Teorema de Rouché-Frobenius

Elementos de Álgebra
Segundo Cuatrimestre 2022

Mg. María del Carmen Vannicola

Facultad de Informática
Departamento de Matemática

Rango de una matriz

Definición

Sea $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$. El **rango** *de A es el número de filas no nulas de una matriz equivalente a A que está en forma escalonada.*

$$A \longleftrightarrow B$$

haciendo operaciones elementales de filas

Si B está en forma ecalonada,

$$Rg(A) = \text{número de filas no nulas de } B$$

Ejemplo

Deteminar el rango de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{f_2 \longleftrightarrow f_2 + (-3)f_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = B$$

Como A es equivalente por filas a B y B está en forma escalonada, entonces $Rg(A) = 2$ que es el número de filas no nulas de B.

Ejemplo

Hallar el rango de B, siendo $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

Como B no está en forma escalonada, buscamos una matriz equivalente por filas a B de tal manera que esta nueva matriz esté en forma escalonada

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \overset{f_3 \leftrightarrow f_3 + (-1) f_1}{\longleftrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \overset{f_3 \leftrightarrow f_3 + f_2}{\longleftrightarrow}$$

$$\longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = C$$

Como C está en forma escalonada y B es equivalente por filas a C, entonces el rango de B es la cantidad de filas no nulas de C, es decir,

$$Rg(B) = 2$$

Teorema de Rouché-Frobenius

Teorema

Un sistema de ecuaciones lineales es compatible si y sólo si el rango de la matriz de coeficientes coincide con el rango de la matriz ampliada.

Consecuencias del Teorema de Rouché-Frobenius:

Sean A la matriz de coeficientes de un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas y A' la matriz ampliada del sistema. Entonces:

1. Si $Rg(A) \neq Rg(A')$ entonces el sistema es incompatible (I).
2. Si $Rg(A) = Rg(A') = n$ el sistema es compatible determinado (CD).
3. Si $Rg(A) = Rg(A')$ y $Rg(A) < n$ entonces el sistema es compatible indeterminado (CI).

Ejemplo

Si A' representa la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones lineales, hallar los valores de $k \in \mathbb{R}$ para que el sistema sea a) CD b) CI y c) I, siendo

$$A' = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & (k-1)^2 & k-1 \end{array}\right]$$

Observemos que A' es una matriz de orden 3×5, entonces estamos analizando la compatibilidad de un sistema de 3 ecuaciones con 4 incógnitas. Luego $n = 4$

Para poder analizar el rango de las matrices A y A', debemos considerar matrices equivalentes a éstas en forma escalonada

En nuestro ejemplo las matrices A y A' están en forma escalonada y podemos observar que $Rg(A') = Rg(A) = 3$, cualquiera sea $k \in \mathbb{R}$. Entonces el sistema es compatible (C), cualquiera sea $k \in \mathbb{R}$, luego

$$C = \{k \in \mathbb{R} : \text{ el sistema de ecuaciones lineales es compatible}\} = \mathbb{R}$$

Teorema de Rouché-Frobenius - Ejemplos

Como para todo $k \in \mathbb{R}$, $Rg(A) = 3$ y $n = 4$ entonces $Rg(A) < n$, luego el sistema es CI cualquiera sea $k \in \mathbb{R}$. Y por lo tanto, no existen valores reales de k para que el sistema sea CD e I.

$$CI = \{k \in \mathbb{R} : \text{ el sistema de ecuaciones lineales es compatible indeterminado}\} = \mathbb{R}$$

$$CD = \{k \in \mathbb{R} : \text{ el sistema de ecuaciones lineales es compatible determinado}\} = \emptyset$$

$$I = \{k \in \mathbb{R} : \text{ el sistema de ecuaciones lineales es incompatible}\} = \emptyset$$

Observemos que: $CI \cap CD = \mathbb{R} \cap \emptyset = \emptyset$, $CI \cap I = \mathbb{R} \cap \emptyset = \emptyset$,

$CD \cap I = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset$ y $CI \cup CD \cup I = \mathbb{R} \cup \emptyset \cup \emptyset = \mathbb{R}$

Ejemplo

Si A' representa la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones lineales, hallar los valores de $k \in \mathbb{R}$ para que el sistema sea a) CD b) CI y c) I, siendo

$$A' = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & (k-1)(k+1) & k-1 \end{array}\right]$$

Observemos que A' es una matriz de orden 3×5, entonces estamos analizando la compatibilidad de un sistema de 3 ecuaciones con 4 incógnitas. Luego $n = 4$.

