Matrices

Elementos de Álgebra
Segundo Cuatrimestre 2022

Mg. María del Carmen Vannicola

Facultad de Informática
Departamento de Matemática

Definición

Definición

Una matriz A es un arreglo rectangular de números, que consta de n filas y m columnas .

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1(m-1)} & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2(m-1)} & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3(m-1)} & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{i(m-1)} & a_{im} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & a_{(n-1)3} & \cdots & a_{(n-1)j} & \cdots & a_{(n-1)(m-1)} & a_{(n-1)m} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{n(m-1)} & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Notaremos $A = (a_{ij}),\ 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m$ para indicar que A es una matriz que tiene n filas y m columnas.

El elemento a_{ij} indica el número que está ubicado en la fila i y la columna j.

Definición

Definición

El orden de una matriz A es el número de filas de la matriz por el número de columnas de la misma.

Si A es una matriz de n filas y m columnas diremos que A es una matriz de orden $n \times m$ y notaremos $o(A) = n \times m$.

Si A es una matriz de orden $n \times m$ y $n = m$ entonces diremos que A es una matriz cuadrada y que el orden de A es n. Escribiremos $o(A) = n$.

El conjunto $M_{n\times m}(\mathbb{R})$ es el conjunto de todas las matrices de orden $n \times m$ con elementos en el conjunto de los números reales.

Por ejemplo, el conjunto $M_2(\mathbb{C})$ es el conjunto formado por todas las matrices cuadradas de orden 2 con elementos complejos.

Ejemplos

$$A = \left[\begin{array}{ccc} 1 & -1 & \pi \\ 0 & 1/3 & 4 \end{array}\right]$$

$$A \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$$

$$a_{11} = 1,\; a_{13} = \pi,\; a_{22} = \frac{1}{3}$$

$$B = \left[\begin{array}{cccc} -1 & -1 & 2 & 3 \\ 10 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$B \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z})$$

$$b_{13} = -2b_{11}, \quad b_{21} = b_{14} + b_{23}$$

$$b_{3j} = 0,\; j = 1, 2, 3, 4$$

$D \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$, $D = (d_{ij})$ la matriz definida por $d_{ij} = \begin{cases} -i + 2j & \text{si } i + j < 3 \\ 2 & \text{si } i + j = 3 \\ i + j & \text{si } i + j > 3 \end{cases}$

$$D = \left[\begin{array}{cc} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \\ d_{31} & d_{32} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} -1 + 2\cdot 1 & 2 \\ 2 & 2 + 2 \\ 3 + 1 & 3 + 2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{array}\right]$$

Ejemplos

$$C = \left[\begin{array}{ccc} -2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & -1/4 & 2+i \\ -\sqrt{3} & (ki)^3 & 10 \end{array} \right]$$

$C \in M_3(\mathbb{C}), \ \forall k \in \mathbb{C}$

$c_{11} = -2, \quad c_{12} = c_{21} = 0, \quad c_{13} = \sqrt{3}, \quad c_{22} = -\dfrac{1}{4}$

$c_{23} = 2+i, \quad c_{31} = -c_{13}, \quad c_{32} = (ki)^3, \quad c_{33} = 10$

$E \in M_{2\times 4}(\mathbb{C}), \ E = (e_{st})$ la matriz definida por $e_{st} = \begin{cases} (2i)^{s+t} & \text{si } s < t \\ 3 + i^{t-s} & \text{si } s \geq t \end{cases}$

$$E = \left[\begin{array}{cccc} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc} 3 + i^{1-1} & (2i)^{1+2} & (2i)^{1+3} & (2i)^{1+4} \\ 3 + i^{1-2} & 3 + i^{2-2} & (2i)^{2+3} & (2i)^{2+4} \end{array} \right]$$

$$E = \left[\begin{array}{cccc} 3 + i^0 & 8i^3 & 16i^4 & 32i^5 \\ 3 + i^{-1} & 3 + i^0 & 32i^5 & 64i^6 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc} 4 & -8i & 16 & 32i \\ 3 - i & 4 & 32i & -64 \end{array} \right]$$

Matrices especiales

Matriz nula de orden $n \times m$

$$0 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz nula siempre se indica con 0 sin importar el orden

$$0 = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, \quad 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Definición

Una matriz se denomina matriz fila si su orden es $1 \times m$ *y una matriz se llama matriz columna si es de orden* $n \times 1$.

Igualdad de matrices

Son ejemplos de matrices fila

$$A = [3], \qquad B = [2 \quad 5], \qquad C = [-1 \quad 5 \quad \frac{2}{5} \quad -8]$$

Son ejemplos de matrices columna

$$A = [-5], \qquad B = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 4/7 \end{bmatrix}$$

Definición

Sean A y B matrices de orden $n \times m$, $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$. Se dice que $A = B$ si y sólo si

$$a_{ij} = b_{ij}, \quad \forall\, i, j, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m$$

Si $o(A) \neq o(B)$ entonces $A \neq B$.

Sea $o(A) = o(B) = n \times m$. $A \neq B$ si y sólo si $\exists\, i, j,\ 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m /\ a_{ij} \neq b_{ij}$

Igualdad de matrices - Ejemplos

Consideremos las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & k \\ -3+k & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -k+1 \\ -5/2 & 1/2+k \end{bmatrix}$$

$A \neq B$ porque sus órdenes no coinciden. Lo mismo ocurre con B y C, luego $B \neq C$.

Hallar $k \in \mathbb{R}$ tal que $A = C$.

