

## 6. Controladores – Técnicas Modernas

### 6.1. Extensión a los sistemas multivariable

La metodología de diseño del controlador y del observador desarrollada para los sistemas mono variable, puede ser extendida a los sistemas multivariable.

Nótese que si se pasivan todas las entradas salvo una y se calcula al controlador  $K$  para esa entrada, luego la suma de todas las entradas resultantes podrían tener un comportamiento no deseado en cuanto a su dinámica resultante.

Para ello, se formula el problema de control considerando el sistema lineal

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_t = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_t + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_t \\ \mathbf{y}_t = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}_t \end{cases} \quad (6-1)$$

y expresando a la acción de control mediante

$$\mathbf{u}_t = -\mathbf{K} \mathbf{x}_t \quad (6-2)$$

donde  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{x}$  son funciones temporales con magnitudes  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$  y  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , respectivamente.

Para ello, se define

$$\mathbf{b} = \mathbf{B} \mathbf{h} \quad (6-3)$$

siendo la matriz  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times e}$  y luego el vector  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^e$  se elige de manera tal que el par  $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  sea controlable. Ahora se tiene un sistema mono variable con entrada  $u_t$

$$\dot{x}_t = A x_t + b u_t \quad (6-4)$$

y se busca el vector  $\mathbf{k}^T$  de realimentación para obtener a  $u_t$

$$u_t = \mathbf{k}^T \mathbf{x}_t \quad (6-5)$$

de manera que los autovalores de  $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$  sean los mismos que los de  $\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T$ .

Igualando

$$[\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}] = [\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{h}\mathbf{k}^T] \quad (6-6)$$

se concluye por comparación que

$$\mathbf{K} = \mathbf{h}\mathbf{k}^T. \quad (6-7)$$

Se ha convertido el problema multivariable en un problema de una simple entrada, y por lo tanto se puede resolver con las ecuaciones del caso para la obtención de  $\mathbf{k}^T$ . El vector  $\mathbf{h}$  no es único, por lo que habrá más de una matriz de realimentación que cumpla con la asignación de polos requerida, la única restricción para  $\mathbf{h}$  es que el par  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}\mathbf{h})$  sea completamente controlable.

## 6.2. Regulador óptimo lineal en tiempo continuo

Para el caso del diseño de controladores en espacio de estados y siempre que el sistema sea controlable, los polos de lazo cerrado pueden ubicarse en cualquier punto del plano complejo, pero el límite de las respuestas está dado por las acciones de control. La velocidad de respuesta del proceso y la magnitud de las acciones de control están inversamente relacionadas.

### 6.2.1. Motivación

Una solución se encuentra proponiendo un funcional de costo o función de valores reales que incluya estos elementos y luego realizar su minimización respecto de las variables de interés o respecto del controlador  $\mathbf{K}$  directamente.

El uso del criterio de minimización es ampliamente utilizado, incluso en controladores Entrada-Salida para optimizar los parámetros de PID, Fletcher-Powell [1] propone

$$J_t = J(e_t, u_t) = \int_0^{\infty} (e_t^2 + r u_t^2) dt \quad (6-8)$$

La solución analítica es posible solamente para controladores de bajo orden. Se puede minimizar a prueba y error numéricamente.

Para el diseño en el espacio de estados, se empleará el funcional

$$J_t = J(e_t, u_t) = \int_0^{\infty} (e_t^2 + r u_t^2) dt \quad (6-9)$$

El funcional propuesto es convexo y continuo de sus argumentos  $e_t$  y  $u_t$ . El controlador será óptimo en el sentido de éste funcional.

### 6.2.2. Formulación del problema

Dado el sistema lineal determinístico en tiempo continuo

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_t = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_t + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_t \\ \mathbf{y}_t = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}_t \end{cases} \quad (6-10)$$

se desea encontrar una ley de control  $\mathbf{u}_t$

$$\mathbf{u}_t = -\mathbf{K} \cdot \mathbf{x}_t \quad (6-11)$$

que haga evolucionar al proceso desde  $\mathbf{x}(0) \neq 0$  a  $\mathbf{x}(\infty) = 0$  minimizando el funcional de costo

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt \quad (6-12)$$

con  $\mathbf{Q}$  simétrica y semidefinida positiva y  $\mathbf{R}$  simétrica y definida positiva.

Para diseñar el controlador en espacio de estados en el dominio del tiempo continuo, se usará el segundo método de Lyapunov, porque no requiere resolver las ecuaciones diferenciales

del sistema a controlar.

### 6.2.3. Estabilidad en el sentido de Liapunov

En general, el sistema se define como

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x(0) = x_0$$

con la solución

$$\phi(t_0; x_0, t_0) = x_0.$$

Tener en cuenta que el estudio es en un punto denominado *equilibrio* que es un punto del espacio de estado,  $x_e$ , donde el sistema permanece, por lo que su velocidad es nula,

$$f(x_e, t) = 0 \quad \forall t \geq 0.$$

Si  $\phi(t, x_0, t_0)$  es la solución de la ecuación diferencial, se tiene que con el equilibrio  $x_e$

$$\phi(t, x_0, t_0) = x_e \quad \text{para todo } t \geq t_0 \geq 0.$$

Los sistemas lineales tienen el origen como único punto de equilibrio si  $A$  es no singular.

Concepto: se definen las esferas  $S(\delta)$  y  $S(\varepsilon)$  alrededor del punto de equilibrio,  $\forall t \geq t_0$  mediante

$$\begin{aligned} \|x_0 - x_e\| &\leq \delta, \\ \|\phi(t; x_0, t_0) - x_e\| &\leq \varepsilon, \end{aligned}$$

respectivamente.

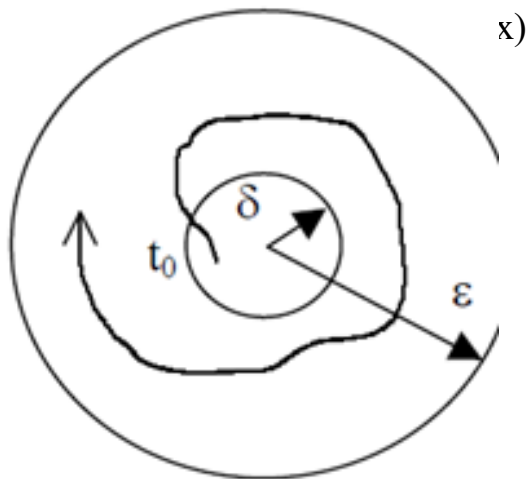


Fig. 6-1. Evolución de las soluciones de un sistema.

El sistema será *estable en el sentido de Liapunov* si para cada esfera  $S(\varepsilon)$  existe una esfera  $S(\delta)$  tal que las trayectorias que empiezan en  $S(\delta)$  no salen de  $S(\varepsilon)$  con  $t \rightarrow \infty$ .

Si  $\delta$  no depende de  $t_0$ , el equilibrio es *uniformemente estable*. Además, si  $\phi \rightarrow x_e$ , es *asintóticamente estable*.

