Polinomios

Elementos de Álgebra
Segundo Cuatrimestre 2022

Mg. María del Carmen Vannicola

Facultad de Informática
Departamento de Matemática

Definición

Un **polinomio en una indeterminada** *es una expresión algebraica de la forma:*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

donde los elementos $a_i \in \mathbb{C}$, $1 \leq i \leq n$, *se denominan coeficientes de* $P(x)$ *y* x *es la indeterminada del polinomio.*

Son ejemplos de polinomios

$$P(x) = x^3 - x^2 + 2, \quad Q(x) = -3x^2 + 5x^5, \quad S(x) = \frac{1}{3}x^4 - 2x^7 + 3i$$

Las siguientes expresiones algebraicas no son polinomios en una indeterminada

$$T(x) = -\frac{2}{5}x^{-2} + 3x^5, \quad R(X) = \frac{3}{x} + 2, \quad F(x) = (1 + x)^{1/2} - 4x^2$$

Polinomios - Definiciones

Dado el polinomio $P(x) == a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$,

- a_0 es el **término independiente**.
- a_n es el **coeficiente principal**, si $a_n \neq 0$.
- $\mathbb{R}[x]$ es el conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales con una indeterminada.
- $\mathbb{C}[x]$ es el conjunto de todos los polinomios con coeficientes complejos con una indeterminada.
- Si $a_i = 0$ para todo $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ entonces $P(x)$ se llama **polinomio nulo** y se nota $P(x) = 0$.
- Si $a_n = a_{n-1} = \ldots = a_1 = 0$ entonces $P(x) = a_0$ y recibe el nombre de **polinomio constante**.

Polinomios - Definiciones

- $P(x)$ se dice **ordenado en forma decreciente** cuando la indeterminada x figura en cada término elevada a un exponente menor que en el término anterior, es decir, en un orden decreciente de las potencias de x. Esto es,

  $$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-3}x^{n-3} + \ldots + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

- $P(x)$ se dice **ordenado en forma creciente** cuando la indeterminada x figura en cada término elevada a un exponente mayor que en el término anterior, es decir, en un orden creciente de las potencias de x. Esto es,

  $$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_{n-3}x^{n-3} + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$$

- $P(x)$ se dice **completo** cuando en él figuran todos los términos desde n hasta el término independiente. Por ejemplo,

  $P(x) = 3x^4 - x + 2$ no está completo y al completarlo obtenemos

  $$P(x) = 3x^4 + 0x^3 + 0x^2 - x + 2$$

Polinomios - Definiciones

- Si $P(x) \in \mathbb{C}[x]$. Se denomina **valor numérico** de $P(x)$ al número complejo que resulta de reemplazar la variable x por un número complejo cualquiera dado y efectuar las operaciones indicadas en $P(x)$

  Si $P(x) = -3x^3 + (2-i)x + 3$ y $a = 2i$ entonces

  $$P(a) = P(2i) = -3(2i)^3 + (2-i)(2i) + 3 = -3(8)(-i) + (4i+2) + 3 = 5 + 28i$$

Definición

Sea $P(x) \in \mathbb{C}[x]$, $P(x) \neq 0$, $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. *Si* $a_n \neq 0$ *entonces* n *es el* **grado** *de* $P(x)$.

- Si el grado de $P(x)$ es n, notaremos $gr(P(x)) = n$ o $gr(P) = n$.

- Si $P(x) = 0$, no está definido el grado de $P(x)$.

- Si $gr(P(x)) = n$ y $a_n = 1$ entonces el polinomio $P(x)$ se llama **mónico**.

- Si $P(x)$ es un polinomio constante no nulo, $gr(P(x)) = 0$

Ejemplo

Dados los polinomios

$$P(x) = x^4 - \sqrt{3}x^2 + x, \qquad R(x) = x^2 + 3ix^5 - 2 + i$$

Indicar en cada caso a qué conjunto pertenece, el grado, el coeficiente principal, el término independiente, si es mónico, si está ordenado en forma creciente o decreciente y si está completo.

$P(x) \in \mathbb{R}[x]$, $gr(P(x)) = 4$, el coeficiente principal es uno, el término independiente es cero, $P(x)$ es mónico, está ordenado en forma decreciente y no está completo.

$R(x) \in \mathbb{C}[x]$, $gr(P(x)) = 5$, el coeficiente principal es $3i$, el término independiente es $-2 + i$, $P(x)$ no es mónico, no está ordenado en forma decreciente ni en forma creciente y no está completo.

Igualdad de polinomios

Definición

Sean $A(x),\ B(x) \in \mathbb{C}[x]$, $A(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ *y* $B(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_2x^2 + b_1x + b_0$.

$$A(x) = B(x) \quad \textit{si y sólo si} \quad a_i = b_i, \quad \forall\, i$$

Observación: Si $A(x) = B(x)$ entonces $gr(A) = gr(B)$

Ejemplo

Hallar los valores $a, b, c \in \mathbb{R}$ *tales que* $P(x) = Q(x)$*, siendo*

$P(x) = (2a-3)x^4 + 5x^3 + (a+b)x^2 + b + c^2,\quad Q(x) = 5x^3 + a + 1 + (b+1)x^4 - x^2$

$Q(x)$ no está ordenado. Lo ordenaremos en forma decreciente para poder compararlo con $P(x)$. Entonces

$$Q(x) = (b+1)x^4 + 5x^3 - x^2 + a + 1$$

$$P(x) = (2a-3)x^4+5x^3+(a+b)x^2+b+c^2, \quad Q(x) = (b+1)x^4+5x^3-x^2+a+1$$

$$\left\{\begin{array}{rcll} 2a-3 & = & b+1 & (1) \\ 5 & = & 5 & (2) \\ a+b & = & -1 & (3) \\ b+c^2 & = & a+1 & (4) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} 2a-3 & = & b+1 & (1) \\ a+b & = & -1 & (3) \\ b+c^2 & = & a+1 & (4) \end{array}\right.$$

De la ecuación (1) $b = 2a-4, \quad (5)$

Reemplazando en la ecuación (3) $a+2a-4 = -1 \Longrightarrow 3a = 3 \Longrightarrow a = 1$

Reemplazando en (5), $b = 2 \cdot 1 - 4 = -2$

Considerando la ecuación (4), $b+c^2 = a+1 \Longrightarrow -2+c^2 = 2 \Longrightarrow c^2 = 4 \Longrightarrow c = \pm 2$

Luego, si $a = 1$, $b = -2$ y $c = \pm 2$ los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ coinciden.

