

## 7. Análisis y control en el espacio de estados en tiempo discreto

### 7.1. Modelos de tiempo discreto

Se ha considerado que la variable tiempo  $t$  puede tomar cualquier valor real positivo y por ello el modelo se denomina de tiempo continuo. Hay casos en que el proceso varía en forma discontinua con el tiempo o también procesos de tiempo continuo que admiten un modelo discretizado en el tiempo. En estos casos los modelos se denominan **modelos de tiempo discreto**.

Cuando se hace una modelación en el dominio temporal en tiempo discreto, las funciones temporales continuas pueden expresarse como funciones discretas, donde éstas toman el valor de la función continua en cada instante de tiempo discreto.

Si el intervalo de discretización es constante, denominado comúnmente **intervalo de muestreo**  $T_o$ , la función temporal discretizada tomará el valor de la función continua en

$$t = k T_o \text{ para } k = 0, 1, 2, \dots \quad (7-1)$$

Por simplicidad de notación los instantes de muestreo  $kT_o$  se representan simplemente por el valor de  $k$ .

Un sistema monovariable de orden  $n$  representado en tiempo discreto con entrada  $u(k)$  y salida  $y(k)$  podrá ser modelado por una ecuación en diferencias de orden  $n$ , cuya forma general esta dada por

$$\begin{aligned} y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) = \\ = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \dots + b_m u(k-m). \end{aligned} \quad (7-2)$$

A partir de las ecuaciones en diferencias que representan un modelo de tiempo discreto, es posible realizar una modelación en el **espacio de estado** de tiempo discreto. Procedimentalmente, el procedimiento es equivalente al realizado a partir de la ecuación diferencial

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = b_0 u^{(n)} + b_1 u^{(n-1)} + \dots + b_{n-1} \dot{u} + b_n u \quad (7-3)$$

que condujo, con las distintas generalizaciones, a las ecuaciones vectorial-matriciales de estado

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (7-4)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (7-5)$$

pero conceptualmente es diferente, ya que el dominio deja de ser el tiempo continuo y las derivadas dejan su lugar a las diferencias, siempre en el marco de los procesos dinámicos.

### 7.2. Discretización de la solución de estados en tiempo continuo

Dado el sistema modelado mediante las Ec. (7-4) y (7-5), la solución  $x(t)$  toma la forma,  $\forall t \in [t_0, t]$

$$\mathbf{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}\mathbf{B}\mathbf{u}(s)ds. \quad (7-6)$$

Si la acción de control  $\mathbf{u}(t)$  es escalonada, lo que asume un retentor de orden cero en el sistema,

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(kT), \quad t \in [kT, (k+1)T] \quad (7-7)$$

entonces la solución general del sistema en el intervalo  $\forall t \in [kT, (k+1)T]$  y considerando que  $\mathbf{u}(t)$  en ése intervalo es constante según se expresa en la Ec. (7-7), se tiene que

$$\mathbf{x}(t) = e^{A(t-kT)}\mathbf{x}(kT) + \left( \int_{kT}^t e^{A(t-s)}\mathbf{B}ds \right) \mathbf{u}(kT). \quad (7-8)$$

Si se muestrea a  $\mathbf{x}(t)$ , se tendrá el valor final del intervalo, que es  $\mathbf{x}((k+1)T)$ , sería entonces

$$\mathbf{x}_{(k+1)T} = e^{A((k+1)T-kT)}\mathbf{x}(kT) + \left( \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-s)}\mathbf{B}ds \right) \mathbf{u}(kT). \quad (7-9)$$

Que a su vez puede escribirse como

$$\mathbf{x}((k+1)T) = \mathbf{G}(T) \cdot \mathbf{x}(kT) + \mathbf{H}(T) \cdot \mathbf{u}(kT), \quad (7-10)$$

haciendo un cambio de variables en los límites de integración de  $s$  que va de  $kT$  a  $(k+1)T$ , por  $\tau$  que va de 0 a  $T$ , se cambia la variable  $\tau = (k+1)T - s$ , y se obtiene

$$\begin{cases} \mathbf{G} = e^{AT} \\ \mathbf{H} = \int_0^T e^{A\tau}\mathbf{B}d\tau. \end{cases} \quad (7-11)$$

que es la *ecuación equivalente con retentor de orden cero*. Si la matriz  $A$  es no singular, el cálculo de  $H$  se reduce a

$$\mathbf{H} = \int_0^T e^{A\tau}\mathbf{B}d\tau = A^{-1}(e^{AT} - I)\mathbf{B}. \quad (7-12)$$

La ecuación de salida, se convierte en

$$\mathbf{y}(kT) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}(kT) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}(kT), \quad (7-13)$$

que no dependen del intervalo de muestreo  $T$ .

Nótese que si  $T$  tiende a cero, la matriz  $\mathbf{G}(T)$  tiende a la identidad.

Tener en cuenta que

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \dots + \frac{1}{k!}A^kt^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^kt^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t)A^k \quad (7-14)$$

siendo la última igualdad en virtud del Teorema de Cayley Hamilton. Nótese que instrucción en Octave `expm(A*t)` es la función que implementa el cálculo.

De aquí en adelante, se empleará la nomenclatura A y B en lugar de G y H, para no introducir más variables.

Las ecuaciones de estado de tiempo discreto que modelan un sistema discreto multivariable resultan de la forma

$$\begin{aligned}x(k+1) &= A(k)x(k) + B(k)u(k) \\ y(k) &= C(k)x(k) + D(k)u(k).\end{aligned}\quad (7-15)$$

Para sistemas invariantes serán

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k).\end{aligned}\quad (7-16)$$

En la Fig. 7-1 se representa el diagrama en bloques del modelo de la Ec. (7-15).