El sistema será *inestable* si para algún  $\varepsilon > 0$  y cualquier  $\delta > 0$  siempre existirá un  $x_0$  en  $S(\delta)$  tal

que las trayectorias que allí comienzan se salen de  $S(\epsilon)$ .

En la Fig. 6-6 se puede observar un ejemplo práctico.

### Funciones definidas positivas

Son funciones cuyo dominio es multidimensional y su imagen es real positiva, es decir  $V : \mathcal{R}^{n \times m} \rightarrow \mathcal{R}$ . Por lo tanto

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}) &> 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq 0 \text{ y además} \\ V(\mathbf{x}) &= 0 \text{ si } \mathbf{x} = 0 \end{aligned}$$

Es creciente en el tiempo si,

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}_t) &> V(\mathbf{x}_{t_0}) \quad \forall t \geq t_0 \text{ y además} \\ V(0) &= 0 \quad \forall t \geq t_0. \end{aligned}$$

#### 6.2.4. Teorema de Liapunov

Sea la función escalar definida positiva  $V(x)$  una función de energía (ficticia) que depende de  $x$  y no depende explícitamente de  $t$ . Si la derivada temporal de  $V(x)$  es definida negativa entonces el punto de equilibrio  $x_e$  en el origen es uniformemente asintóticamente estable y la función  $V(x)$  se denominará *función Liapunov*.

Es decir, sea el sistema representado por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$$

con el equilibrio en el origen

$$\mathbf{f}(0, t) = 0 \quad \forall t$$

si existe una función escalar  $V(x)$  con derivadas parciales continuas y cumple con

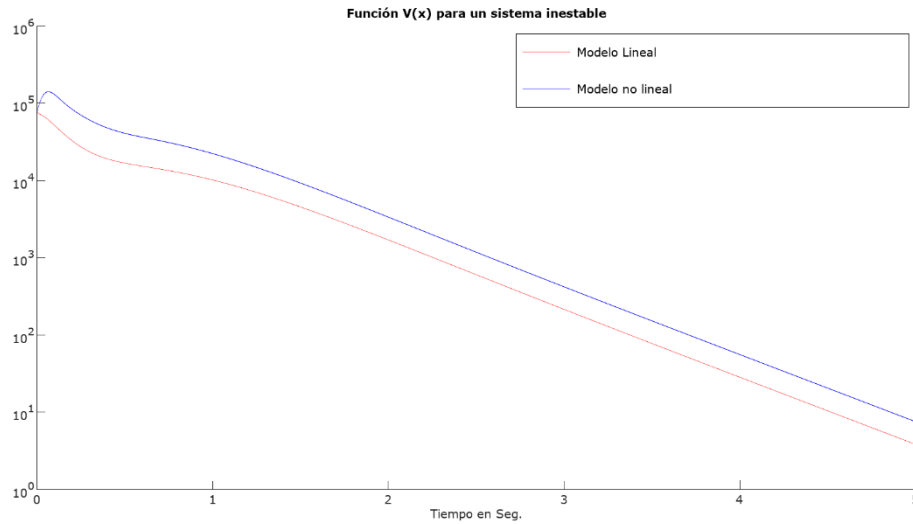
1-  $V(x)$  es definida positiva para todo  $x_t$ .

2-  $\dot{V}(x)$  es definida positiva para todo  $x_t$ .

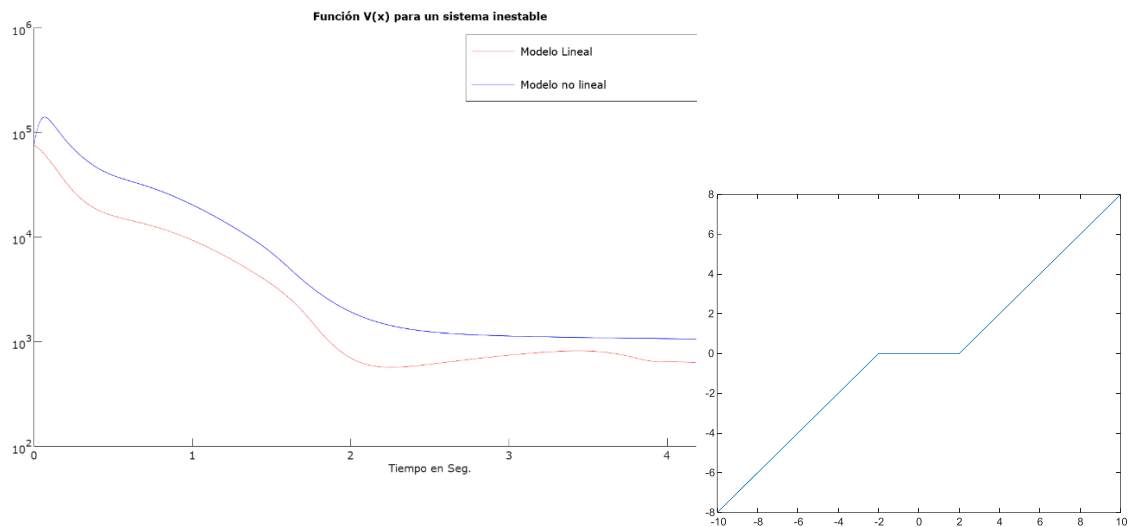
si  $V(x) \rightarrow \infty$  con  $\|x\| \rightarrow \infty$  el equilibrio 0 es uniformemente asintóticamente estable.

#### 6.2.5. Ejemplo para el péndulo invertido

Para ilustrar el concepto de estabilidad, se puede emplear el caso del péndulo invertido cuando es actuado con una acción de control lineal, y un controlador estable comenzando en la condición inicial de 0,8 radianes respecto de la vertical teniendo como objetivo que vuelva a ser nulo. Se puede hacer el análisis para el modelo lineal y el modelo no lineal del sistema, que se muestra en la Fig. 6-2. Por otro lado, si se tiene en cuenta una no linealidad en el actuador que considera una zona muerta y luego sí comportamiento lineal como se detalla en la Fig. 6-4, entonces el sistema termina siendo inestable, como se puede ver en la Fig. 6-3. En las figuras Fig. 6-5 y Fig. 6-6 se muestran las evoluciones temporales de las variables del péndulo invertido y el plano de fases respectivamente.

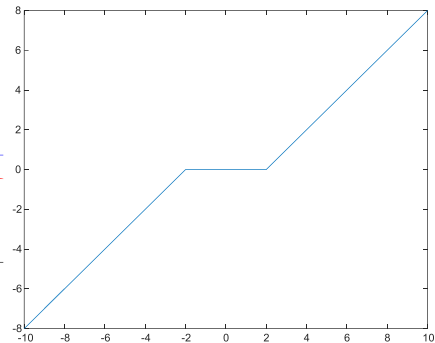


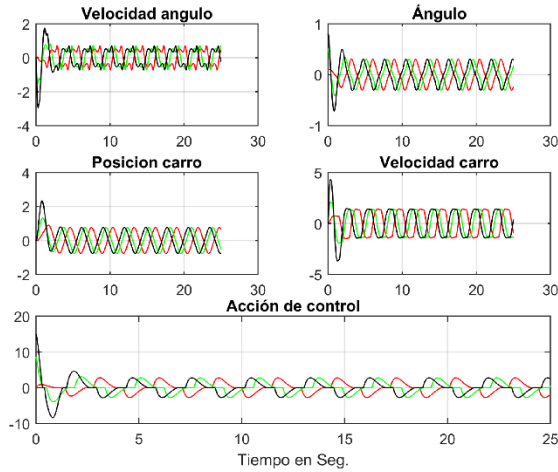
**Fig. 6-2.** Evolución temporal de la función de Liapunov  $V(x_t)$  para el péndulo invertido sin restricciones en la acción de control.



