\{ax[n]\}=ay[n]$

Verifica a propriedade da Homogeneidade;

	Aditividade	Homogeneidade	Linearidade
$y_1[n]$	✓	✓	✓
$y_2[n]$	✓	✓	✓
$y_3[n]$	⊘	⊘	⊘
$y_4[n]$	✓	✓	✓

2.4. Analise a invariância no tempo dos sistemas dados por $y_1[n]$, $y_2[n]$, $y_3[n]$ e $y_4[n]$.

$y_1[n]=0,4x[n-1]+0,4x[n-3]-0,1x[n-4]$

$\Leftrightarrow T[x\,[n-n_0]]= 0,4x_1\,[n-n_0\,-1]+0,4x_1\,[n-n_0\,-3]-0,1x_1\,[n-n_0\,-4]$

$y_1[[n-n_0]= = 0,4x_1\,[n-n_0\,-1]+0,4x_1\,[n-n_0\,-3]-0,1x_1\,[n-n_0\,-4]$

verifica a propriedade de invariância no tempo

para y_2:

$y_2[n]=0,6x_2\,[2n-4]$

$y2[n-n_0]= 0,6(x_1\ [2n-n_0\ -4]+ x_2\ [2n-n_0\ -4])$

$T\{x[n-n_0]\}=1,2x[2n-2n_0-4]$

Não verifica a invariância no tempo

Para y_3:

$y_3[n-n_0]=0,5x[n-n_0\ -2]x[n-n_0\ -3]$

$T\{ax[n-n_0]\}= x[n-n_0\ -2]x[n-n_0\ -3]$

verifica a propriedade de invariância no tempo

Para y_4:

$y_4[n-n_0]=(n-n_0\ -2)x[n-n_0\ -3]$

$T\{x[n-n_0]\}=(n-2)x[n-n_0\ -3])$

Não verifica a invariância no tempo

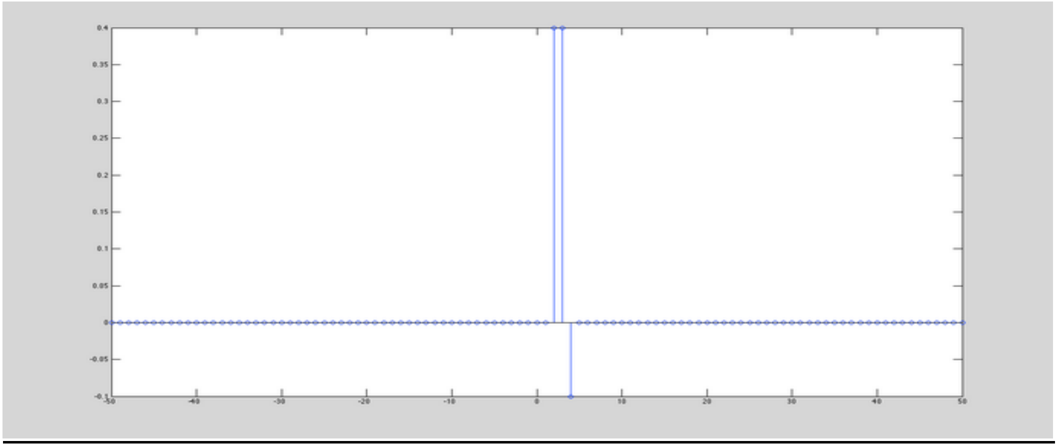
	Linearidade	invariância	SLIT
$y_1[n]$	✓	✓	✓
$y_2[n]$	✓	✗	✗
$y_3[n]$	✗	✓	✗
$y_4[n]$	✓	✗	✗