Verificación: $a = 1, \quad b = -2 \quad$ y $\quad c = \pm 2.$

$$P(x) = (2a - 3)x^4 + 5x^3 + (a + b)x^2 + b + c^2$$

$$P(x) = (2 \cdot 1 - 3)x^4 + 5x^3 + (1 + (-2))x^2 + (-2) + (\pm 2)^2 = \, -x^4 + 5x^3 - x^2 + 2$$

$$Q(x) = 5x^3 + a + 1 + (b + 1)x^4 - x^2 = 5x^3 + 1 + 1 + (-2 + 1)x^4 - x^2$$

$$Q(x) = 5x^3 + 2 - x^4 - x^2 = \, -x^4 + 5x^3 - x^2 + 2$$

Luego $\; P(x) = -x^4 + 5x^3 - x^2 + 2 = Q(x)$

Operaciones entre polinomios

Definición

Sean $A(x),\ B(x) \in \mathbb{C}[x]$. $A(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ *y* $B(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_2x^2 + b_1x + b_0$. *Si* $n \geq m$ *la* **suma** *de los polinomios* A *y* B *es*

$$(A+B)(x) = a_n x^n + \ldots + (a_m + b_m)x^m + (a_{m-1} + b_{m-1})x^{m-1} + \ldots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

Definición

Sean $A(x) \in \mathbb{C}[x],\ k \in \mathbb{C},\ A(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$. *El* **producto por un escalar** *se define por*

$$(kA)(x) = ka_n x^n + ka_{n-1}x^{n-1} + \ldots + ka_2x^2 + ka_1x + ka_0$$

Proposición

Sean $A(x),\ B(x),\ C(x) \in \mathbb{C}[x],\ k,\ h \in \mathbb{C}$. *Se verifican las siguientes propiedades:*

1. *Asociativa de la suma:* $A(x) + (B(x) + C(x)) = (A(x) + B(x)) + C(x)$
2. *Conmutativa:* $A(x) + B(x) = B(x) + A(x)$
3. *Existencia de neutro:*

   $\exists\, 0 \in \mathbb{C}[x] /\ \forall A(x) \in \mathbb{C}[x] :\ A(x) + 0 = 0 + A(x) = A(x)$
4. *Existencia de opuesto:*

   $\forall A(x) \in \mathbb{C}[x] :\ \exists - A(x) \in \mathbb{C}[x] /\ A(x) + (-A)(x) = (-A)(x) + A(x) = 0$
5. $k(A(x) + B(x)) = kA(x) + kB(x)$
6. $(k + h)A(x) = kA(x) + hA(x)$
7. $k(hA(x)) = (kh)A(x) = h(kA(x))$
8. $1A(x) = A(x)$

Operaciones entre polinomios

Observaciones: si $A(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$

- $-A(x) = (-1)A(x) = -a_nx^n - a_{n-1}x^{n-1} - \ldots - a_2x^2 - a_1x - a_0$
- Sea $B(x) = b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_2x^2 + b_1x + b_0$,

$$(A - B)(x) = A(x) + (-B(x)) = A(x) - B(x)$$

$$(A-B)(x) = a_nx^n + \ldots + (a_m - b_m)x^m + (a_{m-1} - b_{m-1})x^{m-1} + \ldots + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0)$$

- $0A(x) = 0a_nx^n + 0a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + 0a_2x^2 + 0a_1x + 0a_0 = 0$
- Si $(A + B)(x) \neq 0$ entonces $gr(A + B) \leq max(\, gr(A), gr(B)\,)$

Definición

Sean $A(x),\ B(x) \in \mathbb{C}[x]$. $A(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ *y* $B(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_2x^2 + b_1x + b_0$. *El* **producto** *de los polinomios* A *y* B *es*

$$(A \cdot B)(x) = A(x) \cdot B(x) = a_n b_m x^{n+m} + (a_n b_{m-1} + a_{n-1} a_m) x^{n+m-1} + \ldots$$
$$\ldots + (a_2 a_0 + b_2 b_0 + a_1 b_1)x^2 + (a_1 b_0 + a_0 b_1)x + a_0 b_0$$

- $(A \cdot B)(x)$ es el polinomio que resulta de aplicar la propiedad distributiva y asociar los términos semejantes.
- Si $B(x)$ es un polinomio costante, $B(x) = b_0$ entonces $(A \cdot B)(x) = b_0 A(x)$.
- Si $B(x)$ es el polinomio nulo entonces $(A \cdot B)(x) = 0$.
- Si $(A \cdot B)(x) \neq 0$ entonces $gr(A \cdot B) = gr(A) + gr(B)$, es decir, el grado del polinomio producto es igual a la suma de los grados de los polinomios factores, si éstos no son nulos.

Proposición

Sean $A(x),\ B(x),\ C(x) \in \mathbb{C}[x]$ *y sea* $k \in \mathbb{C}$ *un escalar.*

1. *Asociativa del producto:* $A(x) \cdot (B(x) \cdot C(x)) = (A(x) \cdot B(x)) \cdot C(x)$
2. *Conmutativa del producto:* $A(x) \cdot B(x) = B(x) \cdot A(x)$
3. *Existencia de neutro para el producto:*
   $\exists\, B(x) = 1 / \forall\, A(x):\ A(x) \cdot B(x) = B(x) \cdot A(x) = A(x)$
4. *Distributiva del producto respecto a la suma:*
   $A(x) \cdot (B(x) + C(x)) = (A(x) \cdot B(x)) + (A(x) \cdot C(x))$
5. $k(A(x) \cdot B(x)) = (kA(x)) \cdot B(x) = A(x) \cdot (kB(x))$

Definición

Sea $A(x) \in \mathbb{C}[x]$. *Se define la* **potencia** *natural de* $A(x)$ *del siguiente modo*

$$\begin{aligned} A(x)^1 &= A(x) \\ A(x)^n &= A(x) \cdot A^{n-1}(x), \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Ejemplo

Sean $P(x), \ Q(x), \ T(x) \in \mathbb{R}[x]$ *definidos por*

$$P(x) = 2a^2x^4 - 3x^3 + 2ax - 1, \quad Q(x) = 3 + 9x^3 + 2ax^4 - 6ax \quad y$$

$$T(x) = x^5 - 4x + 2x^3 + 3$$

1. *Hallar* $A = \{a \in \mathbb{R} : \ P(x) - Q(x) = T(-1)P(x)\}$
2. *¿Existe* $a \in A$ *tal que* $gr(P) < 3$*? Justificar.*