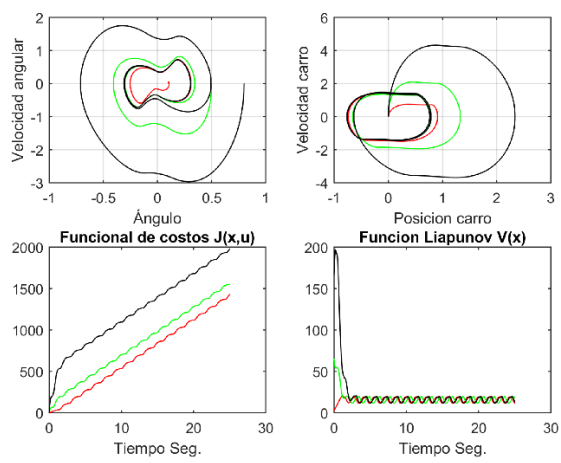
**Fig. 6-3.** Evolución temporal de la función de Liapunov  $V(x_t)$  para el péndulo invertido con restricciones en la acción de control del tipo zona muerta de  $|u_k|=2$  y lineal de allí en más.

**Fig. 6-4.** Modificación de no linealidad para considerar un actuador lineal con zona muerta.





**Fig. 6-5.** Evolución temporal de las variables de estado del péndulo invertido con restricciones en la acción de control  $|u_t| < 100$ , y del tipo zona muerta como en la Fig. 6-4.



**Fig. 6-6.** Plano de fases del péndulo invertido con controlador que tiene zona muerta del tipo Fig. 6-4 en  $u_t$ .

### 6.2.6. Teorema de Krasovskii

Sea el sistema modelado mediante las ecuaciones

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x(0) = x_0, \quad (6-13)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $f$  es un vector cuyas  $n$  componentes son funciones no lineales. Para éste sistema, se define la matriz Jacobiano

$$F(x) = \frac{\partial f_1 \dots \partial f_n}{\partial x_1 \dots \partial x_n} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \quad (6-14)$$

Además, se define la matriz

$$\hat{F}(x) = F^T(x) + F(x), \quad (6-15)$$

se establece una función Liapunov para éste sistema haciendo

$$V(x) = f^T(x) \cdot f(x), \quad (6-16)$$

debido a que

$$\dot{V}(x) = f^T(x) \cdot \hat{F} \cdot f(x). \quad (6-17)$$

### 6.2.7. Aplicación en sistemas lineales

Sea el sistema modelado mediante las ecuaciones lineales homogéneas

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0. \quad (6-18)$$

Se elige la función candidata de Liapunov

$$V(x) = x^T \cdot P \cdot x, \quad (6-19)$$

siendo P una matriz simétrica y definida positiva, la derivada temporal de V(x) es

$$\dot{V}(x) = x^T \cdot (A^T P + PA) \cdot x \quad (6-20)$$

donde se requiere que la matriz entre paréntesis sea definida negativa para que la candidata V(x) propuesta sea función de Liapunov. Por lo tanto debe cumplirse que

$$-Q = A^T P + PA \quad (6-21)$$

donde Q debe ser definida positiva.

Para verificar la existencia de P, se hace el estudio sobre

$$(A^T P + PA) = -I,$$

igualando a Q con la matriz identidad.

Por ejemplo, en la Tabla 6-1 hay un código para Octave que permite verificar mediante el cálculo de los autovalores de A si es estable, y luego inspeccionar que el segundo método de Liapunov da un resultado acorde con la matriz P. Si se cambia a algún signo de la última fila de A se observa que la matriz P deja de ser definida positiva.

```

clc;clear all;
clear all;clc;
A=[0 1; -1 -1];
eig(A)
syms P11 P12 P22;
P=[P11 P12;P12 P22];
H=A'*P+P*A+eye(2);
[a11,a12,a22]=solve(H(1,1),H(1,2),H(2,2));
M_P=eval([a11,a12;a12,a22])
if(M_P>0)
    fprintf('P es definida positiva \n');
else
    fprintf('P no es definida positiva \n');
end

```

**Tabla 6-1. Algoritmo para verificar la estabilidad**

Nótese la relación existente entre la función Liapunov V(x) y su derivada temporal, las expresiones (6-20) y (6-21) muestran que

$$\frac{\partial}{\partial t} (x^T \cdot P \cdot x) = x^T \cdot (A^T P + PA) \cdot x = -x^T \cdot Q \cdot x. \quad (6-22)$$

### 6.2.8. Problema de control óptimo cuadrático

Se usará el segundo método de Liapunov para resolver el problema del control óptimo formulado. Primero se fijan las condiciones de estabilidad y luego se diseña el controlador dentro de esas condiciones. El método supone que el sistema es controlable.

Reemplazando (6-11) en la primer ecuación del sistema (6-10), se tiene

$$\dot{\mathbf{x}}_t = (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) \cdot \mathbf{x}_t \quad (6-23)$$

donde se asume que  $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$  es estable, es decir, tiene todos los autovalores con parte real negativa. Sustituyendo (6-11) en (6-12),

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + (\mathbf{K} \mathbf{x})^T \mathbf{R} \mathbf{K} \mathbf{x}) dt = \int_0^{\infty} \mathbf{x}^T (\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K}) \mathbf{x} dt. \quad (6-24)$$

Nótese que éste funcional  $J(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  contiene la información de las energías asociadas al proceso, y es posible asociarle (no igualarle) una primitiva que sea una función Candidata Liapunov, por ejemplo

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{x}, \quad (6-25)$$

que a su vez, para que sea Función Liapunov, su derivada temporal deberá ser definida negativa. Derivando entonces, respecto a  $t$  se tiene

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^T (\mathbf{A} - \mathbf{BK})^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) \mathbf{x} \quad (6-26)$$

es decir

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T ((\mathbf{A} - \mathbf{BK})^T \mathbf{P} + \mathbf{P} (\mathbf{A} - \mathbf{BK})) \mathbf{x}, \quad (6-27)$$

que puede igualarse a una función cuadrática definida negativa la cual está asociada (no igualada) con el argumento de la integral de (6-24), siguiendo con el razonamiento de la (6-21) lo que resulta en

$$\mathbf{x}^T ((\mathbf{A} - \mathbf{BK})^T \mathbf{P} + \mathbf{P} (\mathbf{A} - \mathbf{BK})) \mathbf{x} = -\mathbf{x}^T \cdot (\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K}) \cdot \mathbf{x}, \quad (6-28)$$

que debe resolverse en  $\mathbf{P}$  simétrica y definida positiva. Como la condición (6-28) debe cumplirse para todo  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , se resuelve la igualdad a partir de igualar las matrices de ponderación de la forma cuadrática. Por lo tanto,

$$-(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^T \mathbf{P} + \mathbf{P} (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) = \mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K}, \quad (6-29)$$

corresponde al argumento del funcional de costos a minimizar,

$$-Q = \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K} + (\mathbf{A} - \mathbf{BK})^T \mathbf{P} + \mathbf{P} (\mathbf{A} - \mathbf{BK}). \quad (6-30)$$

Para hallar  $\mathbf{K}$ , se minimiza la expresión (6-30) respecto de  $\mathbf{K}$ , teniendo en cuenta las reglas de derivación matricial e igualando a  $0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  el resultado verificando que la derivada segunda de (6-30) sea positiva para que el extremo sea un mínimo.