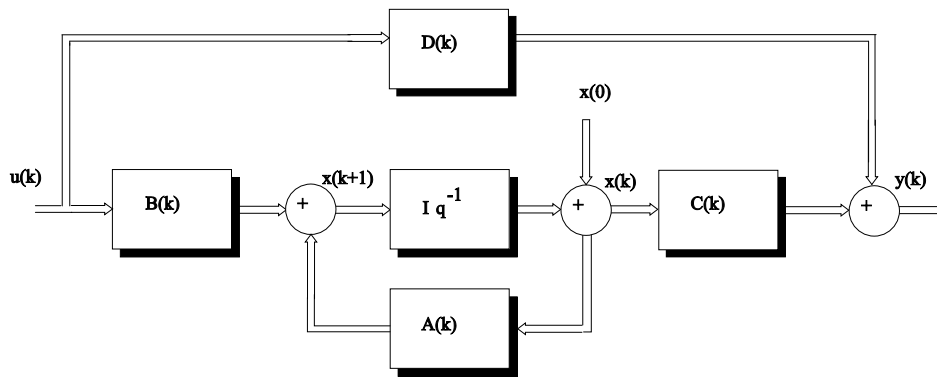


Fig. 7-1. Diagrama en bloques de un modelo dado por la Ec. (7-15).

El teorema de muestreo de Shannon asegura que si el intervalo  $T_o$  de discretización entre las muestras de una señal continua es

$$T_o \leq \frac{1}{2 f_{\max}},$$

siendo  $f_{\max}$  la frecuencia máxima del espectro de la señal no se pierde la información contenida en las señales continuas. Esto implica que respetando el teorema de Shannon se puede construir un modelo de estado de tiempo discreto que representa fielmente al proceso de tiempo continuo.

Es importante destacar que si bien las ecuaciones para modelos de estado de tiempo continuo son similares a las de tiempo discreto, las matrices de coeficientes serán distintas. Se establece una equivalencia entre las matrices de ambos modelos mediante la Ec. (7-11).

Los diseños de control digital de estado, hacen uso de este último modelo, por ello de ahora en más se trabajará exclusivamente con éste.

Las Ec. (7-15) y Ec. (7-16) solo modelan sistemas lineales. Esto es, el estado en  $x(k+1)$  se obtiene de una relación lineal entre  $x(k)$  y  $u(k)$ . Para sistemas no lineales el estado en  $x(k+1)$  será una función no lineal de  $x(k)$  y  $u(k)$ . En general las ecuaciones de estado que modelan a un sistema no lineal variante tendrán la forma

$$\begin{aligned}x(k+1) &= f[x(k), u(k), k] \\ y(k) &= g[x(k), u(k), k]\end{aligned}\tag{7-17}$$

Siendo  $f, g$  en general funciones vectoriales no lineales de  $x(k), u(k), k$ .

Aquí se tratan solamente sistemas que puedan modelarse en forma precisa o aproximada con las relaciones lineales dadas por las Ec. (7-15) y Ec. (7-16).

### 7.3. Carácter no único del modelo de estado

Supóngase una transformación lineal

$$z = Tx$$

donde  $z, x$  son vectores y  $T$  una matriz de transformación.

Entonces despejando  $x$  y reemplazando en la Ec. (7-15) se tiene

$$\begin{aligned}T^{-1}z(k+1) &= A(k)T^{-1}z(k) + B(k)u(k) \\ z(k+1) &= TA(k)T^{-1}z(k) + TB(k)u(k) \\ y(k) &= C(k)T^{-1}z(k) + D(k)u(k).\end{aligned}\tag{7-18}$$

Definiendo ahora

$$\begin{aligned}A^*(k) &= TA(k)T^{-1} & B^*(k) &= TB(k) \\ C^*(k) &= C(k)T^{-1} & D^*(k) &= D(k)\end{aligned}$$

y reemplazando en la Ec. (7-18) se tiene:

$$\begin{aligned}z(k+1) &= A^*(k)z(k) + B^*(k)u(k) \\ y(k) &= C^*(k)z(k) + D^*(k)u(k).\end{aligned}$$

Estas dos últimas ecuaciones son una *representación de estado para el mismo proceso*, obtenidas por transformación lineal del modelo anterior con la misma entrada y salida. Puesto que la única restricción para la matriz  $T$  es que sea no singular, se pueden obtener infinitos modelos en el espacio de estados para el mismo proceso.

### 7.4. Solución de la ecuación de estado de tiempo discreto

Con el objeto de hacer un planteo conceptual se analiza la solución de la ecuación de estado de tiempo discreto para un proceso invariante

$$x(k+1) = A x(k) + B u(k)\tag{7-19}$$

Resolviendo la Ec. (7-19) para los distintos valores de  $k$  a partir de  $k=0$  se tiene

$$\begin{aligned}
x(1) &= A x(0) + B u(0) \\
x(2) &= A x(1) + B u(1) \\
&= A^2 x(0) + AB u(0) + B u(1) \\
x(3) &= A x(2) + B u(2) \\
&= A^3 x(0) + A^2 B u(0) + AB u(1) + B u(2).
\end{aligned}$$

Generalizando se tiene para cualquier  $k$

$$\begin{aligned}
x(k) &= A^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} B u(j) \\
k &= 1, 2, 3, \dots
\end{aligned} \tag{7-20}$$

La Ec. (7-20) tiene dos partes: el primer sumando representa la contribución al estado del estado inicial y la sumatoria la contribución al estado actual de la secuencia de valores de la entrada.

