Polinomios

Defınción: Se llama polinomio en x con coeficientes en K a la expresión

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

donde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ $a_i \in K$ y K puede ser $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$.

grado $(gr(P(x))$

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

término independiente

coeficiente principal

- a_i, $0 \leq i \leq n$ son los **coeficientes** de $P(x)$.
- So $a_n = 1$ el polinomio se dice **mónico**.
- Si $a_i = 0$, para todo $1 \leq i \leq n$ el polinomio se llama **nulo**.

  Obs: No está definido el grado del polinomio nulo.

$K[x]$: conjunto de **TODOS** los polinomios con coeficientes en K.

$$\mathbb{Z}[x] \subseteq \mathbb{Q}[x] \subseteq \mathbb{R}[x] \subseteq \mathbb{C}[x]$$

Ej: $P(x) = -x^3 + 3x^8 - 5x + 4 = \underbrace{3x^8 + 0x^7 + 0x^6 + 0x^5 + 0x^4 - x^3 + 0x^2 - 5x + 4}_{\text{completo y ordenado en forma decreciente}}$

- $gr(P(x)) = \boxed{8}$
- Coeficiente principal: $\boxed{3}$
- Término independiente: $\boxed{4}$

Defínción: Dados dos polinomios $P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ y $Q(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n$ diremos que

$$P(x) = Q(x) \quad \Leftrightarrow \quad a_i = b_i, \text{ para todo } i = 1, \ldots n.$$

OPERACIONES ENTRE POLINOMIOS:

1) **Suma:** Se suman los coeficientes de los monomios de igual grado.

Ej: Si $P(x) = x^4 - 3x^3 + x + 2$ y $Q(x) = -x^3 + 5x^2 + 3$ entonces:

$$\begin{aligned} P(x) + Q(x) &= (1+0)x^4 + (-3+(-1))x^3 + (0+5)x^2 + (1+0)x + (2+3) \\ &= x^4 - 4x^3 + 5x^2 + x + 5 \end{aligned}$$

2) **Producto:** Se aplica la propiedad distributiva y posteriormente se suman los monomios de igual grado.

Ej: Si $P(x) = x^4 - 3x$ y $Q(x) = -x^3 + 5$ entonces:

$$P(x)Q(x) = (x^4 - 3x)(-x^3 + 5) = -x^7 + 5x^4 + 3x^4 - 15x = -x^7 + 8x^4 - 15x$$

Obs: $gr(P(x)Q(x)) = gr(P(x)) + gr(Q(x))$

3) División entera:

Teorema: Dados dos polinomios $A(x)$, $B(x) \in K[x]$, $B(x) \neq 0$, existen dos polinomios $Q(x)$ y $R(x) \in K[x]$, llamados cociente y resto respectivamente de dividir $A(x)$ por $B(x)$, unívocamente determinados tales que

$$A(x) = Q(x)B(x) + R(x), \quad \text{con} \quad R(x) = 0 \text{ ó } gr(R(x)) < gr(B(x)).$$

<u>**REGLA DE RUFFINI:**</u> Se utiliza para dividir un polinomio por otro de la forma (x-a). Se trabaja con los coeficientes del polinomio exclusivamente y éste debe estar completo y ordenado en forma decreciente.

Ej: Dividir a $A(x) = x^3 - 2x + 1$ por y $B(x) = x - 2$.

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 0 & -2 & 1 \\ & & + & & \\ 2 & & 2 & 4 & 4 \\ \hline \times & 1 & 2 & 2 & 5 \end{array}$$

$Q(x) = x^2 + 2x + 2 \longleftarrow$ **cociente**

$R(x) = 5 \longleftarrow$ **resto**

$$A(x) = (x^2 + 2x + 2)(x - 2) + 5$$

Obs: Si el resto de una división de $A(x)$ por $B(x)$ es 0 el polinomio $A(x)$ se puede factorizar.

Defnción: Diremos que el polinomio $B(x)$ divide al polinomio $A(x)$ si y sólo si $A(x) = Q(x)B(x)$.

Ej: $x - 2$ divide a $x^2 - 4$ pues $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$.

Defnción: Se llama **valor numérico** de un polinomio a número que resulta de reemplazar la variable por un número cualquiera dado y efectuar las operaciones.

Ej: Si $A(x) = x^3 - 2x + 1$ entonces

$$A(2) = 2^3 - 2.2 + 1 = 5$$

coincide con resto de dividir $A(x)$ por $x - 2$.

Teorema del resto: El resto de una división de un polinomio $P(x)$ por otro de la forma $(x-c)$ es igual al valor numérico que dicho polinomio toma para $x=c$, o sea al valor $P(c)$.

Ej: Si $P(x)=6x^4-5x+3$ entonces $P(-1)=6(-1)^4-5(-1)+3=14$

$$\begin{array}{r|l} 6x^4-5x+3 & x+1 \\ \cline{2-2} P(-1) & Q(x) \end{array}$$

Obs: $B(x)$ divide a $A(x) \iff A(x)=Q(x)B(x)$

$\iff$ el resto de la división de $A(x)$ por $B(x)$ es 0.