Como A y C son de orden 2 entonces analizamos sus elementos. Para que A y C coincidan $a_{ij} = c_{ij}$, cualesquiera sean $i = 1, 2$ y $j = 1, 2$, entonces

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11} = c_{11} \\ a_{12} = c_{12} \\ a_{21} = c_{21} \\ a_{22} = c_{22} \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2 & = & 2 \\ k & = & -k+1 \\ -3+k & = & -\dfrac{5}{2} \\ 1 & = & \dfrac{1}{2}+k \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2k & = & 1 \\ k & = & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & = & k \end{array} \right. \Longrightarrow k = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, $\exists\, k \in \mathbb{R},\ k = \dfrac{1}{2} \,/\, A = C$

Igualdad de matrices - Ejemplos

¿$\exists\, k \in \mathbb{R} /\ A = 0$?

Para poder igualar A con 0, debemos considerar que la matriz nula es de orden 2.

Entonces

$$\begin{bmatrix} 2 & k \\ -3+k & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 2 = 0 \\ k = 0 \\ -3+k = 0 \\ 1 = 0 \end{cases}$$

Como la primera ecuación es una contradición, esto nos asegura que

$$\forall\, k \in \mathbb{R} : \ A \neq 0$$

También podríamos escribir como conclusión

$$\nexists\, k \in \mathbb{R} : \ A = 0$$

Suma de matrices

Definición

Sean $A, B \in M_{n\times m}(\mathbb{C})$, $A = (a_{ij})$ *y* $B = (b_{ij})$. *La suma de las matrices* A *y* B *es una nueva matriz compleja de orden* $n \times m$ *que satisface*

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}), \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1m} + b_{1m} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2m} + b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \dots & a_{nm} + b_{nm} \end{bmatrix}$$

Producto de una matriz por un escalar

Definición

Sea $A \in M_{n\times m}(\mathbb{C})$ *y sea* $k \in \mathbb{C}$. *El producto de una matriz* A *por un escalar* k *es una nueva matriz compleja de orden* $n \times m$ *definida por*

$$kA = (ka_{ij}), \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m$$

$$kA = k \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1m} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \dots & ka_{nm} \end{bmatrix}$$

Propiedades de la suma y el producto por escalar

Proposición

Sean $A, B, C \in M_{n\times m}(\mathbb{C}),\ k,\ h \in \mathbb{C}$. *Se verifican las siguientes propiedades:*

1. *Asociativa de la suma:* $A + (B + C) = (A + B) + C$
2. *Conmutativa de la suma:* $A + B = B + A$
3. *Existencia de neutro para la suma:*
   $\exists 0 \in M_{n\times m}(\mathbb{C}) /\ \forall A \in M_{n\times m}(\mathbb{C}) :\ A + 0 = 0 + A = A$
4. *Existencia de opuesto o inverso para la suma:*
   $\forall A \in M_{n\times m}(\mathbb{C}) :\ \exists -A \in M_{n\times m}(\mathbb{C}) /\ A + (-A) = (-A) + A = 0$
5. $k(A + B) = kA + kB$
6. $(k + h)A = kA + hA$
7. $k(hA) = (kh)A = h(kA)$
8. $1A = A$

Operaciones entre matrices

Observaciones:

$$-A = (-1)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1m} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & -a_{nm} \end{bmatrix}$$

$A - B = A + (-B)$

$0A = 0$

Ejemplo

Calcular, en caso de ser posible, $2A$, $A + C$, $-3A - B$ *y* $-3A + 2A$, *siendo*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1-2i & -5 \\ 1/3 & i^5 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & \overline{1-2i} & 2 \\ -1/2 & -3i & -6 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Operaciones entre matrices

- Siempre se puede calcular el producto de un número (un escalar) por una matriz. No tenemos restricciones sobre el orden de la matriz y como $o(A) = 2 \times 3$ entonces $o(2A) = 2 \times 3$

$$2A = 2\begin{bmatrix} 3 & 1-2i & -5 \\ 1/3 & i^5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 3 & 2(1-2i) & 2(-5) \\ 2 \cdot 1/3 & 2 \cdot i^5 & 2(-4) \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$2A = \begin{bmatrix} 6 & 2-4i & -10 \\ 2/3 & 2i & -8 \end{bmatrix}$$

- Para hacer una suma de matrices, las matrices que intervienen en dicha suma deben tener el mismo orden. En este caso,

$$o(A) = 2 \times 3 \text{ y } ord(C) = 2.$$

Como $o(A) \neq o(C)$ entonces no está definida la suma $A + C$.

Operaciones entre matrices

- Observemos que $o(A) = 2 \times 3 = o(B)$ entonces $o(-3A) = 2 \times 3 = o(-B)$, luego se puede calcular $-3A - B$ y $o(-3A - B) = 2 \times 3$.

$$-3A - B = -3 \begin{bmatrix} 3 & 1-2i & -5 \\ 1/3 & i^5 & -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & \overline{1-2i} & 2 \\ -1/2 & -3i & -6 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (-3)3 & -3(1-2i) & (-3)(-5) \\ (-3)1/3 & (-3)i^5 & (-3)(-4) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 1+2i & 2 \\ -1/2 & -3i & -6 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -9 & -3+6i & 15 \\ -1 & -3i & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 1+2i & 2 \\ -1/2 & -3i & -6 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -9-(-2) & (-3+6i)-(1+2i) & 15-2 \\ -1-(-1/2) & -3i-(-3i) & 12-(-6) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -7 & -4+4i & 13 \\ -1/2 & 0 & 18 \end{bmatrix}$$

Ecuaciones matriciales

Ejemplo

Resolver la siguiente ecuación matricial

$$X + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = 2X - \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = 2X - \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$X + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} - 2X = 2X - \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - 2X \Longleftrightarrow$$

$$-X + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$-X + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

