

3. Modelación de un sistema monovariable de orden n .

El sistema monovariable representado en la Fig. 3-1 de orden n se puede representar como

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = u(t). \quad (3-1)$$



Fig. 3-1. Sistema monovariable de orden n .

Conociendo los parámetros a_i del sistema, los valores de la variable de salida y sus derivadas hasta la de orden $n-1$ en $t=t_0$, $y(t_0)$, $\dot{y}(t_0)$, ..., $y^{(n-1)}(t_0)$, y la entrada $u(t)$ para $t \geq t_0$, puede determinarse el comportamiento futuro de la salida del sistema $y(t)$ para $t \geq t_0$. Para hacer la modelación en el espacio de estado se puede realizar la siguiente asignación:

$$\begin{aligned} x_1 &= y \\ x_2 &= \dot{y} \\ &\vdots \\ x_n &= y^{(n-1)}. \end{aligned} \quad (3-2)$$

De esta forma la ecuación diferencial de orden n (3-1), se puede transformar en un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \dots - a_1 x_n + u(t). \end{aligned} \quad (3-3)$$

El sistema (3-3) se puede expresar matricialmente como

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n & \vdots & \vdots & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} [u] \quad (3-4)$$

La Ec. (3-4) se puede escribir en forma compacta

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t). \quad (3-5)$$

De igual modo la salida del sistema queda expresada

$$y = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (3-6)$$

$$y(t) = C x(t). \quad (3-7)$$

El sistema monovariable de orden n representado por la ecuación diferencial Ec. (3-1) queda modelado en el espacio de estado por las siguientes ecuaciones diferenciales vectoriales-matriciales de primer orden

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A x(t) + b u(t) \\ y(t) &= C x(t) \end{aligned} \quad (3-8)$$

siendo u la entrada al sistema, y la salida del sistema, x el vector de estado, A la matriz del sistema, b el vector de entrada y c el vector de salida.

3.1.1. Sistema de orden n con derivadas en la función excitación

El sistema monovariable representado en la Fig. 3-1. de orden n se puede representar como

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = b_0 u^{(n)} + b_1 u^{(n-1)} + \dots + b_{n-1} \dot{u} + b_n u. \quad (3-9)$$

Ahora no se puede aplicar el método mostrado, debido a que las n ecuaciones diferenciales de (3-3) tendrían en la última ecuación un término polinómico en u y sus derivadas, y hacer $x_1=y$ no da un resultado único. Una solución sería resolver de tal manera el término polinómico de u para que se anulen sus derivadas, y sólo quede u en la ecuación de x_n . Así, una forma sería elegir las variables de estado restando una fracción de u y sus derivadas, como

$$\begin{aligned} x_1 &= y - \beta_0 u \\ x_2 &= \dot{y} - \beta_0 \dot{u} - \beta_1 u = \dot{x}_1 - \beta_1 u \\ x_3 &= \ddot{y} - \beta_0 \ddot{u} - \beta_1 \dot{u} - \beta_2 u = \dot{x}_2 - \beta_2 u \\ &\vdots \\ x_n &= y^{(n-1)} - \beta_0^{(n-1)} u - \beta_1^{(n-1)} \dot{u} - \dots - \beta_{n-2}^{(n-1)} \dot{u} - \beta_{n-1} u = \dot{x}_{n-1} - \beta_{n-1} u. \end{aligned} \quad (3-10)$$

Con ésta selección de las variables de estado la existencia y unicidad de la solución de las ecuaciones de estado queda garantizada. Aunque, no es única ésta característica ya que puede haber otra selección que también garantice la existencia y unicidad. Se obtiene, entonces

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + \beta_1 u \\ \dot{x}_2 &= x_3 + \beta_2 u \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n + \beta_{n-1} u \end{aligned} \quad (3-11)$$

Pero para obtener la derivada temporal de x_n , se debe reemplazar en la derivada temporal de

la última ecuación de la (3-10) con la derivada de y de mayor orden que tiene la (3-9) a todas las derivadas temporales de y , y asignarle valores a los parámetros β_i para que las derivadas temporales de u se anulen y se logre una igualdad como

$$\dot{x}_n = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \dots - a_1 x_n + \beta_n u(t) \quad (3-12)$$

El sistema Ec. (3-11) se puede expresar matricialmente como

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & \vdots \\ . & . & . & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & . & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix} u. \quad (3-13)$$

De igual modo la salida del sistema queda expresada como

$$y = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u, \quad (3-14)$$

donde se tiene una representación matricial análoga a la Ec (3-8), con los términos derivativos de u afectando a la matriz B y a la D.