1. $P(x) - Q(x) = T(-1)P(x) \iff P(x) = T(-1)P(x) + Q(x) \iff$

   $\iff P(x) - T(-1)P(x) = Q(x)$

   Calculemos $T(-1)$

   $T(x) = x^5 - 4x + 2x^3 + 3 \implies T(-1) = (-1)^5 - 4(-1) + 2(-1)^3 + 3 \iff$

   $\iff T(-1) = -1 + 4 - 2 + 3 = 4$

Luego $P(x) - 4P(x) = Q(x) \iff -3P(x) = Q(x) \iff$

$$\iff -3(2a^2x^4 - 3x^3 + 2ax - 1) = 3 + 9x^3 + 2ax^4 - 6ax \iff$$

$$\iff -6a^2x^4 + 9x^3 - 6ax + 3 = 2ax^4 + 9x^3 - 6ax + 3 \iff$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcr} -6a^2 & = & 2a \\ 9 & = & 9 \\ -6a & = & -6a \\ 3 & = & 3 \end{array} \right. \implies -6a^2 = 2a \iff -6a^2 - 2a = 0 \iff$$

$$\iff -2a(3a+1) = 0 \iff -2a = 0 \ \vee \ 3a + 1 = 0 \iff a = 0 \ \vee \ a = -\frac{1}{3}$$

$$A = \{a \in \mathbb{R} : \ P(x) - Q(x) = R(-1)P(x)\} = \{0, \ -\frac{1}{3}\}$$

2. Debemos analizar si existe $a \in A$ tal que $gr(P) < 3$.

Recordemos que;

$$A = \{a \in \mathbb{R} : \; P(x) - Q(x) = R(-1)P(x)\} = \{0, -\frac{1}{3}\}$$

Sea $a \in A$ entonces

$$a = 0 \implies P(x) = 2a^2x^4 - 3x^3 + 2ax - 1 = -3x^3 - 1 \implies gr(P) = 3$$

$$a = -\frac{1}{3} \implies P(x) = 2(-\frac{1}{3})^2x^4 - 3x^3 + 2(-\frac{1}{3})x - 1 = -\frac{2}{9}x^4 - 3x^3 - \frac{2}{3}x - 1,$$

luego $gr(P) = 4$, es decir,

$$\forall a \in A : \; gr(P) = 3 \; \vee \; gr(P) = 4$$

entonces no existe $a \in A$ tal que $gr(P) < 3$

Ejemplo

Sean $S(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 3)$ *y* $T(x) = S(x) + (x - 1)$.

1. *Escribir a* $T(x)$ *como producto de dos polinomios.*
2. *¿*$\exists\, a \in \mathbb{R} /\ a > 1 \ \wedge \ T(a) = 0$*? Justificar la respuesta.*

1. $T(x) = S(x) + (x-1) = (x^2-1)(x^2+3) + (x-1) =$

   $$= (x-1)(x+1)(x^2+3) + (x-1) = (x-1)[(x+1)(x^2+3) + 1] =$$

   $$= (x-1)[x^3 + 3x + x^2 + 3 + 1] = (x-1)(x^3 + x^2 + 3x + 4)$$

2. $a > 1 \iff a - 1 > 0 \ \ (1)$

   $a > 1 \implies a > 0 \implies x^3 > 0 \wedge x^2 > 0 \wedge 3x > 0 \implies x^3 + x^2 + 3x + 4 > 0 \ \ (2)$

   De (1) y (2) deducimos que $(a-1)(a^3 + a^2 + 3a + 4) > 0$, es decir, $T(a) > 0$

   Luego

   $$\nexists\, a \in \mathbb{R} / a > 1 \ \wedge \ T(a) = 0$$

Algoritmo de la división de polinomios

Teorema

Sean $A(x),\ B(x) \in \mathbb{C}[x]$. *Si* $B(x) \neq 0$, *existen dos polinomios* $Q(x),\ R(x) \in \mathbb{C}[x]$, *llamados* **cociente** *y* **resto** *respectivamente de dividir* $A(x)$ *por* $B(x)$, *unívocamente determinados y tales que*

$$A(x) = Q(x) \cdot B(x) + R(x) \quad con \quad R(x) = 0 \quad o \quad gr(R(x)) < gr(B(x))$$

Algoritmo de la división, para determinar los polinomios $Q(x)$ y $R(x)$:

1. Se ordenan en forma decrecientes y se completa el dividendo, es decir, $A(x)$.
2. Se ordenan en forma decrecientes el divisor, esto es, $B(x)$. El divisor se puede completar o no completar.
3. Dividimos el primer término del dividendo por el primer término del divisor, obteniéndose así el primer término del cociente.
4. Multiplicamos el primer término del cociente por todo el divisor.
5. Se resta al dividendo el producto obtenido en el paso anterior, obteniéndose un nuevo dividendo.
6. Se reitera el procedimiento desde el item 3 al item 5 hasta obtener el polinomio resto, de grado menor que el divisor o el polinomio nulo.

Ejemplo

Hallar el cociente y el resto de dividir a $A(x) = 2x^5 - 3x^3 + 2x^2 - 5$ *por* $B(x) = 4x^3 - x^2 + 1$.

$$
\begin{array}{rrrrrrr|l}
 & 2x^5 + & 0x^4 - & 3x^3 + & 2x^2 + & 0x & -5 & 4x^3 - x^2 + 0x + 1 \\
- & 2x^5 - & 1/2x^4 + & 0x^3 + & 1/2x^2 & & & \overline{1/2x^2 + 1/8x - 23/32} \\
\hline
 & & 1/2x^4 - & 3x^3 + & 3/2x^2 + & 0x & -5 & \\
 & - & 1/2x^4 - & 1/8x^3 + & 0x^2 + & 1/8x & & \\
\hline
 & & & -23/8x^3 + & 3/2x^2 - & 1/8x & -5 & \\
 & & - & -23/8x^3 + & 23/32x^2 + & 0x & -23/32 & \\
\hline
 & & & & 25/32x^2 - & 1/8x & -137/32 &
\end{array}
$$

Algoritmo de la división - Ejemplo

Como $gr(25/32x^2 - 1/8x - 137/32) = 2 < 3 = gr(4x^3 - x^2 + 0x + 1)$ entonces el cociente de dividir $A(x) = 2x^5 + 0x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 5$ por $B(x) = 4x^3 - x^2 + 1$ es

$$Q(x) = 1/2x^2 + 1/8x - 23/32$$

y el resto es

$$R(x) = 25/32x^2 - 1/8x - 137/32$$

Verificación: $A(x) = Q(x)B(x) + R(x)$

$$Q(x)B(x) = (1/2x^2 + 1/8x - 23/32)(4x^3 - x^2 + 1) =$$

$$= 2x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{8}x - \frac{23}{8}x^3 + \frac{23}{32}x^2 - \frac{23}{32} =$$

$$= 2x^5 + 0x^4 - 3x^3 + \frac{39}{32}x^2 + \frac{1}{8}x - \frac{23}{32}$$

$$Q(x)B(x) + R(x) = (2x^5 - 3x^3 + \frac{39}{32}x^2 + \frac{1}{8}x - \frac{23}{32}) + (\frac{25}{32}x^2 - \frac{1}{8}x - \frac{137}{32}) =$$

$$= 2x^5 - 3x^3 + 2x^2 - 5 = A(x)$$

Definición

Sean $A(x)$, $B(x) \in \mathbb{C}[x]$. Se dice que $B(x)$ **divide** *a $A(x)$ si al dividir $A(x)$ por $B(x)$ el resto es el polinomio nulo.*

Notaremos $B(x)|A(x)$. Lógicamente

$$B(x)|A(x) \iff \exists\, Q(x) \in \mathbb{C}[x] \,/\, A(x) = B(x)Q(x)$$

Si $B(x)$ divide a $A(x)$ diremos que $B(x)$ es un **divisor** de $A(x)$, o que $B(x)$ es un **factor** de $A(x)$, o que $A(x)$ es **divisible** por $B(x)$.

