

8. Diseño de controladores con observación de estados

Al igual que en el caso de tiempo continuo, es determinante que se midan todas las componentes del vector de estados. Caso contrario, si alguna de las componentes de \mathbf{x} no puede medirse, se puede plantear un *Observador*. Se expresa como

$$\mathbf{K}_o : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n, \quad (8-1)$$

donde \mathbf{R}^m es el espacio de la salida \mathbf{y} y \mathbf{R}^n es el espacio del estado \mathbf{x} .

Se logra obtener a \mathbf{x} a partir de conocer las entradas \mathbf{u} y con mediciones de \mathbf{y} , implementando el esquema de la Fig. 8-1.

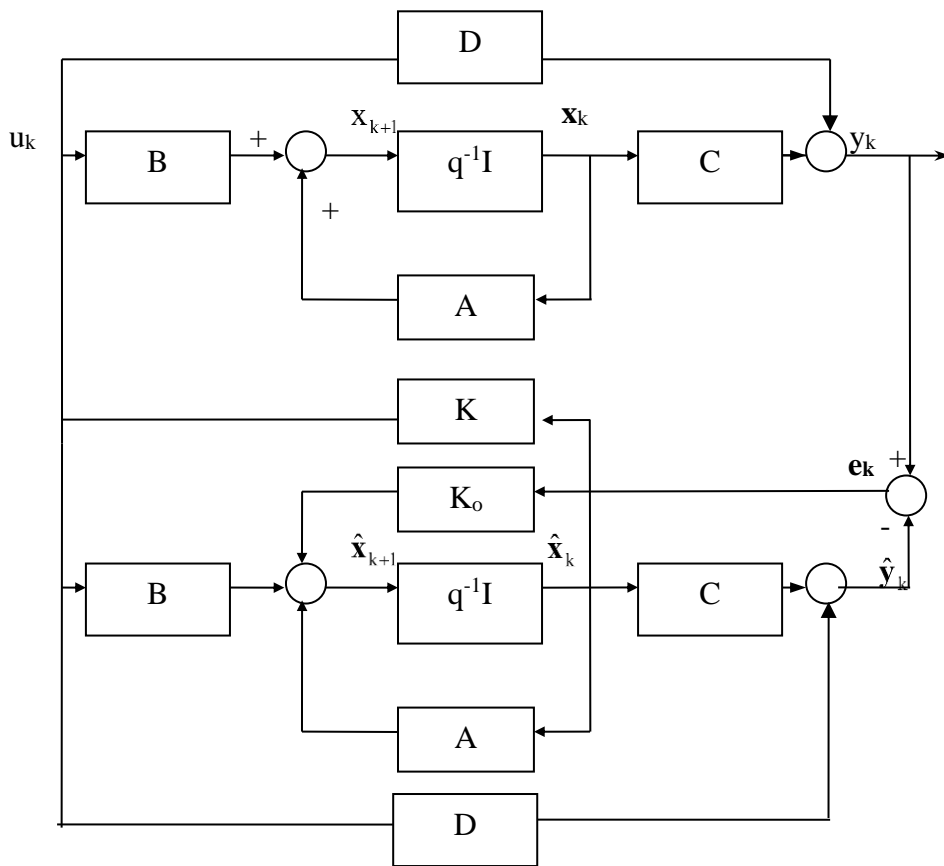


Fig. 8-1. Diagrama en bloques del sistema lineal con observador en tiempo discreto.

No obstante, en el marco de los sistemas lineales, sólo es posible la generación de \mathbf{x} si el sistema es *Observable*. Es decir, debe cumplir con la condición de *Observabilidad*.

8.1. Observabilidad

Un sistema lineal con salida $y(k)$ se denomina **observable** si cualquier estado $x(k)$ del mismo, puede ser *determinado* a partir de un número finito de valores de la salida $y(k)$.

Se hace aquí un análisis del concepto de observabilidad para un sistema monovariable. Las ecuaciones que modelan el sistema en el espacio de estado son:

$$\begin{aligned}x(k+1) &= A x(k) + b u(k) \\ y(k) &= C x(k) .\end{aligned}\quad (8-2)$$

A partir de las Ec. (8-2), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones en diferencias

$$\begin{aligned}y(k) &= Cx(k) \\ y(k+1) &= CAx(k) + Cbu(k) \\ y(k+2) &= CA^2x(k) + CA^2bu(k) + Cbu(k+1) \\ &\vdots \\ y(k+N-1) &= CA^{N-1}x(k) + [0 \quad Cb \quad CA^2b \quad \dots \quad CA^{N-2}b] u_N\end{aligned}\quad (8-3)$$

donde

$$u_N^T = [u(k+N-1) \quad \dots \quad u(k+1) \quad u(k)]. \quad (8-4)$$

Si se conocen todas las componentes del vector u_N , para determinar en forma unívoca las componentes del vector $x(k)$ de orden m , se requieren m ecuaciones. Esto implica que para obtener solución única, debe ser $N = m$ y el sistema de Ec. (8-3) toma la forma

$$y_m = Q_o x(k) + S u_m \quad (8-5)$$

con

$$\begin{aligned}y_m^T &= [y(k) \quad y(k+1) \quad \dots \quad y(k+m-1)] \\ u_m^T &= [u(k+m-1) \quad \dots \quad u(k+1) \quad u(k)] \\ Q_o &= \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{m-1} \end{bmatrix} \\ S &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & c^T b \\ . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & c^T b & c^T Ab & \dots & c^T A^{m-2} b \end{bmatrix} .\end{aligned}$$

El vector de estado observado se puede calcular como

$$x(k) = Q_o^{-1} [y_m - S u_m] \quad (8-6)$$

Esto supone que

$$\det Q_o \neq 0.$$

Por lo tanto, el sistema es observable si la matriz de observabilidad Q_o cumple con la condición

$$\text{Rango } Q_o = m,$$

o bien que Q_o no tenga filas linealmente dependientes.

Este planteo puede extenderse para sistemas multivariables conduciendo a la siguiente matriz de observabilidad.

$$Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{m-1} \end{bmatrix}. \quad (8-7)$$

Si ésta matriz es singular, significa que *no puede* hallarse el valor de $x(k)$ a partir de mediciones finitas de $y(k)$.

8.2. Control de un sistema con observador

El procedimiento de cálculo del observador en tiempo discreto es análogo al procedimiento empleado en tiempo continuo. Primero, usando la propiedad del Teorema de la separación, se calcula al controlador para cumplir los requerimientos del usuario. Luego, mediante el sistema dual, se calcula al observador. Finalmente, se tiene que el sistema de lazo cerrado controlador observador presenta $2 \times n$ polos, donde están las dinámicas de los dos cálculos. En la Fig. 8-1 se muestra un esquema del sistema de control con observador de estado.

8.2.1. Análisis del observador en el sistema

Observando la Fig. 8-1, las Ecs. del sistema son

$$x(k+1) = A(k) x(k) + B(k) u(k) \quad (8-8)$$

$$y(k) = C(k) x(k) + D(k) u(k) \quad (8-9)$$

y se deduce que las ecuaciones que rigen al observador son

$$\hat{x}(k+1) = A(k) \hat{x}(k) + B(k) u(k) + K_o(k) [y(k) - \hat{y}(k)] \quad (8-10)$$

$$\hat{y}(k) = C(k) \hat{x}(k) + D(k) u(k) \quad (8-11)$$

reemplazando las ecuaciones Ec. (8-9) y Ec. (8-11) en la Ec. (8-10) se tiene

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) = & A(k) \hat{x}(k) + B(k) u(k) + K_o(k) C(k) x(k) + \\ & + K_o(k) D(k) u(k) - K_o(k) C(k) \hat{x}(k) - K_o(k) D(k) u(k) \end{aligned}$$

agrupando

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) = & [A(k) - K_o(k) C(k)] \hat{x}(k) + B(k) u(k) + \\ & + K_o(k) C(k) x(k) \end{aligned} \quad (8-12)$$

si se restan las Ecs. (8-8) y (8-12), se obtiene

$$x(k+1) - \hat{x}(k+1) = [A(k) - K_o(k) C(k)] [x(k) - \hat{x}(k)]. \quad (8-13)$$

Se define el error de observación como

$$\tilde{x}(k) = x(k) - \hat{x}(k) \quad (8-14)$$

y para $k+1$

$$\tilde{x}(k+1) = x(k+1) - \hat{x}(k+1) \quad (8-15)$$

reemplazando las Ecs. (8-14) y (8-15) en la Ec (8-13) se obtiene

$$\tilde{x}(k+1) = [A(k) - K_o(k) C(k)] \tilde{x}(k) \quad (8-16)$$

Esta es la ecuación del error de reconstrucción del vector de estado. Como se puede observar las ecuaciones resultantes son independientes de la entrada u y por lo tanto también lo son de las matrices B y D . La Ec. (8-16) tiene la estructura matemática del control de estado de lazo cerrado.

Se debe cumplir que $\tilde{x} \rightarrow 0$ conforme $k \rightarrow \infty$, esto significa que la Ec. (8-16) debe representar un sistema estable y por lo tanto los polos del observador definidos a partir de

$$\det [zI - A(k) + K_o(k) C(k)] = \det [zI - A^T(k) + C^T(k) K_o^T(k)] = 0 \quad (8-17)$$

deberán tener módulo menor a uno, $|Z_i(k)| < 1$.

Se puede formular ahora el **problema de reconstrucción de estado**.

Dado un proceso dinámico determinístico lineal de tiempo discreto representado por las Ecs. (8-8) y (8-9) y un modelo de referencia representado por las Ecs. (8-10) y (8-11); se debe encontrar una secuencia de matrices $K_o(k)$ que haga mínimo el error de reconstrucción del estado.

8.3. Solución al problema de reconstrucción de estado

Resolver el problema de reconstrucción de estado significa encontrar la matriz K_o adecuada. De la Ec. (8-17) se deduce que modificando la matriz K_o se pueden ubicar arbitrariamente los polos del observador en el plano complejo. Aplicando el principio de dualidad al proceso completamente observable, se tiene que su *dual*, para procesos variantes referido a k^*

$$x^*(k+1) = A^T(k^* - k) x^*(k) + C^T(k^* - k) u(k) \quad (8-18)$$

$$y^*(k) = B^T(k^* - k) x^*(k) + D(k^* - k) u(k) \quad (8-19)$$

es completamente controlable, para cualquier instante de referencia k^* fijo, y por lo tanto, su ley de control será

$$u(k) = -K(k) x(k) \quad (8-20)$$

con una ecuación característica

$$\det [zI - A^T(k) + C^T(k) K(k)] = 0. \quad (8-21)$$

Comparando la Ec. (8-17) con la Ec. (8-21) se deduce que la matriz K_o^T y por lo tanto K_o se puede calcular con los mismos métodos utilizados para la matriz de realimentación de estado K_o , salvo que hay que cambiar A^T por A , C^T por B y B^T por C , para obtener K_o^T en lugar de K .

La matriz K_o del observador obtenida con las mismas ecuaciones que para el controlador K , también cumplirá el objetivo de control. Esto es, hará converger el error de observación dado por la Ec. (8-16) a cero con la máxima velocidad posible al igual que el error de estado.

Para procesos invariantes se pueden utilizar los algoritmos de estado estacionario equivalentes a los obtenidos para el controlador de estado estacionario. La Ec. (8-16) toma la forma

$$\tilde{x}(k+1) = [A - K_o C] \tilde{x}(k). \quad (8-22)$$

En tal caso la matriz K_o se precalcula del mismo modo que el controlador K .

Nótese que el objetivo de incorporar un observador es que los estados observados pueden ser utilizados para realizar el control de los estados del sistema.

8.4. Controladores con Observación de Estado

En la sección anterior se obtuvo la ley de control para realimentación del vector de estado suponiendo que éste se podía medir en forma exacta. Sin embargo, en la mayoría de las aplicaciones prácticas, el estado debe ser reconstruido a partir del vector de salida, de esta manera dado un proceso dinámico

$$x(k+1) = A(k) x(k) + B(k) u(k) \quad (8-23)$$

$$y(k) = C(k) x(k) + D(k) u(k) \quad (8-24)$$

que cumple con la condición de observabilidad; un observador de estado con ecuaciones

$$\hat{x}(k+1) = A(k) \hat{x}(k) + B(k) u(k) + K_o(k)[y(k) - \hat{y}(k)] \quad (8-25)$$

$$\hat{y}(k) = C(k) \hat{x}(k) + D(k) u(k) \quad (8-26)$$

y un controlador de ecuación

$$u(k) = -K(k) \hat{x}(k) \quad (8-27)$$

se debe obtener la ecuación del sistema de lazo cerrado.

Reemplazando la Ec. (8-27) en las Ecs. (8-23), (8-24), (8-25) y (8-26) se tiene

$$x(k+1) = A(k) x(k) - B(k) K(k) \hat{x}(k) \quad (8-28)$$

$$y(k) = C(k) x(k) - D(k) K(k) \hat{x}(k) \quad (8-29)$$

$$\hat{x}(k+1) = A(k) \hat{x}(k) - B(k) K(k) \hat{x}(k) + K_o(k) [y(k) - \hat{y}(k)] \quad (8-30)$$

$$\hat{y}(k) = C(k) \hat{x}(k) - D(k) K(k) \hat{x}(k) \quad (8-31)$$

reemplazando las Ecs. (8-29) y (8-31) en la Ec. (8-30)

$$\hat{x}(k+1) = [A(k) - B(k)K(k) - K_o(k)C(k)]\hat{x}(k) + K_o(k)C(k)x(k). \quad (8-32)$$

Las Ecs. (8-32) y (8-28) se pueden agrupar en una ecuación

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ \hat{x}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(k) & -B(k)K(k) \\ K_o(k)C(k) & A(k) - B(k)K(k) - K_o(k)C(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \hat{x}(k) \end{bmatrix} \quad (8-33)$$

aplicando una transformación lineal

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ \tilde{x}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k+1) \\ \hat{x}(k+1) \end{bmatrix}$$

con

$$H = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} = H^{-1}$$

se obtiene

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \tilde{\mathbf{x}}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}(k) & -\mathbf{B}(k)\mathbf{K}(k) \\ \mathbf{K}_o(k)\mathbf{C}(k) & \mathbf{A}(k) - \mathbf{B}(k)\mathbf{K}(k) - \mathbf{K}_o(k)\mathbf{C}(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \tilde{\mathbf{x}}(k) \end{bmatrix}$$

o también

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \tilde{\mathbf{x}}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(k) - \mathbf{B}(k)\mathbf{K}(k) & \mathbf{B}(k)\mathbf{K}(k) \\ 0 & \mathbf{A}(k) - \mathbf{K}_0(k)\mathbf{C}(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \tilde{\mathbf{x}}(k) \end{bmatrix} \quad (8-34)$$

La matriz que rige la dinámica del sistema controlador-error de observación es

$$\begin{bmatrix} A - BK & BK \end{bmatrix} \quad (8-35)$$

y sus autovalores deben ser adecuados para que el sistema también sea estable. Así, calculando sus autovalores mediante la ecuación característica, los polos del mismo están dados por

$$\det[zI - A(k) + B(k) K(k)] \cdot \det[zI - A(k) + K_o(k) C(k)] = 0 \quad (8-36)$$

es decir incluye los polos del sistema de lazo cerrado más los polos del observador. Como el proceso y el observador tienen orden n el sistema completo tendrá orden $2n$.