Ecuaciones matriciales

$$-X+0=\left[\begin{array}{cc}1 & 1\\ 0 & 0\end{array}\right]+\left[\begin{array}{cc}-1 & -2\\ 3 & -1\end{array}\right] \iff -X=\left[\begin{array}{cc}0 & -1\\ 3 & -1\end{array}\right] \iff$$

$$X=-\left[\begin{array}{cc}0 & -1\\ 3 & -1\end{array}\right] \iff X=\left[\begin{array}{cc}0 & 1\\ -3 & 1\end{array}\right]$$

Verificación:

$$X+\left[\begin{array}{cc}1 & 2\\ -3 & 1\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}0 & 1\\ -3 & 1\end{array}\right]+\left[\begin{array}{cc}1 & 2\\ -3 & 1\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}0+1 & 1+2\\ -3+(-3) & 1+1\end{array}\right] \Longrightarrow$$

$$X+\left[\begin{array}{cc}1 & 2\\ -3 & 1\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}1 & 3\\ -6 & 2\end{array}\right] \qquad (1)$$

$$2X-\left[\begin{array}{cc}-1 & -1\\ 0 & 0\end{array}\right]=2\left[\begin{array}{cc}0 & 1\\ -3 & 1\end{array}\right]-\left[\begin{array}{cc}-1 & -1\\ 0 & 0\end{array}\right]=$$

$$=\left[\begin{array}{cc}0 & 2\\ -6 & 2\end{array}\right]-\left[\begin{array}{cc}-1 & -1\\ 0 & 0\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}0-(-1) & 2-(-1)\\ -6-0 & 2-0\end{array}\right] \Longrightarrow$$

$$2X-\left[\begin{array}{cc}-1 & -1\\ 0 & 0\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}1 & 3\\ -6 & 2\end{array}\right] \qquad (2)$$

Ecuaciones matriciales

Como (1) y (2) coinciden entonces $X + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = 2X - \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Ejemplo

Sea $A = (a_{ij})$ *una matriz real que verifica*

$$7A - 2\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 5/2 & -2 & 1 \end{bmatrix} = A + \begin{bmatrix} 2k & 0 & 6 \\ 1 & 3k & -4 \end{bmatrix}$$

Analizar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justificar.

1. $\exists\, k \in \mathbb{R} : \; k < 4 \; \wedge \; |a_{11} - a_{12}| \leq a_{22}$
2. $\{k \in \mathbb{N} : \; k < 4 \; \wedge \; |a_{11} - a_{12}| \leq a_{22}\}$ *es un conjunto unitario*

En primer lugar vamos a despejar la matriz A, para conocer sus elementos.

$$7A - 2\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 5/2 & -2 & 1 \end{bmatrix} = A + \begin{bmatrix} 2k & 0 & 6 \\ 1 & 3k & -4 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$7A - A = 2\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 5/2 & -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & 0 & 6 \\ 1 & 3k & -4 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

Ecuaciones matriciales

$$6A = \begin{bmatrix} 2 & 10 & 6 \\ 5 & -4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & 0 & 6 \\ 1 & 3k & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+2k & 10 & 12 \\ 6 & -4+3k & -2 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$A = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2+2k & 10 & 12 \\ 6 & -4+3k & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3+1/3k & 5/3 & 2 \\ 1 & -2/3+1/2k & -1/3 \end{bmatrix}$$

Se deja como ejercicio verificar que la matriz A está bien calculada.

Analicemos el valor de verdad de las proposiciones dadas.

1. $k < 4 \ \wedge \ |a_{11} - a_{12}| \leq a_{22} \Longleftrightarrow k < 4 \ \wedge \ |\frac{1}{3} + \frac{1}{3}k - \frac{5}{3}| \leq -\frac{2}{3} + \frac{1}{2}k \Longleftrightarrow$

$$k < 4 \ \wedge \ |\frac{1}{3}k - \frac{4}{3}| \leq -\frac{2}{3} + \frac{1}{2}k \ \ (1)$$

Además $k < 4 \Longleftrightarrow \frac{1}{3}k < \frac{4}{3} \Longleftrightarrow \frac{1}{3}k - \frac{4}{3} < 0$

Reemplazando en (1) por la proposición equivalente a $k < 4$ tenemos

$$\frac{1}{3}k - \frac{4}{3} < 0 \ \ \wedge \ \ |\frac{1}{3}k - \frac{4}{3}| \leq -\frac{2}{3} + \frac{1}{2}k \ \ (2)$$

Ecuaciones matriciales

Resolvamos la inecuación con valor absoluto, considerando que $\frac{1}{3}k - \frac{4}{3} < 0$ entonces

$$|\frac{1}{3}k - \frac{4}{3}| \leq -\frac{2}{3} + \frac{1}{2}k \iff -(\frac{1}{3}k - \frac{4}{3}) \leq -\frac{2}{3} + \frac{1}{2}k \iff -\frac{1}{3}k + \frac{4}{3} \leq -\frac{2}{3} + \frac{1}{2}k \iff$$

$$-\frac{1}{3}k - \frac{1}{2}k \leq -\frac{2}{3} - \frac{4}{3} \quad \iff \quad -\frac{5}{6}k \leq -2 \quad \iff \quad k \geq \frac{12}{5}$$

$$\{k \in \mathbb{R} : \; k < 4 \; \wedge \; |a_{11} - a_{12}| \leq a_{22}\} = (-\infty, 4) \cap [\frac{12}{5}, +\infty) = [\frac{12}{5}, 4)$$

$\exists\, k \in \mathbb{R} : \; k < 4 \; \wedge \; |a_{11} - a_{12}| \leq a_{22}$ es verdadera pues