Caso particular $B(x) = x - b$

$$(x-b)|A(x) \iff \exists\, Q(x) \in \mathbb{C}[x] \,/\, A(x) = (x-b)Q(x) \iff A(b) = 0$$

Si $B(x)$ **no divide** a $A(x)$ notaremos $B(x) \nmid A(x)$, lo que equivale a

$$\forall Q(x) \in \mathbb{R}[x] : \; A(x) \neq Q(x) \cdot B(x)$$

$$\exists\, Q(x),\; R(x) \in \mathbb{R}[x] \,/\, A(x) = Q(x) \cdot B(x) + R(x) \;\wedge\; R(x) \neq 0$$

Regla de Ruffini

Sean $A(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ y $B(x) = x - b$

El resto de dividir $A(x)$ por $B(x)$ es un polinomio constante porque $R(x) = 0$ o $gr(R(x)) < gr(B(x)) = 1$, es decir, $R(x) = 0$ o $gr(R(x)) = 0$

Como $R(x)$ es una constante entonces el cociente $gr(Q(x)) \leq gr(A(x)) - 1$

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\ldots$	a_2	a_1	a_0
b		a_nb	$(a_{n-1} + a_nb)b$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
	a_n	$a_{n-1} + a_nb$	$a_{n-2} + (a_{n-1} + a_nb)b$	$\ldots$	q_1	q_0	r

El cociente de la división de $A(x)$ por $B(x)$ es

$$Q(x) = a_nx^{n-1} + (a_{n-1} + a_nb)x^{n-2} + (a_{n-2} + (a_{n-1} + a_nb)b)x^{n-3} + \ldots + q_1x + q_0$$

y el resto es

$$R(x) = r$$

Regla de Ruffini - Ejemplo

Ejemplo

Hallar el cociente y el resto de dividir $A(x) = -2x^3 + 5x^4 - x^6 + x - 7$ *por* $B(x) = x + 2$

Observemos que A no está ordenado en forma decreciente ni completo, y la regla necesita que A esté ordenado en forma decreciente y completo para que tenga validez. Además $B(x)$ debe tener la forma $B(x) = x - b$, entonces tomaremos

$$A(x) = -x^6 + 0x^5 + 5x^4 - 2x^3 + 0x^2 + x - 7, \quad B(x) = x - (-2)$$

	-1	0	5	-2	0	1	-7
-2		2	-4	-2	8	-16	30
	-1	2	1	-4	8	-15	23

En la división de $A(x)$ por $B(x)$ el cociente es $Q(x) = -x^5 + 2x^4 + x^3 - 4x^2 + 8x - 15$ y el resto es $R(x) = 23$.

Teorema del resto

Verificación:

$$Q(x)(x+2)+R(x)=(-x^5+2x^4+x^3-4x^2+8x-15)(x+2)+23=$$
$$=-x^6+2x^5+x^4-4x^3+8x^2-15x-2x^5+4x^4+2x^3-8x^2+16x-30+23=$$
$$=-x^6+5x^4-2x^3+x-7=A(x)$$

El siguiente teorema se conoce con el nombre de Teorema del resto

Teorema

Sean $A(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0$ *y* $B(x)=x-b.$

El resto de dividir $A(x)$ *por* $B(x)$ *es igual a* $A(b)$

Ejemplo

Sean $A(x)=-x^6+5x^4-2x^3+x-7$ *y* $B(x)=x+2.$

Utilizando el Teorema del resto verificar que al dividir $A(x)$ *por* $B(x)$ *se obtiene resto 23*

Raíz de un polinomio

Aplicando el Teorema del resto tenemos que $R(x) = A(-2)$

$$A(-2) = -x^6 + 5x^4 - 2x^3 + x - 7 = -(-2)^6 + 5(-2)^4 - 2(-2)^3 + (-2) - 7 =$$

$$= -64 + 5 \cdot 16 - 2(-8) - 2 - 7 = -64 + 80 + 16 - 9 = 23$$

Observaciones:

- Si realizamos la regla de Ruffini obtenemos el cociente y el resto de la división, y si aplicamos el Teorema de resto sólo obtenemos el resto de la división.
- En general utilizamos el teorema del resto para saber si un escalar es raíz de un polinomio dado o si un polinomio es divisible por otro de la forma $B(x) = x - b$.

Definición

Sean $A(x) \in \mathbb{C}[x], r \in \mathbb{C}$. r es una **raíz** *de $A(x)$ si y sólo si $(x - r)$ divide a $A(x)$.*

Observaciones:

- r es una raíz de $A(x)$ si y sólo si $(x-r)|A(x)$.
- r es una raíz de $A(x)$ si y sólo si $\exists\, Q(x) \in \mathbb{C}[x] \,/\, A(x) = (x-r)Q(x)$.
- r es una raíz de $A(x)$ si y sólo si $A(r) = 0$.

Definición

Sean $A(x) \in \mathbb{C}[x]$, $r \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$. *Si* r *es raíz del polinomio* $A(x)$, *el* **orden de multiplicidad** *de* r *es* k *si y sólo si* $(x-r)^k|A(x)$ *y* $(x-r)^{k+1} \nmid A(x)$.

En general, el orden de multiplicidad de una raíz se puede hallar aplicando la regla de Ruffini tantas veces como sea necesario, hasta obtener un resto no nulo.

Ejemplo

Sabiendo que -1 *es raíz del polinomio*
$A(x) = x^6 + 3x^5 - 10x^4 - 50x^3 - 75x^2 - 49x - 12$, *hallar el orden de multiplicidad de* -1.

Raíz de un polinomio

Aplicamos la regla de Ruffini tantas veces cómo sea necesario hasta obtener un resto no nulo.

	1	3	-10	-50	-75	-49	-12
-1		-1	-2	12	38	37	12
	1	2	-12	-38	-37	-12	0
-1		-1	-1	13	25	12	
	1	1	-13	-25	-12	0	
-1		-1	0	13	12		
	1	0	-13	-12	0		
-1		-1	1	12			
	1	-1	-12	0			
-1		-1	2				
	1	-2	$-10 \neq 0$				

$$A(x) = (x+1)^4(x^2-x-12) \quad \text{y} \quad (x+1)^5 \nmid A(x)$$

entonces el orden de multiplicidad de la raíz -1 es cuatro.