Por otra parte los polos del proceso son independientes de los del observador, y por lo tanto se pueden determinar por separado; este resultado se denomina **Teorema de separación**.

El controlador de estado, es el mismo tanto para procesos con vector de estado medido como calculado con un observador, esto se denomina **Principio de Certeza Equivalente** y permite calcular la matriz de realimentación de estado, como si el vector de estado fuese completamente medible, para luego reemplazar este por la observación dada por el observador de Luenberger.

8.5. Regulador con referencia distinta de cero en tiempo discreto

Para el caso del tiempo discreto, si se incorpora un integrador en el lazo del controlador, se tendría un esquema como el de la Fig. 8-2.

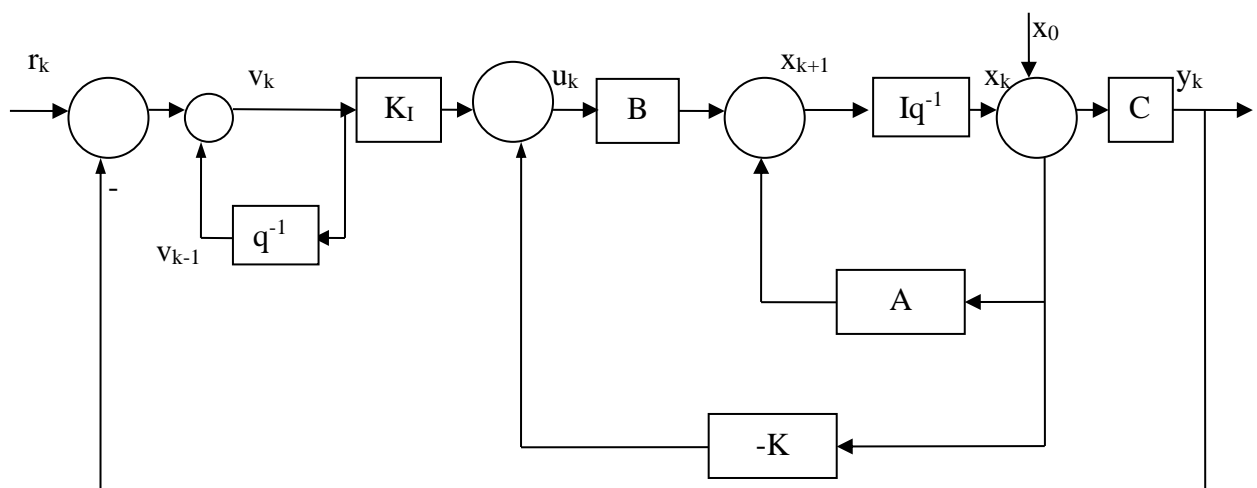


Fig. 8-2. Esquema de control óptimo en tiempo discreto con un integrador en el lazo para referencia distinta de cero.

La ley de control u_k es

$$u_k = -Kx_k + K_I v_k = -[K \quad -K_I] \cdot \begin{bmatrix} x_k \\ v_k \end{bmatrix} \quad (8-37)$$

donde la variable v_k se define como la salida de un integrador del error de control $r_k - y_k$,

$$v_k = v_{k-1} + r_k - y_k \quad (8-38)$$

Operando sobre la señal v_k , se tiene

$$\begin{aligned} v_{k+1} &= v_k + r_{k+1} - y_{k+1} = v_k + r_{k+1} - C(Ax_k + Bu_k) \\ v_{k+1} &= -CAx_k + v_k - CBu_k + r_{k+1} \end{aligned}$$

de lo cual se tiene que

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ v_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -CA & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_k \\ v_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ -CB \end{bmatrix} u_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r_{k+1}. \quad (8-39)$$

Asignando a r_k un escalón, y haciendo $k \rightarrow \infty$, se tiene

$$\begin{bmatrix} x_\infty \\ v_\infty \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -CA & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_\infty \\ v_\infty \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ -CB \end{bmatrix} u_\infty + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r_\infty. \quad (8-40)$$

restando a la Ec. (8-39) la Ec. (8-40), se llega a

$$e_{k+1} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -CA & 1 \end{bmatrix} \cdot e_k + \begin{bmatrix} B \\ -CB \end{bmatrix} u_{ek}. \quad (8-41)$$

donde

$$e_k = \begin{bmatrix} x_k - x_\infty \\ v_k - v_\infty \end{bmatrix}, \quad u_{ek} = -[K \quad -K_I] e_k. \quad (8-42)$$

Explicitando entonces,

$$e_{k+1} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -CA & 1 \end{bmatrix} \cdot e_k - \begin{bmatrix} B \\ -CB \end{bmatrix} [K \quad -K_I] e_k, \quad (8-43)$$

para obtener la expresión de lazo cerrado del error del vector ampliado, es decir

$$e_{k+1} = \left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ -CA & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B \\ -CB \end{bmatrix} [K \quad -K_I] \right) e_k. \quad (8-44)$$

La expresión (8-44) determina la dinámica del error de control. Por lo tanto, diseñando el controlador considerando las matrices de orden incrementado

$$A_a = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -CA & 1 \end{bmatrix}, \quad y \quad B_a = \begin{bmatrix} B \\ -CB \end{bmatrix} \quad (8-45)$$

se obtendrá el controlador del sistema ampliado definido como

$$[K \quad -K_I] \quad (8-46)$$

con un integrador del error de control.

En el programa para Octave de la Tabla 8-1 está implementado el algoritmo propuesto empleando el modelo del péndulo invertido. En la Fig. 8-3 se detalla la evolución del sistema péndulo invertido con el controlador en tiempo discreto con referencia distinta de cero, -10 m para la posición en éste caso.

8.5.1. Ejemplo: Péndulo invertido

Se desea implementar un controlador digital con un período de muestreo $T=0,01$ segundos por ubicación de polos en el péndulo invertido del modelo dictado en los temas de tiempo continuo. Luego cambiar el período de muestreo a $T=0,015$ seg. Se sugiere usar el código de la Tabla 8-1 para Octave, que además incluye la observación de estados. El intervalo de integración del modelo no lineal queda fijo en 0,001. La Fig. 8-3 muestra la evolución de las variables de estado y control sin observación de estados para $T=0,01$ seg, y las condiciones iniciales de ángulo de 0,1 0,7 y 0,8 para una referencia deseada de -10 en la posición del carro. La Fig. 8-5 muestra la evolución de las variables de estado y control con observación de estados para $T=0,01$ seg, y las condiciones iniciales de ángulo de 0,1 0,5 y 0,8 para una referencia deseada de 10 en la posición del carro, donde si sólo se usara el sistema lineal se pueden colocar los polos del observador muy cerca del origen.

```

clc;clear all;
Ts=0.01;m=.1;Fricc=0.1; long=0.6;g=9.8;M=.5;KMAX=5000;TEuler=0.001;
%pkg load control; pkg load signal %Una sola vez
TamanoFuente=20;
%Condiciones iniciales
alfa(1)=.1; color='r';colorc='r';
% alfa(1)=.7; color='b';colorc='b';
alfa(1)=.8; color='b';colorc='k';
ref=10;
%Versión linealizada en el equilibrio inestable. Sontag Pp 104.
% estado=[p(i); p_p(i); alfa(i); omega(i)]
Mat_Ac=[0 1 0 0;0 -Fricc/M -m*g/M 0; 0 0 0 1; 0 Fricc/(long*M) g*(m+M)/(long*M) 0];
Mat_Bc=[0; 1/M; 0; -1/(long*M)];
Mat_C=[1 0 0 0];
I=eye(4);
sys_c=ss(Mat_Ac,Mat_Bc,Mat_C,[0]);
sys_d=c2d(sys_c,Ts,'zoh');
Mat_A=sys_d.a;
Mat_B=sys_d.b;
Mat_Aa=[Mat_A,zeros(4,1);-Mat_C*Mat_A, 1];
Mat_Ba=[Mat_B;-Mat_C*Mat_B];
Mat_Ma=[Mat_Ba Mat_Aa*Mat_Ba Mat_Aa^2*Mat_Ba Mat_Aa^3*Mat_Ba Mat_Aa^4*Mat_Ba];%Matriz
Controlabilidad
rango=rank(Mat_Ma);
%Cálculo del controlador por asignación de polos
auto_val=eig(Mat_Aa);
c_ai=poly(auto_val);
Mat_Wa=[c_ai(5) c_ai(4) c_ai(3) c_ai(2) 1;c_ai(4) c_ai(3) c_ai(2) 1 0;c_ai(3) c_ai(2) 1 0
0;c_ai(2) 1 0 0 0;1 0 0 0 0];
Mat_T=Mat_Ma*Mat_Wa;
A_controlable=inv(Mat_T)*Mat_Aa*Mat_T %Verificación de que T esté bien
%Ubicación de los polos de lazo cerrado en mui;
mui(1)=0.997; mui(2)=0.998; mui(3)= conj(mui(2)); mui(4)=0.99; mui(5)=0.99;
alfa_i=poly(mui);
Ka=flipplr(alfa_i(2:6)-c_ai(2:6))*inv(Mat_T);
K=Ka(1:4);KI=-Ka(5);
abs(eig(Mat_Aa-Mat_Ba*Ka))
% OBSERVADOR
Mat_M_Obs=[Mat_C;(Mat_C*Mat_A);(Mat_C*Mat_A^2);(Mat_C*Mat_A^3)];
rank(Mat_M_Obs)
%Como el Rango es 4, se genera el sistema Dual y se vuelve a repetir la

```



```

%secuencia de cálculo vista
Mat_C_O=Mat_B';
Mat_A_O=Mat_A';
Mat_B_O=Mat_C';
Mat_M_D=Mat_M_Obs'; %[Mat_Ba Mat_Aa*Mat_Ba Mat_Aa^2*Mat_Ba Mat_Aa^3*Mat_Ba]; %Matriz
Controlabilidad
c_aid=poly(Mat_A);
Mat_Wa=[c_aid(4) c_aid(3) c_aid(2) 1;c_aid(3) c_aid(2) 1 0;c_aid(2) 1 0 0;1 0 0 0];
Mat_T_D=Mat_M_D*Mat_Wa;
alfa_i_O=poly([.0999 .095 .094 .093]); %Polos deseados del Observador muy bueno para el caso
lineal
alfa_i_O=poly([.3 .5 .94 .3]); %Polos deseados del Observador
Ko=(fliplr(alfa_i_O(2:5)-c_aid(2:5))*inv(Mat_T_D));
abs(eig(Mat_A-Ko*Mat_C))
t=0; x=[0;0;alfa(1);0];
p(1)=x(1); p_p(1)=x(2); alfa(1)=x(3); omega(1)=x(4); ve(1)=0;
u_k(1)=0;xang=[0 ;0;0;0];
for ki=2:KMAX
    t=[t ki*Ts];
    ve(ki)=ve(ki-1)+ref-Mat_C*x;
    % u=-K*x+KI*ve(ki);
    u=-K*xang+KI*ve(ki);
    ys=Mat_C*x; %Acá DEBE medirse y.
    x=Mat_A*x+Mat_B*u;
    p(ki)=x(1);
    p_p(ki)=x(2);
    alfa(ki)=x(3);
    omega(ki)=x(4);
    u_k(ki)=u;
    xang=Mat_A*xang+Mat_B*u+Ko*(ys-Mat_C*xang); %Acá se usa y.
end
u=u_k;figure(1);hold on;
subplot(3,2,1);plot(t,omega,color);grid on; title('Velocidad
ángulo','FontSize',TamanoFuente);hold on;
subplot(3,2,2);plot(t,alfa,color);grid on;title('Ángulo','FontSize',TamanoFuente);hold on;
subplot(3,2,3); plot(t,p,color);grid on;title('Posición
carro','FontSize',TamanoFuente);hold on;
subplot(3,2,4);plot(t,p_p,color);grid on;title('Velocidad
carro','FontSize',TamanoFuente);hold on;
subplot(3,1,3);plot(t,u,color);grid on;title('Acción de
control','FontSize',TamanoFuente);xlabel('Tiempo en Seg.','FontSize',TamanoFuente);hold
on;
figure(2);hold on;
subplot(2,2,1);plot(alfa,omega,color);grid
on;xlabel('Ángulo','FontSize',TamanoFuente);ylabel('Velocidad
angular','FontSize',TamanoFuente);hold on;
subplot(2,2,2);plot(p,p_p,color);grid on;xlabel('Posición
carro','FontSize',TamanoFuente);ylabel('Velocidad carro','FontSize',TamanoFuente);hold on;
%Verificación de la solución con el modelo no lineal en tiempo continuo.
T=t(ki);x=[0;0;alfa(1);0];
p=x(1); p_p=x(2); alfa=x(3); omega=x(4); tita_pp(1)=0;Vh=Ts/TEuler;h=TEuler; u=[];i=1;
u_k(1)=0;xang=[0;0;0;0];
for ki=1:KMAX
    ve(ki+1)=ve(ki)+ref-Mat_C*x;
    u1(ki)=-K*xang+KI*ve(ki); %Control con observación de estados
    % u1(ki)=-K*x+KI*ve(ki); %Sin Observador
    ys=Mat_C*x;%Acá se mide la salida.
    for kii=1:Vh
        u(ki)=u1(ki);
        p_pp=(1/(M+m))*(u(i)-m*long*tita_pp*cos(alfa(i))+m*long*omega(i)^2*sin(alfa(i))-
Fricc*p_p(i));
        tita_pp=(1/long)*(g*sin(alfa(i))-p_pp*cos(alfa(i)));
        p_p(i+1)=p_p(i)+h*p_pp;
        p(i+1)=p(i)+h*p_p(i);
        omega(i+1)=omega(i)+h*tita_pp;
        alfa(i+1)=alfa(i)+h*omega(i);
        i=i+1;
    end
    x=[p(i-1); p_p(i-1); alfa(i-1); omega(i-1)];
    xang=Mat_A*xang+Mat_B*u1(ki)+Ko*(ys-Mat_C*xang); %Acá se usa y.
end
u(i)=u1(ki);t=0:h:KMAX*(Vh)*h;
figure(1);hold on;
subplot(3,2,1);plot(t,omega,colorc);grid on; title('Velocidad
ángulo','FontSize',TamanoFuente);hold on;
subplot(3,2,2);plot(t,alfa,colorc);grid on;title('Ángulo','FontSize',TamanoFuente);hold on;

```

```

subplot(3,2,3);plot(t,p,colorc);grid on;title('Posición
carro','FontSize',TamanoFuente);hold on;
subplot(3,2,4);plot(t,p_p,colorc);grid on;title('Velocidad
carro','FontSize',TamanoFuente);hold on;
subplot(3,1,3);plot(t,u,colorc);grid on;title('Acción de
control','FontSize',TamanoFuente);xlabel('Tiempo en Seg.','FontSize',TamanoFuente);hold
on;
figure(2);hold on;
subplot(2,2,1);plot(alfa,omega,colorc);grid
on;xlabel('Ángulo','FontSize',TamanoFuente);ylabel('Velocidad
angular','FontSize',TamanoFuente);hold on;
subplot(2,2,2);plot(p,p_p,colorc);grid on;xlabel('Posición
carro','FontSize',TamanoFuente);ylabel('Velocidad carro','FontSize',TamanoFuente);hold on;

```

Tabla 8-1. Código para Octave que implementa un controlador de Pendulo invertido en tiempo discreto con referencia distinta de cero y observación de estados.

