# **Polinomios**

**Definción:** Se llama polinomio en x con coeficientes en K a la expresión

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

donde  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$   $a_i \in K$  y K puede ser  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  ó  $\mathbb{C}$ .

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$
 término independiente coeficiente principal

- $a_i$ ,  $0 \le i \le n$  son los **coeficientes** de P(x).
- So  $a_n = 1$  el polinomio se dice **mónico**.
- Si  $a_i = 0$ , para todo  $1 \le i \le n$  el polinomio se llama **nulo**.

Obs: No está definido el grado del polinomio nulo.

K[x]: conjunto de **TODOS** los polinomios con coeficientes en K.

$$\mathbb{Z}[x] \subseteq \mathbb{Q}[x] \subseteq \mathbb{R}[x] \subseteq \mathbb{C}[x]$$

**Ej:** 
$$P(x) = -x^3 + 3x^8 - 5x + 4 = 3x^8 + 0x^7 + 0x^6 + 0x^5 + 0x^4 - x^3 + 0x^2 - 5x + 4$$

• gr(P(x) = 8

completo y ordenado en forma decreciente

- Coeficiente principal: 3
- Término independiente: 4

**Definción:** Dados dos polinomios  $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$  y  $Q(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n$  diremos que

$$P(x) = Q(x) \Leftrightarrow a_i = b_i$$
, para todo  $i = 1, \dots n$ .

#### **OPERACIONES ENTRE POLINOMIOS:**

1) Suma: Se suman los coeficientes de los monomios de igual grado.

**Ej:** Si 
$$P(x) = x^4 - 3x^3 + x + 2$$
 y  $Q(x) = -x^3 + 5x^2 + 3$  entonces:

$$P(x) + Q(x) = (1 + 0)x^{4} + (-3 + (-1))x^{3} + (0 + 5)x^{2} + (1 + 0)x + (2 + 3)$$
$$= x^{4} - 4x^{3} + 5x^{2} + x + 5$$

2) **Producto:** Se aplica la propiedad distributiva y posteriormente se suman los monomios de igual grado.

**Ej:** Si  $P(x) = x^4 - 3x$  y  $Q(x) = -x^3 + 5$  entonces:

$$P(x)Q(x) = (x^4 - 3x)(-x^3 + 5) = -x^7 + 5x^4 + 3x^4 - 15x = -x^7 + 8x^4 - 15x$$

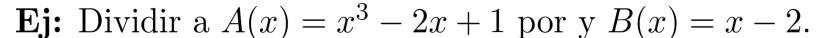
**Obs:** 
$$gr(P(x)Q(x)) = gr(P(x)) + gr(Q(x))$$

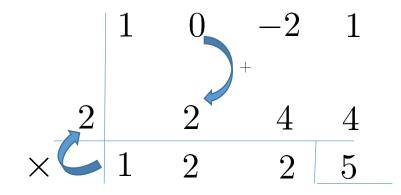
## 3) División entera:

**Teorema:** Dados dos polinomios A(x),  $B(x) \in K[x]$ ,  $B(x) \neq 0$ , existen dos polinomios Q(x) y  $R(x) \in K[x]$ , llamados cociente y resto respectivamente de dividir A(x) por B(x), unívocamente determinados tales que

$$A(x) = Q(x)B(x) + R(x), \quad \text{con } R(x) = 0 \text{ ó } gr(R(x)) < gr(B(x)).$$

**REGLA DE RUFFINI:** Se utiliza para dividir un polinomio por otro de la forma (x-a). Se trabaja con los coeficientes del polinomio exclusivamente y éste debe estar completo y ordenado en forma decreciente.





$$Q(x) = x^2 + 2x + 2$$
 cociente  $R(x) = 5$  resto

$$A(x) = (x^2 + 2x + 2)(x - 2) + 5$$





**Obs:** Si el resto de una división de A(x) por B(x) es 0 el polinomio A(x) se puede factorizar.

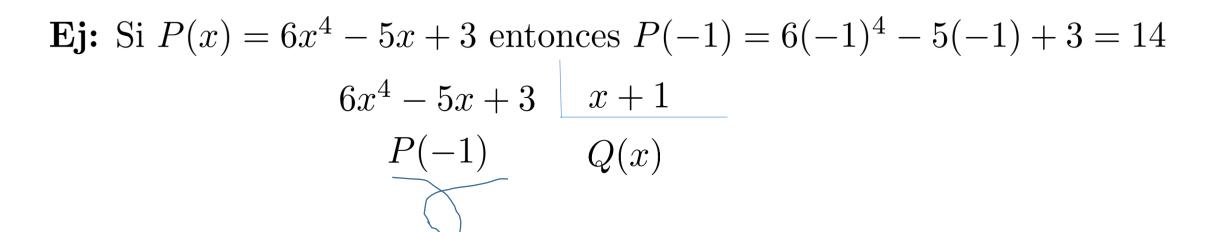
**Definción:** Diremos que el polinomio B(x) divide al polinomio A(x) si y sólo si A(x) = Q(x)B(x).

**Ej:** 
$$x-2$$
 divide a  $x^2-4$  pues  $x^2-4=(x-2)(x+2)$ .

**Definción:** Se llama **valor numérico** de un polinomio a número que resulta de reemplazar la variable por un número cualquiera dado y efectuar las operaciones.

