ELEMENTOS DE ÁLGEBRA
(2do cuatrimestre de 2022)

TRABAJO PRÁCTICO N°5: Números naturales

Principio de inducción

---

1. Desarrollar y calcular:

   a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{9} i$ *b*) $\displaystyle\sum_{j=0}^{5} (-1)^j 2j$ *c*) $\displaystyle\sum_{k=2}^{5} (k-1)$ *d*) $\displaystyle\sum_{t=1}^{8} 3 + \sum_{t=9}^{100} 3$

   Reescribir la sumatoria del inciso *c*) empezando del subíndice 1 y la del inciso *d*) utilizando un único símbolo de sumatoria, para que en ambos casos el resultado no varíe.

2. Expresar utilizando el símbolo de sumatoria

   a) $1+3+5+7+9+11+13$

   b) $9+12+15+18+21+24+27+30$

   c) $1-2+4-8+16-32$

   d) $2+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\cdots+\dfrac{n+1}{n}$

3. Sabiendo que $\displaystyle\sum_{i=1}^{8} x_i^2 = 160$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{8} x_i = 120$ y $x_9 = 6$, obtener el valor de

   a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{9} x_i(x_i-5)$ *b*) $\displaystyle\sum_{i=1}^{8} (2x_i+3)^2$

4. Demostrar por inducción que para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica:

   a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 2i = n(n+1)$

   b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$

   c) $\displaystyle\sum_{t=1}^{n} t^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

   d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (3i-2) = \frac{n(3n-1)}{2}$

5. Teniendo en cuenta las siguientes igualdades inducir la ley general, expresar utilizando $\sum$ y demostrar por inducción:

   a)
   $$\begin{aligned} 1 &= \frac{1\cdot 2}{2} \\ 1+2 &= \frac{2\cdot 3}{2} \\ 1+2+3 &= \frac{3\cdot 4}{2} \end{aligned}$$

   b)
   $$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= 1-\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4} &= 1-\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8} &= 1-\frac{1}{8} \end{aligned}$$

   c)
   $$\begin{aligned} 2\cdot 3 &= 9-3 \\ 2\cdot 3+2\cdot 9 &= 27-3 \\ 2\cdot 3+2\cdot 9+2\cdot 27 &= 81-3 \end{aligned}$$

6. *a*) Utilizando el inciso del ejercicio 4, que corresponda en cada caso.

    I) Calcular la suma de los primeros 235 números naturales pares

    II) Calcular la suma de las potencias cúbicas de los primeros 30 números naturales

    III) ¿Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(3i-2) = 590$?

    IV) ¿Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(3i-2) = 598$?

   b) Usando el ítem que corresponda del ejercicio 5 y las propiedades de sumatoria, calcular:

    I) $\displaystyle\sum_{i=1}^{1000}(8 \cdot 3^i)$

    II) $\displaystyle\sum_{i=205}^{1000}(8 \cdot 3^i)$

7. Ninguna de las siguientes igualdades es verdadera. Indicar qué paso falla en el principio de inducción completa.

   a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(4i+1) = n^2 + 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

   b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(i+3) = n^3 + 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

EJERCICIOS ADICIONALES

1. Demostrar por inducción que para todo $n \in \mathbb{N}$:

   a) $\displaystyle\sum_{t=1}^{n}(4t-2) = 2n^2$

   b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}2^i = 2^{n+1} - 2$

   c) $\displaystyle\sum_{h=1}^{n}h2^{h-2} = \frac{1+(n-1)2^n}{2}$

   d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}2(n-i) = n^2 - n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2. Demostrar por inducción que se verifican las siguientes propiedades, cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$

   a) $|x^n| = |x|^n, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

   b) $|z^n| = |z|^n, \quad \forall z \in \mathbb{C}$