La matriz

$$\phi(k) = A^k \tag{7-21}$$

se denomina **Matriz de Transición de Estado** y relaciona, en un sistema invariante, el estado final con el inicial para entrada nula. Reemplazando la Ec. (7-20) en la ecuación de salida Ec. (7-16), se obtiene el valor de la salida  $y(k)$  en función del estado inicial  $x(0)$  y todos los valores de la entrada  $u(k)$  desde el instante inicial hasta el valor  $k$

$$y(k) = CA^k x(0) + D u(k) + \sum_{j=0}^{k-1} CA^{k-j-1} B u(j). \tag{7-22}$$

### 7.5. Relación entre la representación de estado y la matriz o función de transferencia

Aplicando transformada Z a las Ec. (7-16) para condiciones iniciales nulas, se tiene

$$zx(z) = A x(z) + B u(z) \tag{7-23}$$

$$y(z) = C x(z) + D u(z). \tag{7-24}$$

Operando en Ec. (7-23)

$$x(z) = (zI - A)^{-1} B u(z)$$

y reemplazando en Ec. (7-24) se obtiene

$$y(z) = [C(zI - A)^{-1} B + D] u(z). \tag{7-25}$$

La matriz de transferencia discreta se define como

$$y(z) = G(z) u(z). \tag{7-26}$$

Comparando la Ec. (7-25) con la Ec. (7-26) se encuentra que

$$G(z) = [C(zI - A)^{-1} B + D]. \quad (7-27)$$

La Ec. (7-27) permite la transformación del modelo de estado al modelo representado en matriz de transferencia. Si el sistema es de una entrada y una salida la **matriz de transferencia**  $G(z)$  se transforma en una **función de transferencia**  $G(z)$ . Con la Ec. (7-27) la matriz de transferencia se puede escribir también como

$$G(z) = \frac{C \operatorname{adj}(zI - A) B + D \det(zI - A)}{\det(zI - A)}.$$

De esta manera la ecuación característica del modelo del proceso será

$$\det(zI - A) = 0. \quad (7-28)$$

Por lo tanto los polos del modelo del proceso son los **valores característicos o autovalores** de la matriz  $A$ .

### 7.5.1. Transformación de función de transferencia a espacio de estado.

Dada una función de transferencia discreta del sistema monovariable (7-2) que está expresado en ecuación en diferencias, como

$$\frac{y(z)}{u(z)} = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + b_2 z^{n-2} + \dots + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n} \quad (7-29)$$

se desea hallar la representación en variables de estado en tiempo discreto. Para ello, se procede multiplicando y dividiendo por  $x(z)$  e igualando numeradores y denominadores de ambos miembros. Se tiene el sistema

$$y(z) = [b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + b_2 z^{n-2} + \dots + b_n] x(z) \quad (7-30)$$

$$u(z) = [z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n] x(z). \quad (7-31)$$

Las ecuaciones en diferencias correspondientes a las Ec. (7-30) y Ec. (7-31), se obtienen transformándolas al dominio temporal,

$$y(k) = b_0 x(k+n) + b_1 x(k+n-1) + \dots + b_n x(k) \quad (7-32)$$

$$u(k) = x(k+n) + a_1 x(k+n-1) + \dots + a_n x(k). \quad (7-33)$$

Despejando  $x(k+n)$  de la Ec. (7-33)

$$x(k+n) = u(k) - a_1 x(k+n-1) - \dots - a_n x(k) \quad (7-34)$$

se hace la siguiente asignación de variables

$$\begin{aligned} x_1(k) &= x(k) \\ x_1(k+1) &= x_2(k) = x(k+1) \\ x_2(k+1) &= x_3(k) = x(k+2) \end{aligned} \quad (7-35)$$

$$\begin{aligned} & \vdots \\ x_{n-1}(k+1) &= x_n(k) = x(k+n-1) \\ x_n(k+1) &= x(k+n) = u(k) - a_n x(k) - \dots - a_1 x(k+n-1) . \end{aligned}$$

Reemplazando el sistema Ec. (7-35) en la Ec. (7-32) y en la Ec. (7-34)

$$y(k) = b_0 [u(k) - a_n x_1(k) - \dots - a_1 x_n(k)] + b_1 x_n(k) + \dots + b_n x_1(k) \quad (7-36)$$

$$x_n(k+1) = u(k) - a_1 x_n(k) - \dots - a_n x_1(k). \quad (7-37)$$

Luego poniendo el sistema de la Ec. (7-35) en forma matricial y observando la Ec. (7-37) se tiene

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n & \vdots & \vdots & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad (7-38)$$

y para la expresión de la Ec. (7-36)

$$y(k) = [b_n - a_n b_0 \quad b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \quad \dots \quad b_1 - a_1 b_0] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + [b_0] \cdot u(k). \quad (7-39)$$

Comparando las Ec. (7-38) y Ec. (7-39) con la Ec. (7-15) es

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n & \vdots & \vdots & \dots & -a_1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ \vdots \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix}, D = [b_0].$$

El modelo de estado representado por las matrices A, b, C, D se denomina **forma canónica controlable**.

Debido al carácter no único del juego de variables de estado, aplicando transformaciones lineales vistas, se obtienen otras formas canónicas en las cuales los autovalores de la matriz

de coeficientes serán iguales a los del modelo anterior pues los polos asociados al proceso son invariantes cualquiera que sea el modelo matemático con el cual se lo representa. Así pueden obtenerse estas formas estructuradas especialmente denominadas *formas canónicas*.