Ejemplo

Sea $A(x) = -4(x-2)^3(x+3)(x-i)^5$, *las raíces de* $A(x)$ *son* 2, -3 *e* i. *Hallar el orden de multiplicidad de cada una de ellas.*

- el orden de multiplicidad de la raíz $r_1 = 2$ es 3, ya que $(x-2)^3 | A(x)$ y $(x-2)^4 \nmid A(x)$.
- $(x+3)|A(x)$ y $(x+3)^2 \nmid A(x)$ entonces el orden de multiplicidad de la raíz $r_2 = -3$ es 1.

  Cuando el orden de una multiplicidad de una raíz es uno, ésta se denomina **simple**, es decir, -3 es raíz simple.
- el orden de multiplicidad de la raíz $r_3 = i$ es 5, ya que $(x-i)^5 | A(x)$ y $(x-i)^6 \nmid A(x)$.

Raíz de un polinomio - Ejemplo

Ejemplo

Construir, en caso de ser posible,

1. **un** *polinomio* $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ *tal que* $-\sqrt{3}$ *sea raíz doble y tenga coeficiente principal* 5.
2. **todos** *los polinomios* $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ *tal que* $-\sqrt{3}$ *sea raíz doble y tenga coeficiente principal* 5.
3. **un** *polinomio de grado mínimo, con coeficientes en* $\mathbb{R}$, *que sea mónico y sea divisible por* $(x-1)^3$.
4. **un** *polinomio de grado* 4, *con coeficientes en* $\mathbb{R}$, *que sea mónico y sea divisible por* $(x-1)^3$.
5. **un** *polinomio de grado* 4, *con coeficientes en* $\mathbb{R}$, *que sea mónico y* 1 *sea raíz triple.*
6. **todos** *polinomio de grado* 5, *con coeficientes en* $\mathbb{R}$, *que no sea mónico y* 1 *sea raíz triple.*
7. **un** *polinomio* $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ *que tenga como factor al polinomio* $Q(x) = x^2 + 2x - 3$ *y* $P(-3) \neq 0$.

Raíz de un polinomio - Ejemplo

1. **un** polinomio $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ tal que $-\sqrt{3}$ sea raíz doble y tenga coeficiente principal 5.

   $-\sqrt{3}$ sea raíz doble de $P(x)$, entonces $(x+\sqrt{3})^2 | P(x)$ y $(x+\sqrt{3})^3 \nmid P(x)$

   como el coeficiente principal es 5 entonces **un** polinomio que cumple con las dos condiciones pedidas es

   $$P(x) = 5(x+\sqrt{3})^2$$

2. **todos** los polinomios $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ tal que $-\sqrt{3}$ sea raíz doble y tenga coeficiente principal 5.

   Existen infinitos polinomios que cumplen con estas condiciones y ellos son

   $$P(x) = 5(x+\sqrt{3})^2 Q(x)$$

   donde $Q(x)$ tiene coeficientes reales, $Q(x)$ tiene coeficiente principal uno y $(x+\sqrt{3}) \nmid Q(x)$.

Raíz de un polinomio - Ejemplo

3. **un** polinomio de grado mínimo, con coeficientes en $\mathbb{R}$, que sea mónico y sea divisible por $(x-1)^3$.

   El polinomio que debemos construir es mónico, entonces su coeficiente principal debe ser uno y como debe ser divisible por $(x-1)^3$ entonces éste es uno de los factores del polinomio, es decir,

   $$P(x) = (x-1)^3$$

   Observemos que si agregamos cualquier otro factor el grado del polinomio aumenta y se perdería la condición de tener el menor grado posible, luego

   $$P(x) = (x-1)^3$$

4. **un** polinomio de grado 4, con coeficientes en $\mathbb{R}$, que sea mónico y sea divisible por $(x-1)^3$.

   Según el inciso anterior $P(x) = (x-1)^3 Q(x)$, donde:

   $gr(Q(x)) = 1$ para que $gr(P(x)) = 4$ y $Q(x)$ sea mónico para que $P(x)$ también lo sea, luego

   $$P(x) = (x-1)^3 (x-a), \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

Raíz de un polinomio - Ejemplo

5. **un** polinomio de grado 4, con coeficientes en $\mathbb{R}$, que sea mónico y 1 sea raíz triple.

   Si 1 sea raíz triple entonces $(x-1)^3 | P(x)$ y $(x-1)^4 \nmid P(x)$. Como el polinomio es mónico, su coeficiente principal es uno y como el grado del polinomio es cuatro, debe tener una raíz que no sea uno. Entonces un polinomio que cumple con las condiciones dadas es

$$P(x) = (x-1)^3 x$$

6. **todos** polinomio de grado 5, con coeficientes en $\mathbb{R}$, que no sea mónico y 1 sea raíz triple.

   Como se pide que el polinomio no sea mónico entonces el coeficiente principal no debe ser uno.

   Además el grado del polinomio debe ser 5 entonces el coeficiente principal no puede ser cero, pues si el coeficiente pricipal es cero entonces el polinomio es el nulo y el polinomio nulo no tiene grado.

   Como 1 sea raíz triple entonces $(x-1)^3 | P(x)$ y $(x-1)^4 \nmid P(x)$.

Entonces

$$P(x) = a(x-1)^3 T(x),$$

donde $a \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$, $T(x)$ es mónico, $gr(T(x)) = 2$ y $(x-1) \nmid T(x)$.

7. **un** polinomio $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ que tenga como factor al polinomio $Q(x) = x^2 + 2x - 3$ y $P(-3) \neq 0$.

   $Q(x) = x^2 + 2x - 3$ es un factor de $P(x)$ entonces

   $$P(x) = (x^2 + 2x - 3)S(x),$$

   donde $S(x) \in \mathbb{R}[x]$, $S(x) \neq 0$.

   $P(-3) = ((-3)^2 + 2(-3) - 3)S(-3) = (9 - 6 - 3)S(-3) = 0S(-3) = 0.$

   Luego, no existe $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ en las condiciones pedidas.

Cálculo de raíces

El siguiente teorema se conoce como Teorema de Gauss y nos da las **posibles** raíces racionales de un polinomio con coeficientes enteros.