Ejemplo

$$\ddot{y} + \dot{y} + y = u + \dot{u} \quad (3-15)$$

$$x_1 = y - \beta_0 u \Rightarrow \dot{x}_1 = \dot{y} - \beta_0 \dot{u} \quad (3-16)$$

Igualmente para x_2 ,

$$x_2 = \dot{y} - \beta_0 \dot{u} - \beta_1 u = \dot{x}_1 - \beta_1 u \quad (3-17)$$

de aquí que

$$\dot{x}_1 = x_2 + \beta_1 u \quad (3-18)$$

y también que

$$\dot{x}_2 = \ddot{y} - \beta_0 \ddot{u} - \beta_1 \dot{u} \quad (3-19)$$

Por lo tanto, introduciendo la derivada segunda de y en la (3-19)

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= u + \dot{u} - (x_2 + \beta_0 \dot{u} + \beta_1 u) - (x_1 + \beta_0 u) - \beta_0 \ddot{u} - \beta_1 \dot{u} \\ \dot{x}_2 &= -x_2 - x_1 \end{aligned} \quad (3-20)$$

con $\beta_0=0$ y $\beta_1=1$, se anula la derivada de u , resulta el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 \end{cases} \quad (3-21)$$

de donde se obtiene

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [1 \quad 0], D = [0]$$

En la Tabla 3-1 se muestra el código *.m* que permite observar el desempeño del modelo en variables de estado para una entrada senoidal, para la expresión (3-15).

```
%Verificación de la EDO
% ypp+yp+y=u1+up
% Condiciones iniciales nulas, respuestas al seguimiento.
clear all;close all;clc;
pkg load control;
pkg load signal;
T=10; Kmax=10000; At=T/Kmax;TamanoFuente=12;
u=zeros(1,Kmax);y=u;yp=y; t=0:At:T-At;
u=[0 sin(5*t+2)]; up=[0 diff(u)/At];
for jj=1:Kmax-1
    % ypp+yp+y=u1+up
    ypp=-yp(jj)-y(jj)+u(jj)+up(jj);
    %Integro
    yp(jj+1)=yp(jj)+ypp*At;
    y(jj+1) =y(jj) +yp(jj)*At;
end
figure;title('Sistema SISO');
subplot(2,2,1);plot(t,y,'.k');title('y'),hold on
subplot(2,2,3);plot(t,u(1:numel(t)),'k');title('u');xlabel('t [seg.]');
A=[0,1;-1,-1];
B=[1;0];
C=[1, 0];
D=[0];
Sis_ve=ss(A,B,C,D)
[num, den]=ss2tf(Sis_ve.a,Sis_ve.b,Sis_ve.c,Sis_ve.d,1)
x=[0;0];
U=[0];y_1(1)=0;hh=At*1;tve(1)=0;
for jj=1:Kmax-1
    U=u(jj);
    xp=A*x+B*U;
    Y =C*x+D*U;
    x=x+xp*At;
    y_1(jj+1)=Y(1);
    tve(jj+1)=tve(jj)+hh;
end
subplot(2,2,1);plot(tve,y_1,'r');
legend('EDO','Evolución en VE');
legend("boxoff");
```

Tabla 3-1. Código para verificar la correcta asignación de las variables de estado partiendo de la EDO.

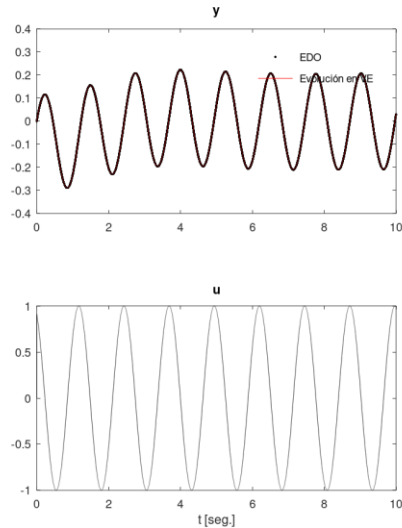


Fig. 3-2. Evolución de la solución a la EDO de la Ec (3-15), para una entrada senoidal, y mediante la solución de la representación en Variables de estado.