### 7.5.2. Forma canónica observable

Para el sistema definido por la Ec. (7-29) y representado por las Ecs. (7-38) y (7-39) se representan las matrices A, B, C y D por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -a_n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ \vdots \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} \quad (7-40)$$

$$C^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, D = [b_0] \quad (7-41)$$

### 7.5.3. Forma canónica diagonal

Considerando la factorización de la Ec. (7-29), asumiendo raíces distintas,

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = b_0 + \frac{c_1}{z + p_1} + \frac{c_2}{z + p_2} + \dots + \frac{c_n}{z + p_n} \quad (7-42)$$

entonces la forma canónica diagonal de la representación en espacio de estados del sistema está dado por

$$A = \begin{bmatrix} -p_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -p_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -p_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -p_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (7-43)$$

$$C = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n], D = [b_0] \quad (7-44)$$

### 7.5.4. Forma canónica de Jordan



Forma que toma la representación en espacio de estados del sistema Ec. (7-29) cuando tiene polos múltiples. Suponiendo que se repite tres veces el polo  $p_1$ , la Ec. (7-29) toma la forma

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = b_0 + \frac{c_1}{(z + p_1)^3} + \frac{c_2}{(z + p_1)^2} + \frac{c_3}{z + p_1} + \frac{c_4}{z + p_4} + \dots + \frac{c_n}{z + p_n} \quad (7-45)$$

y las matrices A, B, C y D se convierten en

$$A = \begin{bmatrix} -p_1 & 1 & 0 & 0 \dots & 0 \\ 0 & -p_1 & 1 & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -p_1 & 0 \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & -p_4 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots & -p_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (7-46)$$

$$C = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n], D = [b_0] \quad (7-47)$$

### 7.5.5. Motivación: Modelo discreto de un proceso continuo

Para realizar el control digital de un proceso continuo, se desea obtener el modelo de estado discreto del mismo. Como paso intermedio se obtiene el modelo discreto en el dominio Z. Al estar el proceso en un entorno discreto, las señales de entrada y salida deben ser de naturaleza discreta tal que puedan ser generadas o interpretadas por un computador. Para que el proceso opere normalmente, la señal de entrada discreta  $u(z)$  debe ser convertida en una señal de tipo quasi-continua, utilizándose en este caso un retenedor de orden cero. El conjunto proceso-retenedor, incluyendo los muestreadores se representa en la Fig. 7-2.

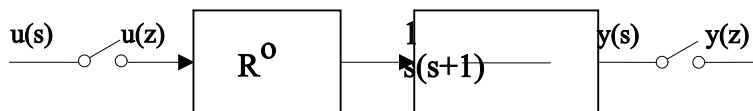


Fig. 7-2. Proceso continuo en un entorno discreto

La función de transferencia del conjunto proceso-retenedor es

$$G(s) = \frac{1-z^{-1}}{s} \frac{1}{s(s+1)} = (1-z^{-1}) \left[ \frac{1}{s^2(s+1)} \right].$$

La transformada Z de la parte continua se realiza descomponiendo la función en fracciones parciales y utilizando una tabla de transformadas Z

$$Z \left[ \frac{1}{s^2(s+1)} \right] = Z \left[ \frac{1}{s^2} \right] - Z \left[ \frac{1}{s} \right] + Z \left[ \frac{1}{s+1} \right].$$

$$\mathcal{Z} \left[ \frac{1}{s^2(s+1)} \right] = \frac{T_0 z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} - \frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{1}{1-e^{T_0} z^{-1}}.$$

tomando  $e^{T_0} = a$ , la función de transferencia discreta del conjunto proceso-retenedor resulta

$$G(z) = \frac{T_0 z^{-1}}{1-z^{-1}} - 1 + \frac{1-z^{-1}}{1-az^{-1}}$$

$$G(z) == \frac{(T_0 + a - 1)z^{-1} + (1 - aT_0 - a)z^{-2}}{(1-z^{-1})(1-az^{-1})}$$

suponiendo que es  $T_0 = 1$  seg, se obtiene el modelo para exponente negativo de la variable  $z$

$$G(z^{-1}) = \frac{0,368 z^{-1} + 0,264 z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 - 0,368 z^{-1})}$$

expresado en términos de potencias positivas es

$$G(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{0,368 z + 0,264}{(z - 1)(z - 0,368)} = \frac{b_1 z + b_2}{z^2 + a_1 z + a_2}.$$

### Transformación de función de transferencia a modelo de estado en 2do orden

Para obtener el modelo de estado se utiliza el procedimiento definido como **transformación de función de transferencia a espacio de estado**. Introduciendo la función auxiliar  $x(z)$ , la función de transferencia  $G(z)$  puede representarse como un sistema de dos ecuaciones en variable discreta  $z$ .

$$y(z) = (b_1 z + b_2) x(z)$$

$$u(z) = (z^2 + a_1 z + a_2) x(z)$$

la ecuación que involucra a  $y(z)$  representa la relación dinámica de la salida del sistema en relación a  $x(z)$ , mientras que aquella que incluye a  $u(z)$ , contempla la relación dinámica de la entrada del sistema en relación a  $x(z)$ . Estas ecuaciones pueden transformarse al dominio temporal obteniéndose las ecuaciones en diferencias que representan al sistema

$$y(k) = b_1 x(k+1) + b_2 x(k)$$

$$u(k) = x(k+2) + a_1 x(k+1) + a_2 x(k)$$

se hace la siguiente asignación de variables

$$x_1(k) = x(k)$$

$$x_1(k+1) = x_2(k) = x(k+1)$$

$$x_2(k+1) = x(k+2) = u(k) - a_1 x(k+1) - a_2 x(k)$$

reemplazando la asignación de variables en las ecuaciones de entrada y salida se obtiene

$$\begin{aligned}x_1(k+1) &= x_2(k) \\x_2(k+1) &= u(k) - a_1 x_2(k) - a_2 x_1(k)\end{aligned}$$

$$y(k) = b_1 x_2(k) + b_2 x_1(k) .$$

Este sistema de ecuaciones puede representarse matricialmente para la entrada como

