

## 5. Diseño de control lineal en variables de estados en tiempo continuo

El diseño de controladores para procesos reales puede encararse de diversos modos, ya que dependiendo de las necesidades del usuario se definen los requerimientos del comportamiento del proceso. Cada metodología de diseño comienza con la fijación de un modelo del proceso, que puede definirse en el dominio del tiempo o en el dominio de la frecuencia. Aquí va a detallarse una metodología en el dominio del tiempo, siguiendo la representación de sistemas en variables de estados.

### 5.1. Diseño de controladores de estado lineales

Existen diversos esquemas de control, basados en la teoría de Entrada-Salida y en la de variables de estado. A continuación se muestran los esquemas más difundidos.

#### 5.1.1. Controlador en esquema Entrada-salida

Se realimenta el error de control, definido como  $e_t = y_d - y_t$ .

Los esquemas más difundidos son los del tipo Proporcional Integral Derivativo PID, con sus diversas variantes, por ejemplo, Modificado, con predictor, con anti-wind up, auto sintonía, etc.

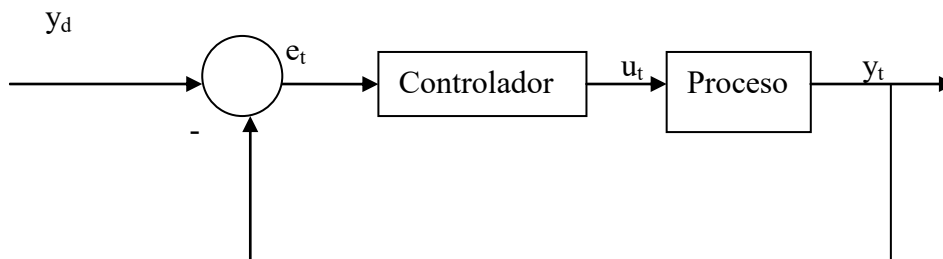


Fig. 5-1. Esquema de control en la representación de sistemas Entrada-Salida.

Nótese que en la Fig. 5-1 sólo se está midiendo  $y_t$  que es la variable de salida, quedando todas las demás variables fuera de las entradas directas del controlador. Frecuentemente, a igualdad de costo en los sensores, éstas variables intermedias se pueden medir con mayor exactitud.

#### 5.1.2. Controlador en esquema de Espacio de estados

Se realimenta el estado del proceso,  $\mathbf{x}(t)$ .

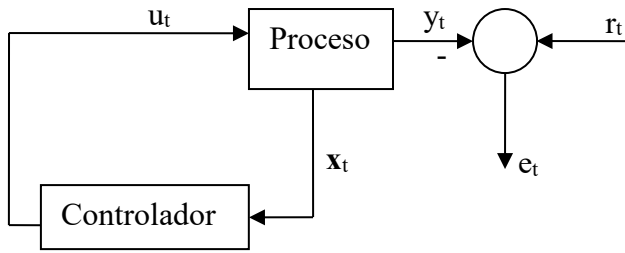


Fig. 5-2. Esquema de control basado en realimentación de estados.

En el esquema de la Fig. 5-2 se destaca la posibilidad de medir las variables convenientes del proceso, incluida la  $y_t$ . Para realizar el diseño del Controlador, se utiliza el concepto de Diseño de controladores en variables de estado.

## 5.2. Esquema básico del controlador lineal de estado

Dado el sistema lineal determinístico en tiempo continuo

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (5-1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (5-2)$$

se hace la regulación del sistema mediante un controlador lineal, del tipo

$$\mathbf{u}_t = -\mathbf{K} \cdot \mathbf{x}(t) \quad (5-3)$$

donde  $\mathbf{K}$  es la matriz del controlador. El esquema de control se muestra en la Fig. 5-3.

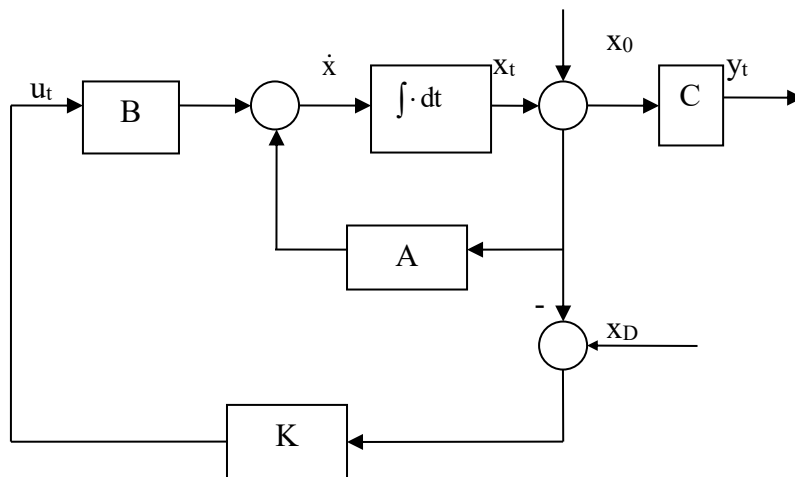


Fig. 5-3. Esquema de control en tiempo continuo.

La solución del sistema de lazo cerrado resulta, para  $x_D=0$ ,

$$\mathbf{x}_t = e^{(\mathbf{A}-\mathbf{BK})t} \mathbf{x}_0. \quad (5-4)$$

Para establecer el valor de la matriz  $\mathbf{K}$  del controlador, existen diversas metodologías. Nótese que  $x_D$  está corriendo el origen del sistema, lo que puede hacer que el modelo lineal no sea válido para el punto de operación en el que fue calculado. Por este motivo se hace nulo y luego se adecuará la dinámica de lazo cerrado para una referencia distinta de cero.

En el ámbito de diseño de controladores de estado lineales, las metodologías más difundidas son *Asignación de polos* y *Funcional de costo*.

No obstante, para lograr encontrar al controlador  $K$ , el sistema debe cumplir con la condición de Controlabilidad, que es una característica que puede calcularse antes que el controlador.

### 5.3. Controlabilidad

El concepto de controlabilidad establece que (5-1) es controlable si es posible generar una acción de control  $u_t$  para transferir al sistema desde cualquier condición inicial a cualquier condición final en un intervalo de tiempo finito. Si cada estado es controlable, entonces se dice que el sistema es completamente controlable.

Para establecer la condición de controlabilidad de un sistema, fue necesario introducir conceptos de álgebra matricial, como el Teorema de Cayley-Hamilton para el cálculo de la matriz exponencial  $e^{At}$ .

### 5.4. Condición de controlabilidad

Para deducir la condición de controlabilidad, se asumirá que el estado final será el origen a un tiempo  $t_1$ , y que  $t_0$  será 0. Aplicando ésta condición a la solución

$$x(t) = e^{At}x(t_0) + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds \quad (5-5)$$

se obtiene

$$x(0) = -\int_0^{t_1} e^{-As}Bu(s)ds. \quad (5-6)$$

Ahora se reemplazará a  $e^{-At}$  por su equivalente analítico empleando el Teorema de Cayley Hamilton, por lo tanto, se tiene que

$$e^{At} = \alpha_0(t)I + \alpha_1(t)A + \alpha_2(t)A^2 + \dots + \alpha_{n-1}(t)A^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t)A^k \quad (5-7)$$

que es útil para evaluar analíticamente a la función  $e^{At}$ .

Reemplazando entonces la igualdad (5-7) en la Ec. (5-6), se obtiene

$$x(0) = -\sum_{k=0}^{n-1} A^k B \int_0^{t_1} \alpha_k(s)u(s)ds \quad (5-8)$$

donde puede simplificarse la expresión si se calculan las integrales temporales, obteniéndose valores  $\beta_k$ , como

$$\int_0^{t_1} \alpha_k(s)u(s)ds = \beta_k. \quad (5-9)$$

Así, la Ec. (5-8) resulta en

$$x(0) = -\sum_{k=0}^{n-1} A^k B \beta_k. \quad (5-10)$$

Puede escribirse entonces, en forma de producto matricial de una matriz y un vector,

$$\mathbf{x}(0) = -[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \cdots \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \cdot \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} \quad (5-11)$$

donde se deduce que la Ec. (5-11) debe tener solución para cualquier  $\mathbf{x}(0)$ , siendo la incógnita los  $\beta_k$  que contienen a  $u_i$ . Por lo tanto, la matriz

$$[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \cdots \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = \mathbf{M} \quad (5-12)$$

debe tener rango  $n$ , y ser invertible para hallar éstos valores  $\beta_k$ . Ésta es la matriz de controlabilidad  $\mathbf{M}$ . Nótese que la prueba de controlabilidad *no requiere* resolver la ecuación diferencial del sistema, sino que se construye con las matrices de *Estado y de Entrada* del sistema (5-1).

### 5.5. Diseño mediante asignación de polos

El diseño de controladores mediante asignación de polos es directa, como puede verse en la Literatura (Ogata, Pag 789 s 792). Se definen arbitrariamente las ubicaciones de los polos de lazo cerrado  $\{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_n\}$  en el semiplano izquierdo, y luego se determina el valor del controlador para que la matriz de lazo cerrado efectivamente lo cumpla.

Así, la ecuación característica de lazo cerrado se convierte en

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2) \cdots (s - \mu_n) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n = 0 \quad (5-13)$$

que establece el comportamiento deseado del sistema de lazo cerrado dado por

$$\mathbf{x}_t = e^{(\mathbf{A} - \mathbf{BK})t} \mathbf{x}_0. \quad (5-14)$$

donde debe hallarse el valor de la matriz  $\mathbf{K}$ .

El procedimiento exige una transformación matricial con el objetivo de obtener al sistema en su forma canónica controlable. Para ello, se define a una matriz de transformación

$$\mathbf{T} = \mathbf{MW} \quad (5-15)$$

donde  $\mathbf{M}$  es la matriz de controlabilidad definida como

$$\mathbf{M} = [\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \cdots \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad (5-16)$$

y la matriz  $\mathbf{W}$  definida como

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5-17)$$

donde los coeficientes  $a_i$  son los que aparecen en el polinomio característico de  $\mathbf{A}$  que es la matriz del sistema a lazo abierto

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n. \quad (5-18)$$

Se define el nuevo vector de estado  $\hat{\mathbf{x}}$  como

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{x}. \quad (5-19)$$

Si la inversa de  $\mathbf{T}$  existe, lo que está sujeto a que el sistema sea controlable, se puede reemplazar el estado  $\mathbf{x}$  por el nuevo estado en las ecuaciones del sistema

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_t = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{x}}_t + \mathbf{T}^{-1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_t \quad (5-20)$$

donde las matrices de estados y de entrada tendrán la forma canónica controlable

$$\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}, \quad (5-21)$$

$$\mathbf{T}^{-1} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (5-22)$$

A su vez, la acción de control se transforma en

$$\mathbf{u}_t = -\mathbf{K} \mathbf{T} \hat{\mathbf{x}}_t \quad (5-23)$$

siendo el controlador

$$\mathbf{K} \mathbf{T} = [\delta_n \quad \delta_{n-1} \quad \dots \quad \delta_1] \quad (5-24)$$

Este controlador se reemplaza en la Ecuación de estados del modelo (5-1), obteniendo

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_t = (\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} - \mathbf{T}^{-1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{K} \mathbf{T}) \hat{\mathbf{x}}_t. \quad (5-25)$$

La ecuación característica de éste sistema es la misma que la del sistema sin transformar. Por lo tanto, seleccionando un conjunto de autovalores  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_n$ , la ecuación característica de lazo cerrado se convierte en

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2) \dots (s - \mu_n) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n = 0 \quad (5-26)$$

que debe ser igual a la del sistema

$$|s\mathbf{I} - (\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} - \mathbf{T}^{-1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{K} \mathbf{T})| = 0. \quad (5-27)$$

Así, reemplazando los valores obtenidos por las Ec (5-21), (5-23) y (5-24), se tiene que

$$\left| s\mathbf{I} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} [\delta_n \quad \delta_{n-1} \quad \dots \quad \delta_1] \right| = 0 \quad (5-28)$$

y operando para calcular la ecuación característica en términos de los coeficientes de diseño,

$$\begin{vmatrix} s & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & -1 \\ a_n + \delta_n & a_{n-1} + \delta_{n-1} & \dots & s + a_1 + \delta_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (5-29)$$

y resolviendo el determinante se llega a

$$s^n + (a_1 + \delta_1)s^{n-1} + \dots + (a_{n-1} + \delta_{n-1})s + (a_n + \delta_n) = 0 \quad (5-30)$$

que si se iguala a la Ecuación característica definida en la Ec. (5-26), se concluye que pueden despejar los valores  $\delta$  para construir el controlador de la Ec. (5-24), que resulta

$$\mathbf{KT} = [\alpha_n - a_n \quad \alpha_{n-1} - a_{n-1} \quad \dots \quad \alpha_1 - a_1] \quad (5-31)$$

de donde puede despejarse  $\mathbf{K}$

$$\mathbf{K} = [\alpha_n - a_n \quad \alpha_{n-1} - a_{n-1} \quad \dots \quad \alpha_1 - a_1] \mathbf{T}^{-1}. \quad (5-32)$$

El *diseño del controlador comienza ubicando a los polos  $\mu_i$* , que son los polos de lazo cerrado. Luego, mediante la Ec. (5-26) se obtienen los coeficientes  $\alpha_i$ , y resolviendo la Ec. (5-32) se obtiene el controlador  $\mathbf{K}$ .