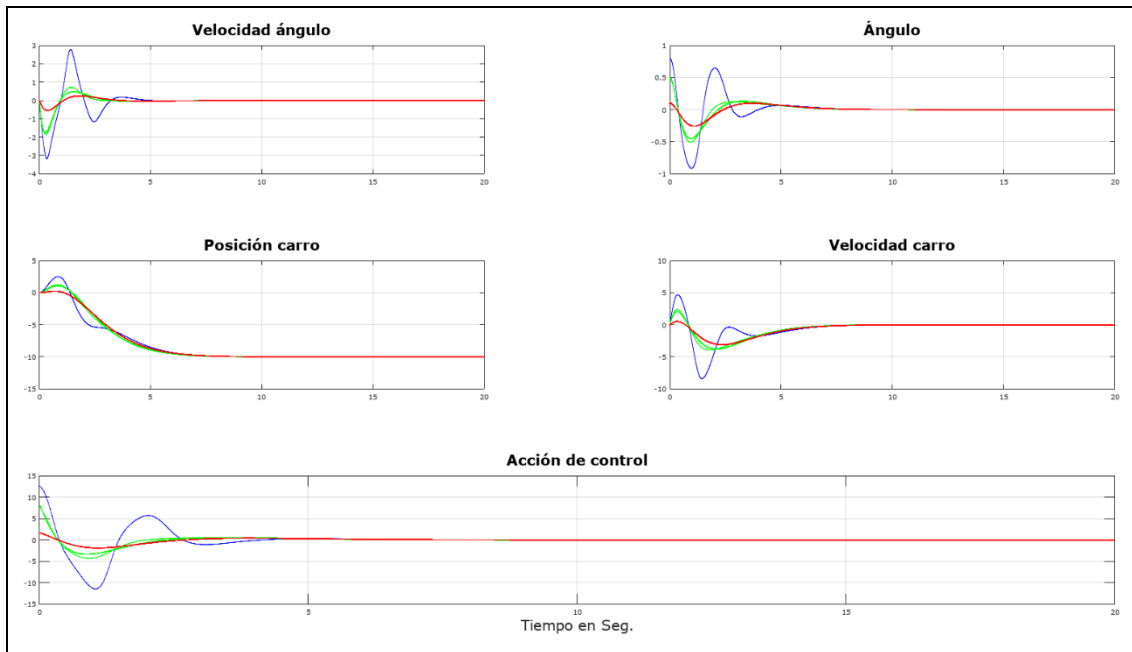


Fig. 8-3. Evolución en las muestras de las variables de estado del sistema péndulo invertido en tiempo discreto SIN observación de estados, y su corroboración en tiempo continuo con referencia distinta de cero.

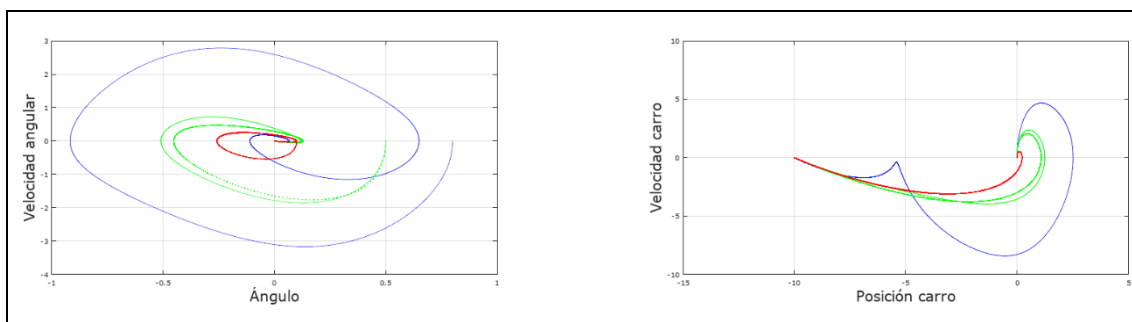


Fig. 8-4. Evolución en el plano de fase de las variables de estado del sistema péndulo invertido en tiempo discreto SIN observación de estados, y su corroboración en tiempo continuo con referencia no nula en posición.

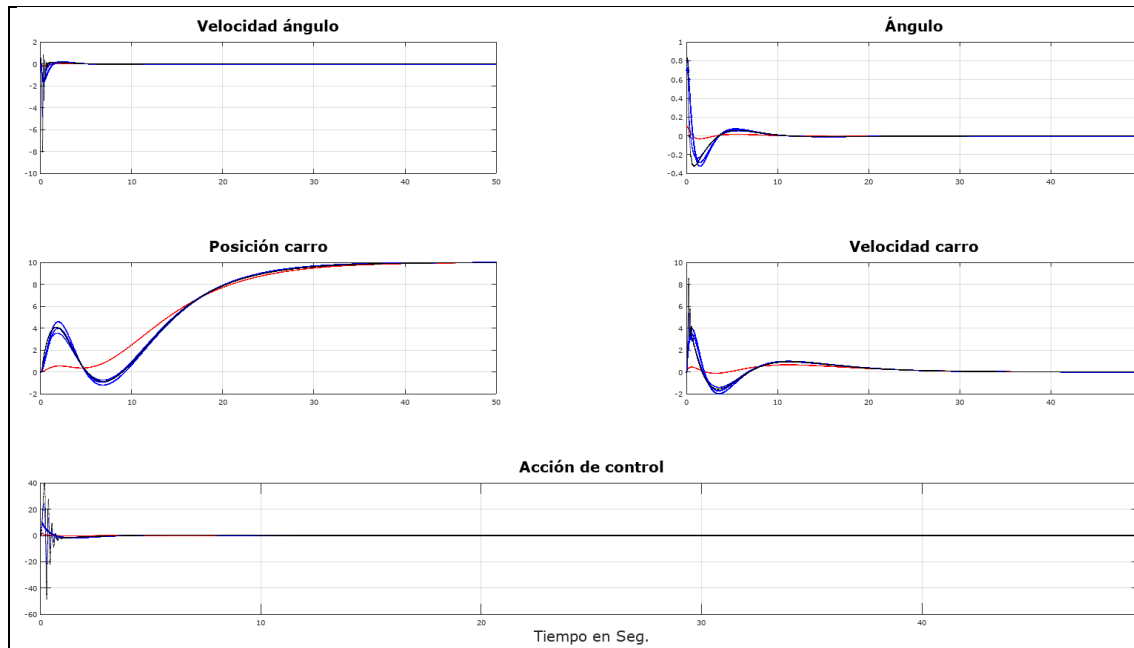


Fig. 8-5. Evolución en las muestras de las variables de estado del sistema péndulo invertido en tiempo discreto CON observación de estados, y su corroboración en tiempo continuo (línea fina y continua) con referencia distinta de cero.

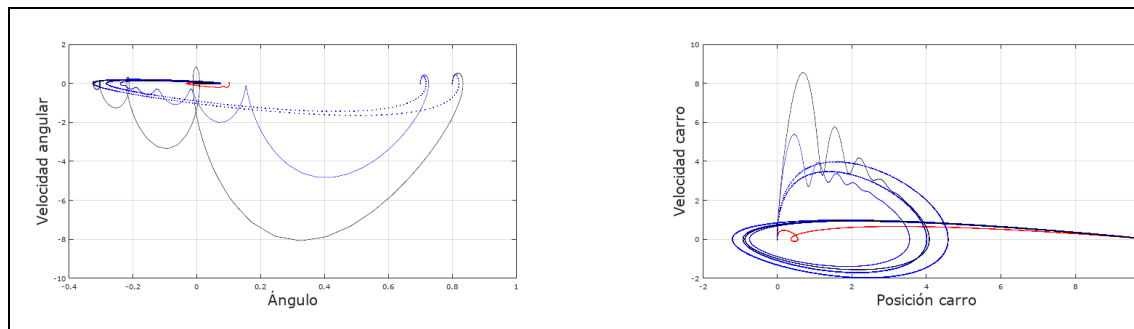


Fig. 8-6. Evolución en el plano de fase de las variables de estado del sistema péndulo invertido en tiempo discreto CON observación de estados, y su corroboración en tiempo continuo (línea fina y continua) con referencia no nula en posición.

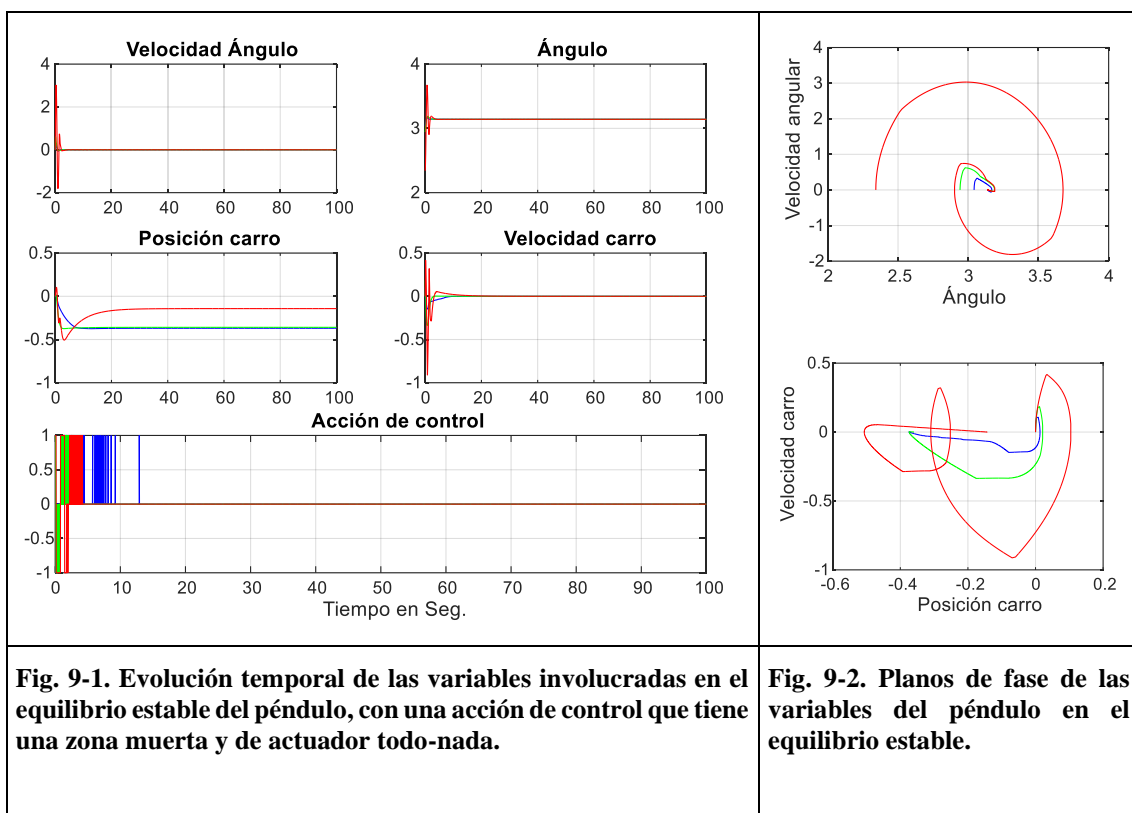
9. Estabilidad en tiempo discreto

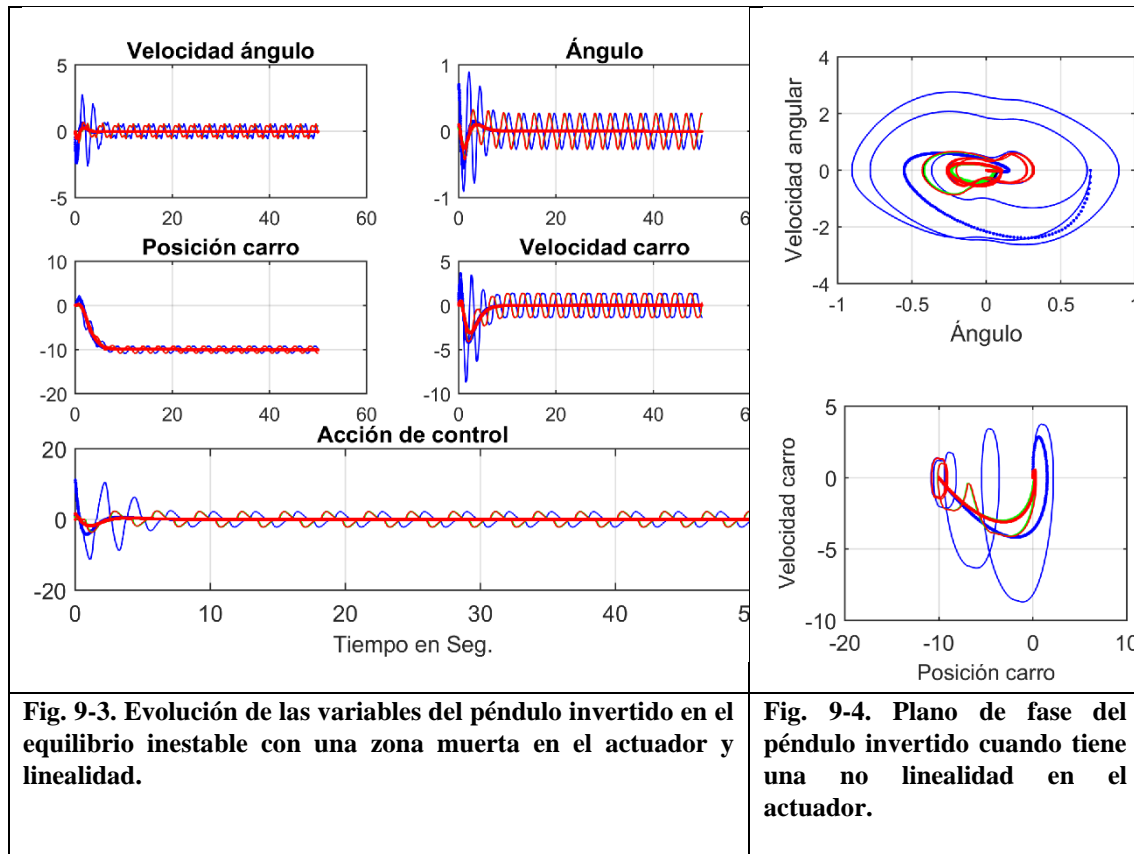
El análisis de estabilidad en el sentido de Liapunov sirve para sistemas lineales o no lineales de tiempo discreto, variantes o invariantes en el tiempo.