Explicitando un poco para ver los términos y su dependencia con  $\mathbf{K}$ ,

$$-Q = \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} - \mathbf{K}^T (\mathbf{B}^T \mathbf{P}) + \mathbf{P} \mathbf{A} - (\mathbf{P} \mathbf{B}) \mathbf{K}. \quad (6-31)$$

Dada una matriz  $\mathbf{M}$  y dos vectores uno  $\mathbf{x}$  y otro  $\mathbf{y}$  se verifica

$$\frac{\partial (\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{y})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{y}; \quad \frac{\partial (\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{M}^T \cdot \mathbf{x}; \quad \frac{\partial (\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{M} \cdot \mathbf{x}, \quad (6-32)$$



pero la tercera propiedad sólo es válida si  $\mathbf{M}$  es simétrica.

Derivando la (6-30) respecto a  $\mathbf{K}$ , se tiene

$$0 = -\mathbf{B}^T \mathbf{P} - \mathbf{B}^T \mathbf{P} + 2\mathbf{R}\mathbf{K}$$

y la derivada segunda de (6-30) es

$$2\mathbf{R}^T$$

que es definida positiva, lo que indica que el extremo de la derivada primera es un mínimo. Como  $\mathbf{R}$  es matriz de diseño, se puede asegurar que sea definida positiva.

Por lo tanto, igualando a cero la derivada primera y despejando  $\mathbf{K}$  se tiene que

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}. \quad (6-33)$$

La ley de control será, entonces,

$$\mathbf{u}_t = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \cdot \mathbf{x}_t. \quad (6-34)$$

Ahora resta hallar  $\mathbf{P}$ . Para ello, se reemplaza el valor de  $\mathbf{K}$  de la (6-33) en la igualdad (6-29) se obtiene el valor mínimo de la función implícita. Así,

$$0 = \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K} + (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K})^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}) + \mathbf{Q} = \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K} - (\mathbf{B} \mathbf{K})^T \mathbf{P} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{K} + \mathbf{Q},$$

reemplazando, entonces,  $\mathbf{K}$  por la Ec. (6-33), se tiene

$$0 = (\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P})^T \mathbf{R} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} - (\mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P})^T \mathbf{P} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q},$$

$$0 = (\mathbf{B}^T \mathbf{P})^T (\mathbf{R}^{-1})^T \mathbf{B}^T \mathbf{P} - (\mathbf{B}^T \mathbf{P})^T (\mathbf{B} \mathbf{R}^{-1})^T \mathbf{P} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q},$$

que operando, se llega a

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0, \quad (6-35)$$

que es la *Ecuación de Riccati reducida*. La solución de la Ecuación matricial de Riccati se encuentra numéricamente por cómputo matricial [2], teniendo como dato los valores numéricos de  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{Q}$ .

### Solución de la Ecuación de Riccati en tiempo continuo

Nótese que la Ec (6-35) puede ser escrita como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \\ -\mathbf{Q} & -\mathbf{A}^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} = 0. \quad (6-36)$$

El procedimiento de cálculo matricial consiste en formar la matriz del *Hamiltoniano*  $\mathbf{H}$  como

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \\ -\mathbf{Q} & -\mathbf{A}^T \end{bmatrix} \quad (6-37)$$

es decir,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{H} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} = 0. \quad (6-38)$$

Si se premultiplica y posmultiplica por una matriz invertible de transformación  $M$ , se premultiplica por  $M^{-1}$  y luego se posmultiplica por  $M$ , se tiene

$$\begin{bmatrix} M^{-1}P & -M^{-1}I \end{bmatrix} \cdot H \cdot \begin{bmatrix} M \\ PM \end{bmatrix} = 0. \quad (6-39)$$

Si se encuentran matrices  $M$  y  $P$  tal que se puede hacer la descomposición espectral de  $H$ , donde se logre formar una matriz rectangular con los autovectores de  $H$  multiplicada por una matriz diagonal que tenga sus autovalores, es decir

$$H \cdot \begin{bmatrix} M \\ PM \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M \\ PM \end{bmatrix} \cdot \Lambda, \quad (6-40)$$

se logra que

$$\begin{bmatrix} M^{-1}P & -M^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M \\ PM \end{bmatrix} \cdot \Lambda = 0. \quad (6-41)$$

Se tiene que construir las matrices  $M$  y  $P$ . Para ello se procede empleando los autovalores y autovectores de  $H$ , ya que

$$Hv_i = \lambda_i v_i \quad (6-42)$$

asumiendo que  $H$  tiene  $2n$  autovalores reales y distintos, de los cuales  $n$  tienen parte real negativa, con los que se puede escribir

$$H \cdot \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}. \quad (6-43)$$

Ahora se tienen las matrices buscadas en la Ec (6-40), por lo que se igualan las matrices del lado derecho como

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}. \quad (6-44)$$

y del lado izquierdo

$$\begin{bmatrix} M \\ P \cdot M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}, \quad (6-45)$$

de donde se obtiene la matriz  $P$  simplemente de la matriz inferior posmultiplicando por la inversa de  $M$  como

$$P = P \cdot M \cdot M^{-1}. \quad (6-46)$$

Así concluye el cálculo del controlador óptimo lineal cuadrático. En el cálculo numérico, normalmente los autovectores que corresponden a autovalores complejos conjugados, tienen componentes complejas. Por lo tanto, es frecuente encontrar una matriz  $P$  que tenga algunos

valores imaginarios relativamente pequeños y por lo tanto deba tomarse sólo su parte real.