Nótese que éste método tiene como ventaja de que es un método simple y directo. No obstante, no se tiene en cuenta el efecto conjunto de los polos en el comportamiento del sistema, ni tampoco la magnitud de las acciones de control. *El método requiere de iteraciones prueba y error hasta encontrar la respuesta adecuada.*

## 5.6. Diseño mediante la Fórmula de Ackermann

El diseño del controlador puede tener en cuenta la ecuación característica de lazo cerrado, y con éstos coeficientes generar una diferencia con la ecuación usando la matriz  $\mathbf{A}$  de lazo abierto. Es decir, dado el sistema de lazo abierto por

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{Ax}(t) + \mathbf{Bu}(t) \quad (5-33)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Cx}(t) \quad (5-34)$$

con el controlador

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{Kx}(t), \quad (5-35)$$

se tiene el sistema de lazo cerrado

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x}(t). \quad (5-36)$$

Lo que sugiere una ecuación característica con polos situados en los lugares deseados por el usuario. La Ecuación Característica de lazo cerrado será

$$\prod_{i=1}^n (s + \mu_i) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n = 0 \quad (5-37)$$

y mediante el Teorema de Cayley Hamilton, se obtiene

$$\phi(\mathbf{A} - \mathbf{BK}) = \phi(\tilde{\mathbf{A}}) = \tilde{\mathbf{A}}^n + \alpha_1 \tilde{\mathbf{A}}^{n-1} + \alpha_2 \tilde{\mathbf{A}}^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1} \tilde{\mathbf{A}} + \alpha_n \mathbf{I} = 0 \quad (5-38)$$

siendo  $\phi(\cdot)$  un operador diferente al propuesto como  $p(\cdot)$  de los autovalores.

Aunque  $\phi(\mathbf{A}-\mathbf{BK})=0$ , nótese que  $\phi(\mathbf{A})\neq 0$ , por lo que si se resta con la ecuación de la matriz  $\mathbf{A}$  de lazo abierto, se tiene que existe una diferencia en la que aparece el controlador  $\mathbf{K}$ ,

$$\phi(\tilde{\mathbf{A}})=\phi(\mathbf{A})+\text{terminos dependientes de } \mathbf{K}. \quad (5-39)$$

Encontrando esos términos, se podría despejar  $\mathbf{K}$ . Por lo tanto, desarrollando las potencias de la Ec (5-38), se tiene

$$\tilde{\mathbf{A}}^0 = \mathbf{I} \quad (5-40)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}^1 = \mathbf{A} - \mathbf{BK}$$

$$\tilde{\mathbf{A}}^2 = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})^2 = \tilde{\mathbf{A}}^1 \cdot \tilde{\mathbf{A}}^1 = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})(\mathbf{A} - \mathbf{BK}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{ABK} - \mathbf{KAB} + (\mathbf{BK})^2 = \mathbf{A}^2 - \mathbf{ABK} - \mathbf{BK}\tilde{\mathbf{A}}$$

Multiplicando miembro a miembro por  $\alpha_i$

$$\alpha_n \tilde{\mathbf{A}}^0 = \alpha_n \mathbf{I} \quad (5-41)$$

$$\alpha_{n-1} \tilde{\mathbf{A}}^1 = \alpha_{n-1} (\mathbf{A} - \mathbf{BK})$$

$$\alpha_{n-2} \tilde{\mathbf{A}}^2 = \alpha_{n-2} (\mathbf{A}^2 - \mathbf{ABK} - \mathbf{BK}\tilde{\mathbf{A}})$$

y sumando se tiene

$$\alpha_n \tilde{\mathbf{A}}^0 + \alpha_{n-1} \tilde{\mathbf{A}}^1 + \alpha_{n-2} \tilde{\mathbf{A}}^2 + \dots = \alpha_n \mathbf{I} + \alpha_{n-1} (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) + \alpha_{n-2} (\mathbf{A}^2 - \mathbf{ABK} - \mathbf{BK}\tilde{\mathbf{A}}) + \dots \quad (5-42)$$

Nótese que se puede agrupar ahora siguiendo la forma de (5-39) como,

$$\phi(\tilde{\mathbf{A}}) = \phi(\mathbf{A}) + \alpha_{n-1} (-\mathbf{BK}) + \alpha_{n-2} (-\mathbf{ABK} - \mathbf{BK}\tilde{\mathbf{A}}) + \dots = 0. \quad (5-43)$$

Despejando,

$$\phi(\mathbf{A}) = \alpha_{n-1} \mathbf{BK} + \alpha_{n-2} \mathbf{ABK} + \alpha_{n-2} \mathbf{BK}\tilde{\mathbf{A}} + \dots +. \quad (5-44)$$

Ahora, puede escribirse como

$$\phi(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{n-1} \mathbf{K} + \alpha_{n-2} \mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}} \\ \mathbf{K} \end{bmatrix} \quad (5-45)$$

Nótese que para el ejemplo de orden 2,  $\alpha_{n-2}$  es la unidad.

Para obtener  $\mathbf{K}$ , simplemente se premultiplica miembro a miembro la inversa de la matriz de controlabilidad, y luego por el vector fila  $[0 \ 1]$ , se obtiene la fórmula de Ackermann

$$\mathbf{K} = [0 \ 1] [\mathbf{B} \ \mathbf{AB}]^{-1} \phi(\mathbf{A}). \quad (5-46)$$

### 5.6.1. Ejemplos partiendo de la representación en variables de estados

Se propone el diseño de un sistema controlado mediante el esquema de variables de estado. Sea el sistema lineal descrito por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \ 0], \quad \mathbf{D} = [0] \quad (5-47)$$

donde los polos deseados de lazo cerrado son  $\mu_i = -2 \pm j2$ .

Se calcula la ecuación característica de lazo cerrado para obtener  $\phi()$

$$(s+2-j2)(s+2+j2) = s^2 + 4s + 8.$$

Empleando la Fórmula de Ackermann,

$$\mathbf{K} = [0 \ 1] [\mathbf{B} \ \mathbf{AB}]^{-1} \phi(\mathbf{A}) \quad (5-48)$$

$$[\mathbf{B} \ \mathbf{AB}]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 10 & -10 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-100} \begin{bmatrix} -10 & -10 \\ -10 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .10 & .10 \\ .10 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\phi(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + 8 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

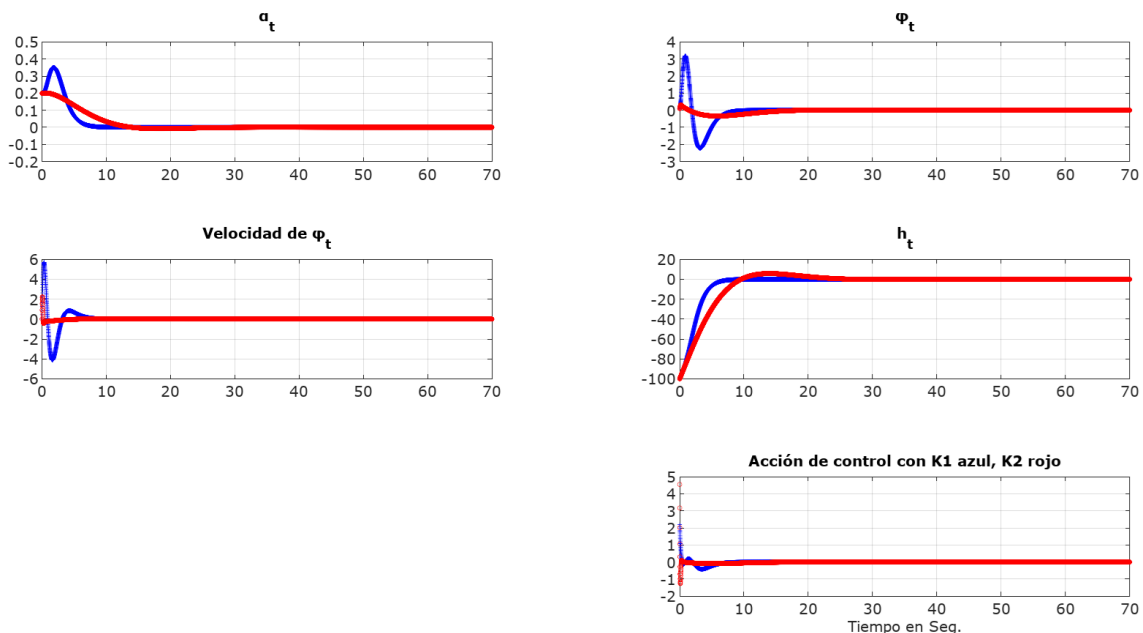
$$\mathbf{K} = [0 \ 1] [\mathbf{B} \ \mathbf{AB}]^{-1} \phi(\mathbf{A}) = [0 \ 1] \cdot \begin{bmatrix} .10 & .10 \\ .10 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = [0.8 \ 0.3]$$

Que resulta igual a lo que se obtiene con el diseño de Asignación de polos.

### 5.6.2. Ejemplo del modelo del avión

Si se ubican los polos en dos posibles puntos de trabajo, la respuesta del sistema sería como la que se muestra en la Fig. 5-4. Cabe destacar que ubicando los polos de diseño más a la izquierda del plano complejo, si bien la altura deseada se alcanza en menor tiempo, las demás variables de estado pueden tener un comportamiento errático y quizá inadmisibles por el usuario. En la Fig. 5-4 pueden verse estas variables, que en un esquema entrada-salida quedarían ocultas del análisis ya que sólo se está trabajando con  $h(t)$ .



**Fig. 5-4. Control de altura del avión con dos controladores diferentes. En azul con los autovalores de lazo cerrado en  $\mu_i = -1; -1; -1.5 \pm j$ . En rojo en  $\mu_i = -14.42255 \pm 13.85677j; -0.17957 \pm 0.17606j$ . Nótese que los polos del primer caso provocan que el sistema sea más rápido que el segundo, pero el ángulo  $\phi_t$  no se mantiene menor a 0,8 radianes que es el margen de validez del modelo.**



## 5.7. Regulador con referencia distinta de cero

### 5.7.1. Con ganancia de prealimentación

Cuando la referencia es distinta de cero  $r_t$ , esto es  $y_d \neq 0$ , puede usarse el mismo controlador que se diseñó, pero hay que modificar a la acción de control en una medida relativa a la consigna de  $y_t$ . Una propuesta, se fundamenta en una ley de control de la forma

$$u_t = -Kx_t + Gr_t \quad (5-49)$$

donde  $r_t$  es la referencia y tiene la misma dimensión que  $y_t$ ,  $G$  es una ganancia de prealimentación de la referencia. El diagrama de control con referencia no nula se muestra en la Fig. 5-5.