El primer método de Liapunov exige tener las trayectorias de las soluciones de las ecuaciones del sistema. Su enunciado es el siguiente: en un equilibrio, el sistema será *estable en el sentido de Liapunov* si para cada esfera $S(\varepsilon)$ de ese equilibrio existe una esfera $S(\delta)$ tal que las trayectorias que empiezan en $S(\delta)$ no salen de $S(\varepsilon)$ con $t \rightarrow \infty$.

Ejemplo:

Se muestra el ejemplo del equilibrio estable del sistema péndulo común con una acción de control que anule el movimiento desde cualquier condición inicial, con una no linealidad en el actuador. Las evoluciones temporales se muestran en las gráficas de la Fig. 9-1 y los planos de fase están en la Fig. 9-2.





9.1. Estabilidad en tiempo discreto: Segundo método de Liapunov

El segundo método de Liapunov que no necesita la solución de las ecuaciones del sistema, se enuncia como sigue.

Teorema

Sea el sistema en tiempo discreto

$$x_{(k+1)T} = f(x_{kT}), \quad (9-1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) \in \mathbb{R}^n$, $f(0)=0$, y T período de muestreo.

Se emplea una función que contempla la energía del sistema, y de ésta función se calcula la diferencia temporal, es decir, que dada

$$V(x_{kT}) = \text{funcion candidata} \quad (9-2)$$

y la función diferencia para dos intervalos de muestreo se define como

$$\Delta V(x_{kT}) = V(x_{(k+1)T}) - V(x_{kT}). \quad (9-3)$$

Si existe una función escalar continua $V(x)$ tal que

1. $V(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$,
2. $\Delta V(x) < 0 \quad \forall x \neq 0$, $\Delta V(x) = V(f(x_{kT})) - V(x_{kT})$,
3. $V(0) = 0$,

4. $V(x) \rightarrow \infty$ con $\|x\| \rightarrow \infty$,

entonces el estado de equilibrio $x=0$ es *asintótica-globalmente estable* y $V(x)$ es una *función de Lyapunov*.

Nótese que 2 puede ser reemplazado por $\Delta V(x) \leq 0 \quad \forall x$, y $\Delta V(x)$ no se hace cero para toda secuencia $\{x_{kT}\}$ solución de (9-1).

Suponiendo que en el sistema

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k = \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{D}_k \mathbf{u}_k \end{cases} \quad (9-4)$$

se hace $u_k=0$, se propone la siguiente función candidata de Liapunov

$$V(\mathbf{x}_k) = \mathbf{x}_k^T \mathbf{P} \mathbf{x}_k \quad (9-5)$$

donde \mathbf{P} es simétrica y definida positiva. Entonces, se calcula

$$\Delta V(\mathbf{x}_k) = V(\mathbf{A} \mathbf{x}_k) - V(\mathbf{x}_k).$$

Reemplazando la (9-5) se tiene,

$$\Delta V(\mathbf{x}_k) = (\mathbf{A} \mathbf{x}_k)^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^T \mathbf{P} \mathbf{x}_k,$$

$$\Delta V(\mathbf{x}_k) = \mathbf{x}_k^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P}) \mathbf{x}_k. \quad (9-6)$$

Para asegurar estabilidad asintótica, se impone que la (9-6) sea definida negativa, y se puede escribir que

$$\Delta V(\mathbf{x}_k) = -\mathbf{x}_k^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_k, \quad (9-7)$$

donde \mathbf{Q} es definida positiva, da la condición suficiente para estabilidad asintótica

$$-\mathbf{Q} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P}. \quad (9-8)$$

Es conveniente especificar \mathbf{Q} simétrica y definida positiva, y luego verificar que \mathbf{P} - determinada por la (9-8)- es definida positiva o no. Si \mathbf{P} es definida positiva, entonces la $V(x)$ propuesta por (9-5) es función de Lyapunov y se demuestra estabilidad.

Por otro lado, nótese que de la Ec. (9-5), se calcula su diferencia temporal como

$$\Delta V(\mathbf{x}_k) = V(\mathbf{x}_{k+1}) - V(\mathbf{x}_k)$$

de donde resulta que

$$\Delta V(\mathbf{x}_k) = \mathbf{x}_{k+1}^T \mathbf{P} \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k^T \mathbf{P} \mathbf{x}_k \quad (9-9)$$

y a su vez se iguala al lado derecho de la Ec. (9-7), y da

$$-\mathbf{x}_k^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k+1}^T \mathbf{P} \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k^T \mathbf{P} \mathbf{x}_k. \quad (9-10)$$

9.1.1. Ejemplo para el péndulo invertido

Para ilustrar el concepto de estabilidad en tiempo discreto, se puede emplear el caso del péndulo invertido cuando es actuado con una acción de control lineal, y un controlador estable comenzando en la condición inicial de 0,8 radianes respecto de la vertical teniendo como objetivo que vuelva a ser nulo. Se puede hacer el análisis para el modelo lineal y el

modelo no lineal del sistema, que se muestra en la Fig. 9-5. Por otro lado, si se tiene en cuenta una no linealidad en el actuador que considera una zona muerta y luego sí comportamiento lineal como se detalla en la Fig. 9-7, entonces el sistema termina siendo inestable, como se puede ver en la Fig. 9-6.

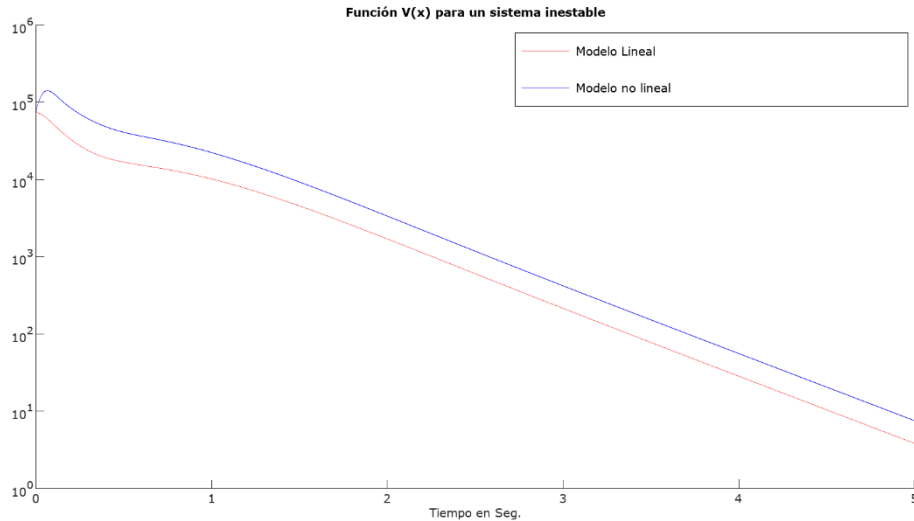


Fig. 9-5. Evolución temporal de la función de Liapunov $V(x_k)$ para el péndulo invertido sin restricciones en la acción de control.

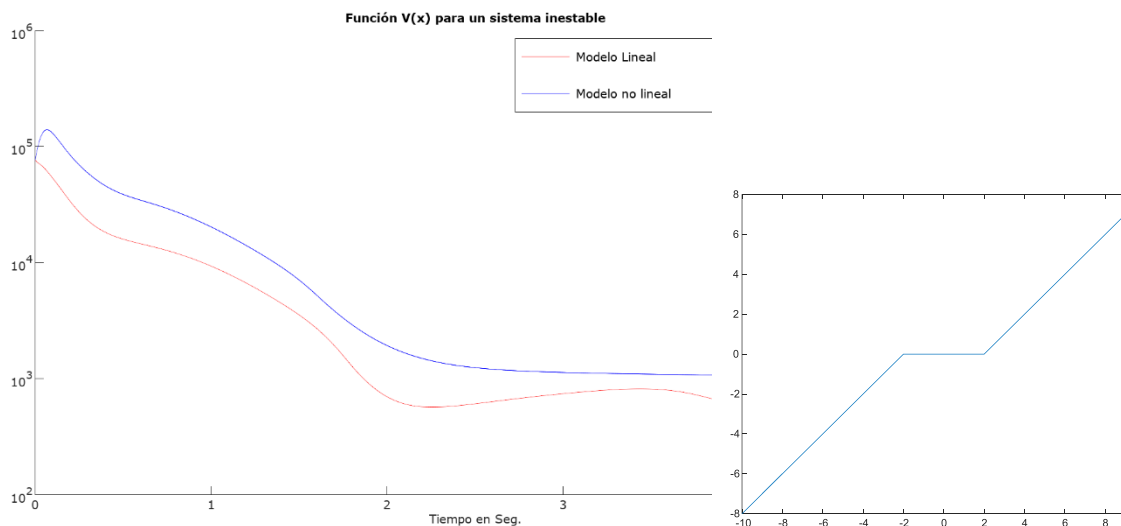


Fig. 9-6. Evolución temporal de la función de Liapunov $V(x_k)$ para el péndulo invertido con restricciones en la acción de control del tipo zona muerta de $|u_k|=2$ y lineal de allí en más. **Fig. 9-7.** Modificación de no linealidad para considerar un actuador lineal con zona muerta.

10. Regulador óptimo lineal en tiempo discreto

El concepto de estabilidad según el método de Liapunov es útil para el cálculo de controladores, por ejemplo para los basados en funcional de costo. Aquí se verá su uso en el controlador óptimo según un funcional cuadrático. En el modelo del proceso no se

consideran restricciones en sus variables. Para emplear el Teorema, se requiere disponer del problema formulado con características consistentes, por los que se procede con la presentación formal de los elementos que intervienen. La función Candidata de Liapunov se iguala con el funcional de costos, ya que éste cumple con los requisitos de la primera [3].

10.1.1. Formulación del problema

La formulación del problema de control para el Regulador Óptimo lineal en tiempo discreto es la siguiente. Dado el sistema lineal determinístico

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k = \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{D}_k \mathbf{u}_k \end{cases} \quad (10-1)$$

se desea encontrar una ley de control $\mathbf{u}_k = -\mathbf{K}\mathbf{x}_k$, que haga evolucionar al proceso desde $\mathbf{x}(0) \neq 0$ a $\mathbf{x}(N) = 0$ minimizando el siguiente funcional de costo

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \sum_{k=0}^{N-1} [\mathbf{x}_k^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^T \mathbf{R} \mathbf{u}_k] + \mathbf{x}_N^T \mathbf{S} \mathbf{x}_N \quad (10-2)$$

con \mathbf{S} y \mathbf{Q} simétricas y semidefinidas positivas y \mathbf{R} simétrica y definida positiva.

Para encontrar la ley de control \mathbf{u}_k , existen diversos métodos, entre los más difundidos están los basados en el principio de optimalidad de Bellman y los que emplean los multiplicadores de Lagrange. Para el caso en que N tienda a infinito en la definición del funcional (10-2), se tiene una formulación del problema conocida como de estado estacionario donde pierde sentido el término $\mathbf{x}_N^T \mathbf{S} \mathbf{x}_N$ ya que al ser estable el sistema controlado siempre será nulo, la cual admite un procedimiento de cómputo basado en la Teoría de Liapunov.

10.2. Formulación del problema de estado estacionario

Se propone formular el problema de control óptimo para emplear la Teoría de Liapunov, que considera un sistema dinámico en estado estacionario.

Dado el modelo dinámico de la Ec. (9-4), se desea encontrar una ley de control \mathbf{u}_k

$$\mathbf{u}_k = -\mathbf{K} \cdot \mathbf{x}_k \quad (10-3)$$

que haga evolucionar el sistema para $k=0$ hasta $k=\infty$, minimizando el funcional de costos

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}_k^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^T \mathbf{R} \mathbf{u}_k. \quad (10-4)$$

donde \mathbf{Q} es simétrica y semidefinida positiva, y \mathbf{R} es simétrica y definida positiva. Para resolver éste problema, se empleará el Teorema de estabilidad de Liapunov.

10.2.1. Problema de control óptimo discreto estacionario

Reemplazando la ley de control (10-3) en la expresión del funcional de costos (10-4), se puede escribir que

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}_k^T (\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K}) \mathbf{x}_k.$$

$$(10-5)$$

Ahora se busca la solución al problema de control en tiempo discreto en estado estacionario, que se basa en la Ec. (9-10), pero si la acción de control no es nula, aparece la modificación de incorporar al controlador. Así, para el caso en que $u_k \neq 0$ en la entrada al sistema (9-4), se reemplaza en las ecuaciones del sistema la expresión de la ley de control (10-3), y se tiene que la Ec. (9-10) se transforma en

$$\mathbf{x}_k^T (\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K}) \mathbf{x}_k = -(\mathbf{x}_{k+1}^T \mathbf{P} \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k^T \mathbf{P} \mathbf{x}_k) \quad (10-6)$$

si se hace coincidir al argumento de la sumatoria que forma a $J(\cdot)$ con el argumento de la sumatoria que forma a $V(\cdot)$ pero cambiado de signo, por lo que el incremento de $V(\cdot)$ es el negativo del argumento de la sumatoria de $J(\cdot)$ asegurando estabilidad en el sentido de Liapunov.

De aquí que minimizando la (10-5) con respecto a \mathbf{K} , se encuentra la ley de control óptima (10-3). Para ello, se opera en la igualdad (10-6) que puede escribirse como

$$-\mathbf{x}_k^T (\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K}) \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k^T ((\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K})^T \mathbf{P} (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}) - \mathbf{P}) \mathbf{x}_k. \quad (10-7)$$

Esta última igualdad debe cumplirse para todo valor de \mathbf{x}_k , por lo tanto, se tiene que minimizando

$$\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K} = -(\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K})^T \mathbf{P} (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}) + \mathbf{P} \quad (10-8)$$

con respecto a \mathbf{K} es lo mismo que hacerlo en la (10-5).