Teorema

Sea $A(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ *un polinomio con coeficientes enteros y* $a_n \neq 0$. *Si un número racional* $\dfrac{p}{q}$, *con p y q relativamente primos, es raíz del polinomio* $A(x)$ *entonces p es divisor del término independiente* a_0 *y q es divisor del coeficiente principal* a_n

Para encontrar las raíces racionales de $A(x)$ debemos proceder del siguiente modo

- verificar que el polinomio tiene coeficientes enteros y $a_n \neq 0$
- hallar los divisores del término independiente a_0 y los divisores del coeficiente principal a_n
- considerar todas las fracciones irreducibles $\dfrac{p}{q}$, donde $p \in D(a_0)$ y $q \in D(a_n)$ que son las posibles raíces de $A(x)$
- determinar si $\dfrac{p}{q}$ es o no raíz del polinomio $A(x)$

Ejemplo

Utilizando el Teorema de Gauss, hallas las raíces de

$$A(x) = 2x^4 - 4x^3 - 14x^2 + 40x - 24$$

Observemos que $A(x)$ tiene coeficientes enteros y $a_n = a_4 = 2 \neq 0$

$a_0 = 24$ y $a_n = 2$ entonces

$$D(a_0) = D(24) = \{\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 4,\ \pm 6,\ \pm 8,\ \pm 12,\ \pm 24\} \text{ y}$$

$$D(a_n) = D(2) = \{\pm 1,\ \pm 2\}$$

Según el Teorema de Gauss, $p \in D(24)$, $q \in D(2)$ y las posibles raíces racionales son

$$\frac{p}{q} = \pm\frac{1}{1},\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{2}{1},\ \pm\frac{2}{2},\ \pm\frac{3}{1},\ \pm\frac{3}{2},\ \pm\frac{4}{1},\ \pm\frac{4}{2},\ \pm\frac{6}{1},\ \pm\frac{6}{2},\ \pm\frac{8}{1},\ \pm\frac{8}{2},$$

$$\pm\frac{12}{1},\ \pm\frac{12}{2},\ \pm\frac{24}{1},\ \pm\frac{24}{2},$$

Cálculo de raíces

Entonces las posibles raíces racionales son

$$\frac{p}{q} = \pm 1,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm\frac{3}{2},\ \pm 4,\ \pm 6,\ \pm 8,\ \pm 12,\ \pm 24$$

Por medio del teorema del resto analizamos si 1 es raíz del polinomio $A(x)$

$$A(1) = 2\cdot 1^4 - 4\cdot 1^3 - 14\cdot 1^2 + 40\cdot 1 - 24 = 2 - 4 - 14 + 40 - 24 = 0$$

entonces 1 es raíz del polinomio $A(x)$

Aplicando la regla de Ruffini veamos si 1 es raíz simple o de un orden de multiplicidad mayor que uno

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 2 & -4 & -14 & 40 & -24 \\
\hline
 & & & & & \\
1 & & 2 & -2 & -16 & 24 \\
\hline
 & 2 & -2 & -16 & 24 & 0 \\
 & & & & & \\
1 & & 2 & 1 & -15 & \\
\hline
 & 2 & 0 & -15 & 9 \neq 0 &
\end{array}$$

Entonces 1 es raíz simple y $A(x) = (x-1)(2x^3 - 2x^2 - 16x + 24)$

Analicemos ahora si -1 es raíz de $A(x)$

$A(-1) = 2(-1)^4 - 4(-1)^3 - 14(-1)^2 + 40(-1) - 24 = 2 + 4 - 14 - 40 - 24 = -52 \neq 0,$

luego -1 no es raíz de $A(x)$

Determinemos si 2 es raíz de $A(x)$

Observemos que 2 es raíz de $A(x) = (x-1)(2x^3 - 2x^2 - 16x + 24)$ si y sólo si

$$2 \text{ es raíz de } B(x) = 2x^3 - 2x^2 - 16x + 24$$

Utilizamos la regla de Ruffini para determinarlo y en caso que 2 sea raíz hallaremos el orden de multiplicidad

Cálculo de raíces

	2	-2	-16	24
2		4	4	-24
	2	2	-12	0
2		4	12	
	2	6	0	

$A(x) = (x-1)(2x^3 - 2x^2 - 16x + 24) = (x-1)(x-2)(x-2)(2x+6)$, entonces

$$A(x) = 2(x-1)(x-2)^2(x+3)$$

Luego las raíces de $A(x)$ son 1 y -3 simples y 2 doble

Propiedades

Teorema

(Teorema Fundamental del Álgebra) Todo polinomio no constante con coeficientes en $\mathbb{C}$, tiene por lo menos una raíz en $\mathbb{C}$

Corolario

Todo polinomio con coeficientes en $\mathbb{C}$ tiene tantas raíces complejas como el grado del polinomio

Teorema

Si z es una raíz compleja de un polinomio $A(X)$ con coeficientes reales, entonces $\overline{z}$ también es raíz de $A(X)$. Además, z y $\overline{z}$ tienen el mismo orden de multiplicidad

Propiedades

Teorema

Todo polinomio con coeficientes reales de grado impar tiene por lo menos una raíz real

Teorema

Cualquiera sea $k \in \mathbb{C},\ k \neq 0,\ r$ *es raíz de un polinomio* $A(x)$ *si y sólo si* r *es raíz de* $kA(x)$

Teorema

Sean $A(x),\ B(x),\ C(x) \in \mathbb{C}[x]$ *tales que* $A(x) = B(x)C(x)$. r *es raíz de* $A(x)$ *si y sólo si* r *es raíz de* $B(x)$ *o* r *es raíz de* $C(x)$

Cálculo de raíces - Ejemplo

Ejemplo

Expresar a $A(x)$ factorizado como polinomios de primer grado e indicar si $A(x)$ tiene alguna raíz múltiple

$$A(x) = x^6 + x^5 - \frac{19}{4}x^4 - 5x^3 - \frac{149}{4}x^2 - 36x - 9$$

$A(x)$ no tiene coeficientes enteros entonces no podemos aplicar el Teorema de Gauss

Como las raíces de $A(x)$ coinciden con las raíces de $kA(x)$, cualquiera sea $k \in \mathbb{C}$, $k \neq 0$, consideremos $k = 4$ y de esta manera el polinomio $4A(x)$ tiene coeficientes enteros

$$B(x) = 4A(x) = 4x^6 + 4x^5 - 19x^4 - 20x^3 - 149x^2 - 144x - 36$$

Como $B(x)$ tiene coeficientes enteros y es no nulo, podemos aplicar el Teorema de Gauss a $B(x)$

Observemos que $b_n = 4$ y $b_0 = 36$ entonces

$p \in D(36) \iff p \in \{\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 4,\ \pm 6,\ \pm 9,\ \pm 12,\ \pm 18,\ \pm 36\}$

$q \in D(4) \iff q \in \{\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 4\}$

Las posibles raíces racionales del polinomio $B(x)$ son

$$\frac{p}{q} = \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 4,\ \pm 6,\ \pm 9,\ \pm 12,\ \pm 18,\ \pm 36,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{9}{2},\ \pm\frac{1}{4},\ \pm\frac{3}{4},\ \pm\frac{9}{4}$$

	4	4	−19	−20	−149	−144	−36
−1/2		−2	−1	10	5	72	36
	4	2	−20	−10	−144	−72	0
−1/2		−2	0	10	0	72	
	4	0	−20	0	−144	0	