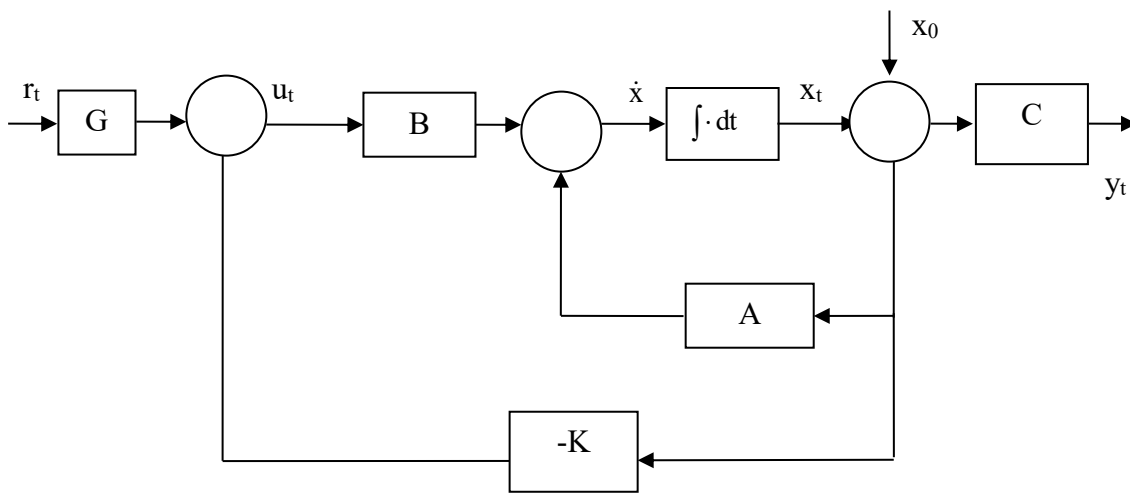


Fig. 5-5. Esquema de control óptimo en tiempo continuo con referencia distinta de cero.

Como la referencia se alcanza en el estado estacionario del sistema, se hace el análisis para diseñar a  $G$  usando Laplace. De las Ecs. del sistema, se toma transformada de Laplace y se tiene

$$\begin{cases} s\mathbf{x}_s = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_s + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_s \\ \mathbf{y}_s = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}_s \end{cases} \quad (5-50)$$

Reemplazando la transformada de Laplace de la ley de control de la Ec. (5-49) en la primera de la Ec. (5-50), se tiene

$$\begin{aligned} s\mathbf{x}_s &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_s + \mathbf{B}(-K\mathbf{x}_s + G\mathbf{r}_s) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x}_s + \mathbf{B}G\mathbf{r}_s \\ (s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK}))\mathbf{x}_s &= \mathbf{B}G\mathbf{r}_s \\ \mathbf{x}_s &= (s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK}))^{-1} \mathbf{B}G\mathbf{r}_s \end{aligned}$$

y la salida  $y$  se obtiene con la segunda de la Ec. (5-50)

$$\mathbf{y}_s = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK}))^{-1} \mathbf{B}G\mathbf{r}_s$$

de donde se puede definir una ganancia en  $s$ , como

$$H_s = C(sI - (A - BK))^{-1}BG \quad (5-51)$$

y así

$$y_s = H_s \cdot r_s. \quad (5-52)$$

La referencia  $r_s$  será un escalón unitario, ya que se trata de un problema de regulación, y se emplea el teorema del valor final, que establece que

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \{y_s\} = \lim_{t \rightarrow \infty} y_t.$$

Aplicando la igualdad a la Ec. (5-52) con  $r_s$  escalón unitario, se tiene que la salida será

$$I = C(-(A - BK))^{-1}BG$$

y despejando G de aquí, se tiene que

$$G = -[C(A - BK)^{-1}B]^{-1}. \quad (5-53)$$

En el programa mostrado en la Tabla 5-1 se tiene una implementación de ésta propuesta para Octave. Nótese que la ganancia de prealimentación deja al sistema a lazo abierto con respecto a la referencia. Para ello se propone incorporar un integrador del error de control.

```

clc;clear all;
m=.1;Fricc=0.1; long=0.6;g=9.8;M=.5;
h=0.0001;tiempo=(20/h);p_pp=0;tita_pp=0; t=0:h:tiempo*h;
omega=0:h:tiempo*h; alfa=0:h:tiempo*h; p=0:h:tiempo*h;
p_p=0:h:tiempo*h; u=linspace(0,0,tiempo+1);
%Condiciones iniciales
alfa(1)=.1; color='r';
alfa(1)=.5; color='g';
alfa(1)=.8; color='b';
ref=10;
omega(1)=0; p_p(1)=0; u(1)=0; p(1)=0; i=1;indice=0;
%Versión linealizada en el equilibrio inestable. Sontag Pp 104.
% estado=[p(i); p_p(i); alfa(i); omega(i)]
Mat_A=[0 1 0 0; -Fricc/M -m*g/M 0; 0 0 0 1; 0 Fricc/(long*M) g*(m+M)/(long*M) 0]
Mat_B=[0; 1/M; 0; -1/(long*M)]
Mat_C=[1 0 1 0]; %La salida monovariante es posición y ángulo
Mat_M=[Mat_B Mat_A*Mat_B Mat_A^2*Mat_B Mat_A^3*Mat_B];%Matriz Controlabilidad
%Cálculo del controlador por asignación de polos
auto_val=eig(Mat_A);
c_ai=conv(conv(conv([1 -auto_val(1)], [1 -auto_val(2)]), [1 -auto_val(3)]), [1 -auto_val(4)]);
Mat_W=[c_ai(4) c_ai(3) c_ai(2) 1;c_ai(3) c_ai(2) 1 0;c_ai(2) 1 0 0;1 0 0 0];
Mat_T=Mat_M*Mat_W;
A_controlable=inv(Mat_T)*Mat_A*Mat_T; %Verificación de que T esté bien
%Ubicación de los polos de lazo cerrado en mui:
mui(1)=-.7;mui(2)=-.7; mui(3)=-10 + 0.4i;mui(4)=conj(mui(3));
alfa_ia=conv(conv(conv([1 -mui(3)], [1 -mui(4)]), [1 -mui(2)]), [1 -mui(1)]);
K=(alfa_ia(2:5)-c_ai(2:5))*inv(Mat_T);
Gj=-inv(Mat_C*inv(Mat_A-Mat_B*K)*Mat_B);
eig(Mat_A-Mat_B*K) %Verifico que todos los polos estén en el semiplano izquierdo
while(i<(tiempo+1))
    estado=[p(i); p_p(i); alfa(i); omega(i)];
    u(i)=-K*estado+Gj*ref;
    p_pp=(1/(M+m))*(u(i)-m*long*tita_pp*cos(alfa(i))+m*long*omega(i)^2*sin(alfa(i))-
    Fricc*p_p(i));
    tita_pp=(1/long)*(g*sin(alfa(i))-p_pp*cos(alfa(i)));
    p_p(i+1)=p_p(i)+h*p_pp;
    p(i+1)=p(i)+h*p_p(i);
    omega(i+1)=omega(i)+h*tita_pp;
    alfa(i+1)=alfa(i)+h*omega(i);
    y_sal(i)=Mat_C*estado;
    i=i+1;
end
figure(1);hold on;
subplot(3,2,1);plot(t,omega,color);grid on; title('Velocidad ángulo');hold on;
subplot(3,2,2);plot(t,alfa,color);grid on;title('Ángulo');hold on;
subplot(3,2,3); plot(t,p,color);grid on;title('Posición carro');hold on;
subplot(3,2,4);plot(t,p_p,color);grid on;title('Velocidad carro');hold on;

```

```
subplot(3,1,3);plot(t,u,color);grid on;title('Acción de control');xlabel('Tiempo en Seg. ');hold on;
figure(2);hold on;
subplot(2,2,1);plot(alfa,omega,color);grid on;xlabel('Ángulo');ylabel('Velocidad angular');hold on;
subplot(2,2,2);plot(p,p_p,color);grid on;xlabel('Posicion carro');ylabel('Velocidad carro');hold on;
```

Tabla 5-1. Código para Octave, caso de péndulo invertido con referencia distinta de cero con ganancia de prealimentación.

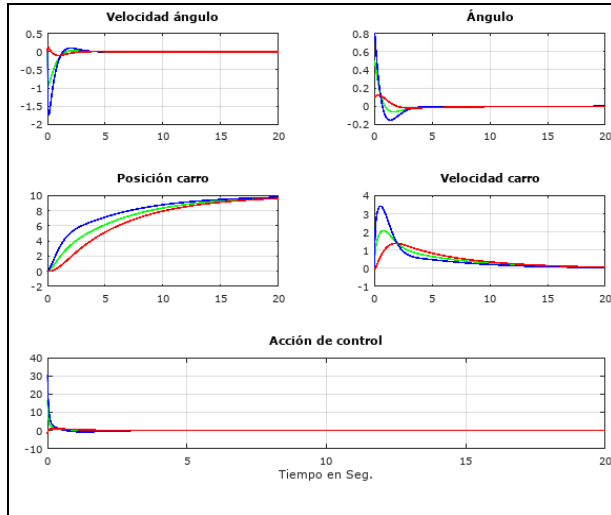


Fig. 5-6. Evolución del péndulo invertido para el controlador por asignación de polos a partir de tres condiciones iniciales, 0,1 0,5 y 0,8 radianes, de color rojo, verde y azul respectivamente. Referencia en posición 10.

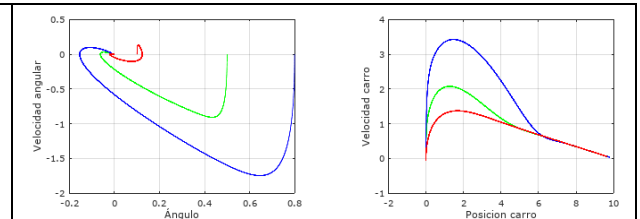


Fig. 5-7. Plano de fase para el ángulo y la posición, obtenida a partir de tres condiciones iniciales, 0,1 0,5 y 0,8 radianes, de color rojo, verde y azul respectivamente. Referencia en posición 10.

### 5.7.2. Incorporación de un integrador

Para mejorar el rechazo a perturbaciones o incertidumbres en los parámetros empleado s para el cálculo del controlador, puede ser incorporado un término de integración en el diseño en tiempo continuo. Así, se tiene que la ley de control  $u_t$  es

$$u_t = -Kx_t + K_I \xi_t = -[K \quad -K_I] \cdot \begin{bmatrix} x_t \\ \xi_t \end{bmatrix} \quad (5-54)$$

donde

$$\dot{\xi}_t = r_t - y_t = r_t - Cx_t \quad (5-55)$$

definiéndose el nuevo estado  $\xi_t$ , como la salida de un integrador cuando a la entrada está presente el error de control  $r_t - y_t$ . El esquema de control se muestra en la Fig. 5-8.

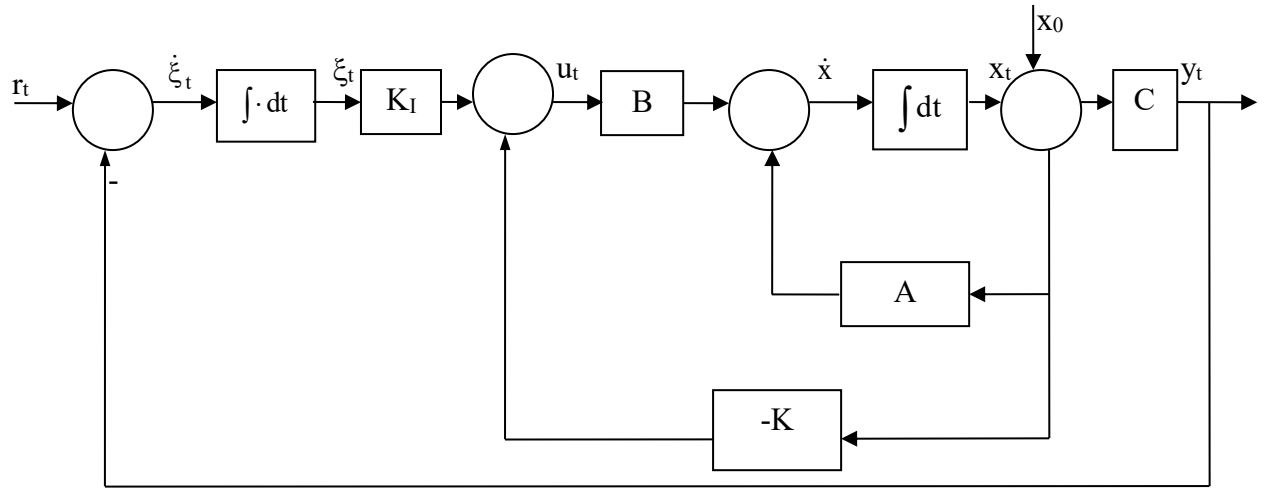


Fig. 5-8. Esquema de control óptimo en tiempo continuo con un integrador en el lazo para referencia distinta de cero.