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K} &= -(\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K})^T \mathbf{P} (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}) + \mathbf{P} \\ \frac{\partial (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K})^T \mathbf{P} (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K})}{\partial (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K})} &= 2\mathbf{P} (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}) \\ \frac{\partial (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K})}{\partial \mathbf{K}} &= -\mathbf{B}^T \\ 2\mathbf{R} \mathbf{K} &= -2\mathbf{B}^T \mathbf{P} (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}) \end{aligned}$$

Se procede minimizando a la Ec. (10-8) respecto a \mathbf{K} , derivando miembro a miembro, considerando las reglas (10-9). Dada una matriz \mathbf{M} y dos vectores uno \mathbf{x} y otro \mathbf{y} se verifica

$$\frac{\partial (\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{y})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{y} ; \quad \frac{\partial (\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{M}^T \cdot \mathbf{x} ; \quad \frac{\partial (\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{M} \cdot \mathbf{x}, \quad (10-9)$$

pero la tercera propiedad sólo es válida si \mathbf{M} es simétrica. Además, la regla de la cadena en operaciones con matrices es

$$\frac{\partial (\mathbf{F}_{(x)}^T \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{F}_{(x)})}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{F}_{(x)}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{F}_{(x)}^T \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{F}_{(x)}}{\partial \mathbf{F}_{(x)}}. \quad (10-10)$$

Para minimizar a la expresión de la Ec. (10-8), se deriva respecto a \mathbf{K} , se iguala a cero y se despeja \mathbf{K} en el extremo. Para demostrar que es un mínimo, se hace la derivada segunda de la Ec. (10-8) respecto a \mathbf{K} , que deberá ser positiva.

Entonces, derivando respecto a \mathbf{K} a la Ec. (10-8), se tiene

$$\frac{\partial(Q + K^T R K)}{\partial K} = \frac{\partial(-(A - BK)^T P (A - BK) + P)}{\partial K} \quad (10-11)$$

se tiene así, la derivada primera respecto de K de la (10-8)

$$2RK = B^T \cdot 2P(A - BK).$$

La derivada segunda será

$$\frac{\partial(2RK)}{\partial K} = \frac{\partial(B^T \cdot 2P(A - BK))}{\partial K}$$

$$2R^T + 2(B^T P B)^T > 0,$$

cuyo resultado es una matriz definida positiva. Por lo tanto, el extremo en cuestión es un mínimo.

Operando para despejar K de la derivada primera,

$$RK = B^T P A - B^T P B K,$$

es decir

$$RK + B^T P B K = B^T P A$$

y de aquí

$$K = (R + B^T P B)^{-1} B^T P A. \quad (10-12)$$

Reemplazando el valor de K óptimo encontrado en la Ec. (10-8), se llega a la Ecuación de Riccati de estado estacionario en tiempo discreto. Para ello, se reemplaza entonces la (10-12) en la (10-8). Entonces, operando primero a la Ec. (10-8),

$$Q + A^T P A + K^T R K - A^T P B K - (B K)^T P A + (B K)^T P B K = P, \quad (10-13)$$

donde el lado derecho y los primeros dos términos del lado izquierdo no dependen de K, pero sí los términos desde el tercero hasta el sexto.

Reemplazando K de la Ec. (10-12) en el tercer término, se tiene

$$\begin{aligned} K^T R K &= \left((R + B^T P B)^{-1} B^T P A \right)^T R (R + B^T P B)^{-1} B^T P A \\ &= (B^T P A)^T \left((R + B^T P B)^{-1} \right)^T R (R + B^T P B)^{-1} B^T P A. \end{aligned}$$

Haciendo lo mismo con el cuarto término,

$$A^T P B K = (B^T P A)^T (R + B^T P B)^{-1} B^T P A.$$

Con el quinto,

$$\begin{aligned} (B K)^T P A &= \left(B (R + B^T P B)^{-1} B^T P A \right)^T P A = (B^T P A)^T \left(B (R + B^T P B)^{-1} \right)^T P A \\ &= (B^T P A)^T \left(B (R + B^T P B)^{-1} \right)^T P A \\ &= (B^T P A)^T \left((R + B^T P B)^{-1} \right)^T B^T P A \end{aligned}$$

y con el sexto término, se tiene

$$\begin{aligned}
(BK)^T PBK &= \left(B(R + B^T PB)^{-1} B^T PA \right)^T PB(R + B^T PB)^{-1} B^T PA \\
&= (PA)^T \left(B(R + B^T PB)^{-1} B^T \right)^T PB(R + B^T PB)^{-1} B^T PA \\
&= (B^T PA)^T \left(B(R + B^T PB)^{-1} \right)^T PB(R + B^T PB)^{-1} B^T PA \\
&= (B^T PA)^T \left((R + B^T PB)^{-1} \right)^T B^T PB(R + B^T PB)^{-1} B^T PA.
\end{aligned}$$

Nótese que todos los términos se expresaron como una forma cuadrática de $B^T PA$, por lo tanto, se puede hacer la suma de los términos y agruparlos reemplazándolos en la Ec. (10-13), entonces operando se tiene,

$$\begin{aligned}
P &= Q + A^T PA + (B^T PA)^T \left(\left((R + B^T PB)^{-1} \right)^T R(R + B^T PB)^{-1} - (R + B^T PB)^{-1} - \left(B(R + B^T PB)^{-1} \right)^T + \right. \\
&\quad \left. + \left((R + B^T PB)^{-1} \right)^T B^T PB(R + B^T PB)^{-1} \right) B^T PA
\end{aligned}$$

que operando con el primer y cuarto término dentro del paréntesis, para agrupar como forma cuadrática, se tiene

$$\left((R + B^T PB)^{-1} \right)^T (B^T PB + R) (R + B^T PB)^{-1} - (R + B^T PB)^{-1} - \left((R + B^T PB)^{-1} \right)^T,$$

y ahora se puede simplificar ya que las inversas existen

$$\left((R + B^T PB)^{-1} \right)^T - (R + B^T PB)^{-1} - \left((R + B^T PB)^{-1} \right)^T = -(R + B^T PB)^{-1},$$

que será el término medio de la forma cuadrática en el vector $B^T PA$, finalmente, la Ec. (10-13) queda

$$P = Q + A^T PA - A^T PB(R + B^T PB)^{-1} B^T PA. \quad (10-14)$$

La solución de la Ecuación matricial de Riccati se encuentra numéricamente [5], teniendo como dato los valores numéricos de A, B, R y Q.

Solución de la Ecuación de Riccati en tiempo discreto

La ecuación puede escribirse como

$$P = Q + A^T P \left[I - B(I + R^{-1} B^T PB)^{-1} R^{-1} B^T P \right] A. \quad (10-15)$$

Nótese que para sacar de la inversa a R, se premultiplica por R^{-1} y se posmutiplica por R a $B^T PB$ para mantener la igualdad.

Se va a emplear el **lema** de inversión de matrices

$$M_1^{-1} - M_1^{-1} M_2 (I + M_3 M_1^{-1} M_2)^{-1} M_3 M_1 = (M_1 + M_2 M_3)^{-1} \quad (10-16)$$

aplicado al corchete de la (10-15) mediante la asignación de $M_1=I$, $M_2=B$ y $M_3=R^{-1} B^T P$, se tiene

$$\left[I - B(I + R^{-1} B^T PB)^{-1} R^{-1} B^T P \right] = (I + B R^{-1} B^T P)^{-1} \quad (10-17)$$

se obtiene una igualdad que reduce al corchete completo de la Ec (10-15). Por lo tanto, la Ec (10-15) se escribe como

$$P = Q + A^T P (I + B R^{-1} B^T P)^{-1} A \quad (10-18)$$

donde cambiando a I por PP^{-1} cuando P es invertible, y sacando dentro del paréntesis a P se tiene

$$P = Q + A^T P (PP^{-1} + PP^{-1} B R^{-1} B^T P)^{-1} A = Q + A^T P [P(P^{-1} + P^{-1} B R^{-1} B^T P)]^{-1} A \quad (10-19)$$

donde el término $BR^{-1}B^TP$ queda premultiplicado por P^{-1} lo que mantiene la cantidad $BR^{-1}B^T$, y distribuyendo la inversa queda PP^{-1} , por lo que resulta

$$P = Q + A^T (P^{-1} + B R^{-1} B^T)^{-1} A. \quad (10-20)$$

Para el diseño del controlador, debe resolverse la Ecuación de Riccati en P . Para ello, se procede expresar el producto de tres factores matriciales de manera que la matriz de ponderación no involucre a P y así pueda despejarse. Por lo tanto, tratando de expandir, premultiplicando por A^{-T} , luego por el paréntesis y luego por P , se tiene

$$0 = A^{-T}Q - A^{-T}P + PBR^{-1}B^TA^{-T}Q + PA - PBR^{-1}B^TA^{-T}P. \quad (10-21)$$

y que puede escribirse como

$$\begin{bmatrix} P & -I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A + BR^{-1}B^TA^{-T}Q & -BR^{-1}B^TA^{-T} \\ -A^{-T}Q & A^{-T} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I \\ P \end{bmatrix} = 0. \quad (10-22)$$

Aquí se tiene lo que se buscaba, una matriz de coeficientes que está multiplicada por las matrices particionadas que tiene la incógnita P .

Denominando a

$$H = \begin{bmatrix} A + BR^{-1}B^TA^{-T}Q & -BR^{-1}B^TA^{-T} \\ -A^{-T}Q & A^{-T} \end{bmatrix} \quad (10-23)$$

Como el Hamiltoniano, que es de orden $2n \times 2n$. Para resolverlo, se premultiplica a (10-22) por una matriz M invertible, y se posmultiplica por M . Se tiene así

$$\begin{bmatrix} M^{-1}P & -M^{-1} \end{bmatrix} \cdot H \cdot \begin{bmatrix} M \\ PM \end{bmatrix} = 0. \quad (10-24)$$

Mediante descomposición espectral con n autovalores y sus n autovectores estables, se pueden encontrar matrices M y P tal que

$$H \cdot \begin{bmatrix} M \\ PM \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M \\ PM \end{bmatrix} \cdot \Lambda, \quad (10-25)$$

se logra que

$$\begin{bmatrix} M^{-1}P & -M^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M \\ PM \end{bmatrix} \cdot \Lambda = 0. \quad (10-26)$$

Considerando los n autovectores v_i asociados a los autovalores de H que estén dentro del círculo unitario. Conociendo que

$$Hv_i = \lambda_i v_i \quad (10-27)$$

es decir, para los n autovalores estables se tiene la descomposición espectral de la parte estable de H como

$$\mathbf{H} \cdot [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_n] = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_n] \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}. \quad (10-28)$$

Ahora se tienen las matrices buscadas en la Ec (10-25), por lo que se igualan las matrices del lado derecho como

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}. \quad (10-29)$$

premultiplicada por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{P} \cdot \mathbf{M} \end{bmatrix} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_n], \quad (10-30)$$

de donde se obtiene la matriz \mathbf{P} simplemente de la matriz inferior posmultiplicando por la inversa de \mathbf{M} como

$$\mathbf{P} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{M}^{-1}. \quad (10-31)$$

que es simétrica y definida positiva. Así concluye el cálculo del controlador óptimo lineal cuadrático en tiempo discreto de estado estacionario.

Cuando \mathbf{A} no tiene inversa, el Hamiltoniano también puede definirse como

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T \\ 0 & \mathbf{A}^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ -\mathbf{Q} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (10-32)$$

que es de orden $2n \times 2n$, ya que se verifica la igualdad

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T \\ 0 & \mathbf{A}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{A}^{-T}\mathbf{Q} & -\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{A}^{-T} \\ -\mathbf{A}^{-T}\mathbf{Q} & \mathbf{A}^{-T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ -\mathbf{Q} & \mathbf{I} \end{bmatrix}. \quad (10-33)$$

El funcional de costo se puede evaluar, usando las igualdades de la Ec. (10-5) y la Ec. (10-6), se llega a

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}_k^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^T \mathbf{R} \mathbf{u}_k = - \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}_{k+1}^T \mathbf{P} \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k^T \mathbf{P} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_0^T \mathbf{P} \mathbf{x}_0. \quad (10-34)$$