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad (7-48)$$

y para la salida

$$y(k) = \begin{bmatrix} b_2 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} . \quad (7-49)$$

Las Ec. (7-48) y Ec. (7-49) modelan el sistema en el espacio de estado. En forma compacta resulta

$$\begin{aligned}x(k+1) &= A x(k) + b u(k) \\y(k) &= c^T x(k)\end{aligned} \quad (7-50)$$

siendo  $x(k)$  el vector de estado,  $A$  la matriz del sistema y  $b$ ,  $c$  los vectores de entrada y salida respectivamente. Estos se definen como

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} c^T = \begin{bmatrix} b_2 & b_1 \end{bmatrix} .$$

Las formas de las matrices del modelo de estado pertenecen al tipo **canónica controlable**.

## 7.6. Análisis de estabilidad

Para hacer un análisis simplificado de la estabilidad de un sistema invariante modelado en el espacio de estado, se supone sin perder generalidad la entrada  $u(k) = 0$ . Bajo esta condición, el estado final  $x(k)$  está relacionado al estado inicial  $x(0)$ , según la Ec. (7-20) por

$$x(k) = A^k x(0) .$$

Dado que la salida del sistema es según la Ec. (7-16) para entrada nula,

$$y(k) = C x(k)$$

siendo  $C$  invariante, es posible hacer el análisis de estabilidad directamente sobre la evolución del vector de estado  $x(k)$ .

Un sistema lineal invariante será estable si, teniendo una acción de entrada nula  $u(k) = 0$  y partiendo de un estado inicial cualquiera del espacio de estado distinto de cero  $x(0)$ , evoluciona hacia un estado  $x(k) = 0$ .

A partir de la Ec. (7-20) se concluye que siendo para entrada nula el sistema estable, la matriz de transición  $A^k$  debe ser tal que evolucionando  $k$ , conduzca el sistema al estado  $x(k)=0$ .

Con el objeto de hacer un análisis conceptual simplificado de la estabilidad, se supone un sistema con polos reales y distintos. En este caso y en virtud del carácter no único del modelo de estado (apartado 7.3), si  $A$  no tiene autovalores múltiples, siempre es posible transformar el modelo de estado tal que la matriz  $A$  del sistema tome la forma diagonal.

Siendo  $A$  diagonal, la Ec. (7-20) para entrada nula puede escribirse en forma explícita como

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & z_n^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix}$$

Los elementos de la diagonal de la matriz  $A$  son por definición los autovalores de la misma.

De la ecuación característica del sistema Ec. (7-28) los valores  $z_i$  son los polos del sistema. Por lo tanto para que el vector  $x(k)$  tienda a cero, los valores de  $z$  deben ser menores que uno. Esto implica que todos los polos del sistema deben estar ubicados dentro del círculo unitario en el plano  $Z$ . Este concepto puede extenderse también para sistemas cuya matriz  $A$  tenga autovalores múltiples, aunque su análisis resulta más complicado.

### 7.7. Alcanzabilidad y controlabilidad

Dado el sistema lineal invariante en tiempo discreto

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned} \quad (7-51)$$

con  $x(0)=x_0 \in \mathcal{R}^n$ , se tiene que es Alcanzable si se cumple que

$$\text{rango}[B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B] = \text{rango}(M) = n. \quad (7-52)$$

Alcanzabilidad está asociado a un valor del estado final  $x_f$  no necesariamente nulo. En el caso de la Controlabilidad, sí es nulo ése  $x_f$ .

Sin embargo, en el concepto de Controlabilidad del sistema (7-51) se tiene que será controlable si el rango de  $A^n$  es menor o igual al rango de  $M$ , lo que se escribe como

$$\text{rango}[B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B] = \text{rango}[B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B \quad A^n] \quad (7-53)$$

Para demostrarlo, sea el sistema definido por las ecuaciones de estado Ec. (7-51) se dice que es **completamente controlable**, si existe una secuencia realizable de control  $u(k)$  que pueda *transferir* el estado del sistema desde un valor inicial  $x(0)$  hasta un estado final

$x(N)=0$  en un número finito de pasos  $N$ .

Por razones de simplicidad algebraica se hace el análisis de controlabilidad para un sistema monovariable, los resultados obtenidos son fácilmente extensibles a un sistema multivariable. Para el sistema monovariable la Ec. (7-20)

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} b u(j).$$

para  $k = N$  toma la forma

$$x(N) = A^N x(0) + [b \quad Ab \quad \dots \quad A^{N-1}b] u_N \quad (7-54)$$

donde  $u_N$  es el vector cuyos componentes representan la secuencia de entrada

$$u_N^T = [u(N-1) \quad u(N-2) \quad \dots \quad u(0)]. \quad (7-55)$$

Si el orden del sistema es  $m$ , esto es la dimensión de  $A$  es  $m \times m$ , de las Ec. (7-54) y (7-55) se puede determinar de manera única la entrada para  $N = m$  ya que se obtiene un sistema de  $m$  ecuaciones con  $m$  incógnitas,

$$u_m = [b \quad Ab \quad \dots \quad A^{m-1}b]^{-1} [x(m) - A^m x(0)]. \quad (7-56)$$

La matriz

$$M = [b \quad Ab \quad \dots \quad A^{m-1}b] \quad (7-57)$$

se denomina matriz de controlabilidad. Para que  $u_m$  pueda ser determinado, esta matriz no debe tener columnas o filas linealmente dependientes. Para que el sistema sea alcanzable y controlable se debe cumplir entonces

$$\text{Rango}(M) = m. \quad (7-58)$$

Para  $N < m$  no existe una solución para  $u_N$ . Si  $N > m$  existen soluciones no únicas.