Finalmente, evaluando a  $J(\mathbf{x})$  de la Ec. (6-24) con el  $u_i$  de la Ec. (6-34), la integral del lado derecho es  $-V(\mathbf{x})$ , por lo que se obtiene

$$J(\mathbf{x}, u) = \int_0^{\infty} \mathbf{x}^T (\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K}) \mathbf{x} dt = -\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \Big|_0^{\infty} = -(\mathbf{x}_{\infty}^T \mathbf{P} \mathbf{x}_{\infty} - \mathbf{x}_0^T \mathbf{P} \mathbf{x}_0) \quad (6-47)$$

donde se ha usado la igualdad (6-22) para resolver la integral. Para determinar el valor en la Ec. (6-47), se considera que los autovalores de  $(\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K})$  tienen parte real negativa, entonces  $\mathbf{x}(t) \rightarrow 0$  con  $t \rightarrow \infty$ . Por lo tanto la Ec. (6-47) resulta

$$J(\mathbf{x}_{\infty}, u_{\infty}) = \mathbf{x}_0^T \mathbf{P} \mathbf{x}_0. \quad (6-48)$$

Dado el caso en que se diseñe al funcional de costos en términos de la salida  $\mathbf{y}$ , del sistema de Ec. (6-10),

$$J(\mathbf{x}, u) = \int_0^{\infty} (\mathbf{y}^T \mathbf{Q} \mathbf{y} + u^T \mathbf{R} u) dt \quad (6-49)$$

se reemplaza y por la segunda fila de la Ec. (6-10), quedando

$$J(\mathbf{x}, u) = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C} \mathbf{x} + u^T \mathbf{R} u) dt, \quad (6-50)$$

y se emplea  $\mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C}$  en lugar de  $\mathbf{Q}$ .

Para el diseño del controlador óptimo cuadrático, una vez formulado el problema, se debe resolver la Ecuación de Riccati (6-35) con respecto a  $\mathbf{P}$  verificando que  $(\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K})$  sea estable.

### 6.3. Cálculo del observador

Nótese que empleando la propiedad de dualidad que relaciona a los conceptos de controlabilidad y observabilidad, siendo

$$S_1 := \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (6-51)$$

con  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ ;  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times r}$  y  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , y su sistema dual

$$S_2 := \begin{cases} \dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}^T \mathbf{z}(t) + \mathbf{C}^T \mathbf{v}(t) \\ \boldsymbol{\eta}(t) = \mathbf{B}^T \mathbf{z}(t) \end{cases} \quad (6-52)$$

donde  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ ,  $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^r$ , se puede obtener el controlador para el dual que será el observador del sistema. Así, se está evitando emplear la transformación vista para sistemas multivariados en la Sección 6.1, ya que el controlador (u observador) obtenido ha considerado sistemas multivariados.

#### 6.3.1. Ejemplo fase no mínima

Sea el ejemplo PM7.4 extraído de la literatura (Dorf. Sistemas de Control Moderno 10ta edición. Pearson Prentice Hall 2005)

$$G(s) = \frac{(1+p)s - p}{s^2 + 3s + 6} \quad (6-53)$$

con  $P=1$ . Hallar un controlador y un observador que haga evolucionar al sistema desde cualquier condición inicial a una referencia dada. Definir los valores adecuados de los parámetros de diseño para que se logre el objetivo de control.

El código .m está detallado en la Tabla 6-2, y los resultados de simulación en la Fig. 6-7.

```
% PM7.4 extraído de la literatura (Dorf. Sistemas de Control Moderno 10ta
% edición. Pearson Prentice Hall 2005).
clear all;clc;close all;
% G =
%      2 s - 1
%      -----
%      s^2 + 3 s + 6
% pkg load signal
% G
P=1;
num=[1+P -P];
den=[1 3 6];%
% [A,B,C,D] = tf2ss(num,den);
A(1,1)=0;A(1,2)=1;
A(2,1)=-den(3);A(2,2)=-den(2);
B(1,:)=0;B(2,:)=1;
C(1)=num(2);C(2)=num(1);D=0;
[n,d]=ss2tf(A,B,C,D)
Aa=[A,[0;0];-C,0];
Ba=[B;0];
Mat_Aa=Aa;Mat_Ba=Ba;
%Cálculo del LQR-----
Q=diag([100 50 10]);R=1e-1;
%Construcción del Hamiltoniano para el cálculo del controlador
Ha=[Aa -Ba*inv(R)*Ba'; -Q -Aa'];
[n,va]=size(Ha);
[V,D]=eig(Ha);MX1X2=[];
for ii=1:n
    if real(D(ii,ii))<0
        MX1X2=[MX1X2 V(:,ii)];
    end
end
MX1=MX1X2(1:n/2,:); MX2=MX1X2(n/2+1:end,:);
% P=abs(MX2*inv(MX1));
P=real(MX2*inv(MX1));
Ka=inv(R)*Ba'*P;
%Fin cálculo del controlador-----
disp('Controlador ampliado en ')
eig(Mat_Aa-Mat_Ba*Ka)
%Cálculo del Observador-----
A_d=A';
B_d=C';
C_d=B';
Qo=1e5*diag([1 1]);Ro=1e1;
%Construcción del Hamiltoniano para el cálculo del observador
Ho=[A_d -B_d*inv(Ro)*B_d'; -Qo -A_d'];
[no,va]=size(Ho);
[V,D]=eig(Ho);MX1X2=[];
for ii=1:no
    if real(D(ii,ii))<0
        MX1X2=[MX1X2 V(:,ii)];
    end
end
MX1=MX1X2(1:no/2,:); MX2=MX1X2(no/2+1:end,:);
Po=real(MX2*inv(MX1));
Ko=(inv(Ro)*B_d'*Po)';
disp('Observador en ')
eig(A-Ko*C)
%FIN cálculo del Observador-----
%Los valores del controlador se obtienen del K ampliado
h=1e-3;
T=15;
e=0;ys=[];ypp(1)=0;yp(1)=0;y(1)=0;t=[];
Max_T=T/h;
y(1)=0;
x=[yp(1);y(1)];ref=1;psi=0;
u=0;x_hat=[0;0];y_o(1)=0;acc(1)=0;
for ii=2:Max_T
    ua=u;
```

```

u=-Ka*[x_hat;psi];
psi_p=ref-y(ii-1);
psi=psi+psi_p*h;
up=(u-ua)/h;
ypp=2*up-1*u-3*yp(ii-1)-6*y(ii-1); %G de lazo abierto
yp(ii)=yp(ii-1)+h*ypp;
y(ii)=y(ii-1)+h*yp(ii);
ys(ii-1)=y(ii);
t(ii-1)=ii*h;
x_hat_p=A*x_hat+B*u+Ko*(y(ii-1)-C*x_hat);
x_hat=x_hat+x_hat_p*h;
y_o(ii-1)=C*x_hat;
acc(ii-1)=u;
end
subplot(3,1,1);plot(t,ys,'k');title('Salida')
subplot(3,1,2);plot(t,ys-y_o,'k');title('Error de observación')
subplot(3,1,3);plot(t,acc,'k');title('Acción de control');xlabel('Tiempo [seg.]')
% save('PM7_4.mat','-v7');
% save('PM7_4.mat','-v7');

```

Tabla 6-2. Código .m del Controlador con observador por LQR para el sistema de fase no mínima.