El sistema de orden incrementado puede escribirse como

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_t \\ \dot{\xi}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t \\ \xi_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} u_t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r_t. \quad (5-56)$$

Reemplazando la ley de control, puede escribirse como

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_t \\ \dot{\xi}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t \\ \xi_t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot [\mathbf{K} \quad -\mathbf{K}_I] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t \\ \xi_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r_t. \quad (5-57)$$

Para el estado estacionario, se tiene con  $t \rightarrow \infty$ ,

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_\infty \\ \dot{\xi}_\infty \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}_\infty \\ \xi_\infty \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot [\mathbf{K} \quad -\mathbf{K}_I] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}_\infty \\ \xi_\infty \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r_\infty. \quad (5-58)$$

Suponiendo una referencia constante, escalón, se pueden restar las ecuaciones (5-56) y (5-58) obteniendo

$$\dot{\mathbf{e}}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{e}_t + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} u_e \quad (5-59)$$

que determinan la dinámica del error, donde

$$\mathbf{e}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t - \mathbf{x}_\infty \\ \xi_t - \xi_\infty \end{bmatrix}, \quad (5-60)$$

y la ley de control del sistema ampliado queda

$$u_t - u_\infty = -[\mathbf{K} \quad -\mathbf{K}_I] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t - \mathbf{x}_\infty \\ \xi_t - \xi_\infty \end{bmatrix}. \quad (5-61)$$

Por lo que, haciendo el diseño del controlador con las matrices

$$\mathbf{A}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5-62)$$

se obtiene el controlador ampliado

$$K_a = [K \quad -K_i] \quad (5-63)$$

que llevará el error de control de la Ec. (5-60) a cero.

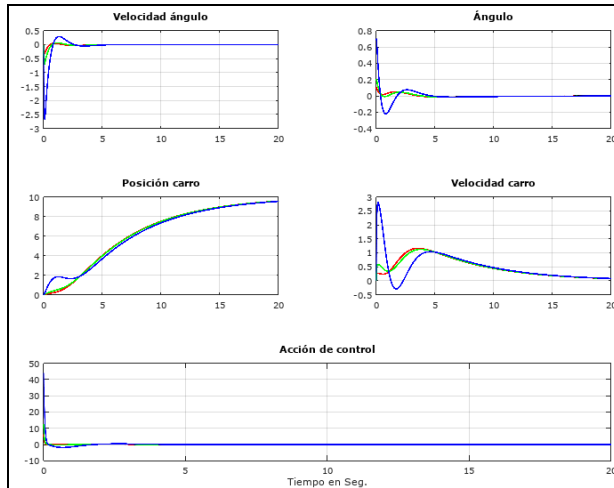
Nótese que la ley de control del sistema a controlar es la (5-54) y no la (5-61). El algoritmo está implementado en el programa detallado en la Tabla 5-2 para Octave, considerando caso del péndulo invertido. El objetivo de control es que se mantenga vertical, y que recorra una distancia de 10 metros ( $r=10$ ) desde el origen.

```

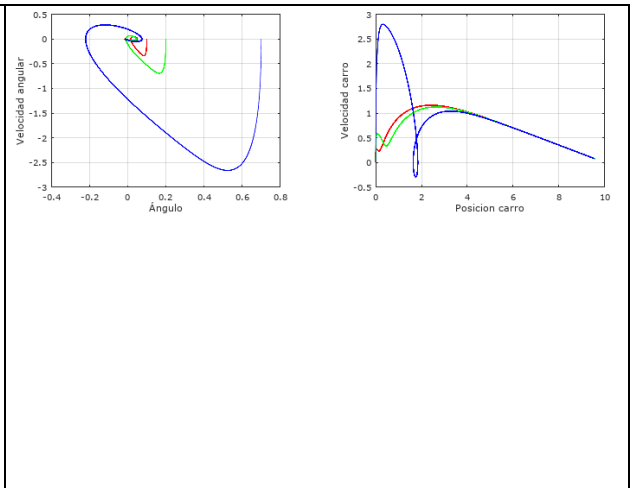
clc;clear all;
m=.1;Fricc=0.1; long=0.6;g=9.8;M=.5;
h=0.0001;tiempo=(20/h);p_pp=0;tita_pp=0; t=0:h:tiempo*h;
omega=0:h:tiempo*h; alfa=0:h:tiempo*h; p=0:h:tiempo*h;
p_p=0:h:tiempo*h; u=linspace(0,0,tiempo+1);
%Condiciones iniciales
alfa(1)=.1; color='r';
alfa(1)=.2; color='g';
alfa(1)=.7; color='b';
ref=10;
omega(1)=0; p_p(1)=0; u(1)=0; p(1)=0; i=1;indice=0;
%Versión linealizada en el equilibrio inestable. Sontag Pp 104.
% estado=[p(i); p_p(i); alfa(i); omega(i)]
Mat_A=[0 1 0 0; 0 -Fricc/M -m*g/M 0; 0 0 0 1; 0 Fricc/(long*M) g*(m+M)/(long*M) 0]
Mat_B=[0; 1/M; 0; -1/(long*M)]
Mat_C=[1 0 1 0]; %La salida es posición y ángulo
% Construcción del sistema ampliado
Mat_Aa=[Mat_A zeros(4,1);-Mat_C 0];
Mat_Ba=[Mat_B;0];
Mat_Ma=[Mat_Ba Mat_Aa*Mat_Ba Mat_Aa^2*Mat_Ba Mat_Aa^3*Mat_Ba Mat_Aa^4*Mat_Ba];%Matriz
Controlabilidad
%Cálculo del controlador por asignación de polos
auto_val=eig(Mat_Aa);
c_ai=conv(conv(conv(conv([1 -auto_val(1)],[1 -auto_val(2)]),[1 -auto_val(3)]),[1 -
auto_val(4)]),[1 -auto_val(5)]);
Mat_Wa=[c_ai(5) c_ai(4) c_ai(3) c_ai(2) 1;c_ai(4) c_ai(3) c_ai(2) 1 0;c_ai(3) c_ai(2) 1 0
0;c_ai(2) 1 0 0 0;1 0 0 0 0];
Mat-Ta=Mat_Ma*Mat_Wa;
A_controlable=inv(Mat-Ta)*Mat_Aa*Mat-Ta; %Verificación de que T esté bien
%Ubicación de los polos de lazo cerrado en mui:
mui(1)=-.7;mui(2)=-.7; mui(3)=-10 + 0.4i;mui(4)=conj(mui(3));mui(5)=-1;
alfa_ia=conv(conv(conv(conv([1 -mui(3)],[1 -mui(4)]),[1 -mui(2)]),[1 -mui(1)]),[1 -mui(5)]);
Ka=(alfa_ia(2:6)-c_ai(2:6))*inv(Mat-Ta);
eig(Mat_Aa-Mat_Ba*Ka)
K=Ka(1:4); KI=-Ka(5); %Los valores del controlador de obtienen del K ampliado
psi(1)=0;
while(i<(tiempo+1))
    estado=[p(i); p_p(i); alfa(i); omega(i)];
    psi_p=ref-Mat_C* estado;
    psi(i+1)=psi(i)+psi_p*h;
    u(i)=-K*estado+KI*psi(i+1);
    p_pp=(1/(M+m))*(u(i)-m*long*tita_pp*cos(alfa(i))+m*long*omega(i)^2*sin(alfa(i))-
    Fricc*p_p(i));
    tita_pp=(1/long)*(g*sin(alfa(i))-p_pp*cos(alfa(i)));
    p_p(i+1)=p_p(i)+h*p_pp;
    p(i+1)=p(i)+h*p_p(i);
    omega(i+1)=omega(i)+h*tita_pp;
    alfa(i+1)=alfa(i)+h*omega(i);
    y_sal(i)=Mat_C*estado; i=i+1;
end
figure(1);hold on;
subplot(3,2,1);plot(t,omega,color);grid on; title('Velocidad ángulo');hold on;
subplot(3,2,2);plot(t,alfa,color);grid on;title('Ángulo');hold on;
subplot(3,2,3); plot(t,p,color);grid on;title('Posición carro');hold on;
subplot(3,2,4);plot(t,p_p,color);grid on;title('Velocidad carro');hold on;
subplot(3,1,3);plot(t,u,color);grid on;title('Acción de control');xlabel('Tiempo en
Seg. ');hold on;
figure(2);hold on;subplot(2,2,1);plot(alfa,omega,color);grid
on;xlabel('Ángulo');ylabel('Velocidad angular');hold
on;subplot(2,2,2);plot(p,p_p,color);grid on;xlabel('Posicion carro');ylabel('Velocidad
carro');hold on;

```

Tabla 5-2. Código para Octave, caso péndulo invertido con referencia distinta de cero.



**Fig. 5-9.** Evolución del péndulo invertido para el controlador por asignación de polos a partir de tres condiciones iniciales, 0,1 0,2 y 0,7 radianes, de color rojo, verde y azul respectivamente. Referencia en posición 10.



**Fig. 5-10.** Plano de fase para el ángulo y la posición, obtenida a partir de tres condiciones iniciales, 0,1 0,2 y 0,7 radianes, de color rojo, verde y azul respectivamente. Referencia en posición 10.

### 5.7.3. Ejemplo de diseño entrada salida y variables de estado

Se estudia un ejemplo de caso entrada salida de fase no mínima. Sea el ejemplo PM7.4 extraído de la literatura (Dorf. Sistemas de Control Moderno 10ta edición. Pearson Prentice Hall 2005)

$$G(s) = \frac{(1+p)s - p}{s^2 + 3s + 6} \quad (5-64)$$

con  $0 \leq p \leq \infty$ , ¿para qué valores de  $p$  el lazo cerrado es estable?. Trabajar con  $P=1$ . Hallar el compensador que haga estabilizar al sistema y tenga error de regulación nulo. Para ello, trazar el lugar de raíces para  $-KG(s)$  y luego compensar en adelanto. Después, mediante un controlador PI establecer error nulo en regulación.

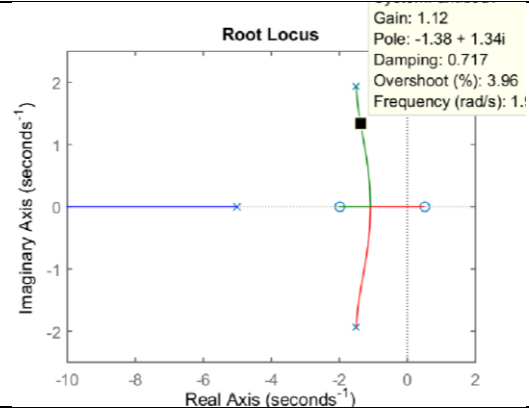
En caso de diseño de control mediante variables de estado, ubicar los polos deseados y obtener la respuesta al escalón.