Para procesos multivariables se hacen los mismos razonamientos y la matriz de controlabilidad queda definida por

$$M = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{m-1}B]. \quad (7-59)$$

Como ejemplo simple, nótese que un sistema con su matriz de transición de estados definida como

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7-60)$$

genera que  $A^2$  sea nulo independientemente de la acción de control  $u(k)$ . Por lo tanto, si se pretende transferir el sistema a un  $x_f$  diferente del origen, el sistema debe ser Alcanzable además de controlable.

## 7.8. Diseño mediante asignación de polos en tiempo discreto

Dado el sistema lineal invariante en tiempo discreto

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k)\end{aligned}\quad (7-61)$$

se pretende hallar la relación lineal

$$u(k) = -Kx(k) \quad (7-62)$$

para que la dinámica del sistema de lazo cerrado sea la deseada por el usuario.

Reemplazando la (7-62) en la (7-61) se tiene

$$x(k+1) = (A - BK)x(k) \quad (7-63)$$

donde  $(A - BK)$  tiene los autovalores coincidentes con los polos de su ecuación característica, y por lo tanto del lazo cerrado. Por lo que se requiere hallar a la matriz  $K$  a partir de ellos.

Para el diseño, se procede seleccionando (Ogata, Pag 402) un conjunto de autovalores  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_n$ , por lo que la ecuación característica de lazo cerrado será

$$(z - \mu_1)(z - \mu_2) \cdots (z - \mu_n) = z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} z + \alpha_n = 0 \quad (7-64)$$

que a su vez coincide con los autovalores de la  $(A - BK)$ .

Se define a una matriz de transformación

$$T = MW \quad (7-65)$$

donde  $M$  es la matriz de controlabilidad definida como

$$M = [B \mid AB \mid \cdots \mid A^{n-1}B] \quad (7-66)$$

y la matriz  $W$  definida como

$$W = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7-67)$$

donde los coeficientes  $a_i$  son los que aparecen en el polinomio característico

$$|zI - A| = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0 \quad (7-68)$$

Se define el nuevo vector de estado  $\hat{x}$  como

$$\hat{x} = Tx. \quad (7-69)$$

Si la inversa de  $T$  existe, lo que está sujeto a que el sistema sea controlable, se puede reemplazar el estado  $x$  por el nuevo estado en las ecuaciones del sistema

$$\hat{x}(k+1) = T^{-1}AT \cdot \hat{x}(k) + T^{-1}B \cdot u(k) \quad (7-70)$$

donde las matrices de estados y de entrada tendrán la forma canónica controlable

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}, \quad (7-71)$$

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (7-72)$$

A su vez, la acción de control se transforma en

$$u(k) = -\mathbf{K}\mathbf{T}\hat{\mathbf{x}}(k) \quad (7-73)$$

siendo el controlador

$$\mathbf{K}\mathbf{T} = [\delta_n \quad \delta_{n-1} \quad \dots \quad \delta_1] \quad (7-74)$$

Este controlador se reemplaza en el modelo (7-70), obteniendo

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = (\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} \cdot \mathbf{K}\mathbf{T})\hat{\mathbf{x}}(k). \quad (7-75)$$

La ecuación característica de éste sistema es la misma que la del sistema sin transformar. Por lo tanto, seleccionando un conjunto de autovalores  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_n$ , la ecuación característica de lazo cerrado se convierte en

$$(z - \mu_1)(z - \mu_2) \dots (z - \mu_n) = z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} z + \alpha_n = 0 \quad (7-76)$$

que debe ser igual a la del sistema

$$|z\mathbf{I} - (\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} \cdot \mathbf{K}\mathbf{T})| = 0. \quad (7-77)$$

Así, reemplazando los valores obtenidos por las Ec (7-71), (7-73) y (7-74), se tiene que

$$\left| z\mathbf{I} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} [\delta_n \quad \delta_{n-1} \quad \dots \quad \delta_1] \right| = 0 \quad (7-78)$$

y operando para calcular la ecuación característica en términos de los coeficientes de diseño,

$$\begin{vmatrix} z & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & -1 \\ a_n + \delta_n & a_{n-1} + \delta_{n-1} & \dots & z + a_1 + \delta_1 & \end{vmatrix} = 0 \quad (7-79)$$

y resolviendo el determinante se llega a

$$z^n + (a_1 + \delta_1)z^{n-1} + \dots + (a_{n-1} + \delta_{n-1})z + (a_n + \delta_n) = 0 \quad (7-80)$$

que si se iguala a la Ecuación característica definida en la Ec. (7-76), se concluye que pueden despejar los valores  $\delta$  para construir el controlador de la Ec. (7-74), que resulta

$$\mathbf{KT} = [\alpha_n - a_n \quad \alpha_{n-1} - a_{n-1} \quad \dots \quad \alpha_1 - a_1] \quad (7-81)$$

de donde puede despejarse  $\mathbf{K}$

$$\mathbf{K} = [\alpha_n - a_n \quad \alpha_{n-1} - a_{n-1} \quad \dots \quad \alpha_1 - a_1] \mathbf{T}^{-1}. \quad (7-82)$$

El *diseño del controlador comienza ubicando a los polos  $\mu_i$* , que son los polos de lazo cerrado. Luego, mediante la Ec. (7-76) se obtienen los coeficientes  $\alpha_i$ , y resolviendo la Ec. (7-82) se obtiene el controlador  $\mathbf{K}$ .

