TRABAJO PRÁCTICO N°10: Polinomios

1. Dados los polinomios:
$$R(x) = x^5 - x^4 - 4x + 4$$
$$P(x) = x^3 + (-6 - 2i)x^2 + (8 + 12i)x - 16i - 7x^6 + x^5 - x^4 - ix^3$$

   a) Indicar, en cada caso, a qué conjunto pertenecen, el grado, el coeficiente principal, el término independiente, si es mónico, si está ordenado en forma creciente o decreciente y si está completo.

   b) Hallar el valor numérico de $R(x)$ y de $P(x)$ para $x = -1$ y $x = i$

2. Dado $P(x) = (3x^4 - 8ax^5 + 4x^3) - (2x^5 - ax^3) - (2x^2 + ax^5 - 7x^4)$, hallar el valor de a para que el polinomio $P(x)$ tenga grado 4.

3. Determinar los valores de m, n, r y s para que $T(x) = G(x)$ siendo
$$T(x) = -\frac{1}{2}x^5 + 2x^2 - 5x + 3$$
$$G(x) = (n - s)x^5 + rx^3 + \frac{4}{3}(s + r)x^2 + (-2n - m)x + m$$

4. Averiguar si $A(x)$ es divisible por $B(x)$ en cada uno de los siguientes incisos

   a) $A(x) = 2x^5 + 16x^3 - x^6$, $\quad B(x) = x^2 + 2x$

   b) $A(x) = 6x^6 - 9x^4 + 10x^2 - 15$, $\quad B(x) = 2x^2 - 3$

5. Obtener, mediante la regla de Ruffini, el cociente y el resto de la división entre $A(x)$ y $B(x)$ en los siguientes incisos

   a) $A(x) = ax^3 + a^4$, $\quad B(x) = x - \frac{1}{2}$

   b) $A(x) = (x + a - 1)^2 - a^2 + 2a$, $\quad B(x) = x - a$

6. Hallar el o los valores de a para que:

   a) el polinomio $H(x) = 3x - 1 - 2x^2$ sea divisible por $N(x) = x - a$

   b) al dividir $P(x) = 2x^3 + 4x^2 - 2x + a$ por $Q(x) = x - 3$ el resto sea 10

7. Sea $P(x) = 2x^5 + 16x^4 + 42x^3 + 28x^2 - 40x - 48$. Verificar que -3, -2 y 1 son raíces de $P(x)$ y hallar el orden de multiplicidad de cada una de ellas.

8. Encontrar el valor de h sabiendo que

   a) $(-i)$ es raíz de $P(x) = 5x^6 - 7x^5 + 11x + h$

   b) (-1) es raíz de $P(x) = x^7 - 10x^4 - hx^3 - 3x + 1$

9. Hallar todas las raíces racionales de los siguientes polinomios aplicando el teorema de Gauss.

a) $P(x) = x^4 - 2x^2 - 3x - 2$

b) $P(x) = x^5 - x^3 + 2$

c) $P(x) = 4x^4 - 11x^2 + 9x - 2$

d) $P(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x - \frac{5}{2}$

10. Escribir los siguientes polinomios como producto de polinomios de grado 1.

    a) $A(x) = x^6 + 4x^5 + 9x^4 + 16x^3 + 19x^2 + 12x + 3$ sabiendo que $r_1 = -1$ es raíz.

    b) $B(x) = 3x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 72x + 60$ sabiendo que $r_1 = 1 + 3i$ es raíz.

    c) $C(x) = x^3 + (-6 - 3i)x^2 + (9 + 15i)x + (-4 - 12i)$ sabiendo que $r_1 = 4$ es raíz.

    d) $Q(x) = x^5 - x$

    e) $P(x) = x^4 + 4x^2 + 4$

    f) $S(x) = x^4 - 16$

    g) $T(x) = x^6 + 2x^3 + 1$

11. Dados los siguientes polinomios:

$$P(x) = x^6 - 6x^4 + 5x^2 + 12$$

$$Q(x) = x^5 + \frac{1}{2}x^4 + x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x - 3$$

    a) Calcular las raíces racionales aplicando el teorema de Gauss.

    b) Expresarlos factorizados como producto de polinomios de primer grado.

12. Construir, en caso de ser posible:

    a) Un polinomio de grado mínimo, que tenga coeficiente principal $\frac{3}{2}$, -1 y 3 sean raíces dobles y sea divisible por $(x + 2)$.

    b) Todos los polinomios de grado 3, con coeficiente principal distinto de $7i$, -2 sea raíz simple y $\sqrt{2}$ sea raíz doble.

    c) Un polinomio de grado mínimo, mónico y que tenga a $-3i$ y 2 como raíces simples y a 0 como raíz triple.

    d) Un polinomio de grado mínimo, mónico, con coeficientes reales y que tenga a $-3i$ y 2 como raíces simples y a 0 como raíz triple.

    e) Un polinomio de grado mínimo, mónico, con término independiente 1 y que tenga a $-3i$ y 2 como raíces simples y a 0 como raíz triple.

    f) Un polinomio con coeficientes reales, de grado 3 y 0, -1 y $(1 + i)$ sean raíces simples.

    g) Todos los polinomios con coeficientes reales, de grado mínimo y 0, -1 y $(1+i)$ sean raíces simples. Y si el polinomio tiene coeficientes complejos, ¿cuál es su grado mínimo?

    Para los incisos *a*), *b*), *c*) y *d*) indicar el término independiente.

13. Analizar, justificando las respuestas, si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos:

    a) $\forall\, P(x),\ Q(x) \in \mathbb{C}[x] :\ gr(P + Q) = gr(P) + gr(Q)$.

    b) $\forall\, P(x),\ Q(x) \in \mathbb{C}[x] :\ (\, Q(x)|P(x) \Longrightarrow gr(P) \geq gr(Q)\,)$.

    c) El polinomio $P(x) = x^{3201} - 2x^5 + 3$ no tiene raíces reales.

d) El polinomio $Q(x) = x^{20049} - 2x^3 + 8$ no es divisible por $(x-9)$.

e) Existen $r \in \mathbb{C}$ y $Q(x) \in \mathbb{C}[x]$ tales que $x^{21} + x^{13} + 2 = (x-r)Q(x)$.

f) Un polinomio de grado 16, siempre tiene, por lo menos, una raíz real.

g) Sea $S(x) = (1+i)x^2 + ix + (1-i)$

i) $\forall\, a \in \mathbb{R}:\ P(x) = a.S(x)$ tiene las mismas raíces que $S(x)$.

ii) $\exists\, P(x) \in \mathbb{C}[x] \,/\, S(x)$ divide a $P(x)$ y $P(-1-i) \neq 0$.

iii) $\exists\, P(x) \in \mathbb{C}[x] \,/\, P(x)$ es de grado 2, con coeficiente principal 7, que tenga a $S(x)$ como factor y $P(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i) = 0$.

iv) $\nexists\, P(x) \in \mathbb{R}[x] \,/\, gr(P) = 4$ y que $P(x)$ sea divisor de $S(x)$.