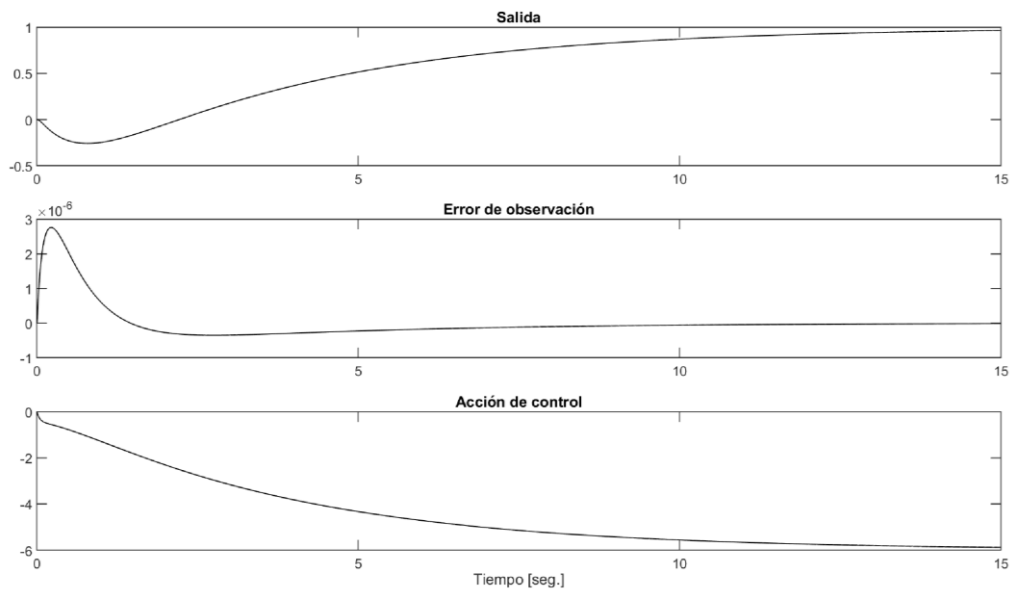


Fig. 6-7. Simulación del sistema controlador con observación de estados para el caso de fase no mínima empleando LQR.

Nótese que los polos de lazo cerrado obtenidos pueden emplearse para el diseño del controlador usando Ackerman, y se obtendría el mismo sistema controlador-observador.

### 6.3.2. Ejemplo péndulo invertido

Para el sistema del péndulo invertido en el equilibrio inestable, diseñar un controlador en el dominio del tiempo continuo sabiendo que las ecuaciones que describen al ángulo y al desplazamiento son,

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{\delta} + m\ddot{\phi}\cos\phi - m\dot{\phi}^2\sin\phi + F\dot{\delta} = u \\ l\ddot{\phi} - g\sin\phi + \ddot{\delta}\cos\phi = 0 \end{cases} \quad (6-54)$$

y que las matrices A y B del sistema linealizado para ángulo pequeño es

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{F}{M} & -\frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{F}{IM} & \frac{g(m+M)}{IM} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{IM} \end{bmatrix} \quad (6-55)$$

Se pide realizar el cálculo del controlador basado en optimización y generar las trayectorias del sistema mediante simulación para ángulos iniciales de 0,1 0,5 y 0,8 radianes. Considerar que la fuerza  $u$  debe cumplir con la restricción  $-10 \leq u \leq 10$ .

Los resultados de la simulación están en las Fig. 6-8, utilizando el código para Octave de la Tabla 6-3. En la Fig. 6-9 se muestran los planos de fases y los valores de la función de Liapunov y del funcional de costos para el caso de controlar al sistema lineal. En esas condiciones se cumple la condición (6-48). No obstante, empleando el sistema no lineal del péndulo, dicha igualdad no se cumple, como se observa en la Fig. 6-11.

```

clc;clear all;
m=.1;Fricc=0.1; long=0.6;g=9.8;M=.5;
h=0.0001;tiempo=(50/h);p_pp=0;tita_pp=0;
%Condiciones iniciales
fi(1)=.1; color='r';
% fi(1)=.5; color='g';
% fi(1)=.8; color='b';
% fi(1)=-pi; color='+-b';
% fi(1)=pi; color='.-r';
omega(1)=0; p_p(1)=0; u(1)=0; p(1)=0; i=1;
%Versión linealizada en el equilibrio inestable. Sontag Pp 104.
%estado=[p(i); p_p(i); fi(i); omega(i)]
Mat_A=[0 1 0 0;0 -Fricc/M -m*g/M 0; 0 0 0 1; 0 Fricc/(long*M) g*(m+M)/(long*M) 0]
Mat_B=[0; 1/M; 0; -1/(long*M)]
Mat_M=[Mat_B Mat_A*Mat_B Mat_A^2*Mat_B Mat_A^3*Mat_B];%Matriz Controlabilidad
rank(Mat_M)
%Cálculo del LQR
% Q=diag([.2 10 .10 .1]);R=100; %Nótese con R=1 no cumple restricciones de u
Q=diag([.002 1.0 .10 .01]);R=50; %Nótese con R=1 no cumple restricciones de u
%Contrucción del Hamiltoniano para el cálculo del controlador
H=[Mat_A -Mat_B*inv(R)*Mat_B'; -Q -Mat_A'];
[n_,va]=size(H);
[V,D]=eig(H);MX1X2=[];
for(ii=1:n_)
    if real(D(ii,ii))<0
        MX1X2=[MX1X2 V(:,ii)];
    end
end
MX1=MX1X2(1:n_/2,:); MX2=MX1X2(n_/2+1:end,:);
P=real(MX2*inv(MX1));
K=inv(R)*Mat_B'*P;
estado=[p(1); p_p(1); fi(1); omega(1)];
J_(1)=0; V_(1)=0;
while(i<(tiempo+1))
    estado=[p(i); p_p(i); fi(i); omega(i)];
    V_(i)=estado'*P*estado;
    fil=estado(3);
    if abs(fil)>pi
        while abs(fil)>2*pi
            fil=sign(fil)*(abs(fil)-2*pi);
        end
        if fil<-pi
            fil=2*pi+(fil);%Lo hace positivo
        end
        if fil>pi
            fil=-2*pi+(fil);%Lo hace negativo
        end
    end
    end
end

```

```

    estado(3)=fil;
    u(i)=-K*estado;
    J_(i+1)=J_(i)+(estado'*Q*estado+u(i) '*R*u(i)) *h;
%   u(i)=min( 100,u(i));
%   u(i)=max(-100,u(i));
    p_pp=(1/(M+m)) * (u(i)-m*long*tita_pp*cos(fi(i))+m*long*omega(i)^2*sin(fi(i))-
    Fricc*p_p(i));
    tita_pp=(1/long)*(g*sin(fi(i))-p_pp*cos(fi(i)));
    p_p(i+1)=p_p(i)+h*p_pp;
    p(i+1)=p(i)+h*p_p(i);
    omega(i+1)=omega(i)+h*tita_pp;
    fi(i+1)=fi(i)+h*omega(i);
%   estado_p=Mat_A*estado+Mat_B*u(i);
%   p_p(i+1)=p_p(i)+h*estado_p(2);
%   p(i+1)=p(i)+h*estado_p(1);
%   omega(i+1)=omega(i)+h*estado_p(4);
%   fi(i+1)=fi(i)+h*estado_p(3);
    i=i+1;
end
V_(i)=estado'*P*estado;t=0:tiempo; t=t*h;
figure(1);hold on;
subplot(3,2,1); plot(t,p,color);grid on;title('Posición carro');hold on;
subplot(3,2,3);plot(t,p_p,color);grid on;title('Velocidad carro');hold on;
subplot(3,2,2);plot(t,fi,color);grid on;title('Ángulo');hold on;
subplot(3,2,4);plot(t,omega,color);grid on; title('Velocidad angulo');hold on;
subplot(3,1,3);plot(t(1:end-1),u,color);grid on;title('Acción de control');xlabel('Tiempo en
Seg. ');hold on;
figure(2);hold on;
subplot(2,2,1);plot(fi,omega,color);grid on;xlabel('Ángulo');ylabel('Velocidad
angular');hold on;
subplot(2,2,2);plot(p,p_p,color);grid on;xlabel('Posición carro');ylabel('Velocidad
carro');hold on;
subplot(2,2,3);semilogy(t,J_,color);title('Funcional de costos J(x,u)');hold
on;xlabel('Tiempo Seg. ');hold on;v=axis;
subplot(2,2,4);semilogy(t,V_,color);title('Funcion Liapunov V(x)');xlabel('Tiempo
Seg. ');hold on;axis(v);
break
figure(1);print('-dpng','-r300','Fig_1');
figure(2);print('-dpng','-r300','Fig_2');