Se fija  $P=1$ .

```
P=1;%PM7.4 del DORF
num=[1+P -P];
den=[1 3 6];
G=tf(num,den);
```

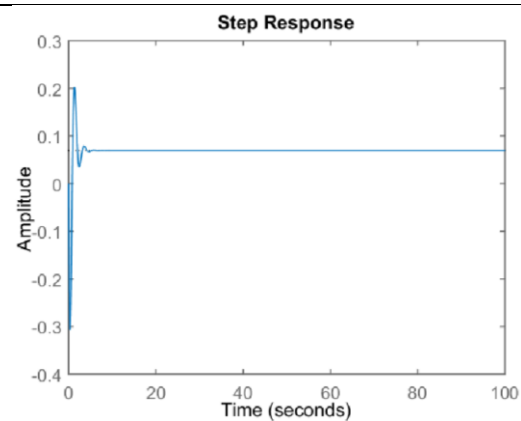
Se diagrama rlocus(-KCG) con un compensador en adelanto:

```
T1=1/2; %Cero
T2=1/5;%Pololo
alfa=T2/T1;%Da entre 0 y 1
Kc=1; % K del rlocus(G)
C=tf(Kc*[1 1/T1],[1 1/(T2) ]);
rlocus(-C*G)
```



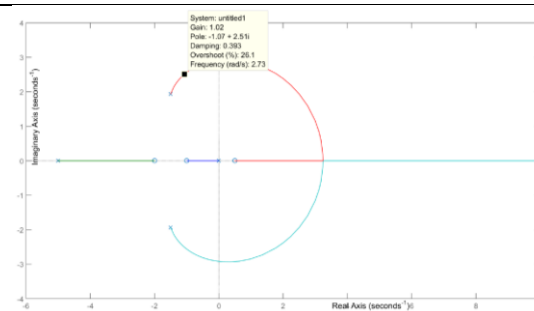
Fijando la ganancia K en -1.2, se puede cerrar el lazo y simular la respuesta al escalón.

```
FLC=feedback(-1.12*C*G,1); %
bode(.3*C2*C*G)
roots(FLC.Den{1})
step(FLC,100)
```



Para que el error de respuesta al escalón sea nulo, se agrega un nuevo compensador PI, donde se ubica el polo de manera que no afecte a la dinámica rápida ya que es estable, y se vuelve a bosquejar el rlocus().

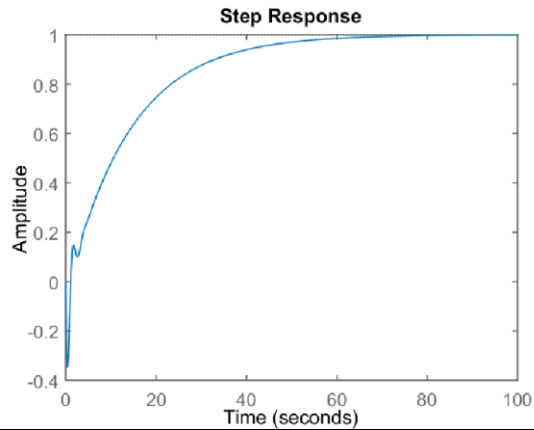
```
Kp=1;Ki=1;
C2=tf(Kp*[1 Ki/Kp],[1 0]);
rlocus(-1*C*C2*G)
```



```

FLC=feedback(-1*C*C2*G,1); %
bode(.3*C2*C*G)
roots(FLC.Den{1}) % rlocus(-
C2*G)
step(FLC,100)

```



Para mejorarse la velocidad de respuesta y que el tiempo de establecimiento disminuya de 20 segundos, debe volver a repetirse el cálculo del compensador en adelante y luego el proporcional integrativo. Es un proceso iterativo, que puede resultar útil en muchos casos, pero es poco intuitivo y difícil de ajustar.

#### 5.7.4. Versión con realimentación de estados para la Ecuación (5-64)

Se debe representar a la función de transferencia en espacios de estados. A ésta representación hay que agregarle las componentes del sistema ampliado para considerar una referencia distinta de cero. Luego se fijan los polos de lazo cerrado y se halla el controlador K. Para implementar el sistema, se debe obtener el vector x a partir de la salida escalar y, lo que implica una transformación lineal de pseudoinversa.

```

%PM7.4 del DORF
% En estados, con matrices ampliadas
clear all;clc;close all;
% G
P=1;
num=[1+P -P];
den=[1 3 6];%
% [A,B,C,D] = tf2ss(num,den);
A(1,1)=0;A(1,2)=1;
A(2,1)=-den(3);A(2,2)=-den(2);
B(1,:)=0;B(2,:)=1;
C(1)=num(2);C(2)=num(1);D=0;
[n,d]=ss2tf(A,B,C,D)
% break
F_C=pinv(C); %Pseudo inversa de C
https://en.wikipedia.org/wiki/Moore%E2%80%93Penrose\_inverse
Aa=[A,[0;0];-C,0];
Ba=[B;0];

```

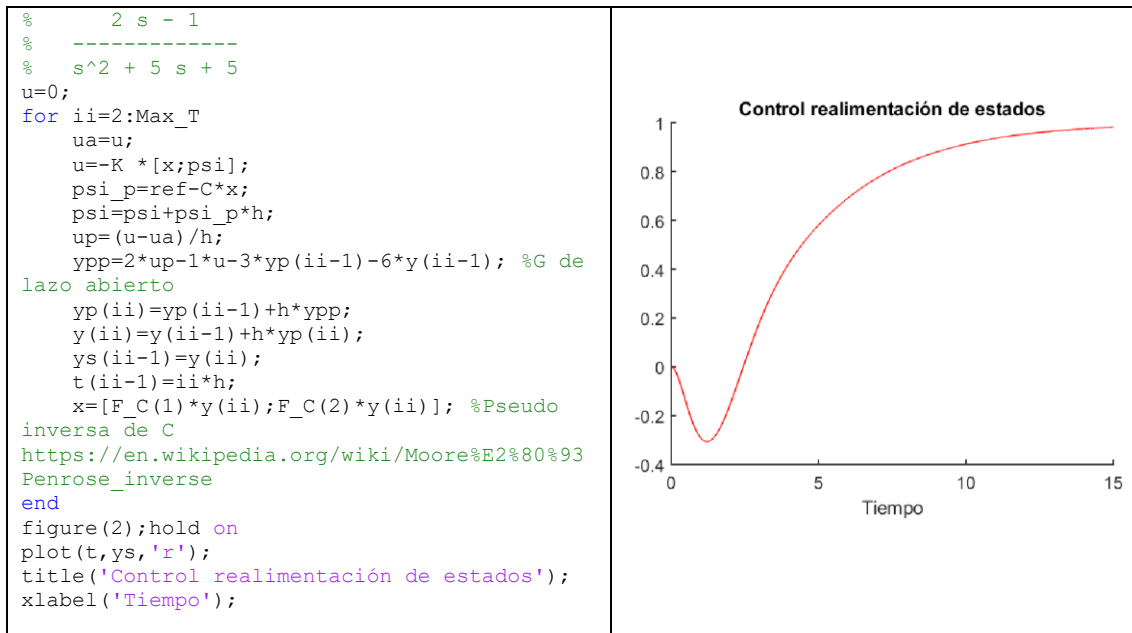
Se asignan los polos deseados del sistema de orden aumentado

```

Polos_deseados=[-.2+1j;-.2-1j; -1];
Polos_deseados=[-.2+1j;-.2-1j; -1];
K=place(Aa,Ba,Polos_deseados);
h=1e-3;
T=15;
e=0;ys=[];ypp(1)=0;yp(1)=0;y(1)=0;t=[];
Max_T=T/h;
% G =
%      2 s - 1
%      -----
%      s^2 + 3 s + 6
y(1)=0;
x=[yp(1);y(1)];ref=1;psi=0;
% FLC =
%

```

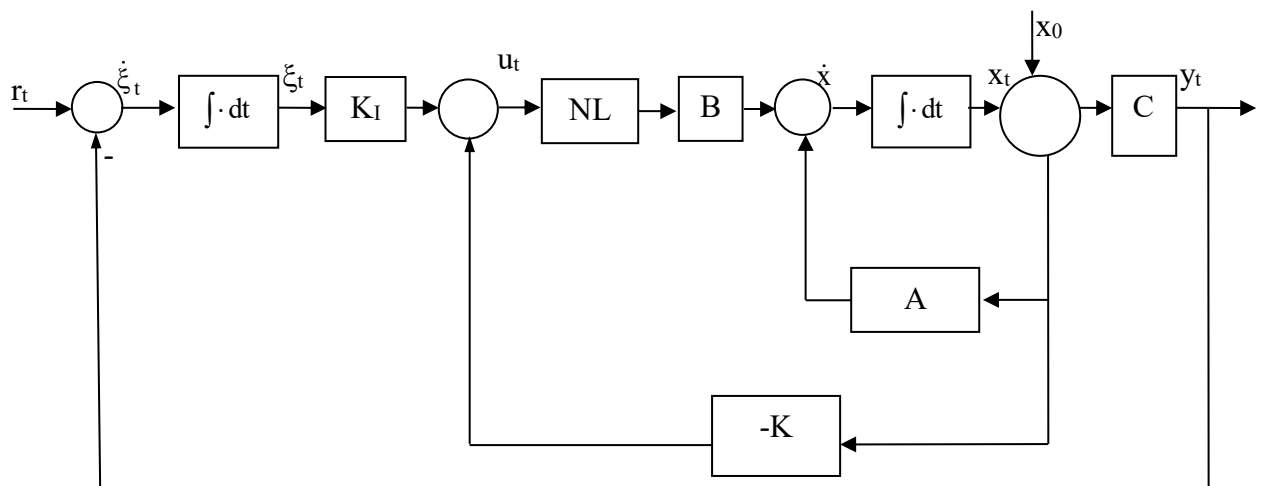




Este método es más simple para ajustar, ya que se debe cambiar la ubicación de los polos deseados.

### Ejercicios sugeridos

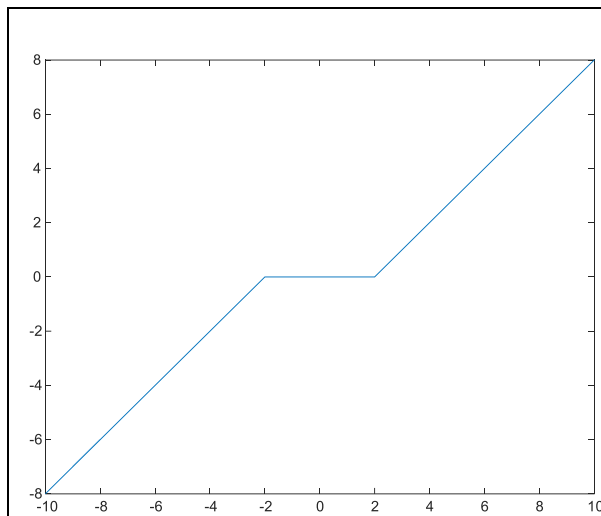
Para el caso del péndulo invertido, agregar una alinealidad a la salida del controlador con referencia distinta de cero, para que la acción de control tenga una no linealidad a su salida como indica la Fig. 5-11.



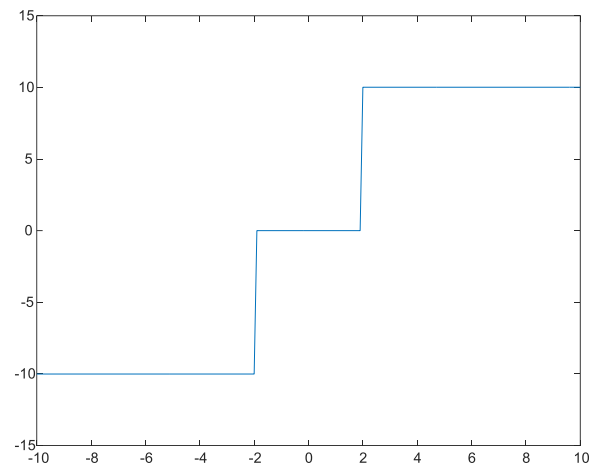
**Fig. 5-11.** Esquema de control para referencia distinta de cero con una no linealidad a la salida del actuador.

La no linealidad es una zona muerta de actuación y luego sea lineal en un primer caso y si no en un segundo caso, ambas con zona muerta como muestran las Fig. 5-12 y Fig. 5-13. Es decir, si  $|u| < 2$  entonces  $u=0$ , de otro modo  $u=\text{sign}(u) \cdot (|u|-2)$  y para el segundo caso, si  $|u| < 2$  entonces  $u=0$ , de otro modo  $u=10 \cdot \text{sign}(u)$ . Generar simulaciones de los ítems anteriores con estas modificaciones. Analizar el comportamiento del sistema en estado estacionario, para identificar los ciclos límite. En todos los casos comparar con el caso que no tenga la no

linealidad la salida del actuador.