3.1.2. Representación de sistemas multivariables

Cuando se requiere considerar varias entradas y varias salidas de un sistema simultáneamente, se recurre a la representación mostrada en la Fig. 3-3, en la cual existen interacciones múltiples de las r entradas con las m salidas. Si se desea modelar con ecuaciones diferenciales, conduce a un sistema de $m \times r$ ecuaciones diferenciales, de distinto orden que contemplan las relaciones dinámicas de todas las entradas con las distintas salidas. El orden del sistema está dado por el número *mínimo de variables de estado* necesarias para describir la evolución del sistema, por la cantidad de elementos que almacenan energía y por la cantidad de integradores necesarios para obtener las variables sin derivar, que son afirmaciones equivalentes.

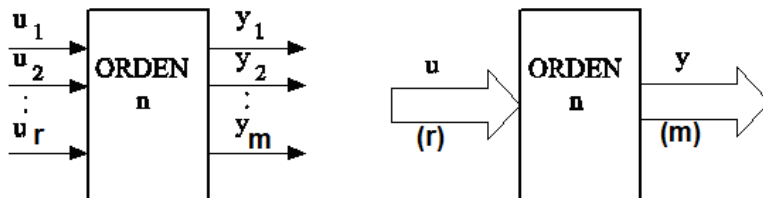


Fig. 3-3. Sistema Multivariable.

El sistema de las $m \times r$ ecuaciones diferenciales transformadas al dominio de la frecuencia en variable compleja s permite modelar al sistema multivariable a través de la matriz de transferencia $G(s)$,

$$y(s) = G(s)u(s) \quad (3-22)$$

donde $y(s)$ es el vector de salida de dimensión m , $u(s)$ es el vector de entrada de dimensión r , y $G(s)$ es la matriz de transferencia de dimensión $m \times r$. Cada elemento de la matriz $G(s)$ representa la Función de Transferencia $G_{ij}(s)$ de la entrada $u_j(s)$ respecto de la salida $y_i(s)$.

De la misma forma que para el caso monovariable, aunque con un mayor grado de

complejidad, resulta posible a través de una adecuada elección de las variables de estado, transformar todas las ecuaciones diferenciales en conjuntos de ecuaciones diferenciales de primer orden, y compactar la notación para obtener una ecuación diferencial matricial-vectorial de primer orden de la forma,

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (3-23)$$

donde \mathbf{A} es la matriz del sistema, \mathbf{B} es la *matriz* de entrada, \mathbf{C} es la *matriz* de salida y \mathbf{D} es la *matriz* de transferencia directa.

Para determinar la correcta dimensión de las distintas matrices componentes de la Ec. (3-23), resulta útil representar los vectores y matrices de la Ec. (3-23) por rectángulos cuyas longitudes de lados representan la dimensión considerada.

Las Ec. (3-23) pueden representarse esquemáticamente para un sistema multivariable con r entradas y m salidas como en la Fig. 3-4.

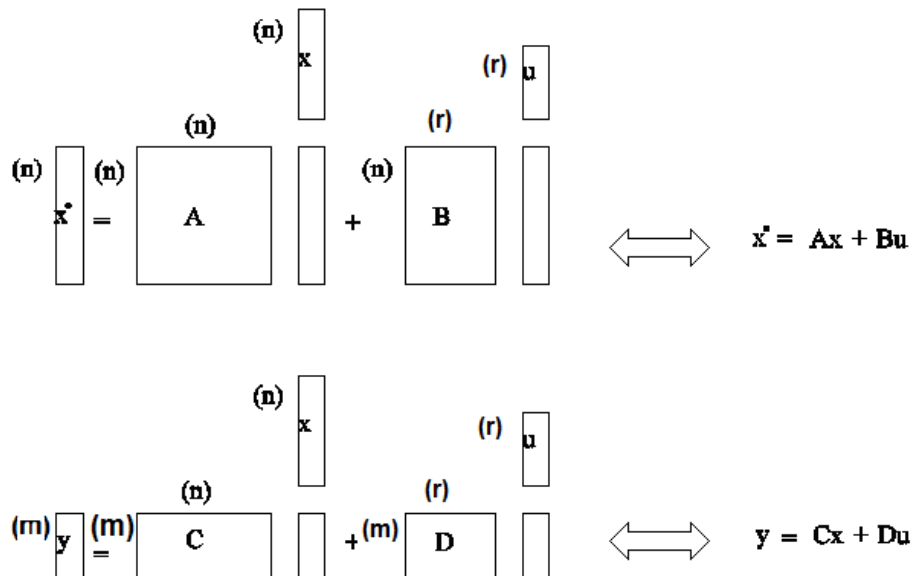


Fig. 3-4. Representación esquemática de las ecuaciones de estado.