$\exists\, k \in \mathbb{R}, \; k = \frac{18}{5} \,/\, \frac{18}{5} < 4$ y

$$|a_{11} - a_{12}| = |\frac{1}{3} + \frac{1}{3}k - \frac{5}{3}| = |\frac{1}{3} \cdot \frac{18}{5} - \frac{4}{3}| = |-\frac{2}{15}| = \frac{2}{15}$$

$$a_{22} = -\frac{2}{3} + \frac{1}{2}k = -\frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{18}{5} = \frac{17}{15} \geq \frac{2}{15}$$

2. $\{k \in \mathbb{N} : \; k < 4 \; \wedge \; |a_{11} - a_{12}| \leq a_{22}\} = [\frac{12}{5}, 4) \cap \mathbb{N} = \{3\}$ es un conjunto unitario. Luego la propiedad es verdadera.

Producto de matrices

Definición

Sean A *una matriz de orden* $n \times m$ *y* B *una matriz de orden* $m \times p$. *Se define el producto entre las matrices* A *y* B *como una nueva matriz* $A \cdot B$ *de orden* $n \times p$ *definida por*

$$A \cdot B = (c_{ij}), \quad \textit{donde} \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}, \;\; 1 \leq i \leq n, \;\; 1 \leq j \leq p$$

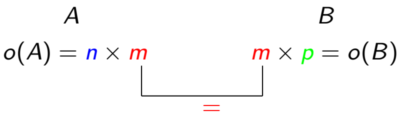
Observaciones:

- Si el número de columnas de A no coincide con el número de filas de B entonces $A \cdot B$ no está definida.
- Para cada i y para cada j, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq p$,

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + a_{i3} b_{3j} + \ldots + a_{i(m-1)} b_{(m-1)j} + a_{im} b_{mj}$$

- En general $A \cdot B$ no coincide con $B \cdot A$

Ejemplos



$A \qquad\qquad\qquad\qquad B$

$o(A) = n \times m \qquad\qquad m \times p = o(B)$

$=$

Existe $A \cdot B$ y $o(A \cdot B) = n \times p$

Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 3 \\ -1/2 \end{bmatrix}, \; D = [1/4 \;\; 2 \;\; -3]$$

$o(A) = 2 \times 3, \;\; o(B) = 3 \times 2, \;\; o(C) = 2 \times 1, \;\; o(D) = 1 \times 3$

Analizando los órdenes podemos asegurar que existen los siguientes productos

$A \cdot B$ y $o(A \cdot B) = 2, \qquad B \cdot A$ y $o(B \cdot A) = 3, \qquad B \cdot C$ y $o(B \cdot C) = 3 \times 1$

$C \cdot D$ y $o(C \cdot D) = 2 \times 3, \qquad D \cdot B$ y $o(D \cdot B) = 1 \times 2$

Ejemplos

Hallemos $A \cdot B$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = (c_{ij}), \quad \text{donde} \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}\, b_{kj}, \quad 1 \leq i \leq 2, \quad 1 \leq j \leq 2, \quad m = 3$$

$$c_{11} = \sum_{k=1}^{3} a_{1k}\, b_{k1} = a_{11}\, b_{11} + a_{12}\, b_{21} + a_{13}\, b_{31} =$$

$$= 2 \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot (-3) = -4 - 1 + 0 = -5$$

$$c_{12} = \sum_{k=1}^{3} a_{1k}\, b_{k2} = a_{11}\, b_{12} + a_{12}\, b_{22} + a_{13}\, b_{32} =$$

$$= 2 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 5 = 0 + 1 + 0 = 1$$

Ejemplos

$$c_{21} = \sum_{k=1}^{3} a_{2k} b_{k1} = a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21} + a_{23} b_{31} =$$

$$= 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 + (-4) \cdot (-3) = -2 + 3 + 12 = 13$$

$$c_{22} = \sum_{k=1}^{3} a_{2k} b_{k2} = a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22} + a_{23} b_{32} =$$

$$= 1 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) + (-4) \cdot 5 = 0 - 3 - 20 = -23$$

$$A \cdot B = \left[\begin{array}{cc} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{rr} -5 & 1 \\ 13 & -23 \end{array} \right]$$

Ejemplos

Calculemos $B \cdot C$

$$B = \left[\begin{array}{rr} -2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -3 & 5 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{array}\right], \quad C = \left[\begin{array}{c} 3 \\ -1/2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} c_{11} \\ c_{21} \end{array}\right]$$

$$B \cdot C = (d_{ij}), \quad \text{donde} \quad d_{ij} = \sum_{k=1}^{m} b_{ik} c_{kj}, \quad 1 \leq i \leq 3, \quad 1 \leq j \leq 1, \quad m = 2$$

$$d_{11} = \sum_{k=1}^{2} b_{1k} c_{k1} = b_{11} c_{11} + b_{12} c_{21} = (-2) \cdot 3 + 0 \cdot (-\frac{1}{2}) = -6 + 0 = -6$$

$$d_{21} = \sum_{k=1}^{2} b_{2k} c_{k1} = b_{21} c_{11} + b_{22} c_{21} = 1 \cdot 3 + (-1) \cdot (-\frac{1}{2}) = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

$$d_{31} = \sum_{k=1}^{2} b_{3k} c_{k1} = b_{31} c_{11} + b_{32} c_{21} = (-3) \cdot 3 + 5 \cdot (-\frac{1}{2}) = -9 - \frac{5}{2} = -\frac{23}{2}$$

$$B \cdot C = \left[\begin{array}{c} -6 \\ 7/2 \\ -23/2 \end{array}\right]$$

Ejemplos

Veamos en este ejemplo que $o(A \cdot B) = o(B \cdot A)$ y $A \cdot B \neq B \cdot A$