Como el número de ecuaciones es menor que el número de incógnitas, el sistema nunca va a ser CD. Es decir, no existe $k \in \mathbb{R}$ que hace que el sistema sea CD.

$$CD = \{k \in \mathbb{R} : \text{ el sist es CD}\} = \emptyset$$

Además los valores de $Rg(A)$ y $Rg(A')$ de las expresiones $(k-1)(k+1)$ y $k-1$.

Si $(k-1)(k+1) = 0$ y $k - 1 = 0$ entonces $Rg(A) = Rg(A') = 2$ y $2 < n$ entonces el sistema es CI.

Teorema de Rouché-Frobenius - Ejemplos

Si $(k-1)(k+1) \neq 0$, $Rg(A) = Rg(A') = 3$ y $3 < 4$. Luego el sistema es CI.

Si $(k-1)(k+1) = 0$ y $k-1 \neq 0$ entonces $Rg(A) \neq Rg(A')$ pues $Rg(A) = 2$ y $Rg(A') = 3$, entonces el sistema es I.

Observemos que

$$k-1=0 \iff k=1 \quad \text{y} \quad (k-1)(k+1)=0 \iff k=\pm 1.$$

Luego:

el sistema es CI si y sólo si

$$(\ [(k-1)(k+1)=0\ \wedge\ k-1=0]\ \vee\ (k-1)(k+1)\neq 0) \iff$$

$$\iff ([(k=1 \vee k=-1)\ \wedge\ k=1]\ \vee\ [k\neq 1\ \wedge\ k\neq -1]) \iff$$

$$\iff (k=1\ \vee\ [k\neq 1\ \wedge\ k\neq -1) \iff$$

$$\iff k\in\{1\}\cup\mathbb{R}-\{-1,1\} \iff k\in\mathbb{R}-\{-1\}.$$

Entonces $CI = \{k \in \mathbb{R} :\ \text{el sist es CI}\} = \mathbb{R} - \{-1\}$.

el sistema es I si y sólo si

$$((k-1)(k+1)=0 \ \wedge \ k-1 \neq 0) \iff$$

$$\iff (k=\pm 1 \ \wedge \ k \neq 1) \iff k \in \{-1,1\} \cap \mathbb{R} - \{1\} \iff k=-1$$

Entonces $I = \{k \in \mathbb{R} : \text{ el sistema es I}\} = \{-1\}$.

Observemos que:

$$CD \cap CI = \emptyset \cap (\mathbb{R} - \{-1\}) = \emptyset$$

$$CD \cap I = \emptyset \cap \{-1\} = \emptyset,$$

$$CI \cap I = (\mathbb{R} - \{-1\}) \cap \{-1\} = \emptyset \quad \text{y}$$

$$CD \cup CI \cup I = \emptyset \cup (\mathbb{R} - \{-1\}) \cup \{-1\} = \mathbb{R}.$$

Ejemplo

Para todo $a \in \mathbb{R}$, analizar la compatibilidad del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x - y &= 1 \\ ay - z &= 0 \\ -2x + 2y &= -2 \\ ay + (a-2)z &= a^2 - a \end{cases}$$

Consideremos A', la matriz ampliada del sistema y analicemos si está en forma escalonada.

