Determinante

Elementos de Álgebra
Segundo Cuatrimestre 2022

Mg. María del Carmen Vannicola

Facultad de Informática
Departamento de Matemática

Definición - Método de cálculo

Definición

Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$. El determinante de A es una función que a cada matriz cuadrada con elementos complejos le asigna un número complejo, es decir,

$$\begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ A & \longrightarrow & |A| \end{array}$$

Mostraremos cómo calcular el determinante de una matriz cuadrada A, dependiendo de su orden.

Si A es de orden uno, entonces $A = [a_{11}]$ y el determinante de A es

$$det(A) = |A| = |a_{11}| = a_{11}$$

Por ejemplo $A = [-3]$ entonces $det(A) = |-3| = -3$

Método de cálculo.

Si A es de orden dos, entonces $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ y

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

El determinante de una matriz de orden 2 se calcula como el producto de los elementos de la diagonal principal menos el producto de los elementos de la diagonal secundaria.

Ejemplo: si $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

$$det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1(-1) - 3(-2) = \ -1 + 6 = 5$$

Método de cálculo.

Si A es de orden 3 entonces $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

$$det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Ejemplo: $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 1/2 & 0 \end{vmatrix}$

$$|B| = 1 \cdot 3 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot 3 \cdot (-1) - \frac{1}{2} \cdot (-2) \cdot 1 - 0 \cdot 0 \cdot 2 =$$

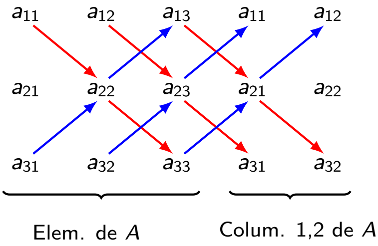
$$= 0 + (-4) + 0 - (-3) - (-1) - 0 = -4 + 3 + 1 = 0$$

Determinante de orden 3

Si $o(A) = 3$ entonces

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Describiremos una maneras de recordar esta fórmula.



$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Submatriz.

Definición

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de orden n. La submatriz S_{ij} es la matriz que se obtiene de eliminar de A la fila "i" y la columna "j".

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{i(n-1)} & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \dots & a_{(n-1)j} & \dots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Cofactor o adjunto.

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(j-1)} & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)(n-1)} & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)(n-1)} & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(j-1)} & a_{(n-1)(j+1)} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Definición

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de orden n, el cofactor o complemeto algebraico, o adjunto del elemento a_{ij} de A es el determinante de la submatriz S_{ij} multiplicado por la potencia $i + j$ de (-1).

Al cofactor o adjunto del elemento a_{ij}, lo notaremos con C_{ij} y

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} |S_{ij}|$$

Desarrollo del determinante por fila o columna.

Teorema

Sea $A = (a_{ij})$ *una matriz cuadrada de orden* n*. El desarrollo del determinante a de* A *por la fila "i" se calcula de la siguiente manera*

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$$

El desarrollo del determinante por la columna "j" se calcula del siguiente modo

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$$

Donde C_{ij} *es el cofactor o adjunto asociado al elemento* a_{ij}

Ejemplos.

Ejemplo

Desarrollo del determinante de A por la primera fila, por la segunda fila y por la cuarta columna, siendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \\ 1/2 & -3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}.$$

El desarrollo del determinante de A por la primera fila es

$$|A| = \sum_{j=1}^{4} a_{1j} C_{1j}$$

$$|A| = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} + a_{14}C_{14} = 1 \cdot C_{11} + (-2)C_{12} + 0 \cdot C_{13} + 3C_{14}$$

$$|A| = C_{11} - 2C_{12} + 3C_{14}$$

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1/3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (0 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0) = 0$$

Ejemplos.

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 1/2 & 1/3 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2}(0+0+0-0-0-0) = 0$$

$$C_{14} = (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1/2 & -3 & 1/3 \end{vmatrix} = (-1)(\frac{2}{3} + (-1) + 0 - 0 - (-12) - 1) =$$

$$= (-1)(\frac{2}{3} - 1 + 12 - 1) = -\frac{32}{3}$$

$$|A| = C_{11} - 2C_{12} + 3C_{14} = 0 - 2 \cdot 0 + 3(-\frac{32}{3}) = -32$$

Calculemos ahora el determinante de A por el desarrollo de la segunda fila.

$$|A| = \sum_{j=1}^{4} a_{2j} C_{2j}$$

$$|A| = a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + a_{23}C_{23} + a_{24}C_{24}$$

$$|A| = 2C_{21} + (-1)C_{22} + 0 \cdot C_{23} + 0 \cdot C_{24} = 2C_{21} - C_{22}$$

Ejemplos.