**Fig. 5-12. Modificación de no linealidad para considerar un actuador lineal con zona muerta.**



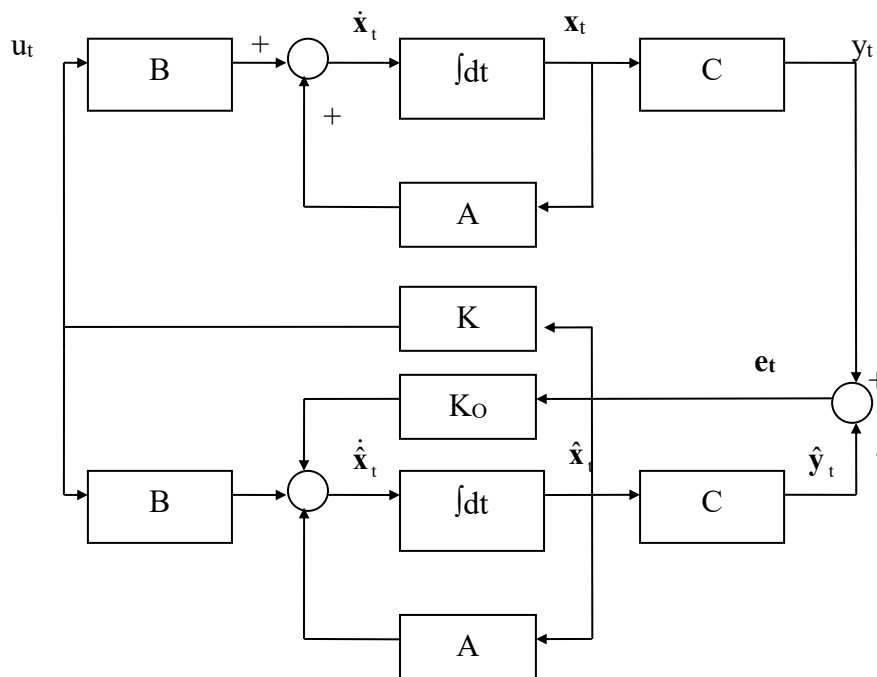
**Fig. 5-13. Modificación de no linealidad a la salida del controlador para considerar un actuador con valores de 10 y -10, con una zona muerta.**

## 6. Observabilidad

La implementación de un controlador en el esquema de variables de estado exige la medición de todas las componentes del vector de estado. Esto no siempre es posible, por lo que se requiere de un mecanismo de cálculo que mida la salida y genere el vector de estados. Éste mecanismo se denomina *observador*, y se expresa como

$$K_o : R^m \rightarrow R^n, \quad (6-1)$$

donde  $R^m$  es el espacio de la salida y  $R^n$  es el espacio de  $\mathbf{x}$ . Se logra obtener a  $\mathbf{x}$  a partir de mediciones de  $\mathbf{y}$ , implementando el esquema de la Fig. 6-1.



**Fig. 6-1.** Diagrama en bloques del sistema lineal con observador.

Se tienen entonces el sistema original

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (6-2)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (6-3)$$

y el sistema observador definido como

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{K}_o(\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t)) \quad (6-4)$$

$$\hat{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (6-5)$$

donde el objetivo del observador es que  $\hat{\mathbf{y}}_t \rightarrow \mathbf{x}_t$  en un tiempo adecuado a las necesidades del controlador que a su vez cumple los requerimientos del usuario. La dinámica del observador se estudia analizando el error de observación definido como

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t) \quad (6-6)$$

y por lo tanto

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t). \quad (6-7)$$

Su dinámica, estará dada entonces, realizando la resta de los sistemas original y el observador, es decir a la Ec (6-2) se le resta la Ec (6-4)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)) - \mathbf{K}_o[\mathbf{C}(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t))] \quad (6-8)$$

y empleando la definición del error (6-6), se tiene la dinámica del error de observación

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_o\mathbf{C})\tilde{\mathbf{x}}(t) \quad (6-9)$$

que tiene la matriz de observación  $(\mathbf{A} - \mathbf{K}_o\mathbf{C})$  y para que el error de observación se haga nulo, ésta matriz deberá tener sus autovalores en el semiplano izquierdo de plano complejo.

No obstante, en el marco de los sistemas lineales, sólo es posible la existencia de una matriz  $\mathbf{K}_o$  para realizar la generación de  $\mathbf{x}$  si el sistema es *Observable*.

Un sistema lineal con salida  $y_t$  se denomina **observable** si cualquier estado  $x_t$  del mismo, puede ser determinado a partir de valores de la salida  $y_t$ , en un tiempo finito.

Se hace aquí un análisis del concepto de observabilidad para un sistema monovariable. Las ecuaciones que modelan el sistema en el espacio de estado son

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (6-10)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (6-11)$$

se sabe que la solución del sistema es

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-s)}\mathbf{B}\mathbf{u}(s)ds \quad (6-12)$$

de donde se obtiene la salida  $y(t)$  como

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-s)}\mathbf{B}\mathbf{u}(s)ds + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (6-13)$$

pero viendo el esquema de la Fig. 6-1, las multiplicaciones  $\mathbf{D}\mathbf{u}(t)$  se anulan, por lo que queda

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-s)}\mathbf{B}\mathbf{u}(s)ds. \quad (6-14)$$

De donde

$$\mathbf{y}(t) - \int_0^t \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-s)}\mathbf{B}\mathbf{u}(s)ds = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0). \quad (6-15)$$

Sabiendo que

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) \mathbf{A}^k \quad (6-16)$$

se reemplaza en la (6-13) y se llega a

$$\mathbf{y}(t) - \int_0^t \mathbf{C} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t-s) \mathbf{A}^k \mathbf{B}\mathbf{u}(s)ds = \mathbf{C} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) \mathbf{A}^k \mathbf{x}(0). \quad (6-17)$$

Para analizar a  $\mathbf{x}_0$ , se puede expresar como producto de matrices al primer término, ya que el resto es dato,

$$y(t) - \int_0^t C \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t-s) A^k B u(s) ds = C(\alpha_0(t)I + \alpha_1(t)A + \alpha_2(t)A^2 + \dots + \alpha_{n-1}(t)A^{n-1})x(0) \quad (6-18)$$

y también, en forma vectorial,

$$y(t) - \int_0^t C \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t-s) A^k B u(s) ds = [\alpha_0(t) \quad \alpha_1(t) \quad \alpha_2(t) \quad \dots \quad \alpha_{n-1}(t)] \cdot \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \cdot x(0). \quad (6-19)$$

Este planteo debe permitir el cálculo para cualquier vector de  $\alpha_i(t)$  y de  $x_0$ , por lo que la matriz

$$P = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (6-20)$$

es la matriz que debe tener rango  $n$  para poder hallar  $x_0$  en el cálculo. Ésta matriz  $P$  es de orden  $nm \times n$ .

Para demostrar la condición *necesaria*, se observa que si el rango de  $P < n$  entonces para algún  $x_0 \neq 0$  se tiene que  $Px_0 = 0$  y por lo tanto no se puede determinar ése  $x_0$  a partir de  $y_t$ .

La condición de *suficiencia* de que el rango( $P$ ) sea  $n$ , se verifica como sigue. Asumiendo que el rango( $P$ ) es  $n$ , se premultiplican ambos miembros de la Ec (6-15) por  $\exp(A^T t)C^T$ ,

$$e^{A^T t} C^T \cdot \left[ y(t) - \int_0^t C \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t-s) A^k B u(s) ds \right] = e^{A^T t} C^T \cdot C \cdot e^{At} \cdot x(0). \quad (6-21)$$

Integrando ambos miembros respecto del tiempo entre 0 y  $t$ , se obtiene una función  $Q_t$ , como

$$Q_t = \left( \int_0^t e^{A^T s} C^T \cdot C \cdot e^{As} \cdot ds \right) \cdot x(0) = W_t \cdot x(0) \quad (6-22)$$

que es una cantidad conocida.

Nótese que si  $W_t$  es singular o sea  $|W_t| = 0$  (determinante nulo), entonces

$$x^T W_{t1} x = \int_0^t \|C \cdot e^{As} \cdot x\|^2 \cdot ds = 0 \quad (6-23)$$

lo que implica que

$$C \cdot e^{As} = 0 \quad \forall 0 \leq s \leq t, \quad (6-24)$$

y por lo tanto el rango( $P$ )  $< n$ .

De aquí se deduce que cuando rango( $P$ )  $= n$ ,  $W_t$  es no singular y entonces

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{W}_t^{-1} \mathbf{Q}_t \quad \forall t. \quad (6-25)$$

### 6.1. Dualidad de los procesos lineales

La propiedad de dualidad relaciona a los conceptos de controlabilidad y observabilidad. Sea el sistema  $S_1$  definido como

$$S_1 := \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (6-26)$$

donde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ ;  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times r}$  y  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Sea el sistema  $S_2$  definido como el sistema dual de  $S_1$ , con

$$S_2 := \begin{cases} \dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}^T \mathbf{z}(t) + \mathbf{C}^T \mathbf{v}(t) \\ \boldsymbol{\eta}(t) = \mathbf{B}^T \mathbf{z}(t) \end{cases} \quad (6-27)$$

donde  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ ,  $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^r$ . Además, la matriz de controlabilidad para el sistema  $S_1$  es la definida por la Ec (5-16) y la de observabilidad es la Ec (6-20). Por otro lado, las matrices de controlabilidad y observabilidad para el sistema  $S_2$  son

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T & \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T & \dots & (\mathbf{A}^{n-1})^T \mathbf{C}^T \end{bmatrix} \quad (6-28)$$

y la matriz

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \\ \mathbf{B}^T (\mathbf{A}^T)^2 \\ \vdots \\ \mathbf{B}^T (\mathbf{A}^T)^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (6-29)$$

Entonces, el sistema  $S_1$  es completamente controlable (observable) si y solo si el sistema  $S_2$  es completamente observable (controlable).

El sistema  $S_1$  es estable si y sólo si sistema dual  $S_2$  es estable.

Esto explica la simetría que se encuentra en los resultados obtenibles para controlabilidad y observabilidad. La correspondiente demostración se encuentra en la bibliografía. Estas propiedades son de utilidad para el tratamiento de los sistemas de control con observador.

El cálculo del observador de la Ec. (6-1) se puede hacer a través del sistema dual, empleando la técnica de asignación de polos para el controlador.

#### 6.1.1. Ejemplo fase no mínima

Sea el ejemplo PM7.4 extraído de la literatura (Dorf. Sistemas de Control Moderno 10ta edición. Pearson Prentice Hall 2005)

$$G(s) = \frac{(1+p)s - p}{s^2 + 3s + 6} \quad (6-30)$$

con  $P=1$ . Hallar un controlador y un observador que haga evolucionar al sistema desde cualquier condición inicial a una referencia dada. Ubicar los polos del controlador ampliado en -1, -3, -5 y los polos del observador en -1, -9.

El código .m está detallado en la Tabla 6-2, y los resultados de simulación en la Fig. 6-2.