Un caso particular, es asignar todos los polos de lazo cerrado en el plano  $Z$  al origen en la (7-80), lo que resulta en

$$\mathbf{K} = [-a_n \quad -a_{n-1} \quad \dots \quad -a_1] \mathbf{T}^{-1}. \quad (7-83)$$

y será el controlador que presentará la dinámica más rápida en lazo cerrado. El estado estará en su valor final en  $n$  pasos, siendo  $n$  el orden del sistema.

Nótese que éste método tiene como ventaja de que es un método simple y directo. No obstante, al igual que en el caso en tiempo continuo, no se tiene en cuenta el efecto conjunto de los polos en el comportamiento del sistema, ni tampoco la magnitud de las acciones de control. *El método requiere de iteraciones prueba y error hasta encontrar la respuesta adecuada.* Incluso éste método permite obtener el controlador con la dinámica más rápida, que es ***ubicar a todos los polos en el origen.***

### 7.8.1. Empleo de la Fórmula de Ackerman

Dada la ecuación característica de lazo cerrado deseada de (A-BK) por

$$\prod_{i=1}^n (z + \mu_i) = z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \alpha_2 z^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1} z + \alpha_n = 0, \quad (7-84)$$

se define  $\phi(A)$  como

$$\phi(A) = A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \alpha_2 A^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1} A + \alpha_n \neq \mathbf{0}, \quad (7-85)$$

y al igual que en el caso de tiempo continuo, para obtener el controlador  $\mathbf{K}$ , se puede usar la fórmula de Ackermann

$$\mathbf{K} = [0 \quad 1 \quad \dots] [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \dots]^{-1} \phi(A). \quad (7-86)$$



## Ejemplo de diseño para el péndulo invertido

Se desea implementar un controlador digital con un período de muestreo  $T=0,01$  segundos por ubicación de polos en el péndulo invertido del modelo dictado en los temas de tiempo continuo. Luego cambiar el período de muestreo de 0,1 y 0,001 segundos cuidando la magnitud de las componentes de K. Se sugiere usar el código de la Tabla 7-1. La Fig. 7-3 muestra la evolución de las variables de estado y control para  $T=0,01$ seg, y las condiciones iniciales de ángulo de 0,1 0,5 y 0,8 para una referencia nula.

```

clc;clear all;
Ts=0.1;KMAX=1000;T=Ts*KMAX;
m=.1;Fricc=0.1; long=0.6;g=9.8;M=.5;
TamanoFuente=20;
%pkg load signal; pkg load control; %Solo una vez
%Condiciones iniciales
alfa(1)=.5; colorc='.g';colorl='g';
% alfa(1)=.1; colorc='.r';colorl='r';
% alfa(1)=.8; colorc='.b';colorl='b';
alfa(1)=.8; colorc='.k';colorl='k';
%Versión linealizada en el equilibrio inestable. Sontag Pp 104.
% estado=[p(i); p_p(i); alfa(i); omega(i)]
Mat_Ac=[0 1 0 0;0 -Fricc/M -m*g/M 0; 0 0 0 1; 0 Fricc/(long*M) g*(m+M)/(long*M) 0];
Mat_Bc=[0; 1/M; 0; -1/(long*M)];
Mat_C=[1 0 0 0];
sys_c=ss(Mat_Ac,Mat_Bc,Mat_C,[0]);
sys_d=c2d(sys_c,Ts,'zoh');
Mat_A=sys_d.a;
Mat_B=sys_d.b;
H=[0;0;0;0];d_tao=Ts/100;tao=0;
for hh=1:100
    dH=expm(Mat_Ac*tao)*Mat_Bc*d_tao;
    H=H+dH;
    tao=tao+d_tao;
end
Mat_B=H;
Mat_A=expm(Mat_Ac*Ts);
Mat_M=[Mat_B Mat_A*Mat_B Mat_A^2*Mat_B Mat_A^3*Mat_B];%Matriz Controlabilidad
rango=rank(Mat_M);
%Cálculo del controlador por asignación de polos
auto_val=eig(Mat_A);
c_ai=poly(auto_val);
Mat_W=[c_ai(4) c_ai(3) c_ai(2) 1 ;c_ai(3) c_ai(2) 1 0 ;c_ai(2) 1 0 0 ;1 0 0 0 ];
Mat_T=Mat_M*Mat_W;
A_controlable=inv(Mat_T)*Mat_A*Mat_T %Verificación de que T esté bien
%Ubicación de los polos de lazo cerrado en mui:
mui(1)=0.9997; mui(2)=0.994568; mui(3)= conj(mui(2)); mui(4)=0.99; %Para Ts=0.001
% mui=mui*.98;
mui(1)=0.8590123457; mui(2)=0.978; mui(3)= conj(mui(2)); mui(4)=0.9019;%Para Ts=0.01
% mui=mui*0;
% mui=mui*.9998;
mui(1)=0.67987; mui(2)=0.6798; mui(3)= conj(mui(2)); mui(4)=0.79;%Para Ts=0.1
% mui=mui*0.999;
alfa_i=poly(mui);
K=fliplr(alfa_i(2:5)-c_ai(2:5))*inv(Mat_T);
abs(eig(Mat_A-Mat_B*K))
t=0; x=[0;0;alfa(1);0];
p(1)=x(1); p_p(1)=x(2); alfa(1)=x(3); omega(1)=x(4);
%Implementación del controlador en el modelo no lineal en tiempo continuo.
x=[0;0;alfa(1);0];
pl=x(1); p_pl=x(2); alfa=x(3); omegal=x(4);
p=x(1); p_p=x(2); alfa=x(3); omega=x(4); tita_pp(1)=0;h=Ts/20; u=[];i=1;
u_k(1)=0;
for ki=1:KMAX
    ul=-K*x;
    x=Mat_A*x+Mat_B*ul;
    pl(ki)=x(1);
    p_pl(ki)=x(2);
    alfa(ki)=x(3);
    omegal(ki)=x(4);
    u_kl(ki)=ul;
end
tl=(0:KMAX-1)*Ts;