Se observa que para un sistema multivariable la matriz de entrada \mathbf{B} toma la dimensión $n \times r$, la matriz de salida \mathbf{C} la dimensión $m \times n$, la matriz de transferencia directa \mathbf{D} la dimensión $m \times r$ y la matriz de estados \mathbf{A} , la dimensión $n \times n$, igual que para el caso monovariable.

Ejercicio sugerido

Verificar que el sistema de dos entradas con dos salidas

$$\ddot{y}_1 + \dot{y}_1 + y_2 = u_1 + \dot{u}_2 \quad (3-24)$$

$$\dot{y}_2 = y_1 + \dot{u}_1$$

admite una representación en variables de estado como ésta

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

(3-25)

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u \quad (3-26)$$

Tip: Resolver el sistema dado y verificar la solución mediante Octave. Por ejemplo, obtenida la expresión en variables de estado, se emplea el comando `ss2tf`, como muestra la Tabla 3-2.

```
%Verificación de la EDO
% y1pp+y1p+y2=u1+u2p
% y2p=y1+u1p,
% Condic iniciales nulas, respuestas al escalon.
clear all;clc;close all;
pkg load control;
pkg load signal;
T=10; Kmax=20000; At=T/Kmax;TamanoFuente=12;
u1=zeros(1,Kmax);y1=u1;y2=u1;y1p=y1;y2p=y2;
t=0:At:T-At;y1pp=0;
u1=[0 2*cos(10*t)];u1p=[diff(u1)/At];
u2=[0 2*sin(1*t)]; u2p=[diff(u2)/At];
for jj=1:Kmax-1
    % y1pp+y1p+y2=u1+u2p;
    % y2p=y1+u1p;
    y1pp=-y1p(jj)-y2(jj)+u1(jj)+u2p(jj);
    y2p(jj)=y1(jj)+u1p(jj);
    %Integro
    y2(jj+1)=y2(jj)+y2p(jj)*At;
    y1p(jj+1)=y1p(jj)+y1pp*At;
    y1(jj+1)=y1(jj)+y1p(jj)*At;
end
figure;title('Sistema MIMO');
subplot(2,2,1);plot(t,y1,'k');title('y_1'),hold on
subplot(2,2,2);plot(t,y2,'k');title('y_2'); hold on
subplot(2,2,3);plot(t,u1(1:numel(t)),'k');title('u_1');xlabel('t
[seg.]');
subplot(2,2,4);plot(t,u2(1:numel(t)),'k');title('u_2');xlabel('t
[seg.]');
A=[0,1,0;0,-1,-1;1,0,0];
B=[0, 1;0, -1;0,0];
C=[1, 0,0;0,0,1];
D=[0 0;1 0];
Sis_ve=ss(A,B,C,D)
[num, den]=ss2tf(Sis_ve.a,Sis_ve.b,Sis_ve.c,Sis_ve.d,1);
sys1=tf(num,den)
[num, den]=ss2tf(Sis_ve.a,Sis_ve.b,Sis_ve.c,Sis_ve.d,2);
sys2=tf(num,den)
x=[0;0;0];U=[0;0];y_1(1)=0;y_2(1)=0;
for jj=1:Kmax-1
    U(1)=u1(jj);
    U(2)=u2(jj);
    xp=A*x+B*U;
    y =C*x+D*U;
    x=x+xp*At;
    y_1(jj+1)=y(1);
    y_2(jj+1)=y(2);
end
subplot(2,2,1);plot(t,y_1,'r');
subplot(2,2,2);plot(t,y_2,'r');legend('EDO','Evolución en
VE');legend('boxoff');title('y_2','FontSize',TamanoFuente);

ans
num =
Sis_ve.a =
      x1      x2      x3
x1      0      1      0
x2      0     -1     -1
```

```

x3  1  0  0

Sis_ve.b =
      u1  u2
x1  0   1
x2  0  -1
x3  0   0

Sis_ve.c =
      x1  x2  x3
y1  1   0   0
y2  0   0   1

Sis_ve.d =
      u1  u2
y1  0   0
y2  1   0

Continuous-time model.

Transfer function 'sys1' from input 'u1' to output ...

y1:  0
y2:  1

Transfer function 'sys1' from input 'u2' to output ...

      1 s^2 - 1.11e-16 s - 2.465e-32
y1:  -----
      s^3 + 1 s^2 + 7.772e-16 s + 1

      1 s
y2:  -----
      s^3 + 1 s^2 + 1

Continuous-time model.

Transfer function 'sys2' from input 'u1' to output ...

y1:  0
y2:  1

Transfer function 'sys2' from input 'u2' to output ...

      1 s^2 - 1.11e-16 s - 2.465e-32
y1:  -----
      s^3 + 1 s^2 + 7.772e-16 s + 1

      1 s
y2:  -----
      s^3 + 1 s^2 + 1

Continuous-time model.