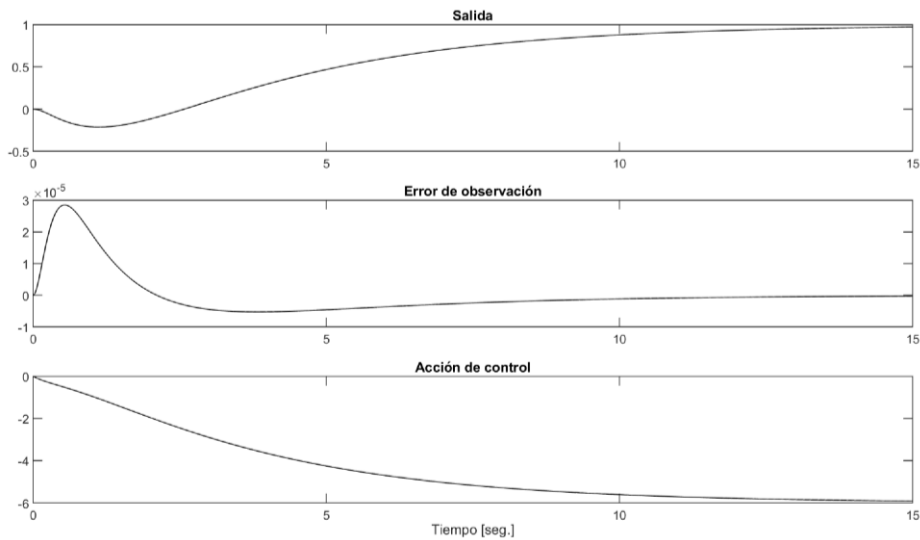
```
clear all;clc;close all;
pkg load signal
% G
P=1;
num=[1+P -P];
den=[1 3 6];%
% [A,B,C,D] = tf2ss(num,den);
A(1,1)=0;A(1,2)=1;
A(2,1)=-den(3);A(2,2)=-den(2);
B(1,:)=0;B(2,:)=1;
C(1)=num(2);C(2)=num(1);D=0;
[n,d]=ss2tf(A,B,C,D)
Aa=[A,[0;0];-C,0];
Ba=[B;0];
%Cálculo del controlador por asignación de polos-----
Mat_Aa=Aa;Mat_Ba=Ba;
Mat_Ma=[Mat_Ba Mat_Aa*Mat_Ba Mat_Aa^2*Mat_Ba]; %Matriz Controlabilidad
auto_val=eig(Mat_Aa);
c_ai=conv(conv([1 -auto_val(1)], [1 -auto_val(2)]), [1 -auto_val(3)]);
Mat_Wa=[c_ai(3) c_ai(2) 1 ; c_ai(2) 1 0 ; 1 0 0];
Mat-Ta=Mat_Ma*Mat_Wa;
A_controlable=inv(Mat-Ta)*Mat_Aa*Mat-Ta; %Verificación de que T esté bien
%Ubicación de los polos de lazo cerrado en mui:
Polos_deseados=[-12+1j;-12-1j; -5.0];
Polos_deseados=[-.3;-5; -1];
%K=place(Aa,Ba,Polos_deseados);
mui=Polos_deseados;
alfa_ia=poly(Polos_deseados);
%alfa_ia=conv(conv([1 -mui(1)], [1 -mui(2)]), [1 -mui(3)]);
Ka=flipplr(alfa_ia(2:4)-c_ai(2:4))*inv(Mat-Ta);
%Fin cálculo del controlador-----
K=Ka;
disp('Controlador ampliado en ')
eig(Mat_Aa-Mat_Ba*Ka)
%Cálculo del Observador-----
A_d=A';
B_d=C';
C_d=B';
Polos_Obs=[-10;-9];
mui_d=Polos_Obs;
alfa_ia_d=poly(Polos_Obs);
Mat_M_d=[B_d A_d*B_d]; %Matriz Controlabilidad dual
auto_val_d=eig(A);
c_ai_d=poly(auto_val_d);
Mat_W=[c_ai_d(2) 1 ; 1 0];
Mat_T_d=Mat_M_d*Mat_W;
Ko=(flipplr(alfa_ia_d(2:3))-c_ai_d(2:3))*inv(Mat_T_d)';
disp('Observador en ')
eig(A-Ko*C)
%FIN cálculo del Observador-----
%Los valores del controlador de obtienen del K ampliado
h=1e-3;
T=15;
e=0;ys=[];ypp(1)=0;yp(1)=0;y(1)=0;t=[];
Max_T=T/h;
y(1)=0;
x=[yp(1);y(1)];ref=1;psi=0;
u=0;x_hat=[0;0];y_o(1)=0;acc(1)=0;
% G =
%      2 s - 1
%      -----
%      s^2 + 3 s + 6
for ii=2:Max_T
    ua=u;
    u=-K*[x_hat;psi];
    psi_p=ref-y(ii-1);
    psi=psi+psi_p*h;
    up=(u-ua)/h;
    ypp=2*up-1*u-3*yp(ii-1)-6*y(ii-1); %G de lazo abierto
```

```

    yp(ii)=yp(ii-1)+h*ypp;
    y(ii)=y(ii-1)+h*yp(ii);
    ys(ii-1)=y(ii);
    t(ii-1)=ii*h;
    x_hat_p=A*x_hat+B*u+Ko*(y(ii-1)-C*x_hat);
    x_hat=x_hat+x_hat_p*h;
    y_o(ii-1)=C*x_hat;
    acc(ii-1)=u;
end
subplot(3,1,1);plot(t,ys,'k');title('Salida')
subplot(3,1,2);plot(t,ys-y_o,'k');title('Error de observación')
subplot(3,1,3);plot(t,acc,'k');title('Acción de control');xlabel('Tiempo [seg.]')
% save('PM7_4.mat','-v7');

```

**Tabla 6-1. Código .m del Controlador con observador por asignación de polos para el sistema de fase no mínima.**



**Fig. 6-2. Simulación del sistema controlador con observación de estados para el caso de fase no mínima.**

### 6.1.2. Ejemplo péndulo invertido

Para el sistema carro-barra de la Fig. 6-3, diseñar un controlador de estados en el dominio del tiempo continuo sabiendo que las ecuaciones que describen al ángulo y al desplazamiento son,

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{\delta} + m l \ddot{\phi} \cos \phi - m l \dot{\phi}^2 \sin \phi + F \dot{\delta} = u \\ l \ddot{\phi} - g \sin \phi + \ddot{\delta} \cos \phi = 0 \end{cases} \quad (6-31)$$

y que las matrices A y B, (tomadas de Sontag Pag. 91 y 92) del sistema linealizado para ángulo pequeño es

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{F}{M} & -\frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{F}{lM} & \frac{g(m+M)}{lM} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{lM} \end{bmatrix} \quad (6-32)$$

Se pide realizar el cálculo del controlador mediante asignación de polos al igual que el del



observador y generar las trayectorias del sistema no lineal (6-31) mediante simulación para ángulos iniciales de 0,1 0,5 y 0,9 radianes con observador. Mantener los polos del Controlador iguales a los del Observador. Comparar los resultados para el caso en que no se utilice el Observador.

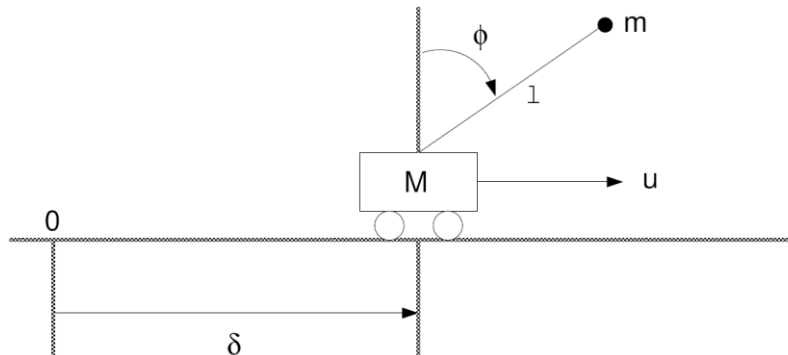


Fig. 6-3. Diagrama del sistema carro-barra para el péndulo invertido.

Los resultados de la simulación están en las figuras Fig. 6-4, Fig. 6-5, Fig. 6-6 y Fig. 6-7, utilizando el código para Octave de la Tabla 6-2.

```

clc;clear all;
m=.1;Fricc=0.1; long=0.6;g=9.8;M=.5;
h=0.001;tiempo=(50/h);p_pp=0;tita_pp=0;
%Condiciones iniciales
alfa(1)=.1; color='r';
% alfa(1)=.2; color='g';
alfa(1)=.9; color='b';
omega(1)=0; p_p(1)=0; u(1)=0; p(1)=0; i=1;indice=0;
%Versión linealizada en el equilibrio inestable. Sontag Pp 104.
% estado=[p(i); p_p(i); alfa(i); omega(i)]
Mat_A=[0 1 0 0;0 -Fricc/M -m*g/M 0; 0 0 0 1; 0 Fricc/(long*M) g*(m+M)/(long*M) 0]
Mat_B=[0; 1/M; 0; -1/(long*M)]
Mat_C=[1 0 0 0]; %La salida es posición y ángulo
Mat_M=[Mat_B Mat_A*Mat_B Mat_A^2*Mat_B Mat_A^3*Mat_B];%Matriz Controlabilidad
%Cálculo del controlador por asignación de polos
auto_val=eig(Mat_A);
c_ai=conv(conv(conv([1 -auto_val(1)],[1 -auto_val(2)]),[1 -auto_val(3)]),[1 -
auto_val(4)]);
Mat_W=[c_ai(4) c_ai(3) c_ai(2) 1;c_ai(3) c_ai(2) 1 0;c_ai(2) 1 0 0;1 0 0 0];
Mat_T=Mat_M*Mat_W;
A_controlable=inv(Mat_T)*Mat_A*Mat_T %Verificación de que T esté bien
%CONTROLADOR Ubicación de los polos de lazo cerrado en mui :
mui(1)=-20;mui(2)=-5; mui(3)=-.05 + 0.5i;mui(4)=conj(mui(3));
alfa_i=conv(conv(conv([1 -mui(3)],[1 -mui(4)]),[1 -mui(2)]),[1 -mui(1)]);
K=flipplr(alfa_i(2:5)-c_ai(2:5))*inv(Mat_T);
eig(Mat_A-Mat_B*K)
Mat_A_O=Mat_A';
Mat_B_O=Mat_C';
Mat_M_Dual=[Mat_B_O Mat_A_O*Mat_B_O Mat_A_O^2*Mat_B_O Mat_A_O^3*Mat_B_O];%Matriz
Controlabilidad
alfaO_i=alfa_i;
% Ubicacion del Observador
% Algunas veces más rápido que el controlador
mui_o=real(mui)*20;
alfaO_i=conv(conv(conv([1 -mui_o(3)],[1 -mui_o(4)]),[1 -mui_o(2)]),[1 -mui_o(1)]);
Mat_T_O=Mat_M_Dual*Mat_W;
Ko=(flipplr(alfaO_i(2:end)-c_ai(2:end))*inv(Mat_T_O))';
eig(Mat_A_O'-Ko*Mat_C) %Verifico que todos los polos estén en el semiplano izquierdo
x_hat=[0;0;0;0]; %Inicializo el Observador
while(i<(tiempo+1))
    estado=[p(i); p_p(i); alfa(i); omega(i)];
    % u(i)=-K*estado; color='*-b'; %Sin Observador
    u(i)=-K*x_hat; color='.-r'; %Con Observador
    p_pp=(1/(M+m))*(u(i)-m*long*tita_pp*cos(alfa(i))+m*long*omega(i)^2*sin(alfa(i))-
    Fricc*p_p(i));

```

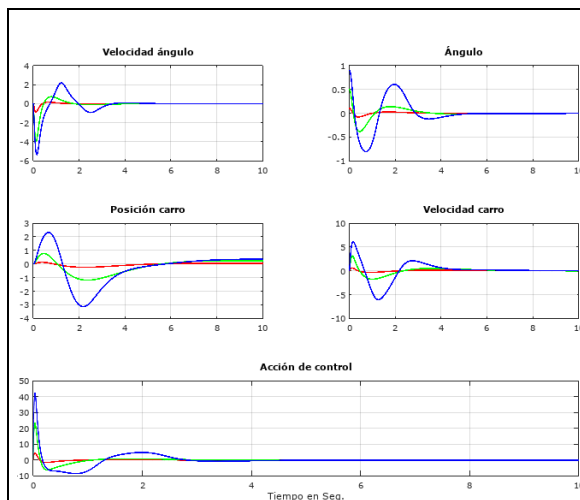
```

tita_pp=(1/long)*(g*sin(alfa(i))-p_pp*cos(alfa(i)));
p_p(i+1)=p_p(i)+h*p_pp;
p(i+1)=p(i)+h*p_p(i);
omega(i+1)=omega(i)+h*tita_pp;
alfa(i+1)=alfa(i)+h*omega(i);
y_sal(i)=Mat_C*estado;
% OBSERVADOR
y_sal_O(i)=Mat_C*x_hat;
y_sal(i)=Mat_C*estado;
x_hatp=Mat_A*x_hat+Mat_B*u(i)+Ko*(y_sal(i)-y_sal_O(i));
x_hat=x_hat+h*x_hatp;
i=i+1;
end
figure(1);hold on; t=1:i;t=t*h;
subplot(3,2,1);plot(t,omega,color);grid on; title('Velocidad ángulo');hold on;
legend('Sin Observador','Con Observador');legend('boxoff');
subplot(3,2,2);plot(t,alfa,color);grid on;title('Ángulo');hold on;
subplot(3,2,3); plot(t,p,color);grid on;title('Posición carro');hold on;
subplot(3,2,4);plot(t,p_p,color);grid on;title('Velocidad carro');hold on;
subplot(3,1,3);plot(t(1:end-1),u,color);grid on;title('Acción de
control');xlabel('Tiempo en Seg.');
```