2.5. Determine a expressão e represente graficamente a resposta a impulso do sistema $y_1[n]$.

$y_1[n]=0,4x[n-1]+0,4x[n-3]-0,1[n-4]$

$h[n]=y[n]|_{x[n]=\delta[n]}$

$\delta[n]=\begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$ nЄz



```
function [  ] = ex25(  )

n = -50:50;

h = 0.4 * Dirac(n-2) + 0.4 * Dirac(n-3) - 0.1 * Dirac(n-4);

stem(n, h); %imprime grafico discreto com pontos e traços da origem
a ligarem nos com a mesma
```

```
function [ x ] = Dirac( n )

    x = zeros(size(n));

    for i=1:1:length(n)
        if(n(i)==0)
            x(i)=1;
        end
    end

   %se um elemento de n for 0, o x com o mesmo indice fica a 1
end
end
```

2.6. Determine a função de transferência do sistema $y_1[n]$, $G_1(z)$, i.e., a transformada de Z da resposta a impulso do sistema, $H_1(z)$, com condições iniciais nulas.

$y_1[n]=0,4x[n-1]+0,4x[n-3]-0,1x[n-4]$

Resposta de impulso de y[n]: $h[n]= 0,4\delta[n-1]+0,4\ \delta\ [n-3]-0,1\ \delta\ [n-4]$

$Z\{h[n]\}=H[z]=0,4z^{-1}+0,4z^{-3}-0,1z^{-4}$

```
function [  ] = ex26( )
Hz = ztrans (sym ('0.4 * kroneckerDelta(n-1) + 0.4 *
kroneckerDelta(n-3) - 0.1 * kroneckerDelta(n-4)'));
disp(Hz);

end
```

2.7. Considere um sistema dado pela função de transferência $M(z)=\frac{kG_1(z)}{1+kG_1(z)}$. Determine para que valores do parâmetro $k \in \Re$ esse sistema é estável.

$G[z]= 0,4z^{-1}+0,4z^{-3}-0,1z^{-4}$

Considerando o sistema dado pela função de transferência:

$M(z)=\frac{K(0,4z^{-1}+0,4z^{-3}-0,1z^{-4})}{1+k(0,4z^{-1}+0,4z^{-3}-0,1z^{-4})}$

Multiplicando pela simétrica da maior potência (z^4):

$\Leftrightarrow$ $M(z)=\frac{z^4(0,4z^1+0,4z-0,1z^{-4})}{z^4+0,4z^3k+0,4z^1k-0,1k}$

Usando a função roots do MatLab para $z^4 + 0,4z^3k + 0,4z^1k - 0,1k$ e verificando quais os valores de k para os quais todas as raízes pertencem ao intervalo chegou-se a €[-1.42:1.11].

Para estes valores K de o sistema é considerado estável porque todas as raízes pertencem a este intervalo.

```
function [  ] = ex27(  )


for k=-5:0.01:5
    den = [1 0.4*k 0 0.4*k -0.1*k];

    if(all(abs(roots(den)) < 1))
        disp(k);
    end
end


end
```

3. Considere o sinal $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$.

3.1. Reproduza o som que resulta deste sinal, em modo assíncrono e com uma frequência de amostragem adequada, definindo vários valores para a frequência $f_0 \in [200, 18000]Hz$, em intervalos de $100Hz$.

Com a função wavplay do matlab, pode-se reproduzir as frequências de 200 até 18000 com um passo de 100. Tem um período de $\frac{1}{f}$ com f =44100HZ