10.3. Ejemplo: LQR con verificación en sistema no lineal

Para el ejemplo propuesto en la Sección anterior, se pretende realizar el diseño del controlador lineal en tiempo discreto. Para ello, se utiliza la función DLQR de Octave. Verificar los resultados con las igualdades $J_{\min} = \mathbf{x}_{(0)}^T \mathbf{P} \mathbf{x}_{(0)}$, y la implementación de la Ec. (10-4). En la Tabla 10-1 está el código que implementa un controlador diseñado en el dominio del tiempo discreto mediante la metodología descrita, donde se han agregado los conceptos de diseño por ubicación de polos y la verificación del controlador con el modelo no lineal.

```

clc;clear all;
KMAX=500;m=.1;Fricc=0.1; long=0.6;g=9.8;M=.5;
TamanioFuente=10;Ts=0.01;
%Condiciones iniciales
alfa(1)=.1; color='r';colorc='r';
alfa(1)=.5; color='g';colorc='g';
alfa(1)=.8; color='b';colorc='b';
%Versión linealizada en el equilibrio inestable. Sontag Pp 104.
% estado=[p(i); p_p(i); alfa(i); omega(i)]
Mat_Ac=[0 1 0 0;0 -Fricc/M -m*g/M 0; 0 0 0 1; 0 Fricc/(long*M) g*(m+M)/(long*M) 0];
Mat_Bc=[0; 1/M; 0; -1/(long*M)];
I=eye(4);
H=[0;0;0;0];d_tao=Ts/100;tao=0;
for hh=1:100
    dH=expm(Mat_Ac*tao)*Mat_Bc;
    H=H+dH*d_tao;
    tao=tao+d_tao;
end
Mat_B=H;
Mat_A=expm(Mat_Ac*Ts);
Mat_M=[Mat_B Mat_A*Mat_B Mat_A^2*Mat_B Mat_A^3*Mat_B];%Matriz Controlabilidad
rango=rank(Mat_M);
%Cálculo del LQR en Tiempo discreto
Q=1e2*eye(4);R=1;
t=0; x=[0;0;alfa(1);0];
p(1)=x(1); p_p(1)=x(2); alfa(1)=x(3); omega(1)=x(4);
%Contrucción del Hamiltoniano para el cálculo del controlador
H=[Mat_A+Mat_B*inv(R)*Mat_B'*inv(Mat_A)*Q -Mat_B*inv(R)*Mat_B'*inv(Mat_A') ; -inv(Mat_A')*Q
inv(Mat_A')];
%O también
%H=inv([eye(4) Mat_B*inv(R)*Mat_B'; zeros(4) Mat_A'])*[Mat_A zeros(4);-Q eye(4)]
[V,D]=eig(H);MX1X2=[];
for ii=1:8
    if abs(D(ii,ii))<1
        MX1X2=[MX1X2 V(:,ii)];
    end
end
MX1=MX1X2(1:4,:); MX2=MX1X2(5:8,:);
P=real(MX2*inv(MX1)); % [K1,P,E]=dlqr(Mat_A,Mat_B,Q,R);
K=inv(R+Mat_B'*P*Mat_B)*Mat_B'*P*Mat_A;
Jmin=x'*P*x;J=0;V_L=x'*P*x;
for ki=1:KMAX
    t=[t ki];
    u(ki)=-K*x;
    J=[J J(ki)+x'*Q*x+u(ki)'*R*u(ki)];
    x=Mat_A*x+Mat_B*u(ki);
    V_L=[V_L x'*P*x];
    p(ki+1)=x(1);
    p_p(ki+1)=x(2);
    alfa(ki+1)=x(3);
    omega(ki+1)=x(4);
end
u(ki+1)=-K*x;t=t+Ts;
figure(1);hold on;
subplot(3,2,1);plot(t,omega,color); subplot(3,2,2);plot(t,alfa,color);
subplot(3,2,3); plot(t,p,color); subplot(3,2,4);plot(t,p_p,color);
subplot(3,1,3);plot(t,u,color);
figure(2);hold on;
subplot(2,2,1);plot(alfa,omega,color); subplot(2,2,2);plot(p,p_p,color);
subplot(2,2,3);plot(t,J,color);grid on;title('Modelo
lineal','FontSize',TamanioFuente);xlabel('Tiempo en
Seg.','FontSize',TamanioFuente);ylabel('Funcionales J y V','FontSize',TamanioFuente);hold
on;
plot(t,Jmin*ones(size(J)),color); plot(t,V_L,color);
%Verificación de la solución con el modelo no lineal en tiempo continuo.
T=t(ki+1); x=[0;0;alfa(1);0];
p=x(1); p_p=x(2); alfa=x(3); omega=x(4); tita_pp(1)=0;h=Ts/20; u=[];i=1;Jn=0;V_NL=x'*P*x;
TEuler=h;Vh=Ts/TEuler;
for ki=1:KMAX
    u1(ki)=-K*x;
    for kii=1:Vh
        u(i)=u1(ki);
        p_pp=(1/(M+m))*(u(i)-m*long*tita_pp*cos(alfa(i))+m*long*omega(i)^2*sin(alfa(i))-
Fricc*p_p(i));
        tita_pp=(1/long)*(g*sin(alfa(i))-p_pp*cos(alfa(i)));
    end
end

```

```

p_p(i+1)=p_p(i)+h*p_pp;
p(i+1)=p(i)+h*p_p(i);
omega(i+1)=omega(i)+h*tita_pp;
alfa(i+1)=alfa(i)+h*omega(i);
x=[p(i); p_p(i); alfa(i); omega(i)];
V_NL=[V_NL x'*P*x];
Jn=[Jn Jn(i)+x'*Q*x+u(i)'*R*u(i)];
i=i+1;
end
end
u(i)=-K*x;t=0:h:T;
figure(1);hold on;
subplot(3,2,1);plot(t,alfa,color);grid on;title('\phi_t','FontSize',TamanoFuente);hold on;
subplot(3,2,2);plot(t,omega,color);grid on;
title('$\dot{\phi}_t$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', TamanoFuente);hold on;
subplot(3,2,3); plot(t,p,color);grid on;title('\delta_t','FontSize',TamanoFuente);hold on;
subplot(3,2,4);plot(t,p_p,color);grid
on;title('$\dot{\delta}_t$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', TamanoFuente);hold on;
subplot(3,1,3);plot(t,u,color);grid on;title('Acción de
control', 'FontSize', TamanoFuente);xlabel('Tiempo en Seg.', 'FontSize', TamanoFuente);hold
on;
figure(2);hold on;
subplot(2,2,1);plot(alfa,omega,color);grid on;
xlabel('\phi_t', 'FontSize', TamanoFuente);
ylabel('$\dot{\phi}_t$', 'Interpreter', 'latex', 'Rotation', 0, 'FontSize', TamanoFuente);hold
on;
subplot(2,2,2);plot(p,p_p,color);grid on;xlabel('Posición
carro', 'FontSize', TamanoFuente);hold on;
ylabel('$\dot{\delta}_t$', 'Interpreter', 'latex', 'Rotation', 0, 'FontSize', TamanoFuente);hold
on;
xlabel('\delta_t', 'FontSize', TamanoFuente);
subplot(2,2,4);semilogy(t,Jn,colorc);grid on;title('Modelo no
lineal', 'FontSize', TamanoFuente);xlabel('Tiempo en
Seg.', 'FontSize', TamanoFuente);ylabel('Funcionales J y V', 'FontSize', TamanoFuente);hold
on;
semilogy(t,Jmin*ones(size(Jn)),colorc);semilogy(t,V_NL,colorc);

```

Tabla 10-1. Código para Octave control de Péndulo invertido mediante Asignación de polos o DLQR.

Los resultados se muestran en las figuras Fig. 10-1 y Fig. 10-2. En la Fig. 10-1 se muestra la evolución temporal de las variables de estado y de la acción de control. Están superpuestas las correspondientes al modelo lineal y al modelo no lineal, en línea de puntos y continua, respectivamente.

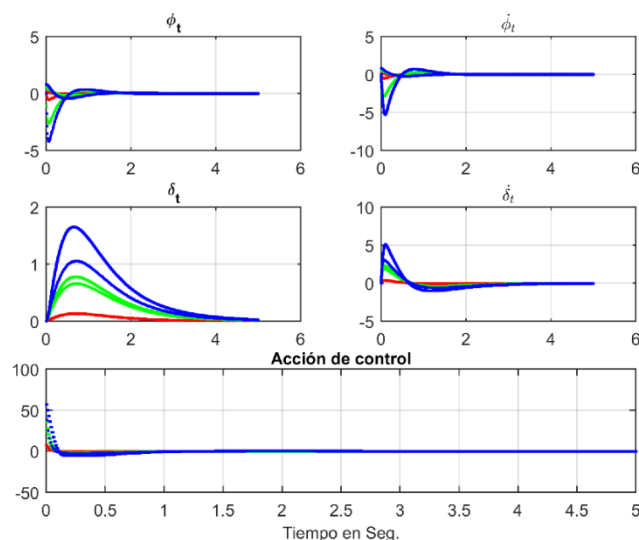


Fig. 10-1. Evolución temporal de las variables del péndulo invertido, la respuesta del modelo lineal y del no lineal están superpuestas.

En la Fig. 10-2 se muestra el plano de fase de las variables de estado posición y ángulo, donde se observa la desviación que existe cuando se considera el modelo no lineal. En la misma figura Fig. 10-2, al pie, están las gráficas de los costos acumulados en el tiempo de evolución, que es grande comparado a la dinámica del sistema debido a la suposición de estado estacionario, mostrado en la Ec. (10-4). Nótese que cuando se considera la acumulación del costo con el modelo no lineal, el error es muy grande, siendo que para el caso lineal el error entre la Ec. (10-4) y la Ec. (10-34) es despreciable. El mismo efecto se aprecia entre la función de Liapunov y el funcional de costos. Para el sistema lineal coinciden en $V_0=J_\infty$, pero cuando se observa el resultado en el caso no lineal, el costo es notablemente mayor.

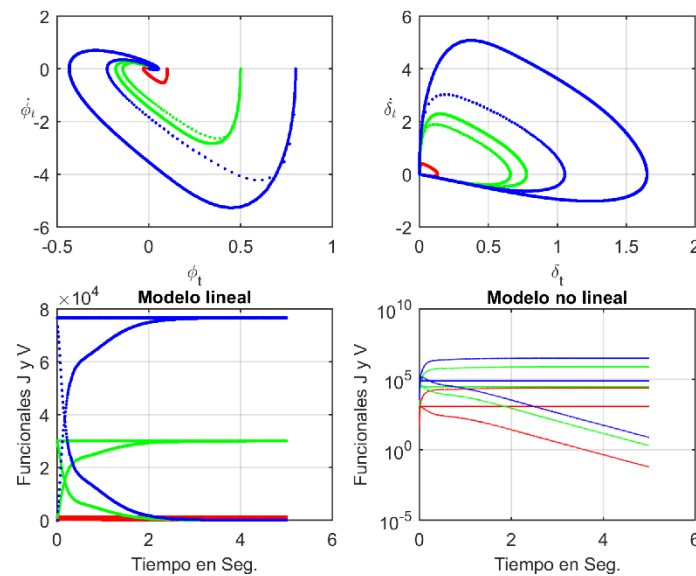


Fig. 10-2. Plano de fase y evolución del funcional acumulación de costo y de la función Liapunov, para el modelo lineal y el modelo no lineal del péndulo invertido.

10.4. Ejemplo: DLQR y observador DLQR con verificación en sistema no lineal

Se muestra el resultado de aplicar un controlador con observador calculado mediante la metodología DLQR, a un modelo no lineal, que es el péndulo invertido, con referencia distinta de cero y un integrador del error en tiempo discreto. La variable que se eligió para valor final distinto de cero es la posición del carro, p_k . El hecho de incorporar un integrador, se convierte en un problema cuando, luego del transitorio, se llega al valor deseado. Permaneciendo allí, el error no es exactamente nulo precisamente cuando se controla al sistema no lineal con el controlador lineal, por lo que conviene colocar un saturador en el integrador, de un valor adecuado. Aunque aquí no se empleó, éste valor debe estar en concordancia con el valor deseado, y conviene realizar simulaciones para determinar el comportamiento admisible. Nótese que las condiciones iniciales son determinantes para el correcto funcionamiento del controlador más observador donde interfiere el valor deseado de la posición. Aquí se ha medido el desplazamiento y el ángulo, por lo que es un sistema de dos salidas y requerirá una referencia de valores deseados con dos componentes, en la Tabla 10-2 se detalla el código para Octave. Las evoluciones de las variables están en las figuras Fig. 10-3 y Fig. 10-4. Nótese que al no tener la exigencia que las variables se hagan nulas, la función Liapunov y el funcional de desempeño no coinciden como en caso que se

estudió en el desarrollo analítico.

```

clc;clear all;
m=.1;Fricc=0.1; long=0.6;g=9.8;M=.5;
%TIEMPOS: de muestreo, de simulación, de Euler y su integración
Ts=0.01;KMAX=2000-1;Veces_Euler=100;h=Ts/Veces_Euler;t_d=(0:KMAX)*Ts;
TamañoFuente=10;
ref1=1;ref2=0;
%Condiciones iniciales
alfa(1)=.1; color='-r';colorc='.-r'; color='r';
% alfa(1)=.5; color='-b';colorc='.-b'; color='b';
% alfa(1)=1.2987; color='-k';colorc='.-k'; color='k';
%Versión linealizada en el equilibrio inestable. Sontag Pp 104.
% estado=[p(i); p_p(i); alfa(i); omega(i)]
Mat_Ac=[0 1 0 0;0 -Fricc/M -m*g/M 0; 0 0 0 1; 0 Fricc/(long*M) g*(m+M)/(long*M) 0];
Mat_Bc=[0; 1/M; 0; -1/(long*M)];
Mat_C=[1 0 0 0;0 0 1 0]; I=eye(4);
I=eye(4);
H=[0;0;0;0];d_tao=Ts/100;tao=0;
for hh=1:100
    dH=expm(Mat_Ac*tao)*Mat_Bc*d_tao;
    H=H+dH;
    tao=tao+d_tao;
end
Mat_B=H;
Mat_A=expm(Mat_Ac*Ts);
Mat_Aa=[Mat_A,zeros(4,2);-Mat_C*Mat_A, eye(2)];
Mat_Ba=[Mat_B;-Mat_C*Mat_B];
Mat_Ma=[Mat_Ba Mat_Aa*Mat_Ba Mat_Aa^2*Mat_Ba Mat_Aa^3*Mat_Ba Mat_Aa^4*Mat_Ba];%Matriz
Controlabilidad
rango=rank(Mat_Ma);
Qc=diag([1e0 1e0 1e4 1e0 1e-4 1e-4]); R=1; %Ts=0.01;
% Qc=diag([1e0 1e0 1e1 1e0 1e-4 1e-4]); R=1; %Ts=0.1;
%Construcción del Hamiltoniano para el cálculo del controlador
H=inv([eye(6) Mat_Ba*inv(R)*Mat_Ba'; zeros(6) Mat_Aa'])*[Mat_Aa zeros(6);-Qc eye(6)];
[V,D]=eig(H);MX1X2=[];
for ii=1:12
    if abs(D(ii,ii))<1
        MX1X2=[MX1X2 V(:,ii)];
    end
end
MX1=MX1X2(1:6,:); MX2=MX1X2(7:12,:);
Pc=real(MX2*inv(MX1)); % [K1,P,E]=dlqr(Mat_A,Mat_B,Q,R); %En Octave
Ka=inv(R+Mat_Ba'*Pc*Mat_Ba)*Mat_Ba'*Pc*Mat_Aa;
K=Ka(1:4);KI=-Ka(5);
aut_controlador=abs(eig(Mat_Aa-Mat_Ba*Ka));
%Cálculo del Observador de estados
Mat_Adual=Mat_A';Mat_Bdual=Mat_C';Mat_Cdual=Mat_B';
Mat_Qobs=[Mat_C;Mat_C*Mat_A;Mat_C*Mat_A^2;Mat_C*Mat_A^3];
rango_matriz_obs=rank(Mat_Qobs);
Qobs=diag([1 1 1e1 1]);Ro=diag([1e-2 1e-1]);
%Construcción del Hamiltoniano para el cálculo del Observador
Ho=inv([eye(4) Mat_Bdual*inv(Ro)*Mat_Bdual'; zeros(4) Mat_Adual'])*[Mat_Adual zeros(4);-Qobs eye(4)];
[Vo,Do]=eig(Ho);MX1X2=[];
for ii=1:8
    if abs(Do(ii,ii))<1
        MX1X2=[MX1X2 Vo(:,ii)];
    end
end
MX1o=MX1X2(1:4,:); MX2o=MX1X2(5:8,:);
Po=real(MX2o*inv(MX1o)); % [K1o,Po,Eo]=dlqr(Mat_Adual,Mat_Bdual,Qobs,Ro);
Kobs=(inv(Ro+Mat_Bdual'*Po*Mat_Bdual)*Mat_Bdual'*Po*Mat_Adual)';
p_observador=abs(eig(Mat_A-Kobs*Mat_C)); %Verifica polos de observabilidad
t=0; x=[0;0;alfa(1);0];x_hat=[0;0;0;0];
p(1)=x(1); p_p(1)=x(2); alfa(1)=x(3); omega(1)=x(4);ve1(1)=0;ve2(1)=0;
p_(1)=0;p_p_(1)=0;alfa_(1)=0;omega_(1)=0; u_k(1)=0;
V_L=[x;0;0]'*Pc*[x;0;0];x_hat=[0;0;0;0];J1=0;Jmin_L=V_L;%e1=0;e2=0;
for ki=2:KMAX
    t=[t (ki-1)*Ts];
    Y=Mat_C*x;%Se mide ACÁ
    e1=ref1-Y_(1);e2=ref2-Y_(2);
    V_L=[V_L [x;ve1(ki-1);ve2(ki-1)]'*Pc*[x;ve1(ki-1);ve2(ki-1)]];
    ve1(ki)=ve1(ki-1)+e1;ve2(ki)=ve2(ki-1)+e2;
end

