



TRABAJO PRÁCTICO N°8: Determinantes

1. Calcular, en caso de ser posible, el determinante de las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1+i\sqrt{2} & 1 \\ 10 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 11 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 10 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} & i \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & \sqrt{2}i & -1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 3 & 7 & -2 \end{bmatrix}$$

2. Dada la matriz:  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -1 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & 8 \end{bmatrix}$

Calcular los adjuntos o cofactores de los elementos  $a_{32}$ ,  $a_{13}$ ,  $a_{22}$  y  $a_{21}$ .

3. Dadas las siguientes matrices

$$E = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ 9 & 1 & 1 & 16 \\ 27 & 1 & 1 & 64 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hallar el determinante de cada una de ellas desarrollándolo por los elementos de una fila y luego por los elementos de una columna.

*Sugerencia:* Elegir la fila o columna más conveniente.

4. Determinar el o los valores de  $z$  que satisfacen las siguientes condiciones:

$$a) \ z \in \mathbb{C} : \begin{vmatrix} z-i & \overline{3-i} \\ -1 & z+i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z & -1 \\ z^2 & 1+2i \end{vmatrix}$$

$$b) \ z \in \mathbb{R} : \begin{vmatrix} z-3 & 1+\sqrt{3} \\ 0 & z-2 \end{vmatrix} \leq 6$$

$$c) \ z \in \mathbb{R} : \begin{vmatrix} 1 & \pi & 0 \\ 0 & 4 & cis\pi \\ 0 & -2 & z^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} cis\frac{\pi}{2} & 5 \\ -3 & i^{17} \end{vmatrix}$$

5. Justificar usando propiedades por qué el determinante de las matrices  $C$  y  $D$  del *ejercicio N° 1* y la matriz  $F$  del *ejercicio N° 3* es igual a 0.
6. Sean  $A, B \in M_3(\mathbb{R})$  y  $C \in M_2(\mathbb{R})$  tales que sus determinantes son 3, 2 y  $-1$  respectivamente. Hallar, si es posible:

a)  $|A^t B^2|$

e)  $|3AB + BA|$

b)  $|AC|$

f)  $|5A + C^2|$

c)  $|-(AB^3)^t \cdot I^7|$

g)  $|5A| + |C^2|$

d)  $|3AB - AB|$

7. Considerar la matriz  $E$  del *ejercicio N° 3* y la matriz  $M = \begin{bmatrix} 1/6 & -1/2 & -5/6 \\ 1/6 & -1/2 & 1/6 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$

Decir, *sin calcular*  $E^{-1}$  *y justificando la respuesta*, si  $M$  es la matriz inversa de  $E$ .

8. Dada la siguiente matriz:  $A = \begin{bmatrix} 2 & t & 0 \\ t & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- a) Calcular los valores de  $t$  para los cuales el determinante de  $A$  toma valores positivos. Calcular el mayor valor que alcanza.  
 b) Analizar para qué valores de  $t$  la matriz  $A$  tiene inversa y calcular  $A^{-1}$  cuando  $t = 0$ .  
 c) Para  $t = 1$  y considerando  $B \in M_3(\mathbb{R})$  tal que  $|B| = 5$ , calcular:

i)  $|(AB)^{-1}|$                       ii)  $|(\frac{1}{2}A)^{-1}B^t|$

9. Sea  $E \in M_5(\mathbb{R})$  tal que  $|E^2E^t| = -27$ . Resolver la ecuación matricial  $EX = |E|E$  justificando cada paso.

¿Es  $X$  una matriz escalar?

10. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F) justificando las respuestas.

a)  $\exists x \in \mathbb{Z} / \left( 2|x \implies \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \pi & \sqrt{2} & i \\ x & 2x & 3x \end{vmatrix} = 0 \right)$

b)  $\sim \left[ \exists x \in \mathbb{C} / \begin{vmatrix} x & i \\ i & x \end{vmatrix} = (x-i)(x+i) \right]$

c)  $\forall x \in \mathbb{R} : \begin{bmatrix} x & 1 & 3+x \\ 0 & -1 & 2 \\ x & 0 & 5+x \end{bmatrix}$  no es inversible.

d)  $\forall A \in M_n(\mathbb{R}) \forall k \in \mathbb{R} - \{0\} \forall m \in \mathbb{N} \ (A \text{ es inversible} \implies kA^m \text{ es inversible})$

e)  $\forall A \in M_n(\mathbb{R}) \forall n \in \mathbb{N} \left( A \text{ es inversible} \wedge n \text{ es impar} \implies |(3A^3)^{-1}A^t(-A^2)| = -\frac{1}{3^n} \right)$