RAÍCES DE UN POLINOMIO:

Definición: Dado $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \in K[x]$, un elemento $c \in K$ se dice **raíz** de $P(x)$ si $P(c) = 0$.

Ejemplos:

- Si $\boxed{P(x) = x^2 - 2x + 1}$

  entonces $c = 1$ es raíz de $P(x)$ pues $P(1) = 1^2 - 2.1 + 1 = 0$.

- Si $\boxed{Q(x) = x^4 - 16}$

  entonces $c_1 = 2$, $c_2 = -2$, $c_3 = 2i$ y $c_4 = -2i$ son raíces de $P(x)$.

- Si $\boxed{R(x) = x^2 + 1}$

  entonces $P(x)$ no tiene raíces reales pero sí complejas: i y $-i$.

- Si $\boxed{M(x) = (x-1)(x-2)(x+4)}$

  entonces $c_1 = 1$, $c_2 = 2$ y $c_3 = -4$ son sus raíces.

Corolario del teorema del resto:

Un elemento $c \in K$ es raíz de un polinomio $P(x) \in K[x]$ si y sólo si $P(x)$ es divisible por $(x - c)$.

Dem: c es raíz de $P(x)$ $\Leftrightarrow$ $P(c) = 0$

$\Leftrightarrow$ el resto de la división de $P(x)$ por $x - c$ es 0

$\Leftrightarrow$ $P(x) = (x - c)Q(x)$

$\Leftrightarrow$ $P(x)$ es divisible por $x - c$.

Ej: 2 es raíz de $P(x) = x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x - 2)\underbrace{(x + 2)(x^2 + 4)}_{Q(x)}$

Def: Si c es una raíz de un polinomio $P(x)$, se llama **orden de multiplicidad** de la raíz c al mayor número natural k tal que $P(x)$ es divisible por $(x-c)^k$ y no lo es por $(x-c)^{k+1}$.

Es decir, $P(x) = (x-c)^k Q(x)$ donde $Q(x)$ **no** es divisible por $x-c$.

Teorema fundamental del algebra: Todo polinomio de grado $n > 0$ con coeficientes en $\mathbb{C}$ tiene exactamente n raíces en $\mathbb{C}$.

Teorema: Sea $P(x)$ un polinomio con coeficiente reales, es decir, $P(x) \in \mathbb{R}[x]$, y z una raíz compleja de $P(x)$ entonces $\overline{z}$ también es raíz de $P(x)$ y z y $\overline{z}$ tienen el mismo orden de multiplicidad.

Obs: El polinomio $P(x) = (x-z)(x-\overline{z})$, $z \in \mathbb{C}$ tiene coeficientes reales.

CÁLCULO DE RAÍCES DE UN POLINOMIO:

n raíces de $P(x)$

$$P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 = a_n (x - c_1)(x - c_2)\ldots(x - c_n)$$

$$c \text{ es raíz de } P(x) \iff P(c) = 0$$

- **Caso n=1:** Despejamos.

Ej: Si $P(x) = 2x + 5 = 2(x - (-\frac{5}{2}))$

$$2x + 5 = 0 \iff x = -\frac{5}{2}$$

- **Caso n=2:** Aplicamos la fórmula de Baskara.

$$\boxed{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Ej: Si $P(x) = x^2 - 3x - 4$

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$x_1 = 4$

$x_2 = -1$

$$P(x) = (x - 4)(x + 1)$$

• **Caso especial:** Bicuadrática. Se realiza una sustitución y se reduce al caso $n = 2$.

Ej: Si $P(x) = x^4 - 3x^2 - 4$

$$x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \quad \overset{t = x^2}{\Leftrightarrow} \quad t^2 - 3t - 4 = 0 \quad \begin{cases} t_1 = 4 \\ t_2 = -1 \end{cases}$$

$$\text{Luego,} \quad \begin{cases} x^2 = 4 & \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases} \\ \\ x^2 = -1 & \begin{cases} x_3 = i \\ x_4 = -i \end{cases} \end{cases}$$

$$\boxed{P(x) = (x-2)(x+2)(x-i)(x+i)}$$

MÉTODO PARA CALCULAR RAÍCES RACIONALES:

Teorema de Gauss: Si un número racional $\frac{p}{q}$ con $mcd(p,q)=1$ es raíz de un polinomio $P(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$ con coeficientes enteros entonces p divide a a_0 y q divide a a_n.

Obs: $P(x)$ y $kP(x)$ tiene las mismas raíces. $(k \neq 0)$

Corolario: Si $a_n=1$ entonces las raíces racionales de $P(x)$ sólo pueden ser enteras y se encuentran entre los divisores de a_0.

Ej: Si $P(x)=x^{543}+x+1$ $\quad\Rightarrow\quad$ $P(x)$ no tiene raíces racionales.

Posible raíces racionales: $\frac{p}{q}=\pm 1$

Como $P(1)=3\neq 0$ y $P(-1)=-1\neq 0$