Consideremos $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & 4/3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

Como $o(A) = o(B) = 2$, existen $A \cdot B$, $B \cdot A$ y los dos productos tienen orden 2

$$\begin{array}{ccc|ccc}
 & & & 2 & 4/3 & \\
 & & & -2 & 2 & : B \\
\hline
A : & 1 & 2 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) & 1 \cdot 4/3 + 2 \cdot 2 & \\
 & -3 & 4 & (-3) \cdot 2 + 4 \cdot (-2) & (-3) \cdot 4/3 + 4 \cdot 2 &
\end{array}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 - 4 & 4/3 + 4 \\ -6 - 8 & -4 + 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 16/3 \\ -14 & 4 \end{bmatrix}$$

Ejemplos

Calculemos $B \cdot A$

$$\begin{array}{ccc|ccc}
 & & & 1 & 2 & \\
 & & & -3 & 4 & : A \\ \hline
 & 2 & 4/3 & 2 \cdot 1 + 4/3 \cdot (-3) & 2 \cdot 2 + 4/3 \cdot 4 & \\
B : & & & & & \\
 & -2 & 2 & (-2) \cdot 1 + 2 \cdot (-3) & (-2) \cdot 2 + 2 \cdot 4 &
\end{array}$$

$$B \cdot A = \left[\begin{array}{cc} 2-4 & 4+16/3 \\ -2-6 & -4+8 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} -2 & 28/3 \\ -8 & 4 \end{array} \right]$$

Observemos que $A \cdot B \neq B \cdot A$

Matriz identidad

Definición

Sea A una matriz cuadrada de orden n, a los elementos a_{ii}, $1 \leq i \leq n$ se los denomina **elementos de la diagonal principal**. *Los* **elementos de la diagonal secundaria** *son aquellos de la forma a_{ij} tal que $i + j = n + 1$*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{i(n-1)} & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \dots & a_{(n-1)i} & \dots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Los elementos de la diagonal principal son: $a_{11},\ a_{22}, \dots, a_{ii}, \dots, a_{(n-1)(n-1)},\ a_{nn}$

Los elementos de la diagonal secundaria son: $a_{n1},\ a_{(n-1)2}, \dots, a_{2(n-1)},\ a_{1n}$

Propiedades del producto de matrices.

Definición

La matriz identidad de orden n es una matriz cuadrada donde los elementos de la diagonal principal son unos y el resto de los elementos son ceros

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Proposición

Sean A, B y C matrices cuyos órdenes permiten efectuar las operaciones indicadas, I la matriz identidad del orden adecuado para las operaciones y sea $k \in \mathbb{R}$.

1. *Asociativa del producto:* $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
2. *Existencia de neutro para el producto:* $\exists\, I / \forall A : \; A \cdot I = I \cdot A = A$
3. *Distributiva del producto respecto a la suma:* $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$

   $(B + C) \cdot A = (B \cdot A) + (C \cdot A)$
4. $k(A \cdot B) = (kA) \cdot B = A \cdot (kB)$

Potencia de matrices - Matriz traspuesta

Definición

Sea A una matriz cuadrada de orden n. Se define la potencia natural de A del siguiente modo

$$\begin{aligned} A^1 &= A \\ A^n &= A \cdot A^{n-1}, \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Por ejemplo:

$$A^2 = A \cdot A^{2-1} = A \cdot A^1 = A \cdot A, \qquad A^3 = A \cdot A^{3-1} = A \cdot A^2 = A \cdot (A \cdot A)$$

Definición

Sea A una matriz de orden $n \times m$. La matriz traspuesta de A es la matriz de orden $m \times n$ que intercambia las filas por las columnas de A.

A la matriz traspuesta de A la notaremos por A^t y

$$\text{si } A = (a_{ij}) \text{ entonces } A^t = (a_{ji}), \;\; 1 \leq i \leq n, \; 1 \leq j \leq m$$

Matriz traspuesta

Proposición

Sean A y B matrices tales que están definidas las operaciones que se indican y sea $k \in \mathbb{R}$. Se verifican las siguientes igualdades

1. $(A^t)^t = A$
2. $(A+B)^t = A^t + B^t$
3. $(kA)^t = kA^t$
4. $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

Ejemplo

Sea A una matriz de orden 2×3 definida por $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & 1/2 \end{bmatrix}$.

Indicar de qué orden es la matriz B para que la operación $A^t \cdot B$ se pueda realizar y su resultado sea una matriz cuadrada.

$o(A) = 2 \times 3$ entonces $o(A^t) = 3 \times 2$, luego $o(B) = 2 \times m$ y $o(A^t \cdot B) = 3 \times m$.

Para que $A^t \cdot B$ sea una matriz cuadrada $m = 3$. Entonces $o(B) = 2 \times 3$

Ecuaciones matriciales.

Ejemplo

Sea $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. *Hallar la matriz* A *que verifica* $(B^t \cdot A + 2A)^t = B^2 - I$.

En primer lugar analizaremos el orden de A. Como $o(B) = 2$ entonces $o(B^2) = 2$, luego la matriz identidad debe ser de orden dos para poder hacer la resta

El orden de $(B^t \cdot A + 2A)^t$ debe ser dos, al igual que $B^t \cdot A + 2A$. Como B^t es de orden 2 entonces $o(A) = 2 \times p$, luego $o(B^t \cdot A + 2A) = 2 \times p = 2 \times 2$, es decir, $p = 2$.