```

Tabla 3-2. Comandos y respuestas (ans) del Octave para verificar la representación en variables de estado de sistemas multivariables.

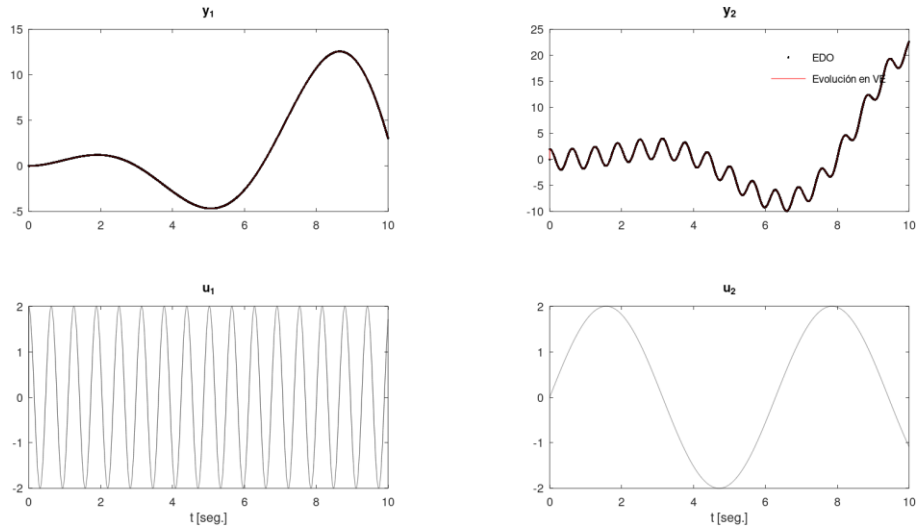


Fig. 3-5. Evolución de la solución a la EDO de la Ec (3-24), para entradas senoidales, comparación con la solución de la representación en Variables de estado.

Ejemplo MIMO

Si los sistemas ya están expresados en arreglo de funciones de transferencia, es más complejo expresar su representación en variables de estado manteniendo el concepto del mínimo número de variables necesarias. Por ejemplo, para el caso de dos salidas con dos entradas dada por

$$H = \frac{1}{4s^2 + 4s + 1} \begin{bmatrix} -s+2 & 2s+1 \\ -3 & -s+2 \end{bmatrix}. \quad (3-27)$$

En éste caso, puede emplearse el método de asignación de variables de estado visto, se obtiene la representación en variables de estado, y para la primer componente y_1

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,25 & -1 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} -0,25 & 0,5 \\ 3/4 & -0,25 \end{bmatrix}, C_1 = [1 \quad 0], D = 0, \quad (3-28)$$

mientras que para la segunda componente del vector de salida y_2 es

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,25 & -1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 & -0,25 \\ -3/4 & 3/4 \end{bmatrix}, C_2 = [1 \quad 0], D = 0, \quad (3-29)$$

donde las matrices de salida coinciden y las de entrada son diferentes. Esto requiere una composición de la siguiente manera

$$A = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3-30)$$

cuya representación logra la descripción del comportamiento del sistema en variables de estado.

Aquí se requirieron ocho variables de estado. En la Tabla 3-3 se detalla el código para verificar la respuesta a funciones de entrada senoidales, y en la Fig. 3-6 se observan sus gráficas.