```

```

u=-Ka*[x_hat;vel(ki);ve2(ki)];%Estado ampliado
x=Mat_A*x+Mat_B*u;
Jl=[Jl Jl(ki-1)+[x;vel(ki);ve2(ki)]'*Qc*[x;vel(ki);ve2(ki)]+u'*R*u];
y_hat=Mat_C*x_hat;
x_hat=Mat_A*x_hat+Mat_B*u+Kobs*(Y_-y_hat);%Se actualiza acá
p(ki)=x(1);
p_p(ki)=x(2);
alfa(ki)=x(3);
omega(ki)=x(4); %Valores Observados
p_(ki)=x(1);
p_p_(ki)=x(2);
alfa_(ki)=x(3);
omega_(ki)=x(4);
u_k(ki)=u;
end
Jl=[Jl Jl(ki-1)+[x;vel(ki);ve2(ki)]'*Qc*[x;vel(ki);ve2(ki)]+u'*R*u];
V_L=[V_L [x;vel(ki-1);ve2(ki-1)]'*Pc*[x;vel(ki-1);ve2(ki-1)]];u=u_k;
figure(1);hold on;
subplot(3,2,1);plot(t,omega,color); plot(t,omega_,color_);
subplot(3,2,2);plot(t,alfa,color); plot(t,alfa_,color_);
subplot(3,2,3); plot(t,p,color); plot(t,p_,color_);
subplot(3,2,4);plot(t,p_p,color); plot(t,p_p_,color_);
subplot(3,1,3);plot(t,u,color);
figure(2);hold on;
subplot(2,2,1);plot(alfa,omega,color); subplot(2,2,2);plot(p,p_p,color);
subplot(2,2,3); semilogy(t_d,Jl,color);hold on; semilogy(t_d,Jmin_L*ones(size(Jl)),color);
semilogy(t_d,V_L,color);
%Verificación de la solución con el modelo no lineal en tiempo continuo.
T=t(ki);x=[0;0;alfa(1);0];
p=x(1); p_p=x(2); alfa=x(3); omega=x(4); tita_pp(1)=0;p_pp(1)=0;
u=[];
x_hat=[0;0;0;0];y=Mat_C*x;y_hat=0;vel(1)=0;ve2(1)=0;alfa_(1)=alfa(1);
Jn=0;V_NL=[x;0;0]'*Pc*[x;0;0];Jmin_NL=V_NL;i=1;
for ki=2:KMAX+1
    V_NL=[V_NL [x;vel(ki-1);ve2(ki-1)]'*Pc*[x;vel(ki-1);ve2(ki-1)]];
    Y=Mat_C*x;
    vel(ki)=vel(ki-1)+ref1-Y_(1);
    ve2(ki)=ve2(ki-1)+ref2-Y_(2);%No es necesario. Ya que no es Observable.
    ul(ki)=-Ka*[x_hat;vel(ki);ve2(ki)];
    for kii=1:Veces_Euler % Tiene relacion h con Ts
        u(i)=ul(ki);
        p_pp=(1/(M+m))*(u(i)-m*long*tita_pp*cos(alfa(i))+m*long*omega(i)^2*sin(alfa(i))-
Fricc*p_p(i));
        tita_pp=(1/long)*(g*sin(alfa(i))-p_pp*cos(alfa(i)));
        p_p(i+1)=p_p(i)+h*p_pp;
        p(i+1)=p(i)+h*p_p(i+1);
        omega(i+1)=omega(i)+h*tita_pp;
        alfa(i+1)=alfa(i)+h*omega(i+1);
        alfa_(i)=x_hat(3);
        i=i+1;
    end
    x=[p(i-1); p_p(i-1); alfa(i-1); omega(i-1)]; %Acá está x(k+1)
    x_hat=Mat_A*x_hat+Mat_B*ul(ki)+Kobs*(Y_-y_hat);
    y_hat=Mat_C*x_hat;
    Jn=[Jn Jn(ki-1)+[x;vel(ki);ve2(ki)]'*Qc*[x;vel(ki);ve2(ki)]+ul(ki)'*R*ul(ki)];
end
u(i)=ul(ki);t=(1:i)*h;
figure(1);hold on;
subplot(3,2,1);plot(t,alfa,color);grid on;title('\phi_t','FontSize',TamanoFuente);hold on;
subplot(3,2,2);plot(t,omega,color);grid on;
title('$\dot{\phi}_t$','Interpreter','latex','FontSize',TamanoFuente);hold on;
subplot(3,2,3); plot(t,p,color);grid on;title('\delta_t','FontSize',TamanoFuente);hold on;
subplot(3,2,4);plot(t,p_p,color);grid on;title('$\dot{\delta}_t$','Interpreter','latex','FontSize',TamanoFuente);hold on;
subplot(3,1,3);plot(t,u,color);grid on;title('Acción de control','FontSize',TamanoFuente);xlabel('Tiempo en Seg.','FontSize',TamanoFuente);hold on;
figure(2);hold on;
subplot(2,2,1);plot(alfa,omega,color);grid on;
xlabel('\phi_t','FontSize',TamanoFuente);
ylabel('$\dot{\phi}_t$','Interpreter','latex','Rotation',0,'FontSize',TamanoFuente);hold on;
subplot(2,2,2);plot(p,p_p,color);grid on;xlabel('Posición carro','FontSize',TamanoFuente);hold on;
ylabel('$\dot{\delta}_t$','Interpreter','latex','Rotation',0,'FontSize',TamanoFuente);hold on;
xlabel('\delta_t','FontSize',TamanoFuente);

```

```

subplot(2,2,3);
semilogy(t_d,Jl,color);hold on;%grid on;
semilogy(t_d,Jmin_L*ones(size(Jl)),color); semilogy(t_d,V_L,color);
title('Modelo lineal','FontSize',TamanoFuente);xlabel('Tiempo en
Seg.','FontSize',TamanoFuente);
ylabel('Funcionales J y V','FontSize',TamanoFuente);
set(gca,'fontSize',TamanoFuente);
subplot(2,2,4);
semilogy(t_d,Jn,colorc);grid on;title('Modelo no lineal','FontSize',TamanoFuente);
xlabel('Tiempo en Seg.','FontSize',TamanoFuente);ylabel('Funcionales J y
V','FontSize',TamanoFuente);hold on;
semilogy(t_d,Jmin_NL*ones(size(Jn)),colorc);
semilogy(t_d,V_NL,colorc);
set(gca,'fontSize',TamanoFuente);

```

Tabla 10-2. Código para Octave de control con observador del Péndulo invertido mediante metodología DLQR. Está agregada una referencia de posición en $p_K=1$ con condiciones iniciales .1, .5 y 1.2.

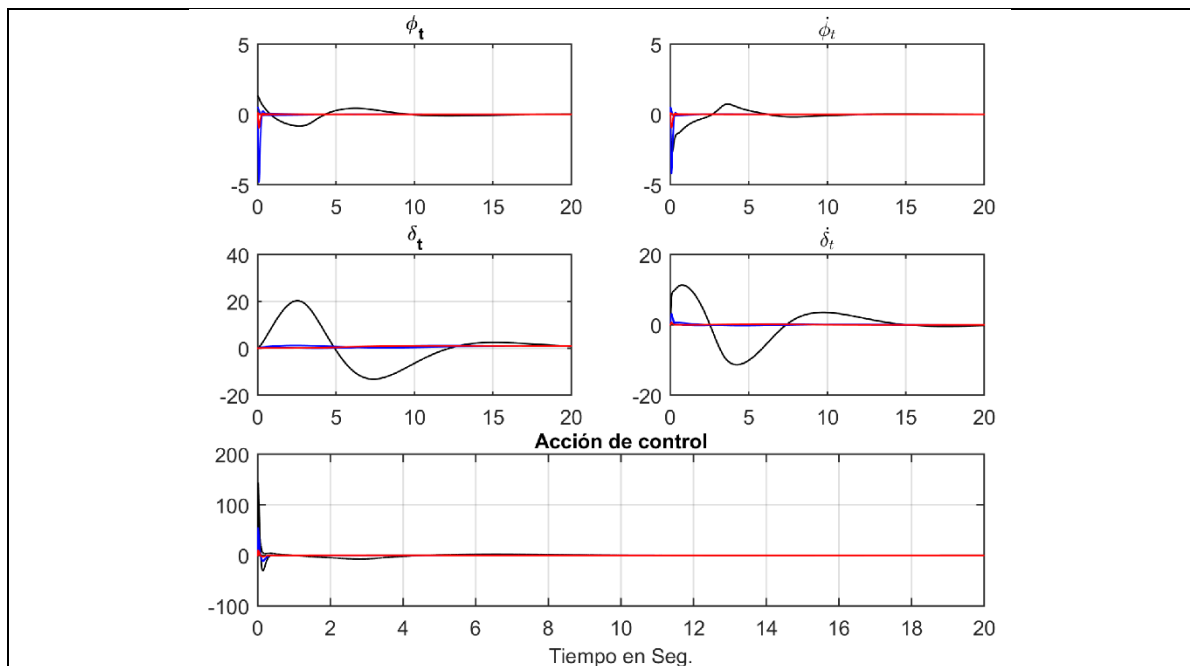
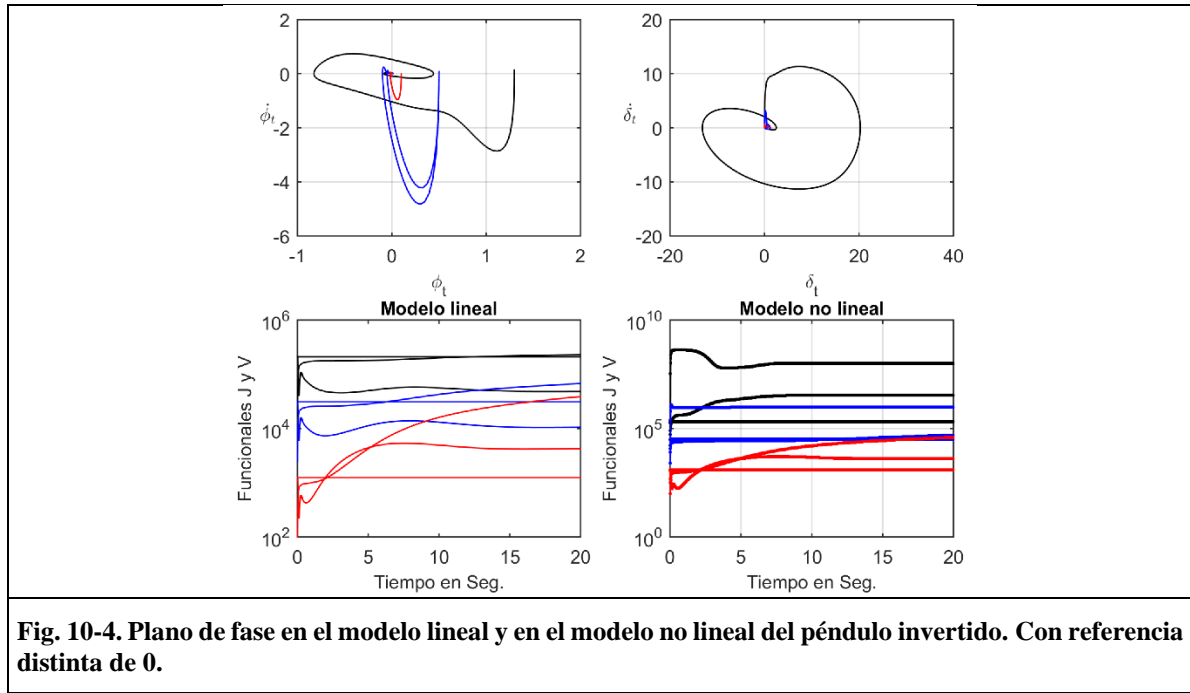


Fig. 10-3. Evolución de las variables de estado del modelo lineal y del modelo no lineal del péndulo invertido. Con referencia distinta de 1, con valores iniciales de .1, .5 y 1.2, con referencia de $y_{ref}=[1;0]$. S



10.5. Problema de control óptimo lineal de continuo a discreto

Se estudiará el problema de control óptimo que se plantea en el tiempo continuo pero se implementa en tiempo discreto.

10.5.1. Formulación del problema

Dado el sistema modelado mediante las Ecs. (10-35) y (10-36),

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (10-35)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (10-36)$$

se desea encontrar la ley de control u_t de la forma

$$u_t = u_{kT}, \quad t \in [kT, (k+1)T] \quad (10-37)$$

que minimice el funcional de costo definido por

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}_{t_f}^T \mathbf{S} \mathbf{x}_{t_f} + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (\mathbf{x}_t^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_t + \mathbf{u}_t^T \mathbf{R} \mathbf{u}_t) dt \quad (10-38)$$

con \mathbf{Q} simétrica y semidefinida positiva y \mathbf{R} simétrica y definida positiva.