Entonces $o(A) = 2$

$$(B^t \cdot A + 2A)^t = B^2 - I \iff (B^t \cdot A)^t + (2A)^t = B^2 - I \iff$$

$$(A^t) \cdot (B^t)^t + 2(A)^t = B^2 - I \iff A^t \cdot B + 2A^t \cdot I = B^2 - I \iff$$

$$\iff A^t \cdot B + A^t \cdot (2I) = B^2 - I \iff A^t \cdot (B + 2I) = B^2 - I \quad (a)$$

Ecuaciones matriciales

Calculemos $B+2I$ y B^2-I

$$B+2I=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}+2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B^2-I=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^2-I=\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

Retomando la ecuación (a):

$$A^t\cdot(B+2I)=B^2-I \iff \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{bmatrix} 4x-y & 3x+2y \\ 4z-t & 3z+2t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} 4x-y & = & 0 & (1) \\ 3x+2y & = & 6 & (2) \\ 4z-t & = & -2 & (3) \\ 3z+2t & = & -4 & (4) \end{cases}$$

Ecuaciones matriciales

Resolvamos el sistema de ecuaciones

De (1) $y = 4x$.

Reemplazando en (2), $3x + y = 3x + 2(4x) = 6 \Longrightarrow x = \dfrac{6}{11} \Longrightarrow y = 4 \cdot \dfrac{6}{11} = \dfrac{24}{11}$

De (3) $t = 4z + 2$. Reemplazando en (4), $3z + 2(4z + 2) = -4$ entonces $11z = -8$, luego $z = -\dfrac{8}{11}$. Entonces

$$t = 4(-\frac{8}{11}) + 2 = -\frac{32}{11} + 2 = -\frac{10}{11}$$

$$A^t = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \Longrightarrow A = \begin{bmatrix} x & z \\ y & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6/11 & -8/11 \\ 24/11 & -10/11 \end{bmatrix}$$

Matrices especiales.

Definición

Sea A una matriz de orden n, $A = (a_{ij})$.

1. *A es una matriz simétrica si y sólo si $A = A^t$.*
2. *A es una matriz triangular superior si y sólo si $a_{ij} = 0$, si $i > j$.*
3. *A es una matriz triangular inferior si y sólo si $a_{ij} = 0$, si $i < j$.*
4. *A es una matriz diagonal si y sólo si $a_{ij} = 0$, si $i \neq j$.*
5. *A es una matriz escalar si y sólo si A es diagonal y $a_{ii} = a_{jj}$, cualesquiera sean i y j.*

Ejemplo

Cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$, analizar si la martiz nula de orden n es simétrica, triangular inferior o superior, diagonal o escalar. Idem par la matriz identidad de oden n.

Si $A = (a_{ij})$ es la matriz nula de orden n entonces $a_{ij} = 0, \ \forall\, i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Entonces

- $a_{ij} = 0 = a_{ji}$ entonces $A = A^t$, es decir, la matriz nula es simétrica.

Matrices especiales.

- $a_{ij} = 0$, si $i > j$ y $a_{ij} = 0$, si $i > j$ entonces la matriz nula es triangular superior y triangular inferior.
- $a_{ij} = 0$, si $i \neq j$ entonces la matriz nula es diagonal.
- $a_{ii} = 0 = a_{jj}$, cualesquiera sean i y j entonces la matriz nula es escalar.

Sea $I = (a_{ij})$ la matriz identidad de orden n entonces $\forall\, i, j = 1, 2, \ldots, n$ se verifica

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

- Si $i \neq j$, $a_{ij} = 0 = a_{ji}$ y si $i = j$, $a_{ij} = 1 = a_{ji}$. Luego $I = I^t$, es decir, la matriz identidad es simétrica.
- Como $a_{ij} = 0$, si $i \neq j$ entonces $a_{ij} = 0$, si $i > j$ y $a_{ij} = 0$, si $i > j$, luego la matriz identidad es triangular superior y triangular inferior.
- $a_{ij} = 0$, si $i \neq j$ entonces la matriz identidad es diagonal.
- $a_{ii} = 1 = a_{jj}$, cualesquiera sean i y j entonces la matriz identidad es escalar.

Matrices especiales.

Ejemplo

Determinar qué propiedades verifican las matrcies A, B, C y D que se describen a continuación, considerando que $o(D) = 4$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad y\ D = 6I$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

A no es triangular superior pues $i = 3 > 1 = j$ y $a_{31} = 1 \neq 0$.

A no es triangular inferior pues $a_{23} = -2 \neq 0$ e $i = 2 < 3 = j$.

A no es diagonal ya que $a_{13} = 1 \neq 0$. Como no es diagonal tampoco es escalar.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} = A^t$$ entonces A es simétrica.

Matrices especiales.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

B es triangular superior pues

$$b_{21} = b_{31} = b_{32} = b_{41} = b_{42} = b_{43} = 0.$$

B no es triangular inferior, ni diagonal, ni escalar ya que $b_{13} = -2 \neq 0$.

B no es simétrica porque $b_{14} = 1 \neq 0 = b_{41}$.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

C es diagonal ya que $c_{ij} = 0$, si $i \neq j$.

Como C es diagonal entonces es triangular inferior, triangular superior y simétrica.

C no es escalar, pues $c_{11} = 1 \neq 3 = c_{33}$

$$D = 6I = 6 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

D es escalar pues los elementos de la diagonal principal son todos iguales y el resto de los elementos son ceros.

Como D es escalar entonces es diagonal, triangular superior, triangular inferior y simétrica.