```

Tabla 6-3. Código del Péndulo controlado por LQR con referencia nula.

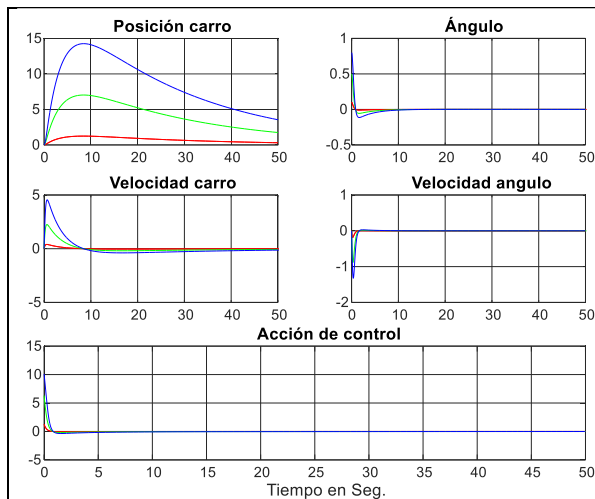
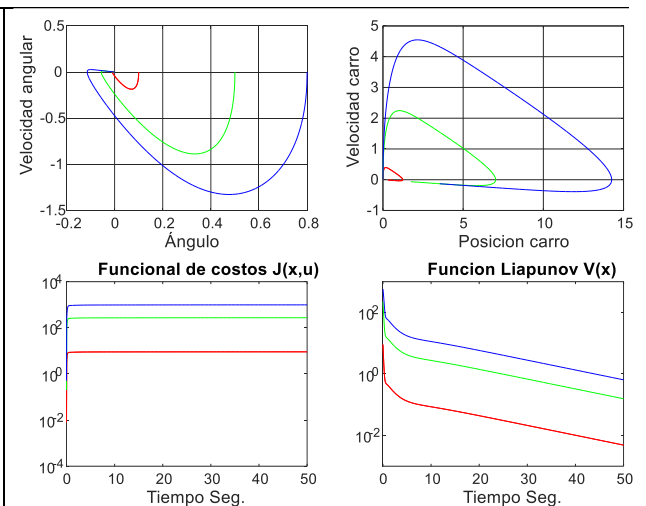


Fig. 6-8. Evolución del péndulo invertido para el controlador LQR a partir de tres condiciones iniciales, 0,1 0,5 y 0,8 radianes, de color rojo, verde y azul respectivamente empleando el modelo lineal.

Fig. 6-9. Plano de fase para el ángulo y la posición obtenido a partir de tres condiciones iniciales, 0,1 0,5 y 0,8 radianes, de color rojo, verde y azul respectivamente empleando el modelo lineal del péndulo. Se muestran valores del funcional de costos y de la función Liapunov para el sistema lineal con restricciones en  $u$ .

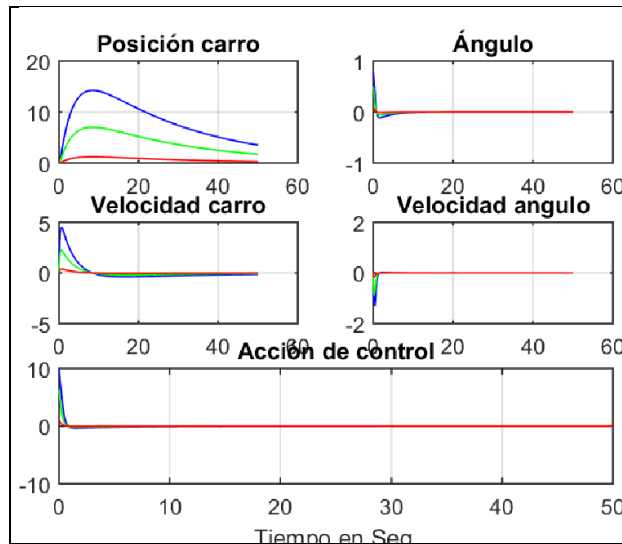


Fig. 6-10. Evolución del péndulo invertido para el controlador LQR a partir de tres condiciones iniciales, 0,1 0,5 y 0,8 radianes, de color rojo, verde y azul respectivamente empleando el modelo no lineal con restricciones en  $u_r$ .

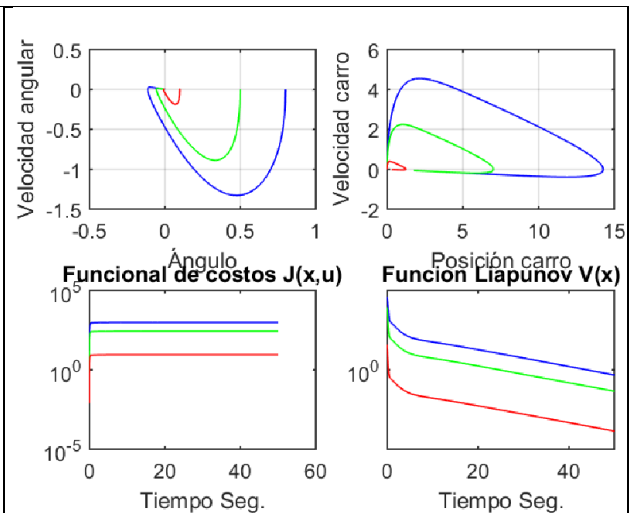


Fig. 6-11. Planos de fase de la evolución del péndulo invertido para el controlador LQR con restricciones para las condiciones iniciales 0,1 0,5 y 0,8 radianes con restricciones en  $u_r$  empleando el modelo no lineal del péndulo. Nótese que los valores de  $J$  para  $t \rightarrow \infty$  no coinciden con el valor de  $V$  para  $t=0$  como en el caso de la Ec. (6-10) y la Fig. 6-9.

Si se modifica el rango de la ley de control en  $-100 \leq u \leq 100$ , y el dominio del ángulo se disminuye al intervalo que varía entre 0 y  $2\pi$ , se pueden obtener resultados como los indicados en las Fig. 6-14 y Fig. 6-15. Nótese que el ángulo de inicio del péndulo es el del equilibrio estable, y el controlador lo ubica en el equilibrio inestable.