En caso que A' no esté en forma escalonada, haremos los pasos necesarios para escalonarla.

$$A' = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & a & a-2 & a^2 - a \end{array}\right]$$. Es claro que A' no es una matriz escalonada.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & a & a-2 & a^2-a \end{array}\right] \overset{f_3 \leftrightarrow f_3+2f_1}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & a-2 & a^2-a \end{array}\right] \overset{f_3 \leftrightarrow f_4}{\longleftrightarrow}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 & 0 \\ 0 & a & a-2 & a^2-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{f_3 \leftrightarrow f_3-f_2}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & a^2-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = B$$

Utilizaremos la matriz B para analizar la compatibilidad del sistema pues es equivalente por filas a A'.

$$B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & a^2-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

El sistema es CD si y sólo si $a \neq 0$ y $a-1 \neq 0$. Ya que si $a \neq 0$ y $a \neq 1$, la matriz B está en forma escalonada, entonces $Rg(A) = Rg(A') = 3$ y 3 es el número de incógnitas.

Si $a = 0$ la matriz $B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & a^2-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$.

B no está en forma escalonada y debemos hacer una operación elemental de fila para poder hallar los rangos.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xleftrightarrow{f_3 \leftrightarrow f_3 - f_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Teorema de Rouché-Frobenius - Ejemplos

$Rg(A) = Rg(A') = 2$ y $2 < 3$ que es el número de incógnitas. Entonces el sistema es CI.

Si $a = 1$ entonces $B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & a^2 - a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Como B está en forma escalonada, $Rg(A) = Rg(A') = 2$ y $2 < 3$ que es el número de incógnitas. Entonces el sistema es CI.

En este caso, no existen valores de a que hacen que el sistema sea I.

Observemos que: $CD = \{a \in \mathbb{R} : \text{ el sistema es CD}\} = \mathbb{R} - \{0, 1\}$,

$CI = \{a \in \mathbb{R} : \text{ el sistema es CI}\} = \{0, 1\}$ e

$I = \{a \in \mathbb{R} : \text{ el sistema es I}\} = \emptyset$.

Entonces $CD \cap CI = \emptyset$, $CD \cap I = \emptyset$, $CI \cap I = \emptyset$ y $CD \cup CI \cup I = \mathbb{R}$.

Ejemplo

Sea A la matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales y B la matriz columna formada por los términos independientes del sistema.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & \alpha \\ 0 & \alpha^2-4 & \alpha-2 \\ 0 & 0 & \alpha^2-3\alpha+2 \\ 1 & \alpha^2-6 & 2\alpha-2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -2 \\ 3\alpha \\ \alpha^2+\alpha-2 \\ 3\alpha-2 \end{bmatrix}$$

Analizar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justificar las respuestas.

1. *El sistema no tiene solución para tres valores de* $\alpha \in \mathbb{R}$*, distintos entre si.*
2. *El conjunto solución del sistema es* $\{(-\frac{5}{3}z-4,\ -\frac{1}{3}z-1, z):\ z \in \mathbb{R}\}$*, si* $\alpha = 1$.
3. $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}/\ (-1, \frac{1}{2}, -1)$ *es solución del sistema.*
4. $\{t \in \mathbb{R}:\ |t-2| = 0\} = \{\alpha \in \mathbb{R}:\ \text{el sistema es I}\}$.

Teorema de Rouché-Frobenius - Ejemplos

Consideremos la matriz ampliada del sistema y busquemos una matriz equivalente a la dada en forma escalonada.

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & -2 & \alpha & -2 \\ 0 & \alpha^2-4 & \alpha-2 & 3\alpha \\ 0 & 0 & \alpha^2-3\alpha+2 & \alpha^2+\alpha-2 \\ 1 & \alpha^2-6 & 2\alpha-2 & 3\alpha-2 \end{array}\right] \xleftrightarrow{f_4 \leftrightarrow f_4 - f_1}$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & -2 & \alpha & -2 \\ 0 & \alpha^2-4 & \alpha-2 & 3\alpha \\ 0 & 0 & (\alpha-2)(\alpha-1) & (\alpha+2)(\alpha-1) \\ 0 & \alpha^2-4 & \alpha-2 & 3\alpha \end{array}\right] \xleftrightarrow{f_4 \leftrightarrow f_4 - f_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & -2 & \alpha & -2 \\ 0 & \alpha^2-4 & \alpha-2 & 3\alpha \\ 0 & 0 & (\alpha-2)(\alpha-1) & (\alpha+2)(\alpha-1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = C$$

Si $\alpha^2 - 4 \neq 0$ y $(\alpha + 2)(\alpha - 1) \neq 0$ entonces la matriz C está en forma escalonada.