Matriz inversa

Definición

Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$ *. Se dice que* A *es inversible si y sólo si*

$$\exists\, B \in M_n(\mathbb{C}) /\ A \cdot B = B \cdot A = I$$

Cuando existe la matriz B, se dice que B es la matriz inversa de A y se nota A^{-1}.

Ejemplo

Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} -1/5 & 2/5 \\ -3/5 & 1/5 \end{bmatrix}$,

Demostrar que que B *es la inversa de* A*.*

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1/5 & 2/5 \\ -3/5 & 1/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/5 + 6/5 & 2/5 - 2/5 \\ -3/5 + 3/5 & 6/5 - 1/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} -1/5 & 2/5 \\ -3/5 & 1/5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/5 + 6/5 & 2/5 - 2/5 \\ -3/5 + 3/5 & 6/5 - 1/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como $A \cdot B = B \cdot A = I$ entonces $B = A^{-1}$

Ejemplo

Ejemplo

Sea $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$. *Analizar si* B *es inversible.*

Si B es inversible, existe $C \in M_3(\mathbb{R})$ tal que $B \cdot C = I$

$$B \cdot C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y & z \\ t & w & s \\ r & p & m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2t-r & \cdots & \cdots \\ 3t-2r & \cdots & \cdots \\ x+1/2t & \cdots & \cdots \end{bmatrix} = I$$

$$\begin{cases} x+2t-r &=& 1 \quad (1) \\ 3t-2r &=& 0 \quad (2) \\ x+1/2t &=& 0 \quad (3) \end{cases}$$

De la ecuación (3), $x = -\dfrac{1}{2}t$

De (2), $r = \dfrac{3}{2}t$. Reemplzando en (1)

$-\dfrac{1}{2}t + 2t - \dfrac{3}{2}t = 1$ entonces $0t = 1$

Observemos que no existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $0t = 1$, pues para todo $t \in \mathbb{R}$, $0t = 0$. Entonces no va a existir la matriz C, es decir, B no es inversible.

Propiedades de la matriz inversa

Proposición

Sean $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ matrices inversibles y $k \in \mathbb{C}$. Se verifican las siguientes propiedades

1. *La inversa de A es única*
2. A^{-1} *es inversible y* $(A^{-1})^{-1} = A$
3. $A \cdot B$ *es inversible y* $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
4. *Si* $k \neq 0$ *entonces* kA *es inversible y* $(kA)^{-1} = \dfrac{1}{k} A^{-1}$
5. $\forall n \in \mathbb{N} : \; A^{-n} = (A^{-1})^n$
6. A^t *es inversible y* $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$
7. *Si* $A \cdot B = I$ *entonces* $B \cdot A = I$

Observemos que el item 5 de la proposición nos permite definir la potencia de matrices con exponentes enteros para matrices inversibles.

Las demostraciones de estas proposiciones, exceptuando la propiedad 7, se proponen como ejercicios.

Definición de potenciación con exponente entero

Definición

Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$ *una matriz inversible.*

$$\begin{aligned} A^0 &= I \\ A^n &= A \cdot A^{n-1}, \qquad \forall n \in \mathbb{N} \\ A^n &= (A^{-1})^{-n}, \qquad \forall n \in \mathbb{Z},\ n < 0 \end{aligned}$$

Ejemplo

Consideremos la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$. *Hallemos* A^{-2} *y analicemos si* A^{-2} *es una matriz escalar.*

Observemos que la matriz A coincide con la enunciada en el primer ejemplo, entonces

$$B = \begin{bmatrix} -1/5 & 2/5 \\ -3/5 & 1/5 \end{bmatrix} = A^{-1}.$$

Potenciación - Ejemplo

$$A^{-2} = (A^{-1})^2 = B^2 = \left[\begin{array}{cc} -1/5 & 2/5 \\ -3/5 & 1/5 \end{array}\right]^2 = \left[\begin{array}{cc} -1/5 & 2/5 \\ -3/5 & 1/5 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{cc} -1/5 & 2/5 \\ -3/5 & 1/5 \end{array}\right]$$

$$A^{-2} = \left[\begin{array}{cc} 1/25 - 6/25 & -2/25 + 2/25 \\ 3/25 - 3/25 & -6/25 + 1/25 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} -1/5 & 0 \\ 0 & -1/5 \end{array}\right]$$

$$A^{-2} = \left[\begin{array}{cc} -1/5 & 0 \\ 0 & -1/5 \end{array}\right] = -\frac{1}{5}\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right] = -\frac{1}{5} I.$$

Entonces A^{-2} es una matriz escalar.

Operaciones elementales de fila.

Sea A una matriz de orden $n \times m$. Indicaremos con f_i la fila "i" de la matriz A.

Las operaciones elementales de fila son tres

1. Intercambiar dos filas
2. Reemplazar una fila por la multiplicación de ella misma por una constante no nula
3. Reemplazar una fila por la suma de ella misma más un múltiplo de otra

Si intercambiamos la fila "i" por la fila "j" notaremos:

$$f_i \longleftrightarrow f_j$$

Sea $k \in \mathbb{C}, \ k \neq 0$
Si intercambiamos la fila "i" por k-veces la fila "i" notaremos:

