ELEMENTOS DE ÁLGEBRA
(2do cuatrimestre de 2022)

TRABAJO PRÁCTICO N°4: Números complejos

1. Resolver:

   a) $\dfrac{(2-2i)(3+5i)}{2+2i}$

   b) $\dfrac{2+i^{25}}{3+i^{19}}$

   c) $\dfrac{(1+3i)(1+2i)}{1-2i}+(1+2i)^2$

   d) $3(2-i^{24})-\left(\dfrac{-4+i}{3-2i}\right)$

2. Calcular a y b de manera que se verifiquen las siguientes igualdades:

   a) $(2+ai)+(b+5i)=-1+9i$

   b) $a-5i=\dfrac{16+bi}{3+2i}$

3. Dados $z_1=2-3i,\ z_2=-1+i,\ z_3=3$ y $z_4=\sqrt{2}i$.

   a) Graficarlos

   b) ¿Cuál es imaginario puro? ¿Cuál es real? Justificar.

   c) Hallar el conjugado de z_1, z_2, z_3 y z_4

   d) Usando propiedades y lo encontrado en el inciso anterior, hallar el conjugado de:

   $$z_1+z_2, \qquad \frac{z_2}{-i} \qquad \text{y} \qquad (z_1-3z_2)\cdot z_3 : z_4$$

4. Hallar los valores de $z\in\mathbb{C}$ que verifican:

   a) $(2+3i)z-(1+2i)=2+3i$

   b) $\overline{z}(4-i)+8=\overline{z}(3+2i)+3i$

   c) $(z-1+4i)(z-2i)=0$

   d) $z^2(\overline{4+i})-3z=0$

5. Expresar a los siguientes complejos en forma polar o trigonométrica:

   a) $3+3\sqrt{3}\,i$

   b) $-3+3i$

   c) $-1-\sqrt{3}i$

   d) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$

   e) $-6i$

   f) -9

   g) $7i$

   h) 5

6. Dados los complejos $z_1=\sqrt{3}(\cos\frac{5}{3}\pi+i\operatorname{sen}\frac{5}{3}\pi)$, $\quad z_2=6\,cis(\frac{2}{3}\pi)$ $\quad$ y $\quad z_3=2\,cis(270°)$.

   a) Calcular en forma polar las siguientes operaciones $z_1\cdot z_2$, $\quad z_1\cdot z_3$, $\quad \dfrac{z_3}{z_2}$, $\quad \dfrac{z_1}{z_2}$

   b) Expresar los resultados hallados en el inciso a) en forma binómica

7. Calcular y dejar expresado el resultado en forma binómica

   a) $(1-i)^{47}$

   b) $(-\sqrt{3}-i)^{100}$

   c) $\dfrac{(-\sqrt{3}-i)^{100}}{(-2i)^{30}}$

   d) $(1-i)^{47}\cdot(\sqrt{2}\,cis(60°))^{45}$

8. Resolver los siguientes problemas:

   a) La suma de dos números complejos es $5+i$. La parte real de uno de ellos es 4 y el cociente entre este complejo y el otro es un número real. Hallar ambos números complejos.

   b) Hallar un número complejo z que verifica simultáneamente las siguientes condiciones

   - la suma de z y de su conjugado es 10 y
   - la suma de los módulos de z y de su conjugado es 26

   c) El producto de dos números complejos es -8 y dividiendo el cubo de uno de ellos por el otro se obtiene como resultado el número 2. Hallar dos números complejos que verifiquen lo pedido indicando módulo y argumento de cada uno de ellos. Escribir los números complejos encontrados en forma binómica.

9. Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificar:

   a) Si un complejo z es un real entonces su argumento es nulo.

   b) Si un complejo tiene como argumento a $\frac{3}{2}\pi$ es imaginario puro.

   c) Si un complejo z tiene módulo 5 está en el primer cuadrante.

   d) Si dos complejos tienen argumentos complementarios el producto de ambos es imaginario puro.

10. Dados los conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{C} : \ (x-2+3i)(x-2i) = 0\} \quad y \quad B = \left\{ x \in \mathbb{C} : \ \frac{1}{x-2+3i} = \frac{3}{x-2i} \right\}$$

Analizar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justificar las respuestas.

   a) A es un conjunto unitario

   b) $3-11i \in B$

   c) $A \cap B = \emptyset$

   d) $\exists\, a \in \mathbb{R} / \ (a-i)^2 \in A$

11. Sean $z = 2\,cis(\frac{5}{3}\pi)$, $\ w = 4\,cis(\alpha)$ y $u = \rho\,cis(\frac{5}{6}\pi)$, donde $0 \leq \alpha < 2\pi$ y $\rho > 0$. Analizar, justificando las respuestas, la veracidad de las siguientes afirmaciones

   a) La forma binómica de z es $\sqrt{3}-i$.

   b) Existen $\alpha,\ \rho$ tales que $\dfrac{u}{z}w = 3$.

   c) No hay valores de α para que $\dfrac{z}{w}$ sea real negativo.

   d) $z^{27} \cdot i^{222}$ es imaginario puro.

EJERCICIOS ADICIONALES

1. Hallar los valores de a y b para los cuales se verifique la siguiente ecuación: $a - i = \dfrac{2+bi}{1+2i}$

2. Resolver:

   a) $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}i}{\sqrt{2}+\sqrt{3}i}$

   b) $(3+i)(-2-3i)$

   c) $(-1+2i)^3$

   d) $3+i^5-i^{14}+6i^{43}-2+i^{12}-1$

3. Dados los números complejos: $z_1 = 2\,cis(60°)$, $z_2 = -2i$ y $z_3 = -\sqrt{2}+\sqrt{2}i$, resolver:

   a) $\dfrac{(z_3)^6}{(z_2)^7}$

   b) $(z_1)^4 z_3$

4. Analizar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falasas. Justificar las respuestas

   a) Dados los conjuntos $C = \left\{x \in \mathbb{C} : \dfrac{x+2+15i}{x-i} = -4+4i\right\}$ y $D = \{x \in \mathbb{C} : (-1-2i)x = 2-9i\}$

      I) $-4+4i \in D$.

      II) $C = D$.

   b) Sean $z = 2\,cis(\frac{5}{3}\pi)$, $w = 4\,cis(\alpha)$, $u = \rho\,cis(\frac{5}{6}\pi)$ y $A = \{n \in \mathbb{N} / \ (z)^n$ es real positivo $\}$, donde $0 \leq \alpha < 2\pi$ y $\rho > 0$

      I) Existe w que no está en el segundo cuadrante para que $z.w$ sea real.

      II) $A \neq \emptyset$.

      III) No existe ρ tal que $\dfrac{z}{u} = u$.