En general, es más probable que se requieran n variables de estado por cada salida. Por lo que el sistema matricial de variables de estado estaría compuesto por una matriz de estado de $2n \times 2n$.

```
% Verificación de la EDO
% Condiciones iniciales nulas.
clear all;clc;close all;
pkg load control;
pkg load signal;
T=15; Kmax=30000; At=T/Kmax;TamanoFuente=12;
u1=zeros(1,Kmax);y1=u1;y2=u1;y1p=y1;y2p=y2; t=0:At:T-At;y1pp=0;
u1=[0 12* sign(cos(1.2*t))];u1p=[0 diff(u1)/At];
u2=[0 1.5* sign(cos(1.3*t+1))];u2p=[ 0 diff(u2)/At];
for jj=1:Kmax-1
    y1pp=(1/4)*(-u1p(jj)+2*u1(jj)+2*u2p(jj)+u2(jj)-4*y1p(jj)-
y1(jj));
    y2pp=(1/4)*(-3*u1(jj)+u2(jj)-u2p(jj)-4*y2p(jj)-y2(jj));
    %Integro
    y2p(jj+1) =y2p(jj)+y2pp*At;
    y2(jj+1) =y2(jj) +y2p(jj)*At;
    y1p(jj+1) =y1p(jj)+y1pp*At;
    y1(jj+1) =y1(jj) +y1p(jj)*At;
end
figure;
subplot(2,2,1);plot(t,y1,'.k'); title('y_1'),hold on
subplot(2,2,2);plot(t,y2,'.k');title('y_2'); hold on
subplot(2,2,3);plot(t,u1(1:numel(t)),'k'); title('u_1');xlabel('t
[seg.]')
subplot(2,2,4);plot(t,u2(1:numel(t)),'k');title('u_2');xlabel('t
[seg.]')
A=[0,1;-.25,-1];
A=[A zeros(size(A));zeros(size(A)) A];
B1=[ -.25 .5; 3/4 -.25];
B2=[0 -.25;-3/4 3/4];
B=[B1;B2];
C=[1 0 0 0;0 0 1 0];
D=[0 0;0 0];
% Para verificar usando Octave
% num11=[-1 2];num12=[2 1];
% num21=[-3]; num22=[-1 2];
% den=[4 4 1];
% H11=tf(num11,den);H12=tf(num12,den);
% H21=tf(num21,den);H22=tf(num22,den);
% H=[H11 H12;H21 H22];
% sys=ss(H,'minimal');
% A=sys.a;
% B=sys.b;
% C=sys.c;
% D=sys.d;
x=[0;0;0;0];U=[0;0];y_2(1)=0;
for jj=1:Kmax-1
    U(1)=u1(jj);
    U(2)=u2(jj);
    xp=A*x+B*U;
    y =C*x+D*U;
    x=x+xp*At;
    x11(jj)=x(1);
    x22(jj)=x(2);
    y_1(jj+1)=y(1);
    y_2(jj+1)=y(2);
end
subplot(2,2,1);plot(t,y_1,'r');
subplot(2,2,2);plot(t,y_2,'r');legend('EDO','VE');legend('boxoff');
```

Tabla 3-3. Comandos .m para verificar la representación en variables de estado de sistemas multivariados con dos salidas y dos entradas.

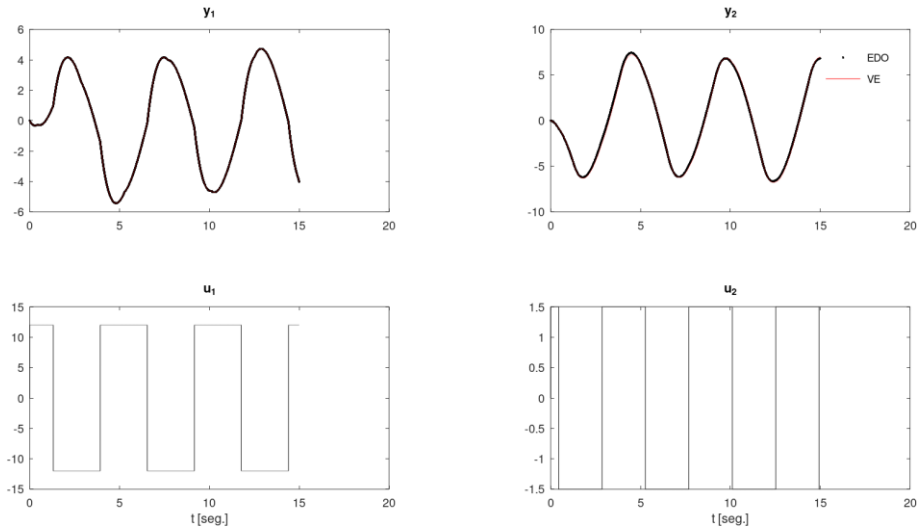


Fig. 3-6. Evolución de la solución a la EDO de dos salidas expresada por la matriz de transferencia de la Ec (3-27), para entradas cuadradas. Comparación con la solución de la representación en Variables de estado.

3.1.3. Método con variable auxiliar

Si no es importante que las variables de estado estén relacionadas a una dimensión específica dado que es posible de medirla, entonces puede abstraerse su selección. Se propone una asignación en la que no aparezcan las derivadas de la entrada como ocurría en la asignación anterior.