En estos casos, $Rg(A) = Rg(A') = 3 =$ número de incógnitas del sistema, lo que implica que el sistema es CD, cuando $\alpha^2 - 4 \neq 0$ y $(\alpha + 2)(\alpha - 1) \neq 0$.

Calculemos los valores de α que cumplen estas condiciones.

$\alpha^2 - 4 = 0 \iff \alpha^2 = 4 \iff |\alpha| = \sqrt{4} \iff \alpha = \pm 2$. De lo que deducimos,

$$\alpha^2 - 4 \neq 0 \iff \alpha \neq 2 \ \wedge \alpha \neq -2.$$

$(\alpha + 2)(\alpha - 1) = 0 \iff \alpha + 2 = 0 \ \vee \ \alpha - 1 = 0 \iff \alpha = -2 \ \vee \ \alpha = 1$. Luego

$$(\alpha + 2)(\alpha - 1) \neq 0 \iff \alpha \neq -2 \ \wedge \ \alpha \neq 1.$$

Entonces el sistema es CD para $\alpha \neq 2$, $\alpha \neq -2$ $\alpha \neq -2$ y $\alpha \neq 1$.

Por lo tanto, el sistema es CD para todo $\alpha \in \mathbb{R} - \{1, 2, -2\}$.

Si $\alpha = 2$, reemplazando en la matriz C tenemos: $D = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Observemos que la ecuación asociada a la segunda fila de la matriz D tiene la forma

$$0z = 6$$

y no existen valores reales que verifiquen esta ecuación.

Concluimos que si $\alpha = 2$, el sistema es I.

Si queremos analizar la compatibilidad del sistema, cuando $\alpha = 2$, por medio de los rangos debemos continuar escalonando la matriz D, pues ella no está en forma escalonada.

Si $\alpha = -2$, reemplazando en la matriz C tenemos: $E = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Llevemos esta matriz a la forma escalonada para analizar los rangos.

$$E \overset{f_2 \leftrightarrow f_3}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{f_3 \leftrightarrow f_3 + \frac{1}{3} f_2}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Podemos observar que $Rg(A) = 2$ y $Rg(A') = 3$, entonces $Rg(A) \neq Rg(A')$.

Es decir, si $\alpha = -2$, el sistema es I.

Si $\alpha = 1$, reemplazando en la matriz C tenemos: $F = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Como esta matriz está en forma escalonada puedo analizar los rangos.

$Rg(A) = 2 = Rg(A')$ y como $Rg(A) < 3$, siendo 3 el número de incógnitas del sistema, entonces el sistema es CI.

Resumiendo:

Si $\alpha \in \mathbb{R} - \{1, 2, -2\}$ el sistema es CD.

Si $\alpha = 1$ el sistema es CI.

Si $\alpha \in \{2, -2\}$ el sistema es I.

El análisis de la compatibilidad nos permite analizar el valor de verdad de algunas de las proposiciones enunciadas en el ejercicio.

1. El sistema no tiene solución para tres valores de $\alpha \in \mathbb{R}$, distintos entre si.

   Esta proposición es falsa, pues que el sistema no tenga solución significa que es incompatible y el sistema es incompatible sólo para dos valores de la variable α, que son $\alpha = 2$ o $\alpha = -2$.

2. El conjunto solución del sistema es $\{(-\frac{5}{3}z - 4,\ -\frac{1}{3}z - 1, z) :\ z \in \mathbb{R}\}$, si $\alpha = 1$.