Cálculo de raíces - Ejemplo

$$B(x) = 4A(x) = (x + \frac{1}{2})(x + \frac{1}{2})(4x^4 - 20x^2 - 144) = 4(x + \frac{1}{2})^2(x^4 - 5x^2 - 36)$$

Busquemos las raíces del polinomio

$$C(x) = x^4 - 5x^2 - 36$$

Haciendo el cambio de variable $x^2 = t$ tenemos

$$t^2 - 5t - 36 = 0 \iff t = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 144}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{5 \pm 13}{2}$$

Entonces $t_1 = 9 \ \vee \ t_2 = -4$

La igualdad $x^2 = t$ equivale a $x = \pm\sqrt{t}$, luego

$t_1 = 9 \iff x_{1,2} = \pm\sqrt{9} = \pm 3 \qquad t_2 = -4 \iff x_{3,4} = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i$

$$C(x) = (x - 3)(x + 3)(x - 2i)(x + 2i)$$

Cálculo de raíces - Ejemplo

$B(x) = 4(x + \frac{1}{2})^2(x-3)(x+3)(x-2i)(x+2i) = 4A(x)$ entonces

$$A(x) = \frac{1}{4}B(x)$$

$$A(x) = (x+\frac{1}{2})^2(x-3)(x+3)(x-2i)(x+2i) = (x+\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})(x-3)(x+3)(x-2i)(x+2i)$$

$A(x)$ tiene una única raíz de orden de multiplicidad mayor a uno y es $-\frac{1}{2}$, que es raíz doble

Observemos que

- $gr(A(x)) = 6$ entonces $A(x)$ tine seis raíces complejas
- Como $A(x) \in \mathbb{R}[x]$ y $2i$ es una raíz de $A(x)$ entonces $\overline{2i} = -2i$ también es una ráiz de $A(x)$. Además las dos raíces complejas no reales tienen el mismo orden de multiplicidad, porque son ambas de orden uno

Ejemplo

Hallar **todos** *los polinomios* $T(x) \in \mathbb{C}[x]$, $gr(T(x)) = 3$, *no mónico tales que cumplan las siguientes condiciones*

$$T(1) = T(-1) \ \ y \ \ 0 \text{ es raíz del polinomio}$$

Considerando que $T(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, *indicar si las proposiciones que se enuncian a continuación son verdaderas o falsas. Justificar las respuestas*

1. *Si el coeficiente principal de* $T(x)$ *es la unidad imaginaria* i *entonces existe* $a_2 \in \mathbb{R}$ *tal que* $T(x)$ *es divisible por* $(x-1)(x+1)$
2. $\exists\, a_3 \in \mathbb{R} / \ a_2 = 1 \ \wedge$ *las raíces de* $T(x)$*, distintas de cero, son complejas no reales*
3. $\exists\, a_2, a_3 \in \mathbb{R} / \ T(x)$ *tiene una única raíz real*
4. $\forall\, a_3 \in \mathbb{R} - \{0, 1\} : \ \exists\, a_2 \in \mathbb{R} / \ T(x)$*, tiene una raíz compleja no real de orden de multiplicidad dos*

Cálculo de raíces - Ejemplo

Comencemos por armar todos los polinomios que verifican las condiciones pedidas

$T(x) \in \mathbb{C}[x],\ gr(T(x)) = 3$ y $T(x)$ no es mónico entonces

$$T(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad \text{con } a_3,\ a_2,\ a_1,\ a_0 \in \mathbb{C},\ a_3 \neq 0,\ 1$$

0 es raíz del polinomio entonces

$$T(0) = a_3 \cdot 0^3 + a_2 \cdot 0^2 + a_1 \cdot 0 + a_0 = 0 \iff a_0 = 0$$

Luego $T(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x$ y como $T(1) = T(-1)$ deducimos que

$$a_3 \cdot 1^3 + a_2 \cdot 1^2 + a_1 \cdot 1 = a_3(-1)^3 + a_2(-1)^2 + a_1(-1) \iff$$

$$\iff a_3 + a_2 + a_1 = -a_3 + a_2 - a_1 \iff 2a_3 = -2a_1 \iff a_3 = -a_1 \iff a_1 = -a_3$$

Entonces

$$T(x) = a_3x^3 + a_2x^2 - a_3x, \quad \forall a_3,\ a_2 \in \mathbb{C},\ a_3 \neq 0,\ 1$$

1. Si el coeficiente principal de $T(x)$ es la unidad imaginaria i entonces existe $a_2 \in \mathbb{R}$ tal que $T(x)$ es divisible por $(x-1)(x+1)$

   Si $a_3 = i$ entonces $T(x) = ix^3 + a_2x^2 - ix$, con $a_2 \in \mathbb{C}$

   Queremos que $(x-1)(x+1)$ divida a $T(x)$ entonces -1, 1 son raíces del polinomio $T(x)$, luego

$$T(1) = 0 \iff i \cdot 1^3 + a_2 \cdot 1^2 - i \cdot 1 = 0 \iff i + a_2 - i = 0 \iff a_2 = 0$$

   Veamos si -1 es raíz de $T(x)$ cuando $a_2 = 0$

   $T(-1) = i(-1)^3 + 0(-1)^2 - i(-1) = -i + 0 + i = 0$, por lo tanto

$$\exists\, a_2 = 0 /\ (x-1)(x+1) \text{ divide a } T(x),$$

   es decir, la proposición es verdadera

2. $\exists\, a_3 \in \mathbb{R} /\ a_2 = 1 \wedge$ las raíces de $T(x)$, distintas de cero, son complejas no reales

Si $a_2 = 1$ entonces

$$T(x) = a_3x^3 + 1 \cdot x^2 - a_3x = a_3x^3 + x^2 - a_3x = x(a_3x^2 + x - a_3)$$

Observemso que si $a_2 = 1$ entonces 0 es ráiz doble de $T(x)$. Como en el enunciado nos preguntan sobre las raíces distintas de cero entonces buscamos las raíces $S(x) = a_3x^2 + x - a_3, \quad a_3 \neq 0, 1$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4a_3(-a_3)}}{2a_3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4a_3^2}}{2a_3}$$

Observemos que $\forall\, a_3 \in \mathbb{R}: \ 1 + 4a_3^2 > 0$ (la demostración de esta afirmación se deja como ejercicio) entonces

$$\forall\, a_3 \in \mathbb{R}: \ \sqrt{1 + 4a_3^2} \in \mathbb{R},$$

luego $\nexists\, a_3 \in \mathbb{R} /\ a_2 = 1 \wedge$ las raíces de $T(x)$, distintas de cero, son complejas no reales, por lo tanto, la proposición es falsa