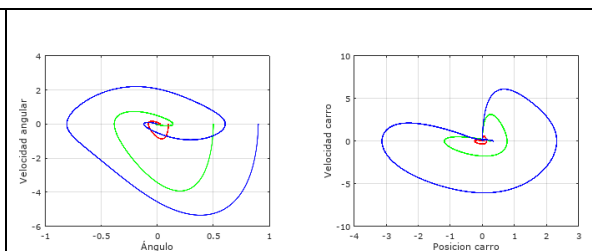
```

figure(2);hold on;
subplot(2,2,1);plot(alfa,omega,color);grid on;xlabel('Ángulo');ylabel('Velocidad
angular');hold on;
subplot(2,2,2);plot(p,p_p,color);grid on;xlabel('Posicion carro');ylabel('Velocidad
carro');hold on;legend('Sin Observador','Con Observador');legend('boxoff');
```

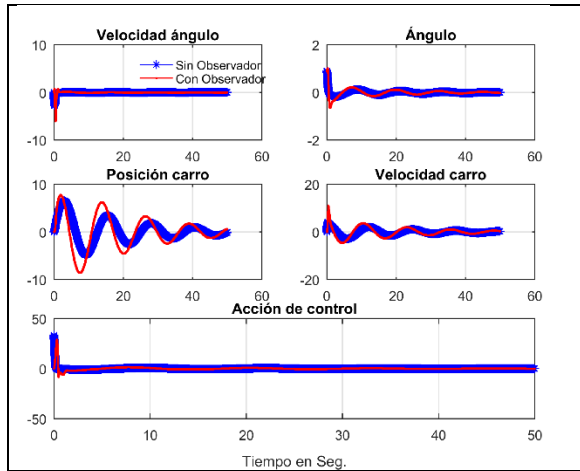
**Tabla 6-2. Código para Octave del Controlador con observador por asignación de polos para el péndulo Invertido.**



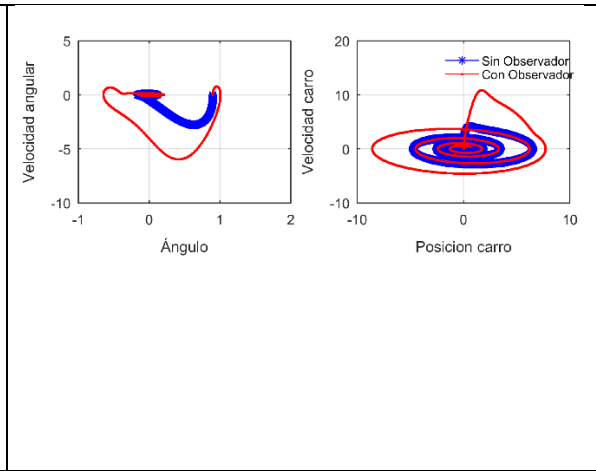
**Fig. 6-4. Evolución del péndulo invertido con control y observación de estados a partir de tres condiciones iniciales, 0,1 0,5 y 0,9 radianes, de color rojo, verde y azul respectivamente.**



**Fig. 6-5. Control con observación de estados: plano de fase obtenido a partir de tres condiciones iniciales, 0,1 0,5 y 0,9 radianes, de color rojo, verde y azul respectivamente.**



**Fig. 6-6. Evolución del péndulo invertido a partir de 0,9 radianes, donde la línea fina corresponde al caso con Observador y la gruesa sin Observador de estados.**



**Fig. 6-7. Plano de fase obtenida a partir de 0,9 radianes, donde la línea fina corresponde al caso con Observador y la gruesa al caso sin Observador de estados.**

### 6.1.3. Caso de controlador con referencia no nula y observación de estados

En la Tabla 6-3 se muestra el código .m para el control del péndulo invertido con referencia no nula y observador de estados. Nótese que el controlador es de orden incrementado ya que incorpora un integrador.

```

clc; clear all;
m=.1;Fricc=0.1; long=0.6;g=9.8;M=.5;
h=0.001;tiempo=(50/h);p_pp=0;tita_pp=0;
%Condiciones iniciales
alfa(1)=.1; color='r';
% alfa(1)=.5; color='g';
% alfa(1)=.8; color='b';
omega(1)=0; p_p(1)=0; u(1)=0; p(1)=0; i=1;indice=0;
%Versión linealizada en el equilibrio inestable. Sontag Pp 104.
% estado=[p(i); p_p(i); alfa(i); omega(i)]
Mat_A=[0 1 0 0;0 -Fricc/M -m*g/M 0; 0 0 0 1; 0 Fricc/(long*M) g*(m+M)/(long*M) 0]
Mat_B=[0; 1/M; 0; -1/(long*M)]
Mat_C=[1 0 0 0]; %La salida es posición y ángulo
Mat_M=[Mat_B Mat_A*Mat_B Mat_A^2*Mat_B Mat_A^3*Mat_B];%Matriz Controlabilidad
%Cálculo del controlador por asignación de polos
auto_val=eig(Mat_A);
c_ai=conv(conv(conv([1 -auto_val(1)], [1 -auto_val(2)]), [1 -auto_val(3)]), [1 -
auto_val(4)]);
Mat_W=[c_ai(4) c_ai(3) c_ai(2) 1;c_ai(3) c_ai(2) 1 0;c_ai(2) 1 0 0;1 0 0 0];
Mat_T=Mat_M*Mat_W;
A_controlable=inv(Mat_T)*Mat_A*Mat_T %Verificación de que T esté bien
% Construcción del sistema ampliado
Mat_Aa=[Mat_A zeros(4,1);-Mat_C 0];
Mat_Ba=[Mat_B;0];
Mat_Ma=[Mat_Ba Mat_Aa*Mat_Ba Mat_Aa^2*Mat_Ba Mat_Aa^3*Mat_Ba Mat_Aa^4*Mat_Ba];%Matriz
Controlabilidad
%Cálculo del controlador por asignación de polos
auto_val=eig(Mat_Aa);
c_ai=conv(conv(conv(conv([1 -auto_val(1)], [1 -auto_val(2)]), [1 -auto_val(3)]), [1 -
auto_val(4)]), [1 -auto_val(5)]);
Mat_Wa=[c_ai(5) c_ai(4) c_ai(3) c_ai(2) 1;c_ai(4) c_ai(3) c_ai(2) 1 0;c_ai(3) c_ai(2)
1 0 0;c_ai(2) 1 0 0 0;1 0 0 0 0];
Mat_Ta=Mat_Ma*Mat_Wa;
A_controlable=inv(Mat_Ta)*Mat_Aa*Mat_Ta; %Verificación de que T esté bien
%Ubicación de los polos de lazo cerrado en mui:
mui(1)=-.7;mui(2)=-.7; mui(3)=-10 + 0.4i;mui(4)=conj(mui(3));mui(5)=-1;
alfa_ia=conv(conv(conv(conv([1 -mui(3)], [1 -mui(4)]), [1 -mui(2)]), [1 -mui(1)]), [1 -
mui(5)]);
Ka=(alfa_ia(2:6)-c_ai(2:6))*inv(Mat_Ta);
eig(Mat_Aa-Mat_Ba*Ka)

```

```

K=Ka(1:4); KI=-Ka(5); %Los valores del controlador se obtienen del K ampliado
Mat_A_O=Mat_A';
Mat_B_O=Mat_C';
Mat_M_Dual=[Mat_B_O Mat_A_O*Mat_B_O Mat_A_O^2*Mat_B_O Mat_A_O^3*Mat_B_O];%Matriz
Controlabilidad
% Ubicación del Observador. Algunas veces más rápido que el controlador
mui_o=real(mui)*5;
alfaO_i=conv(conv(conv([1 -mui_o(3)], [1 -mui_o(4)]), [1 -mui_o(2)]), [1 -mui_o(1)]);
Mat_T_O=Mat_M_Dual*Mat_W;
Ko=(fliplr(alfaO_i(2:end)-c_ai(2:end-1))*inv(Mat_T_O))';
eig(Mat_A_O'-Ko*Mat_C) %Verifico que todos los polos estén en el semiplano izquierdo
x_hat=[0;0;0;0]; %Inicializo el Observador
ref=-10; psi(1)=0;
while(i<(tiempo+1))
    estado=[p(i); p_p(i); alfa(i); omega(i)];
    psi_p=ref-Mat_C* estado;
    psi(i+1)=psi(i)+psi_p*h;
    % u(i)=-K*estado+KI*psi(i+1);
    u(i)=-K*x_hat+KI*psi(i+1);
    p_pp=(1/(M*f))*(u(i)-m*long*tita_pp*cos(alfa(i))+m*long*omega(i)^2*sin(alfa(i))-
    Fricc*p_p(i));
    tita_pp=(1/long)*(g*sin(alfa(i))-p_pp*cos(alfa(i)));
    p_p(i+1)=p_p(i)+h*p_pp;
    p(i+1)=p(i)+h*p_p(i);
    omega(i+1)=omega(i)+h*tita_pp;
    alfa(i+1)=alfa(i)+h*omega(i);
    y_sal(i)=Mat_C*estado;
    % OBSERVADOR
    y_sal_O(i)=Mat_C*x_hat;
    y_sal(i)=Mat_C*estado;
    x_hatp=Mat_A*x_hat+Mat_B*u(i)+Ko*(y_sal(i)-y_sal_O(i));
    x_hat=x_hat+h*x_hatp;
    i=i+1;
end
figure(1);hold on; t=1:i;t=t*h;
subplot(3,2,1);plot(t,omega,color);grid on; title('Velocidad ángulo');hold on;
legend('Sin Observador','Con Observador');legend('boxoff');
subplot(3,2,2);plot(t,alfa,color);grid on;title('Ángulo');hold on;
subplot(3,2,3); plot(t,p,color);grid on;title('Posición carro');hold on;
subplot(3,2,4);plot(t,p_p,color);grid on;title('Velocidad carro');hold on;
subplot(3,1,3);plot(t(1:end-1),u,color);grid on;title('Acción de
control');xlabel('Tiempo en Seg.');
```

Tabla 6-3. Código .m para calcular un controlador en variables de estado con observador mediante asignación de polos.

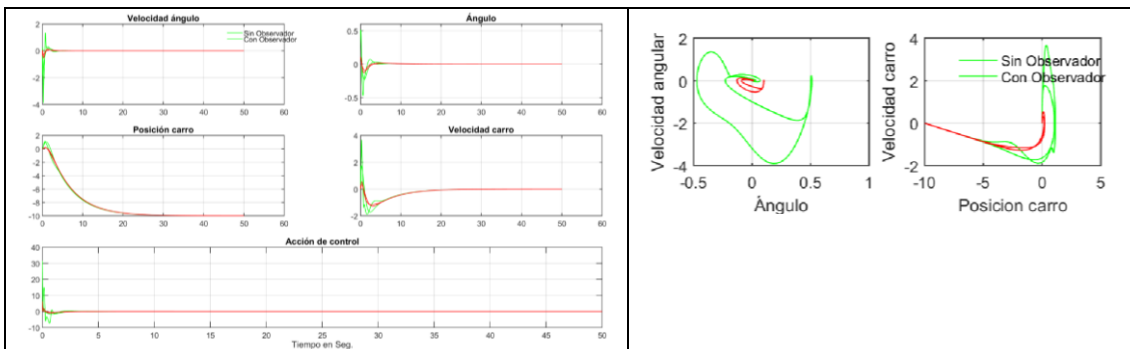


Fig. 6-8. Evolución del péndulo invertido a partir de 0,5 radianes, donde están superpuestas las repuestas con Observador y sin Observador de estados, para referencia no nula.