   Sabemos que si $\alpha = 1$ el sistema es CI, luego tiene soluciones. Hallemos el conjunto solución del sistema y para ello consideremos los pasos realizados anteriormente

$$A' \leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{f_2 \leftrightarrow -\frac{1}{3} f_2}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1/3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{f_1 \leftrightarrow f_1 + 2f_2}{\longleftrightarrow}$$

$$A' \longleftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5/3 & -4 \\ 0 & 1 & 1/3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x + 5/3z & = & -4 \\ y + 1/3z & = & -1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -5/3z - 4 \\ y & = & -1/3z - 1 \end{array}\right.$$

Entonces si $\alpha = 1$, el conjunto solución está dado por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x = -\frac{5}{3}z - 4 \; \wedge \; y = -\frac{1}{3}z - 1\}$$

Como este conjunto coincide con el enunciado en la proposición, entonces ésta es verdadera.

3. $\exists\, \alpha \in \mathbb{R} \,/\, (-1,\, \frac{1}{2},\, -1)$ es solución del sistema.

Si $(-1,\, \frac{1}{2},\, -1)$ es solución del sistema, entonces la terna verifica todas las ecuaciones del sistema dado en el enunciado. La primera ecuación del sistema es $x - 2y + \alpha z = -2$, entonces

$$-1 - 2\frac{1}{2} + \alpha(-1) = -2 \Longleftrightarrow -2 - \alpha = -2 \Longleftrightarrow -\alpha = -2 + 2 \Longleftrightarrow \alpha = 0$$

Veamos que si $\alpha = 0$ la terna $(-1,\, \frac{1}{2},\, -1)$ es solución del resto de las ecuaciones del sistema dado en el enunciado del ejercicio.

La segunda ecuación es $(\alpha^2 - 4)y + (\alpha - 2)z = 3\alpha$. Si $\alpha = 0$ la segunda ecuación es:

$$(0^2 - 4)y + (0 - 2)z = 3 \cdot 0 \Longleftrightarrow -4y - 2z = 0$$

Verifiquemos que $(-1,\, \frac{1}{2},\, -1)$ es solución de la segunda ecuación:

$-4y - 2z = (-4)\frac{1}{2} + (-2)(-1) = -2 + 2 = 0.$

La tercera ecuación es $(\alpha^2 - 3\alpha + 2)z = \alpha^2 + \alpha - 2$ y si $\alpha = 0$ nos queda

$$(0^2 - 3 \cdot 0 + 2)z = 0^2 + 0 - 2 \iff 2z = -2$$

La tercera ecuación se verifica ya que, $2z = 2(-1) = -2$.

La cuarta ecuación es $x + (\alpha^2 - 6)y + (2\alpha - 2)z = 3\alpha - 2$. Tomando $\alpha = 0$ tenemos

$$x + (0^2 - 6)y + (2 \cdot 0 - 2)z = 3 \cdot 0 - 2 \iff x - 6y - 2z = -2$$

La terna $(-1, \frac{1}{2}, -1)$ verifica la cuarta ecuación, pues

$$x - 6y - 2z = -1 - 6\frac{1}{2} - 2(-1) = -1 - 3 + 2 = -2$$

Por lo tanto, existe $\alpha = 0$ tal que la terna $(-1, \frac{1}{2}, -1)$ es solución del sistema, es decir, la proposición es verdadera.

4. $\{t \in \mathbb{R} : \ |t - 2| = 0\} = \{\alpha \in \mathbb{R} : \ \text{el sistema es I}\}$.

   Esta proposición es falsa pues $\{t \in \mathbb{R} : \ |t - 2| = 0\} = \{2\}$.

Representación matricial de un sistema de ecuaciones lineales

Dado el sistema de ecuaciones lineales (2), definido en la clase 7, página 5.

La **matriz del sistema** o **matriz de coeficientes del sistema** es la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Si consideramos las matrices columnas X y B, donde X está formada por las incógnitas del sistema y B por los términos independientes, es decir,

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

el sistema (2) puede representarse por la ecuación $AX = B$.

De la representación matricial del sistema $AX = B$, si A es una matriz inversible tenemos que:

$$\begin{aligned} AX &= B \\ A^{-1}(AX) &= A^{-1}B \\ (A^{-1}A)X &= A^{-1}B \\ IX &= A^{-1}B \\ X &= A^{-1}B \end{aligned}$$

Despejamos así la solución del sistema y concluimos que el sistema es CD.

