ELEMENTOS DE ÁLGEBRA
(2do cuatrimestre de 2022)

TRABAJO PRÁCTICO N°9: Sistemas de Ecuaciones Lineales

1. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones e interpretarlos gráficamente.

a) $\begin{cases} 3x + 50y = 79 \\ 4x - 11y = -50 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} -7x_1 + 14x_2 = 7 \\ \frac{3}{2}x_1 - 3x_2 = -\frac{3}{2} \end{cases}$ *c)* $\begin{cases} 348x + y = 247 \\ 58x + \frac{1}{6}y = 341 \end{cases}$

2. Analizar gráficamente todas las posibles soluciones de un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas.

3. Dadas las siguientes ecuaciones, dar la solución general y tres soluciones particulares.

a) $x_1 - 5x_2 = 9$ *b)* $2a - 5b + c = \dfrac{1}{2}$ *c)* $x - 2y + z - 4w = 6$

4. Dados los siguientes sistemas de ecuaciones lineales en forma matricial, expresarlos en la notación usual.

a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot y - \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot z = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}$

5. Dado el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} ax - by = 2 \\ bx + y = -18 \end{cases}$

Hallar, si es posible, los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ para que la dupla $(5, -13)$ sea solución del mismo.

6. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales mediante el método de Gauss o Gauss-Jordan, indicando en cada caso el conjunto solución. Si el sistema es compatible indeterminado dar dos soluciones particulares.

a) $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + 3y + 2z = 5 \\ x + 4y + 2z = 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + 3y + 2z = 0 \\ x + 4y + z = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y + 7z = 1 \\ 2x + 4y + 14z = 6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 2y + 3z - 4w = 5 \\ 3x - y - 5z - 5w = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x + 3y - z = 4 \\ x - 2y + z = -7 \\ -3x + 2y + 2z = 14 \\ 3x + y = -3 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ -3x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$

7. En los siguientes incisos se da la forma escalonada reducida de un sistema de ecuaciones lineales. Determinar si el sistema correspondiente es compatible o incompatible. Si es compatible dar la solución, poniéndole nombre a las variables: $x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots$, etc.

$a)\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ $\quad b)\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right]$ $\quad c)\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$d)\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right]$ $\quad e)\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right]$ $\quad f)\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

8. Determinar, usando el Teorema Rouché Frobenius, para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

$a)\ \begin{cases} 5x + 3y + 4z = 3 \\ 5y + 2z = 4 \\ (a^2 - 1)z = a - 1 \end{cases}$

$b)\ \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 3x - y + 5z = 2 \\ 4x + y - (a^2 - 6)z = a + 8 \end{cases}$

$c)\ \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + 2z = 3 \\ x + ay + 3z = 2 \end{cases}$

$d)\ \begin{cases} ax + y + z = 0 \\ x + ay + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

$e)\ \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x - ay - z = -3a \\ ax + 3y + 3z = 3 \end{cases}$

$f)\ \begin{cases} x + 3y - 2z = 5 \\ ay = 0 \\ ay + (a^2 - 25)z = a + 5 \\ 2x + (6 + a)y + (a^2 - 29)z = a + 15 \end{cases}$

$g)\ \begin{cases} ax + 2y + 2z + a^2 w = 2 \\ x + y + z + (a - 1)w = 0 \\ -x - ay - z = -2a \end{cases}$

9. Dado el sistema de ecuaciones lineales $A \cdot X = B$, hallar X sabiendo que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3/7 & 1/7 \\ -1/7 & 2/7 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

10. Expresar en forma matricial los siguientes sistemas de ecuaciones lineales y resolverlos, si es posible, aplicando inversibilidad de matrices.

$a)\ \begin{cases} 3x + 12y + 9z = 3 \\ 2x + 5y + 4z = 4 \\ -x + 3y + 2z = -5 \end{cases}$ $\quad b)\ \begin{cases} 2x - y - 2z = 2 \\ 2y - z = -1 \\ 2x - 5y = 3 \end{cases}$

11. Sea A la matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales con el mismo número de incógnitas que de ecuaciones. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

a) Si $|A| \neq 0$ entonces el sistema es compatible determinado.

b) Si $|A| = 0$ entonces el sistema es compatible indeterminado.

c) Si el sistema es homogéneo y $|A| = 0$ entonces el sistema es compatible indeterminado.

d) Si $|A| = 4$ entonces es posible resolver el sistema usando inversibilidad de matrices.

12. Dado el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x - y + 3z = 2 \\ x - 3y + 3z = 6 \\ -x + 5y - 3z = -10 \end{cases}$

Determinar si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos. Justificar.

a) El conjunto $S = \{(x, x - 2 + 3z, z), x, z \in \mathbb{R}\}$ es conjunto solución de la primera ecuación del sistema.

b) El punto $P = (3, 0, 1)$ es una solución particular de la segunda ecuación del sistema.

c) El punto $P = (3, 0, 1)$ pertenece al conjunto solución del sistema.

d) El conjunto $S = \left\{(x, -2, \frac{x-2-y}{-3}), x, y \in \mathbb{R}\right\}$ es solución del sistema.

e) El sistema tiene infinitas soluciones.

f) Los conjuntos $S_1 = \{(-3z, -2, z), z \in \mathbb{R}\}$ y $S_2 = \{(x, -2, -\frac{1}{3}x), x \in \mathbb{R}\}$ son solución del sistema.

g) $\forall\, b \in \mathbb{R} :\ \nexists\, a \in \mathbb{R} \,/\, (-3b,\ a,\ b)$ sea solución del sistema.

h) $\exists\, b \in \mathbb{R} \,/\, (3b,\ -2,\ b)$ sea solución del sistema.

i) El sistema se puede resolver usando inversibilidad de matrices.

j) Es posible agregar una ecuación al sistema dado de modo que el conjunto solución del nuevo sistema sea unitario.

k) No es posible agregar una ecuación con coeficientes no nulos al sistema dado de modo que el conjunto solución del nuevo sistema sea vacío.

l) Es posible agregar una ecuación con coeficientes no nulos al sistema dado de modo que el conjunto solución del nuevo sistema sea igual al conjunto solución del sistema dado.