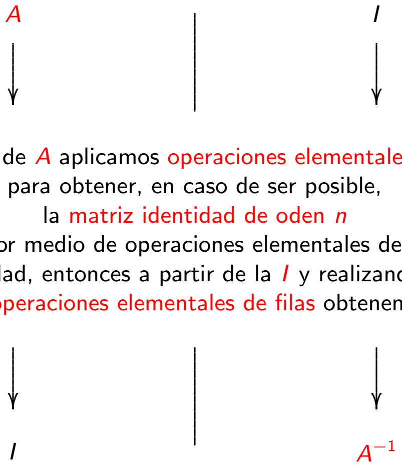
$$f_i \longleftrightarrow kf_i$$

Sea $k \in \mathbb{C}$
Si a la fila "i" la reemplazamos por la fila "i" mas k-veces la fila "j" notaremos:

$$f_i \longleftrightarrow f_i + kf_j$$

Cálculo de la matriz inversa por medio de operaciones elementales de filas

Sea A una matriz cuadrada de orden n



Partiendo de A aplicamos operaciones elementales de filas
para obtener, en caso de ser posible,
la matriz identidad de oden n
Si a partir de A y por medio de operaciones elementales de filas obtenemos la identidad, entonces a partir de la I y realizando las
mismas operaciones elementales de filas obtenemos A^{-1}

Cálculo de la matriz inversa por medio de operaciones elementales de filas - Ejemplo

Hallar la inversa de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

$$\begin{array}{c|cc}
A & I & \\
\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \\
\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} & f_2 \longleftrightarrow f_2 + (-3) f_1 \\
\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3/5 & 1/5 \end{bmatrix} & f_2 \longleftrightarrow \frac{1}{5} f_2 \\
\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1/5 & 2/5 \\ -3/5 & 1/5 \end{bmatrix} & f_1 \longleftrightarrow f_1 + 2 f_2 \\
I & A^{-1} &
\end{array}$$

Cálculo de la matriz inversa por operaciones elementales de filas - Ejemplo

Sea $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$. Analizar si B es inversible

$$\left.\begin{array}{c} B \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -3/2 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & -3/2 & 1 \end{bmatrix} \end{array}\right| \begin{array}{cc} I & \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} & f_3 \longleftrightarrow f_3 + (-1) f_1 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} & f_2 \longleftrightarrow \dfrac{1}{3} f_2 \end{array}$$

Cálculo de la matriz inversa por operaciones elementales de filas - Ejemplo

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & -3/2 & 1 \end{array}\right] \left| \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \right. \qquad f_2 \longleftrightarrow \frac{1}{3} f_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad f_3 \longleftrightarrow f_3 + \frac{3}{2} f_2$$

Partiendo de B no podemos obtener, por medio de operaciones elementales de filas, la matriz identidad de orden 3, ya que aparece una fila toda nula. Esto nos asegura que no existe B^{-1}.

Cálculo de la matriz inversa por operaciones elementales de filas - Ejemplo

Retomemos el ejemplo visto en la página 32.

Sea $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Hallar la matriz A que verifica $(B^t \cdot A + 2A)^t = B^2 - I$.

Despejando la matriz A obtuvimos $A^t \cdot (B + 2I) = B^2 - I$ entonces

$$[A^t \cdot (B + 2I)]^t = (B^2 - I)^t \iff (B + 2I)^t \cdot (A^t)^t = (B^2 - I)^t \iff$$

$$\iff (B + 2I)^t \cdot A = (B^2 - I)^t$$

Luego, si existe $[(B + 2I)^t]^{-1}$ podemos proceder de la siguiente manera

$$(B+2I)^t \cdot A = (B^2 - I)^t \iff [(B+2I)^t]^{-1} \cdot [(B+2I)^t \cdot A] = [(B+2I)^t]^{-1} \cdot (B^2 - I)^t \iff$$

$$\iff [((B + 2I)^t)^{-1} \cdot (B + 2I)^t] \cdot A = [(B + 2I)^t]^{-1} \cdot (B^2 - I)^t \iff$$

$$\iff I \cdot A = [(B + 2I)^t]^{-1} \cdot (B^2 - I)^t \iff A = [(B + 2I)^t]^{-1} \cdot (B^2 - I)^t$$

Cálculo de la matriz inversa por operaciones elementales de filas - Ejemplo

Sabemos, por cálculos previos, que $B+2I=\begin{bmatrix}4&3\\-1&2\end{bmatrix}$, entonces

$$(B+2I)^t=\begin{bmatrix}4&-1\\3&2\end{bmatrix}$$

Analicemos si existe $((B+2I)^t)^{-1}$

$$\begin{array}{c|cc}
(B+2I)^t & I & \\
\begin{bmatrix}4&-1\\3&2\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} & \\
\begin{bmatrix}1&-1/4\\3&2\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1/4&0\\0&1\end{bmatrix} & f_1\longleftrightarrow \frac{1}{4}f_1\\
\begin{bmatrix}1&-1/4\\0&11/4\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1/4&0\\-3/4&1\end{bmatrix} & f_2\longleftrightarrow f_2+(-3)f_1\\
\begin{bmatrix}1&-1/4\\0&1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1/4&0\\-3/11&4/11\end{bmatrix} & f_2\longleftrightarrow \frac{4}{11}f_2
\end{array}$$

Cálculo de la matriz inversa por operaciones elementales de filas - Ejemplo

$$\begin{array}{c|cc} \begin{bmatrix} 1 & -1/4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ -3/11 & 4/11 \end{bmatrix} & \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2/11 & 1/11 \\ -3/11 & 4/11 \end{bmatrix} & f_1 \longleftrightarrow f_1 + \frac{1}{4} f_2 \\ I & ((B+2I)^t)^{-1} & \end{array}$$

$$A = [(B+2I)^t]^{-1} \cdot (B^2 - I)^t$$

$B^2 - I = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$, entonces $(B^2 - I)^t = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 2/11 & 1/11 \\ -3/11 & 4/11 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 6 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 + 6/11 & -4/11 - 4/11 \\ 0 + 24/11 & 6/11 - 16/11 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6/11 & -8/11 \\ 24/11 & -10/11 \end{bmatrix}$$