```

```

x=[0;0;alfa(1);0];
for ki=1:KMAX
    u1(ki)=-K*x;
    for kii=1:Ts/h
        u(i)=u1(ki);
        p_pp=(1/(M+m))*(u(i)-m*long*tita_pp*cos(alfa(i))+m*long*omega(i)^2*sin(alfa(i))-
Fricc*p_p(i));
        tita_pp=(1/long)*(g*sin(alfa(i))-p_pp*cos(alfa(i)));
        p_p(i+1)=p_p(i)+h*p_pp;
        p(i+1)=p(i)+h*p_p(i);
        omega(i+1)=omega(i)+h*tita_pp;
        alfa(i+1)=alfa(i)+h*omega(i);
        x=[p(i); p_p(i); alfa(i); omega(i)];
        i=i+1;
    end
end
u(i)=u1(ki);t=0:h:T;
figure(1);
subplot(3,2,1);plot(tl,omegal,colorl,t,omega,colorc);grid on; title('Velocidad
ángulo','FontSize',TamanoFuente);hold on;
subplot(3,2,2);plot(tl,alfal,colorl,t,alfa,colorc);grid
on;title('Ángulo','FontSize',TamanoFuente);hold on;
subplot(3,2,3);plot(tl,pl,colorl,t,p,colorc);grid on;title('Posición
carro','FontSize',TamanoFuente);hold on;
subplot(3,2,4);plot(tl,p_pl,colorl,t,p_p,colorc);grid on;title('Velocidad
carro','FontSize',TamanoFuente);hold on;
subplot(3,1,3);plot(tl,u_kl,colorl,t,u,colorc);grid on;title('Acción de
control','FontSize',TamanoFuente);xlabel('Tiempo en Seg.','FontSize',TamanoFuente);hold
on;
figure(2);
subplot(2,2,1);plot(alfal,omegal,colorl,alfa,omega,colorc);grid
on;xlabel('Ángulo','FontSize',TamanoFuente);ylabel('Velocidad
angular','FontSize',TamanoFuente);hold on;
subplot(2,2,2);plot(pl,p_pl,colorl,p,p_p,colorc);grid on;xlabel('Posición
carro','FontSize',TamanoFuente);ylabel('Velocidad carro','FontSize',TamanoFuente);hold on;

```

Tabla 7-1. Código Octave del controlador para el Pendulo invertido en tiempo discreto.

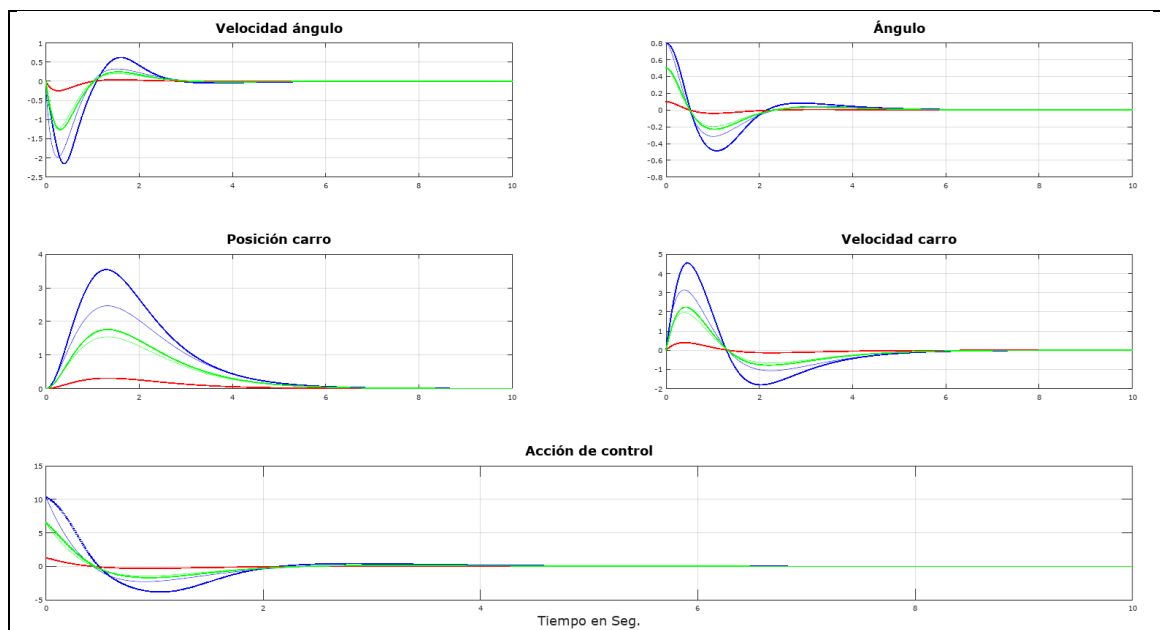


Fig. 7-3. Evolución en las variables en tiempo discreto con el sistema linealizado en línea fina y en línea gruesa la evolución del sistema no lineal.