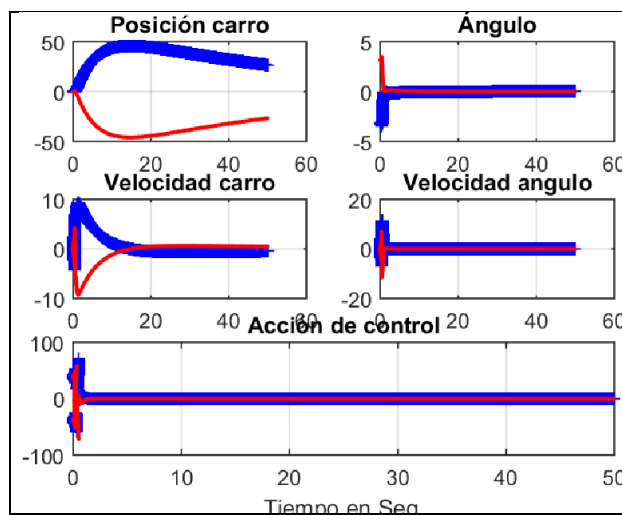


Fig. 6-12. Evolución del péndulo invertido para el controlador LQR a partir de dos condiciones iniciales,  $\pi$  radianes de color rojo y  $-\pi$  radianes en azul respectivamente empleando el modelo no lineal con restricciones de 100 en  $u_r$ .

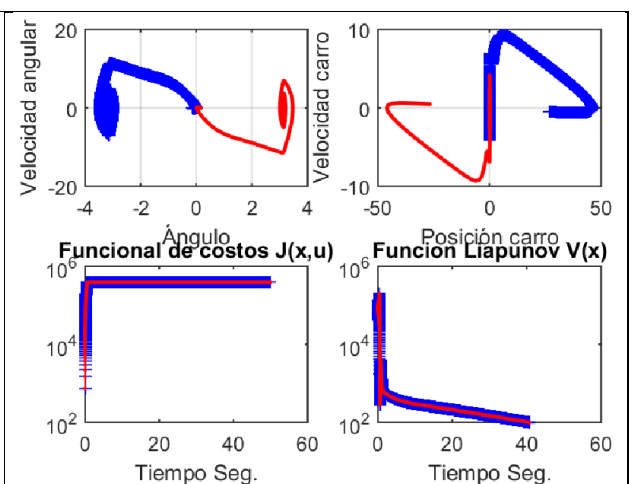


Fig. 6-13. Planos de fase de la evolución del péndulo invertido para el controlador LQR  $Q=\text{diag}([.002 \ 1.0 \ .10 \ .01])$ ;  $R=500$ ; con restricciones para las condiciones iniciales  $\pm\pi$  radianes con restricciones en  $u_r$  empleando el modelo no lineal del péndulo. Nótese que la función  $J$  para  $t \rightarrow \infty$  no coincide con el valor de  $V$  para  $t=0$  e incluso  $V$  no es monótonicamente decreciente como indica el teorema ya que se plantea para el sistema lineal.



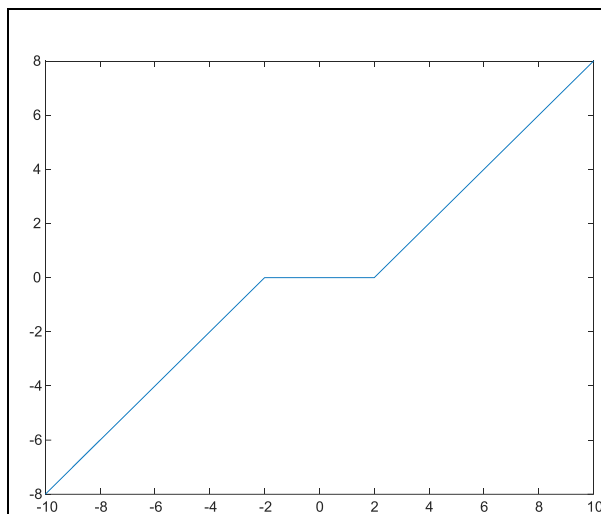
## Ejercicios sugeridos

Emplear el diseño mediante LQR para plantear y resolver los ejemplos vistos, analizando desde qué condición inicial de ángulo distinto de cero y qué altura inicial distinta de cero pueden controlarse. A saber:

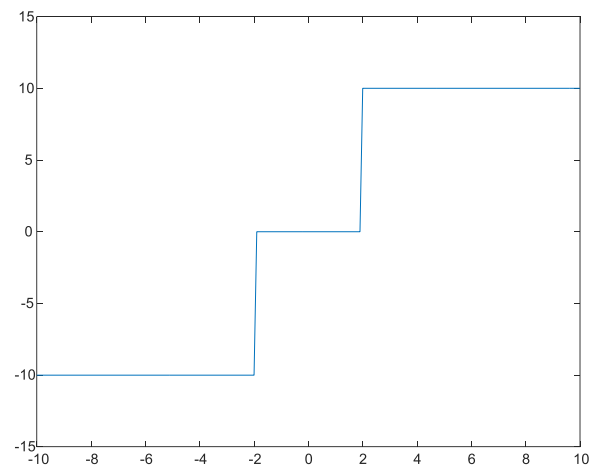
- controlador con observador de estados siendo la matriz de salida definida como univariable  $C=[1 \ 0 \ 0 \ 0]$  y  $C=[0 \ 0 \ 0 \ 1]$  para péndulo y avión respectivamente.
- controlador con observador siendo la matriz  $C$  definida como un sistema multivariable para el caso del péndulo y del avión, respectivamente

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- controlador con referencia distinta de cero.
- controlador con referencia distinta de cero y observador de estados.
- Para el caso del péndulo invertido, agregar una alinealidad a la salida del controlador, para que la acción de control tenga una zona muerta de actuación y luego sea lineal en un primer caso y si-no en un segundo caso, ambas con zona muerta como muestran las Fig. 6-14 y Fig. 6-15. Es decir, si  $|u| < 2$  entonces  $u=0$ , de otro modo  $u=\text{sign}(u) \cdot (|u|-2)$  y para el segundo caso, si  $|u| < 2$  entonces  $u=0$ , de otro modo  $u=10 \cdot \text{sign}(u)$ . Generar simulaciones de los ítems anteriores con éstas modificaciones.



**Fig. 6-14. Modificación de no linealidad para considerar un actuador lineal con zona muerta.**



**Fig. 6-15. Modificación de no linealidad a la salida del controlador para considerar un actuador con valores de 10 y -10, con una zona muerta.**

## Referencias

- [1] Fletcher, R. and Powell, M.J.D. "A Rapid Convergent Descent Method for Minimization". The Computer Journal, 6, 163-168. <http://dx.doi.org/10.1093/comjnl/6.2.163>. 1963.
- [2] Alan J. Laub. "A Schur Method For Solving Algebraic Riccati Equations" IEEE. IBEB Transactions on Automatic Control, Vol. Ac-24, No. 6, December 1979.