Sea la función de transferencia

$$F_T(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} = \frac{N(s)}{D(s)}. \quad (3-31)$$

Se multiplica y divide cada función de transferencia por una variable auxiliar $X(s)$, como

$$\frac{Y}{U} = \frac{N(s)}{D(s)} \frac{X(s)}{X(s)}. \quad (3-32)$$

Se obtienen las igualdades entonces

$$\begin{aligned} Y(s) &= N(s)X(s), \\ U(s) &= D(s)X(s) \end{aligned} \quad (3-33)$$

que en el dominio del tiempo es

$$y = b_0 x^{(n)} + b_1 x^{(n-1)} + \dots + b_{n-1} \dot{x} + b_n x \quad (3-34)$$

y para u es

$$u = x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{x} + a_n x. \quad (3-35)$$

Se hacen las asignaciones como

$$\begin{aligned}
x_1 &= x \\
\dot{x}_1 &= x_2 = \dot{x} \\
\dot{x}_2 &= x_3 = \ddot{x} \\
&\vdots \\
&\vdots \\
&\vdots \\
\dot{x}_{n-1} &= x_n = x^{(n-1)}
\end{aligned}
\tag{3-36}$$

$$\dot{x}_n = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \dots - a_1 x_n + u(t).$$

Y luego se reemplazan todas éstas asignaciones en la igualdad de la salida y_t en función de x , pero incluyendo el reemplazo de u_t en la derivada enésima de x

$$\begin{aligned}
y &= b_0 (-a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \dots - a_1 x_n + u(t)) + b_1 x_n + \dots \\
&+ b_{n-1} x_2 + b_n x_1
\end{aligned}
\tag{3-37}$$

que resulta en

$$y = (b_1 - b_0 a_1) x_n + (b_{n-1} - b_0 a_{n-1}) x_2 + (b_n - b_0 a_n) x_1 + b_0 u(t) \tag{3-38}$$

y se llega a la forma de variables de estado siguiente

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 1 \\ -a_n & \vdots & \vdots & \dots & -a_1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3-39}$$

$$C = [b_n - a_n b_0 \quad b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \quad \dots \quad b_1 - a_1 b_0] \quad d = [b_0] \tag{3-40}$$

conocida como forma canónica controlable.

3.1.4. Método de asignación anidada

El objetivo de esta asignación es que la salida del sistema coincida con la n -ésima variable de estado.

Partiendo de la expresión donde u es la entrada y y es la salida,

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \tag{3-41}$$

operando

$$Y(s)(s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n) = U(s)(b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n) \tag{3-42}$$

se tiene que

$$Y(s)s^n = b_0 U(s)s^n + (b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n)U(s) - (a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n)Y(s) \quad (3-43)$$

agrupando en las potencias de s , se tiene

$$Y(s)s^n = b_0 U(s)s^n + (b_1 U(s) - a_1 Y(s))s^{n-1} + \dots + (b_{n-1} U(s) - a_{n-1} Y(s))s + b_n U(s) - a_n Y(s) \quad (3-44)$$

despejando $Y(s)$ queda

$$Y(s) = b_0 U(s) + \left(\frac{1}{s} (b_1 U(s) - a_1 Y(s)) + \dots + \frac{1}{s^{n-1}} (b_{n-1} U(s) - a_{n-1} Y(s))s + \frac{1}{s^n} (b_n U(s) - a_n Y(s)) \right) \quad (3-45)$$

igualando el paréntesis a la n -ésima variable de estado, se tiene

$$Y(s) = b_0 U(s) + X_n(s) \quad (3-46)$$

que en el tiempo es

$$y_t = b_0 u + x_n \quad (3-47)$$

obteniendo así la ecuación de salida de la representación en variables de estado.

Continuando con la asignación de la n -ésima variable de estado, se hizo la asignación

$$X_n(s) = \frac{1}{s} (b_1 U(s) - a_1 Y(s)) + \dots + \frac{1}{s^{n-1}} (b_{n-1} U(s) - a_{n-1} Y(s)) + \frac{1}{s^n} (b_n U(s) - a_n Y(s)) \quad (3-48)$$

cuya derivada es

$$sX_n(s) = b_1 U(s) - a_1 Y(s) + \dots + \frac{1}{s^{n-2}} (b_{n-1} U(s) - a_{n-1} Y(s)) + \frac{1}{s^{n-1}} (b_n U(s) - a_n Y(s)) \quad (3-49)$$

