ELEMENTOS DE ÁLGEBRA
(2do cuatrimestre de 2022)

TRABAJO PRÁCTICO N°6: Números enteros

---

1. Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Señalar cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y cuáles falsas, justificando cada respuesta.

   a) Si $6|a$ entonces $3|a$
   b) Si $10|a$ entonces $5 \nmid a$
   c) Si $14 \nmid a$ entonces $7 \nmid a$
   d) Si $21 \nmid a$ entonces $3|a$
   e) $a|b$ ó $a|c$, si $a|(b+c)$
   f) Si $a|(b.c)$ entonces $a|b$ ó $a|c$
   g) $a|c$ y $b|c$ si y sólo si $(a.b)|c$
   h) Si $a|b$ y $b|c$ entonces $a|c$

2. Cualesquieran sean $a,\ b,\ c \in \mathbb{Z}$, probar que

   a) $a|(b+c)$ y $a|b$ implica que $a|c$
   b) Si $a|b$ y $a|c$ entonces $a|(b+c)$ y $a|(b-c)$
   c) $a|b$, si $-a|b$
   d) Si $a|b$ y $-b|a$ entonces $|a| = |b|$

3. Demostrar utilizando el Principio de Inducción Completa, que

   a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(6i+3)$ es divisible por 3, cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$.
   b) $6|(n^3+5n),\ \forall n \in \mathbb{N}$.

4. Hallar el cociente y el resto de dividir:

   a) 1845 por 35.
   b) 70 por 81.
   c) -57 por 13.
   d) -560 por 17.
   e) -64 por -23.
   f) 104 por -3.

5. *a*) Sean $a,\ b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0$. Si $a - b = 175$ y la división de a por b tiene cociente 15 y resto 7, hallar a y b.
   b) Si el resto de la división de un número entero a por 7 es 5, calcular el resto de la división por 7 de:
      i) $2a$
      ii) $10a+1$
      iii) $-13a-4$

6. *a*) Sabiendo que el resto de dividir a "a" por 10 es 5 probar que $10|(3a+15)$.
   b) Probar que el resto de dividir a "a" por 3 es 2 y $3|(a^2-1)$, si existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $a = 3k-1$.

7. *a*) Hallar los conjuntos $D(30),\ D(42)$ y $D(30,42)$
   b) Usando el inciso anterior, calcular $(30,42)$ y $(-30,42)$

8. *a*) Utilizando el Algoritmo de Euclides, calcular:

   i) $(13,\ 101)$ ii) $(-24,\ -61)$ iii) $(-187,\ 77)$ iv) $(330,\ -42)$ v) $(901,\ -1219)$

   b) En los incisos i), ii) y iv), expresar (a, b) en la forma $ax + by$ con $x, y \in \mathbb{Z}$

   c) Analizar si $\exists\, x \in \mathbb{Z}/\ 330 | 42x - 24$. Justificar

9. *a*) Si $a,\ b,\ k$ e y son enteros, $k\,a + y\,b = 6$, ¿qué se puede decir sobre el *mcd* de a y b? ¿Cuáles son las posibilidades? Justificar

   b) Si a y b son enteros tales que $8a + 29b = 2$ y a es impar, ¿cuál es el *mcd* entre a y b? Justificar

   c) Si $40u + 25v = 15$, $(u, v) \neq 1$ y $(v, 5) = 1$, ¿cuál es (u, v)? Justificar

10. Probar que no existen x, y enteros tales que $x + y = 100$ y $(x, y) = 3$

11. Sabiendo que $(a, b) = 8$, calcular

    a) $(a, (b, 16))$ *b*) $(-3a, -3b)$ *c*) $(a + 24b, b)$

12. Si $a,\ b,\ c$ indican números enteros arbitrarios, señalar cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y cuáles falsas, justificando cada respuesta.

    a) Si $5 |\, 49\, a$ entonces $5 | a$.

    b) Si $5 | (37\, a^2 + 10)$ entonces $5 | a$.

    c) $(a, 7) = 1$, si $7 \nmid a$.

    d) Si p es un entero primo entonces $p | a$ o $(a, p) = 1$.

    e) $7 | 5\, a\, (b - 7)$, si $7 | a\, b$.

13. Determinar cuáles de los siguientes números son primos:

    a) 113 *b*) 174 *c*) 411 *d*) 1001 *e*) 223 *f*) 171 *g*) 401

14. Expresar los siguientes números como producto de ± 1 por potencias de primos positivos distintos dos a dos.

    a) 6500 *b*) -2310 *c*) $(1470)^3$ *d*) $-16 \cdot 208^2 \cdot (20)^4$

15. *a*) ¿Cuántos divisores naturales tiene 1800? Hallarlos

    b) ¿Cuántos divisores tiene 729? ¿Cuáles son?

16. Hallar el *mcd* de los siguientes pares de enteros usando la descomposición en factores primos.

    a) $a = 6500, \quad b = 175$

    b) $a = 2310, \quad b = 1470$

    c) $a = -500, \quad b = 208$

    d) $a = 10^2 \cdot 15^2 \cdot (19 \cdot 21)^4 \cdot 33, \quad b = (6 \cdot 11)^2 \cdot 19 \cdot 24^3 \cdot 30 \cdot 49$