Se supone que el sistema representado por las Ecs. (10-35) y (10-36) puede ser reemplazado por

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{(k+1)T} = \mathbf{A}_T \cdot \mathbf{x}_{kT} + \mathbf{B}_T \cdot \mathbf{u}_{kT} \\ \mathbf{y}_{kT} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}_{kT} \end{cases} \quad (10-39)$$

La solución general del sistema de la Ec. (10-35) $\forall t \in [t_0, t]$ es

$$x_t = e^{A(t-t_0)}x_{t_0} + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}Bu_s ds. \quad (10-40)$$

Si se expresa la solución en el intervalo $\forall t \in [kT, (k+1)T]$ y considerando que u_s en éste intervalo es constante según se expresa en la Ec. (10-37), se tiene que

$$x_t = e^{A(t-kT)}x_{kT} + \left(\int_{kT}^t e^{A(t-s)}B ds \right) u_{kT}. \quad (10-41)$$

Así, la solución $x_t \forall t \in [kT, (k+1)T]$ puede expresarse como

$$x_t = F_1 \cdot x_{kT} + F_2 \cdot u_{kT}, \quad (10-42)$$

donde

$$\begin{cases} F_1 = e^{A(t-kT)} \\ F_2 = \int_{kT}^t e^{A(t-s)}B ds. \end{cases} \quad (10-43)$$

Reemplazando la Ec. (10-42) y la Ec. (10-37) en la expresión del funcional de costo J de la Ec. (10-38)

$$J(x, u) = \frac{1}{2} x_{NT}^T S x_{NT} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{kT}^{(k+1)T} \left\{ (F_1 \cdot x_{kT} + F_2 \cdot u_{kT})^T Q (F_1 \cdot x_{kT} + F_2 \cdot u_{kT}) + u_{kT}^T R u_{kT} \right\} dt \quad (10-44)$$

Operando el término entre llaves, considerando que todas las cantidades son escalares, y que u y x son constantes en el intervalo de integración, se llega a la expresión de J de la forma

$$J(x, u) = \frac{1}{2} x_{NT}^T S x_{NT} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} x_k^T Q_1 x_k + 2x_k^T M_1 u_k + u_k^T R_1 u_k \quad (10-45)$$

donde

$$Q_1 = \int_{kT}^{(k+1)T} F_1^T Q F_1 dt \quad M_1 = \int_{kT}^{(k+1)T} F_1^T Q F_2 dt \quad R_1 = \int_{kT}^{(k+1)T} (F_2^T Q F_2 + R) dt.$$

Nótese que el funcional en tiempo continuo de la Ec. (10-38) no queda expresado como

$$J(x, u) = \frac{1}{2} x_N^T S x_N + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k, \quad (10-46)$$

sino que se agrega un término cruzado que involucra a x_{kT} y u_{kT} y se modifican Q y R .

Ejercicios sugeridos

Emplear el diseño mediante DLQR para plantear y resolver los ejemplos vistos, analizando desde qué condición inicial de ángulo distinto de cero puede controlarse. A saber:

- controlador con observador de estados siendo la matriz de salida definida como univariable $C=[1 \ 0 \ 0 \ 0]$
- controlador con observador siendo la matriz C definida como un sistema multivariable

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- controlador con referencia distinta de cero.
- controlador con referencia distinta de cero y observador de estados en tiempo discreto.

```
clear all;
Ts=0.01;m=.1;Fricc=0.1; long=0.6;g=9.8;M=.5;KMAX=2000;TEuler=0.001;
TamanioFuente=12;
%Condiciones iniciales
alfa(1)=.1; color='r';colorc='r';
% alfa(1)=.7; color='k';colorc='k';
alfa(1)=.9; color='b';colorc='k';
ref=1;
%Versión linealizada en el equilibrio inestable. Sontag Pp 104.
% estado=[p(i); p_p(i); alfa(i); omega(i)]
Mat_Ac=[0 1 0 0;0 -Fricc/M -m*g/M 0; 0 0 0 1; 0 Fricc/(long*M) g*(m+M)/(long*M) 0];
Mat_Bc=[0; 1/M; 0; -1/(long*M)];
Mat_C=[1 0 0 0; %Mido ángulo
        0 0 1 0]; %Mido desplazamiento. Dos salidas
I=eye(4);
H=[0;0;0;0];d_tao=Ts/100;tao=0;
for hh=1:100
    dH=expm(Mat_Ac*tao)*Mat_Bc*d_tao;
    H=H+dH;
    tao=tao+d_tao;
end
Mat_B=H;
Mat_A=expm(Mat_Ac*Ts);
Mat_M=[Mat_B Mat_A*Mat_B Mat_A^2*Mat_B Mat_A^3*Mat_B]; %Matriz de controlabilidad
rango=rank(Mat_M);
Q=diag([7 1 5 6]);R=1e6;
H=[Mat_A+Mat_B*inv(R)*Mat_B'*inv(Mat_A')*Q -Mat_B*inv(R)*Mat_B'*inv(Mat_A') ; -inv(Mat_A')*Q
  inv(Mat_A')];
%O también
%H=inv([eye(4) Mat_B*inv(R)*Mat_B'; zeros(4) Mat_A'])*[Mat_A zeros(4);-Q eye(4)]
[V,D]=eig(H);MX1X2=[];
for ii=1:8
    if abs(D(ii,ii))<1
        MX1X2=[MX1X2 V(:,ii)];
    end
end
MX1=MX1X2(1:4,:); MX2=MX1X2(5:8,:);
P=real(MX2*inv(MX1));
% [Kl,P,E]=dlqr(Mat_A,Mat_B,Q,R);
K=inv(R+Mat_B'*P*Mat_B)*Mat_B'*P*Mat_A;
%
% %Cálculo del controlador por asignación de polos
% auto_val=eig(Mat_A);
% c_ai=poly(auto_val);
% Mat_W=[c_ai(4) c_ai(3) c_ai(2) 1;c_ai(3) c_ai(2) 1 0; c_ai(2) 1 0 0; 1 0 0 0];
% Mat_T=Mat_M*Mat_W;
% A_controlable=inv(Mat_T)*Mat_A*Mat_T %Verificación de T
% %Ubicación de los polos de lazo cerrado en mui:
% mui(1)=0.997; mui(2)=0.998; mui(3)= conj(mui(2)); mui(4)=0.99;
% alfa_i=poly(mui);
% K=flipplr(alfa_i(2:5)-c_ai(2:5))*inv(Mat_T);
G=inv(Mat_C(1,:)*inv(eye(4)-Mat_A+Mat_B*K)*Mat_B);
abs(eig(Mat_A-Mat_B*K))
```

```

% OBSERVADOR
Mat_M_Obs=[Mat_C; (Mat_C*Mat_A); (Mat_C*Mat_A^2); (Mat_C*Mat_A^3)];
rank(Mat_M_Obs)
Mat_C_O=Mat_B';
Mat_A_O=Mat_A';
Mat_B_O=Mat_C';
Mat_M_D=Mat_M_Obs';
Qo=diag([1e6 1e6 1e1 1e1]); Ro=diag([1 100]);
H=[Mat_A_O+Mat_B_O*inv(Ro)*Mat_B_O'*inv(Mat_A_O')*Qo -Mat_B_O*inv(Ro)*Mat_B_O'*inv(Mat_A_O')
; -inv(Mat_A_O')*Qo inv(Mat_A_O')];
[V,D]=eig(H); MX1X2=[];
for ii=1:8
    if abs(D(ii,ii))<1
        MX1X2=[MX1X2 V(:,ii)];
    end
end
MX1=MX1X2(1:4,:); MX2=MX1X2(5:8,:);
P=real(MX2*inv(MX1)); % [Kl,P,E]=dlqr(Mat_A,Mat_B,Q,R);
Ko=(inv(Ro+Mat_B_O'*P*Mat_B_O)*Mat_B_O'*P*Mat_A_O)';
abs(eig(Mat_A-Ko*Mat_C))
t=0; x=[0;0;alfa(1);0];
p(1)=x(1); p_p(1)=x(2); alfa(1)=x(3); omega(1)=x(4); ve(1)=0;
u_k(1)=0; xang=[0;0;0;0];
% Jmin=x'*P*x; J=0; V_L=x'*P*x;
Jmin=x'*P*x;
J=0; V_L=x'*P*x;
for ki=1:KMAX
    t=[t ki*Ts];
    u(ki)=-K*xang+G*ref;
    ys=Mat_C*x; %Acá DEBE medirse y.
    J=[J J(ki)+x'*Q*x+u(ki)'*R*u(ki)];
    x=Mat_A*x+Mat_B*u(ki);
    V_L=[V_L x'*P*x];
    p(ki+1)=x(1);
    p_p(ki+1)=x(2);
    alfa(ki+1)=x(3);
    omega(ki+1)=x(4);
% u_k(ki)=u;
    xang=Mat_A*xang+Mat_B*u(ki)+Ko*(ys-Mat_C*xang); %Acá se usa y.
end
u=u_k; figure(1); hold on;
subplot(3,2,1); plot(t,alfa,color); grid on; title('\phi_t','FontSize',TamanioFuente); hold on;
subplot(3,2,2); plot(t,omega,color); grid on;
title('$\dot{\phi}_t$', 'Interpreter','latex','FontSize',TamanioFuente); hold on;
subplot(3,2,3); plot(t,p,color); grid on; title('\delta_t','FontSize',TamanioFuente); hold on;
subplot(3,2,4); plot(t,p_p,color); grid
on; title('$\dot{\delta}_t$', 'Interpreter','latex','FontSize',TamanioFuente); hold on;
subplot(3,1,3); plot(t,u,color); grid on; title('Acción de
control','FontSize',TamanioFuente); xlabel('Tiempo en Seg.','FontSize',TamanioFuente); hold
on;
figure(2); hold on;
subplot(2,2,1); plot(alfa,omega,color); grid on;
xlabel('\phi_t','FontSize',TamanioFuente);
ylabel('$\dot{\phi}_t$', 'Interpreter','latex','Rotation',0,'FontSize',TamanioFuente); hold
on;
subplot(2,2,2); plot(p,p_p,color); grid on; xlabel('Posición
carro','FontSize',TamanioFuente); hold on;
ylabel('$\dot{\delta}_t$', 'Interpreter','latex','Rotation',0,'FontSize',TamanioFuente); hold
on;
xlabel('\delta_t','FontSize',TamanioFuente);
figure(2); hold on;
subplot(2,2,1); plot(alfa,omega,color); grid
on; xlabel('Ángulo','FontSize',TamanioFuente); ylabel('Velocidad
angular','FontSize',TamanioFuente); hold on;
subplot(2,2,2); plot(p,p_p,color); grid on; xlabel('Posición
carro','FontSize',TamanioFuente); ylabel('Velocidad carro','FontSize',TamanioFuente); hold on;
subplot(2,2,3); plot(t,J,color); grid on; title('Modelo
lineal','FontSize',TamanioFuente); xlabel('Tiempo en
Seg.','FontSize',TamanioFuente); ylabel('Funcionales J y V','FontSize',TamanioFuente); hold
on;
plot(t,Jmin*ones(size(J)),color); plot(t,V_L,color);

%Verificación de la solución con el modelo no lineal en tiempo continuo.
T=t(ki); x=[0;0;alfa(1);0];
p=x(1); p_p=x(2); alfa=x(3); omega=x(4); tita_pp(1)=0; Vh=Ts/TEuler; h=TEuler;
u=[]; i=1;
u_k(1)=0; xang=[0;0;0;0]; Jn=0; V_NL=x'*P*x;

```

```

for ki=1:KMAX
    u1(ki)=-K*xang+G*ref;
    % u1(ki)=-K*x+G*ref; %Sin Observador
    ys=Mat_C*x;%Acá se mide la salida.
    for kii=1:Vh
        u(i)=u1(ki);
        p_pp=(1/(M+m))*(u(i)-m*long*tita_pp*cos(alfa(i))+m*long*omega(i)^2*sin(alfa(i))-
        Fricc*p_p(i));
        tita_pp=(1/long)*(g*sin(alfa(i))-p_pp*cos(alfa(i)));
        p_p(i+1)=p_p(i)+h*p_pp;
        p(i+1)=p(i)+h*p_p(i);
        omega(i+1)=omega(i)+h*tita_pp;
        alfa(i+1)=alfa(i)+h*omega(i);
        V_NL=[V_NL x'*P*x];
        Jn=[Jn Jn(i)+x'*Q*x+u(i)'*R*u(i)];
        i=i+1;
    end
    x=[p(i-1); p_p(i-1); alfa(i-1); omega(i-1)];
    xang=Mat_A*xang+Mat_B*u1(ki)+Ko*(ys-Mat_C*xang);%Acá se usa y.
end
t=0:h:KMAX*(Ts);u(i)=u1(ki);
figure(1);hold on;
subplot(3,2,1);plot(t,alfa,color);grid on;title('\phi_t','FontSize',TamanoFuente);hold on;
subplot(3,2,2);plot(t,omega,color);grid on;
title('$\dot{\phi}_t$','Interpreter','latex','FontSize',TamanoFuente);hold on;
subplot(3,2,3);plot(t,p,color);grid on;title('\delta_t','FontSize',TamanoFuente);hold on;
subplot(3,2,4);plot(t,p_p,color);grid on;
title('$\dot{\delta}_t$','Interpreter','latex','FontSize',TamanoFuente);hold on;
subplot(3,1,3);plot(t,u,color);grid on;title('Acción de
control','FontSize',TamanoFuente);xlabel('Tiempo en Seg.','FontSize',TamanoFuente);hold
on;
figure(2);hold on;
subplot(2,2,1);plot(alfa,omega,color);grid on;
xlabel('\phi_t','FontSize',TamanoFuente);
ylabel('$\dot{\phi}_t$','Interpreter','latex','Rotation',0,'FontSize',TamanoFuente);hold
on;
subplot(2,2,2);plot(p,p_p,color);grid on;xlabel('Posición
carro','FontSize',TamanoFuente);hold on;
ylabel('$\dot{\delta}_t$','Interpreter','latex','Rotation',0,'FontSize',TamanoFuente);hold
on;
xlabel('\delta_t','FontSize',TamanoFuente);
subplot(2,2,4);semilogy(t,Jn,colorc);grid on;title('Modelo no
lineal','FontSize',TamanoFuente);xlabel('Tiempo en
Seg.','FontSize',TamanoFuente);ylabel('Funcionales J y V','FontSize',TamanoFuente);hold
on;
semilogy(t,Jmin*ones(size(Jn)),colorc);semilogy(t,V_NL,colorc);

```

Tabla 10-3. Código para Octave de control con observador del Péndulo invertido mediante metodología DLQR con ganancia de prealimentación, lo que hace más difícil de estabilizar al sistema. Está agregada una referencia de posición en $p_K=1$ con condiciones iniciales .1, .7 y .9.

10.6. Referencias bibliográficas

- [1] Sauchelli, V. H. Sistemas de control no lineales. 1997. Universitas.
 - [2] Ogata, K. Modern Control Engineering. 1997. Prentice Hall.
 - [3] Ogata, K. Katsuhiko Ogata - Sistemas de Control en Tiempo Discreto 2a ed. Prentice Hall. 1996.
 - [4] Sontag. Mathematical control theory 1998. Pag 104. <http://www.sontaglab.org>.
 - [5] Laub, A. “A Schur method for solving algebraic Riccati equations”. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 24, no. 6, pp. 913-921, Dec 1979. doi: 10.1109/TAC.1979.1102178.
- <http://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?tp=&arnumber=1102178&isnumber=24175>.