y en el tiempo permite definir la n -ésima ecuación de estados, donde se tiene a otra variable de estado, X_{n-1}

$$\dot{x}_n = b_1 u_t - a_1 y_t + x_{n-1}. \quad (3-50)$$

La asignación de X_{n-1} en Laplace es

$$X_{n-1} = \frac{1}{s} (b_2 U(s) - a_2 Y(s)) + \dots + \frac{1}{s^{n-2}} (b_{n-1} U(s) - a_{n-1} Y(s))s + \frac{1}{s^{n-1}} (b_n U(s) - a_n Y(s)) \quad (3-51)$$

y su derivada se obtiene luego de multiplicar por s ,

$$sX_{n-1} = b_2 U(s) - a_2 Y(s) + \dots + \frac{1}{s^{n-3}} (b_{n-1} u^{(n-1)} - a_{n-1} y^{(n-1)}) + \frac{1}{s^{n-2}} (b_n U(s) - a_n Y(s)) \quad (3-52)$$

donde se hace la asignación de X_{n-2} en s ,

$$sX_{n-1} = b_2 U(s) - a_2 Y(s) + X_{n-2} \quad (3-53)$$

que en el tiempo es

$$\dot{x}_{n-1} = b_2 u_t - a_2 y_t + x_{n-2} \quad (3-54)$$

obteniendo la n-1-ésima ecuación de estados.

Queda asignado a x_{n-2} como

$$X_{n-2} = \dots + \frac{1}{s^{n-3}} (b_{n-1} u^{(n-1)} - a_{n-1} y^{(n-1)}) + \frac{1}{s^{n-2}} (b_n U(s) - a_n Y(s))$$

Repitiendo n-1 veces, se llega a

$$sX_2 = \frac{1}{s^{n-n+1+1}} (b_{n-1} U(s) - a_{n-1} Y(s)) + \frac{1}{s^{n-n+1}} (b_n U(s) - a_n Y(s)) \quad (3-55)$$

y en el tiempo es

$$\dot{x}_2 = b_{n-1} u_t - a_{n-1} y_t + x_1 \quad (3-56)$$

de donde queda asignado x_1 como el último término, que luego de derivarlo en el tiempo se obtiene

$$sX_1 = b_n U(s) - a_n Y(s) \quad (3-57)$$

que en el tiempo es

$$\dot{x}_1 = b_n u_t - a_n y_t \quad (3-58)$$

que es la primer ecuación de estados.

Finalmente, el sistema completo empleando la Ec de salida (3-47), las ecuaciones de los estados (3-50), (3-54), (3-56), y (3-58) se obtiene la expresión compacta matricial como

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -a_n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ . \\ . \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} u \quad (3-59)$$

$$y = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 1] \cdot x + b_0 u. \quad (3-60)$$

Esta representación es conocida como forma canónica observable.

3.1.5. Ejercicios sugeridos

1-Verificar que la ecuación diferencial

$$\ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_2 y = b_0 \ddot{u} + b_1 \dot{u} + b_2 u \quad (3-61)$$

tiene la siguiente representación en variables de estado

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} u \quad (3-62)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \beta_0 u \quad (3-63)$$

2-Representar en variables de estado empleando el método de la variable auxiliar al diagrama de la Fig. 3-7, y verificar en simulación la respuesta al escalón durante 10 segundos la respuesta al escalón unitario.

3-Representar en variables de estado al sistema de la Fig. 3-7 empleando el método de la asignación anidada, y verificar mediante simulación computacional durante 10 segundos la respuesta al escalón.

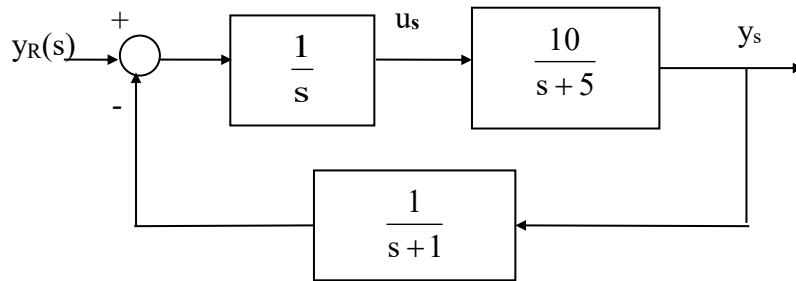


Fig. 3-7. Diagrama en bloques con filtro en la medición.

3.1.6. Bibliografía

[1] Ogata, K. Modern Control Engineering. 1997. Prentice Hall.