3. $\exists\, a_2, a_3 \in \mathbb{R} /\ T(x)$ tiene una única raíz real

   Si $T(x)$ tiene una única raíz real, como 0 es una raíz real de T entonces

   0 es la única raíz real de T, luego

   $$T(x) = a_3x^3 + a_2x^2 - a_3x = a_3x^3$$

   entonces $a_2 = 0$ y $a_3 = 0$ y esto es un absurdo pues $a_3 \neq 0$, es decir

   $\nexists\, a_2, a_3 \in \mathbb{R} /\ T(x)$ tiene una única raíz real,

   de esta manera probamos que la proposición es falsa

4. $\forall\, a_3 \in \mathbb{R} - \{0,1\}:\ \exists\, a_2 \in \mathbb{R}/\ T(x)$, tiene una raíz compleja no real de orden de multiplicidad dos

Supongamos que $\forall\, a_3 \in \mathbb{R} - \{0,1\},\ \exists\, a_2 \in \mathbb{R}/T(x)$ tiene una raíz compleja no real doble, entonces $T(x) = a_3x^3 + a_2x^2 - a_3x$ tiene todos los coeficientes reales, luego

$$T(x) \in \mathbb{R}[x]$$

Si $T(x)$ tiene una raíz compleja z de multiplicidad dos y $T(x)$ tiene todos sus coeficientes reales entonces $\overline{z}$ también es raíz de $T(x)$

Además $z \notin \mathbb{R}$ entonces $z \neq \overline{z}$ luego

$$T(x) = a_3(x-z)^2(x-\overline{z})^2x, \ \text{ con } a_3 \in \mathbb{R} - \{0,1\}$$

de lo que decucimos que $gr(T) = 5$ y esto contradice que $gr(T) = 3$, entonces la proposición es falsa

Cálculo de raíces - Ejemplo

Ejemplo

1. *Hallar todos los polinomios* $P(x)$ *que cumplan las siguientes condiciones:* $P(x) \in \mathbb{C}[x]$, 2 *es raíz de* $P(x)$, $P(x)$ *es divisible por* $x + i$ *y* $P(x)$ *tiene a* $\sqrt{2}$ *como raíz doble. ¿P(x) es mónico? ¿Es* $P(x)$ *único? Justificar las respuestas*

2. *Hallar todos los polinomios* $M(x)$ *que cumplan las siguientes condiciones:* $M(x) \in \mathbb{R}[x]$, 2 *es raíz de* $M(x)$, $M(x)$ *es divisible por* $x + i$ *y* $M(x)$ *tiene a* $\sqrt{2}$ *como raíz doble. Dar un ejemplo de un polinomio* $M(x)$ *en las condiciones pedidas y de grado mínimo. Dar un ejemplo de un polinomio* $M(x)$ *en las condiciones indicadas y de grado* 7

Cálculo de raíces - Ejemplo

1. Hallar todos los polinomio $P(x)$ que cumplan las siguientes condiciones: $P(x) \in \mathbb{C}[x]$, 2 es raíz de $P(x)$, $P(x)$ es divisible por $x+i$ y $P(x)$ tiene a $\sqrt{2}$ como raíz doble. ¿P(x) es mónico? ¿Es $P(x)$ único? Justificar las respuestas

2 es raíz de $P(x)$ y $\sqrt{2}$ es raíz doble, entonces

$$P(x) = (x-2)(x-\sqrt{2})^2 Q(x), \quad Q(x) \in \mathbb{C}[x], \quad Q(x) \neq 0, \quad (x-\sqrt{2}) \nmid Q(x)$$

$P(x)$ es divisible por $x+i$ entonces $Q(x)$ es divisible por $x+i$ luego

$$P(x) = (x-2)(x-\sqrt{2})^2 (x+i) T(x), \quad T(x) \in \mathbb{C}[x], \quad T(x) \neq 0, \quad (x-\sqrt{2}) \nmid T(x)$$

No podemos asegurar si $P(x)$ es mónico o no, porque depende de el coeficiente prinicpal de $T(x)$. Si $T(x)$ es mónico entonces $P(x)$ también lo es

$P(x)$ no es único, hay infinitos polinomios que verifican las condiciones pedidas. $P(x)$ depénde de la elección de $T(x)$

Mostremos con dos ejemplos que $P(x)$ no es único

$$P(x) = (x-2)(x-\sqrt{2})^2(x+i)x \quad o \quad P(x) = 3i(x-2)(x-\sqrt{2})^2(x+i)(x+4)$$

2. Hallar todos los polinomios $M(x)$ que cumplan las siguientes condiciones: $M(x) \in \mathbb{R}[x]$, 2 es raíz de $M(x)$, $M(x)$ es divisible por $x + i$ y $M(x)$ tiene a $\sqrt{2}$ como raíz doble.

   Observemos que las condiciones pedidas en este inciso son la mismas que en el inciso anterior exceptuando el conjunto al que pertenecen los coeficientes, pues $M(x) \in \mathbb{R}[x]$

   Como los coeficientes de $M(x)$ son reales y $-i$ es una raíz de $M(x)$ entonces el conjugado de $-i$ también es una raíz de $M(x)$, es decir, i es una raíz de $M(x)$, de lo que deducimos

   $$M(x) = (x-2)(x-\sqrt{2})^2(x+i)(x-i)T(x), \;\; T(x) \in \mathbb{R}[x], \;\; T(x) \neq 0, \;\; (x-\sqrt{2}) \nmid T(x)$$

   Dar un ejemplo de un polinomio $M(x)$ en las condiciones pedidas y de grado mínimo

   Para que $M(x)$ tenga grado mínimo $T(x)$ debe tener grado cero, es decir, $T(x)$ debe ser una constante no nula entonces

   $$M(x) = a(x-2)(x-\sqrt{2})^2(x+i)(x-i), \quad a \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Cálculo de raíces - Ejemplo

Un ejemplo sería

$$M(x) = 3(x-2)(x-\sqrt{2})^2(x+i)(x-i)$$

Dar un ejemplo de un polinomio $M(x)$ en las condiciones indicadas y de grado 7

Para que $M(x)$ tenga grado 7, $T(x)$ debe tener grado 2, es decir,

$$T(x) = a(x-r_1)(x-r_2), \quad T(x) \in \mathbb{R}[x], \; a \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Entonces

$$M(x) = a(x-2)(x-\sqrt{2})^2(x+i)(x-i)(x-r_1)(x-r_2)$$

con $a \in \mathbb{R} - \{0\}, r_1, r_2 \in \mathbb{R} - \{\sqrt{2}\}$ o $r_1, r_2 \in \mathbb{C}, \; r_1 = \overline{r_2}$

Ejemplos

$$M(x) = -2(x-2)(x-\sqrt{2})^2(x+i)(x-i)(x-2)(x-4)$$

$$M(x) = (x-2)(x-\sqrt{2})^2(x+i)(x-i)(x-(1-2i))(x-(1+2i))$$