Observaciones

- Si el sistema es homogéneo y $|A| \neq 0$ entonces el sistema es CD.
- Si el sistema es homogéneo y $|A| = 0$ entonces el sistema es CI.
- Si el sistema no es homogéneo y $|A| \neq 0$ entonces el sistema es CD.
- Si el sistema no es homogéneo y $|A| = 0$ entonces el sistema puede ser CI o I. Para poder asegurar la compatibilidad del sistema, no se puede utilizar este razonamiento.

Ejemplo

Ejemplo

Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -k \\ k & 1 & -1 \\ -k & -2 & 1 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} -k \\ 1 \\ -k \end{bmatrix}$. *Donde* A *es la matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales y* B *la matriz formada por sus términos independientes.*

1. *Determinar para qué valores de* $k \in \mathbb{R}$ *el sistema* $AX = B$ *es CD.*
2. *Para alguno de los valores de* k *hallados en el inciso anterior, encontrar la solución del sistema* $AX = B$.
3. *¿*$\exists k \in \mathbb{R}/$ *el sistema* $AX = 0$ *es CD? Justificar.*

1. Sabemos que si $|A| \neq 0$ el sistema $AX = B$ es CD. Calculemos $|A|$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -k \\ k & 1 & -1 \\ -k & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 1\cdot 1\cdot 1 + 2\cdot(-1)\cdot(-k) + (-k)\cdot k\cdot(-2) - (-k)\cdot 1\cdot(-k) - (-2)\cdot(-1)\cdot 1 - 1\cdot k\cdot 2$$

$$|A| = 1 + 2k + 2k^2 - k^2 - 2 - 2k = -1 + k^2$$

$$|A| = 0 \iff -1 + k^2 = 0 \iff k^2 = 1 \iff k = \pm 1$$

Luego para $k \neq \pm 1$ el sistema $AX = B$ es CD.

Ejemplo.

2. En este inciso nos piden hallar el conjunto solución para algún valor de $k \neq \pm 1$. Como podemos elegir el valor de k para el cual encontrar el conjunto solución, tomaremos $k = 0$ para resolverlo.

   Para $k = 0$, tenemos $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ y al calcular la matriz inversa de A obtenemos $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$.

   $$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

   Si $k = 0$ la solución del sistema es la terna $(2, \ -1, \ -2)$.

3. Para $k \in \mathbb{R} - \{1, -1\}$ el sistema $AX = 0$ es CD, ya que existe A^{-1} y el conjunto solución del sistema es

   $$S = \{(0, 0, 0)\}$$

Ejercicio.

Ejercicio

Dado el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + az = 2a \\ ax + 2y + 2z = 2 \end{cases}.$$

Para cada $a \in \mathbb{R}$ definimos S_a como el conjunto solución del sistema de ecuaciones. Sabiendo que A indica la matriz de coeficientes del sistema, B la matriz columna que tiene como elementos los términos independientes del sistema y X es la matriz columna de las variables. Analizar el valor de verdad de las proposiciones y justificar las respuestas.

1. $\forall\, a \in \mathbb{R} : \ S_1 \subseteq S_a$
2. $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x, y, z) = (-2 - k,\ k,\ 3),\ k \in \mathbb{R}\}$
3. $\exists\, a \in \mathbb{R} /\ (3A^t)X = B$ *es un sistema compatible determinado*
4. $\exists\, a,\ b \in \mathbb{R} - \{1, 2\} /\ a \neq b \wedge S_a \cup S_b = S_b$
5. $\forall\, a \in \mathbb{R} - \{2\} : \ S_a$ *es un conjunto unitario*
6. $\forall\, a \in \mathbb{R} - \{0, 1, 2\} : \ S_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x = 0,\ y = 2a - 1,\ z = -\dfrac{a}{a-1}\}$
7. $\exists\, a \in \mathbb{R} /\ |-2A^t| = 0$