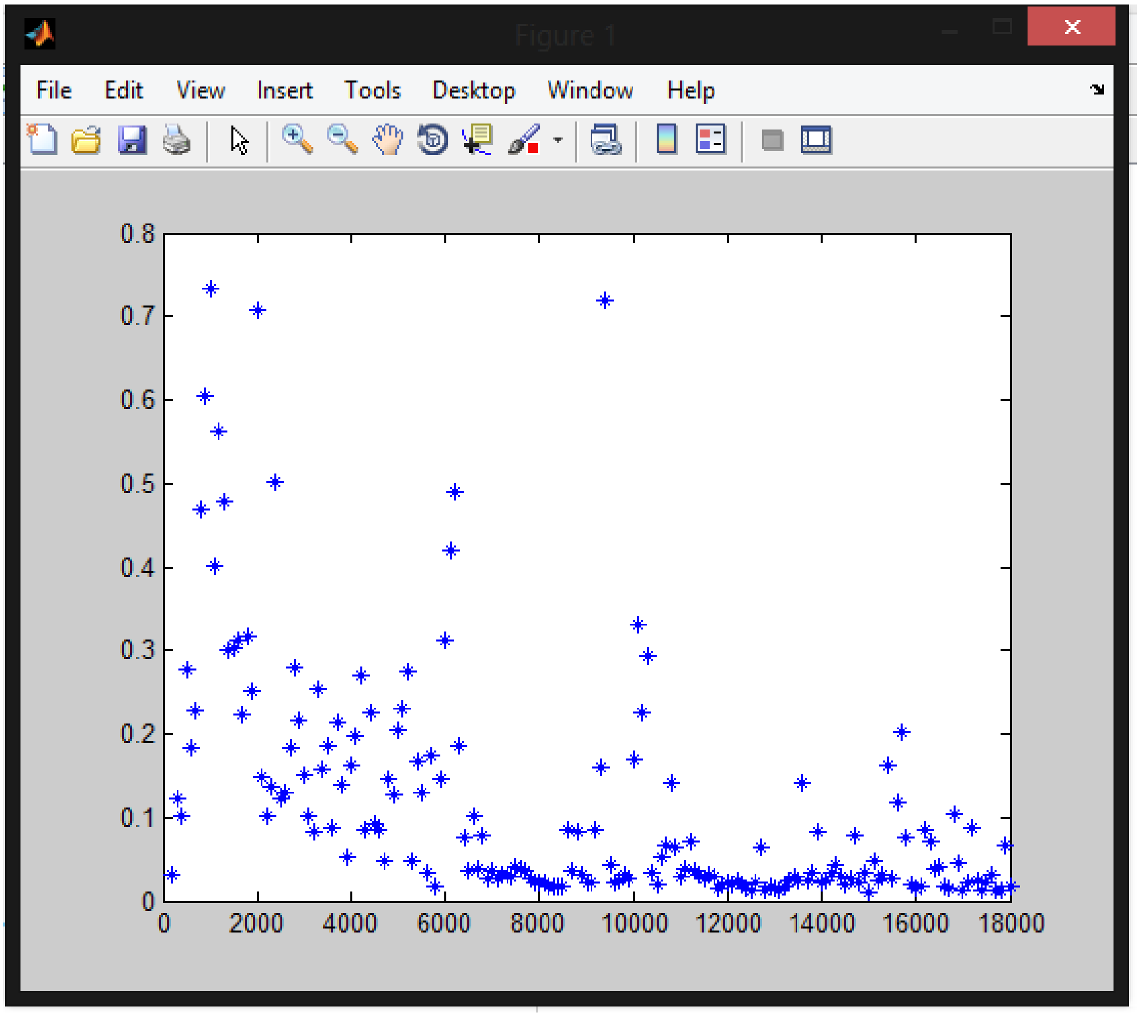
3.2. Utilizando um microfone, grave os diversos sons produzidos na alínea anterior (use amostras com uma duração de, por exemplo, 0.5s).

3.3. Determine a amplitude da resposta do sistema para cada uma das frequências testadas. Apresente o gráfico de variação da amplitude da saída em função da frequência.

3.4. Analise as características da resposta do sistema (colunas altifalantes e microfone) ao sinal de entrada na gama de frequência considerada.

Feitas as gravações, dividiu-se cada uma em 50 partes e faz-se a média dos pontos mais altos. No final obtém-se uma matriz com as amplitudes médias de cada gravação. Em que presentamos no gráfico.

No gráfico podemos observar que em algum pontos são mais altos que deviam, isto pode ser consequência de algum ruido ou som não proveniente ao som imitido pelas colunas.



Apos a analise podemos ver que a partir da 5000hz a maioria dos valores e nula isto pode significar que o microfone não foi capaz de captar os sons imitidos.