**Ej:** Si 
$$A(x) = x^3 - 2x + 1$$
 entonces 
$$A(2) = 2^3 - 2.2 + 1 = 5$$
 coincide con resto de dividir  $A(x)$  por  $x - 2$ .

**Teorema del resto:** El resto de una división de un polinomio P(x) por otro de la forma (x-c) es igual al valor numérico que dicho polinomio toma para x=c, o sea al valor P(c).



**Obs:** B(x) divide a  $A(x) \Leftrightarrow A(x) = Q(x)B(x)$  $\Leftrightarrow$  el resto de la división de A(x) por B(x) es 0.

## RAÍCES DE UN POLINOMIO:

**Definición:** Dado  $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \in K[x]$ , un elemento  $c \in K$  se dice **raíz** de P(x) si P(c) = 0.

## **Ejemplos:**

- Si  $P(x) = x^2 2x + 1$ 
  - entonces c = 1 es raíz de P(x) pues  $P(1) = 1^2 2.1 + 1 = 0$ .
- Si  $Q(x) = x^4 16$ entonces  $c_1 = 2$ ,  $c_2 = -2$ ,  $c_3 = 2i$  y  $c_4 = -2i$  son raíces de P(x).
- Si  $R(x) = x^2 + 1$  entonces P(x) no tiene raíces reales pero sí complejas:  $i \ y i$ .
- Si M(x) = (x-1)(x-2)(x+4)entonces  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 2$  y  $c_3 = -4$  son sus raíces.

### Corolario del teorema del resto:

Un elemento  $c \in K$  es raíz de un polinomio  $P(x) \in K[x]$  si y sólo si P(x) es divisible por (x - c).

**Dem:** c es raíz de  $P(x) \Leftrightarrow P(c) = 0$   $\Leftrightarrow$  el resto de la división de P(x) por x - c es 0  $\Leftrightarrow P(x) = (x - c)Q(x)$  $\Leftrightarrow P(x)$  es divisible por x - c.

**Ej:** 2 es raíz de 
$$P(x) = x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$$

**Def:** Si c es una raíz de un polinomio P(x), se llama **orden de multiplicidad** de la raíz c al mayor número natural k tal que P(x) es divisible por  $(x-c)^k$  y no lo es por  $(x-c)^{k+1}$ .

Es decir,  $P(x) = (x - c)^k Q(x)$  donde Q(x) no es divisible por x - c.

Teorema fundamental del algebra: Todo polinomio de grado n > 0 con coeficientes en  $\mathbb C$  tiene exactamente n raíces en  $\mathbb C$ .

**Teorema:** Sea P(x) un polinomio con coeficiente reales, es decir,  $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ , y z una raíz compleja de P(x) entonces  $\overline{z}$  también es raíz de P(x) y z y  $\overline{z}$  tienen el mismo orden de multiplicidad.

**Obs:** El polinomio  $P(x) = (x - z)(x - \overline{z}), z \in \mathbb{C}$  tiene coeficientes reales.



## CÁLCULO DE RAÍCES DE UN POLINOMIO:

n raíces de P(x)

$$P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 = a_n (x - c_1)(x - c_2) \ldots (x - c_n)$$

$$c$$
 es raíz de  $P(x) \Leftrightarrow P(c) = 0$ 

• Caso n=1: Despejamos.

**Ej:** Si 
$$P(x) = 2x + 5 = 2(x - (-\frac{5}{2}))$$

$$2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}$$

• Caso n=2: Aplicamos la fórmula de Baskara.

$$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

**Ej:** Si 
$$P(x) = x^2 - 3x - 4$$
  
 $x^2 - 3x - 4 = 0$ 

$$x_1 = 4$$

$$x_2 = -1$$

$$P(x) = (x-4)(x+1)$$

 $\bullet$  Caso especial: Bicuadrática. Se realiza una sustitución y se reduce al caso n=2.

**Ej:** Si 
$$P(x) = x^4 - 3x^2 - 4$$

$$x^{4} - 3x^{2} - 4 = 0 \Leftrightarrow t^{2} - 3t - 4 = 0$$

Luego, 
$$x^{2} = 4$$

$$x^{2} = 4$$

$$x^{2} = -2$$

$$x^{3} = i$$

$$x^{2} = -1$$

$$x^{4} = -i$$

$$P(x) = (x-2)(x+2)(x-i)(x+i)$$

## MÉTODO PARA CALCULAR RAÍCES RACIONALES:

**Teorema de Gauss:** Si un número racional  $\frac{p}{q}$  con mcd(p,q) = 1 es raíz de un polinomio  $P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$  con coeficientes enteros entonces p divide a  $a_0$  y q divide a  $a_n$ .

**Obs:** P(x) y kP(x) tiene las mismas raíces.  $(k \neq 0)$ 

Corolario: Si  $a_n = 1$  entonces las raíces racionales de P(x) sólo pueden ser enteras y se encuentran entre los divisores de  $a_0$ .

**Ej:** Si 
$$P(x) = x^{543} + x + 1$$
  $\Rightarrow$   $P(x)$  no tiene raíces racionales.

Posible raíces racionales:  $\frac{p}{q} = \pm 1$ 

Como 
$$P(1) = 3 \neq 0$$
 y  $P(-1) = -1 \neq 0$