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1/3 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(0+0+1-(-18)-0-0) = -19$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & 0 \\ 1/2 & 1/3 & 0 \end{vmatrix} = 0+0+(-3)-3-0-0 = -6$$

$$|A| = 2C_{21} - C_{22} = 2(-19) - (-6) = -38 + 6 = -32$$

Calculemos ahora el determinante de A por el desarrollo de la cuarta columna.

$$|A| = \sum_{i=1}^{4} a_{i4} C_{i4}$$

$$|A| = a_{14}C_{14} + a_{24}C_{24} + a_{34}C_{34} + a_{44}C_{44}$$

$$|A| = 3C_{14} + 0C_{24} + 0C_{34} + 0C_{44} = 3C_{14}$$

Ejemplos.

$$C_{14} = (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1/2 & -3 & 1/3 \end{vmatrix} = (-1)(\frac{2}{3} + (-1) + 0 - 0 - (-12) - 1) =$$

$$= (-1)(\frac{2}{3} + 10) = -\frac{32}{3}$$

$$|A| = 3C_{14} = 3(-\frac{32}{3}) = -32$$

Observar que, sin importar la fila o la columna que elijamos para desarrrollar el determinante de A, siempre obtenemos el mismo resultado.

Es conveniente hacer el determiante por la cuarta columna porque esa columna tiene tres elementos nulos y ésto nos permite no calcular los cofactores asociados a esos elementos.

La elección de la cuarta columna nos acorta el proceso para el cálculo del determinante.

Ejemplos.

Ejemplo

Analizar para qué valores de $k \in \mathbb{R}$, el determinante de la matriz A es $-3k+27$, siendo

$$A = \begin{bmatrix} 3k & 6 & 0 \\ k^2-k & 3(k-1) & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Desarrollamos el determinante de A por la tercera fila

$$|A| = 0 \cdot C_{31} + 0 \cdot C_{32} + 1 \cdot C_{33} = C_{33}$$

$|A| = (-1)^{3+3}[3k \cdot 3(k-1) - (k^2-k)6] = 9k^2 - 9k - 6k^2 + 6k = 3k^2 - 3k$ entonces

$3k^2 - 3k = -3k + 27 \iff 3k^2 = 27 \iff k^2 = 9 \iff |k| = 3 \iff k = \pm 3$

Luego si $k = \pm 3, \quad |A| = -3k + 27$

Proposición

Sean $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ *y* $k \in \mathbb{C}$ *entonces*

1. *El determinante de* A *es único*
2. $|A| = |A^t|$
3. $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$
4. $|kA| = k^n |A|$
5. $|A^n| = |A|^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$
6. A *es inversible si y sólo si* $|A| \neq 0$
7. *Si* A *es inversible entonces* $|A^{-1}| = |A|^{-1}$
8. *Si* A *es inversible entonces* $|A^n| = |A|^n$, *cualquiera sea* $n \in \mathbb{Z}, \; n \leq 0$
9. *Si la matriz* A *tiene una fila (columna) de ceros, entonces* $|A| = 0$
10. *Si* A *es una matriz triangular superior (inferior) entonces el determinante de* A *es el producto de los elementos de la diagonal principal. Es decir, si* $A = (a_{ij})$ *y* A *es una matriz triangular entonces* $|A| = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$

Determinante - Propiedades

Definición

Sea A una matriz cuadrada, se dice que

1. *dos filas (columnas) de A son proporcionales si los elementos de una fila (columna) coinciden con el un múltiplo escalar de los elementos de otra fila (columna).*
2. *la fila t es combinación lineal de las filas (columna) s y l si los elementos de la fila (columna) t son un múltiplo de los elementos de la fila (columna) s por un múltiplo de los elementos de la fila (columna) l*

Sea $A = (a_{ij}),\ o(A) = n$ y sean $f_t,\ f_s$ dos filas de la matriz A.

Las filas f_t y f_s son proporcionales si y sólo si

$$\exists\, k \in \mathbb{C},\ k \neq 0 \,/\, \forall\, j = 1, 2, \ldots, n :\ a_{tj} = k a_{sj}$$

Si f_t y f_s son proporcionales, lo indicaremos diciendo

$$f_t = k f_s$$

Determinante - Propiedades

Sea $A = (a_{ij}),\ o(A) = n$ y sean $f_t,\ f_s,\ f_l$ filas de la matriz A.

Las filas f_t es combinación lineal de las filas f_s y f_l si y sólo si

$$\exists\, k_1,\ k_2 \in \mathbb{C} \,/\, \forall\, j = 1, 2, \ldots, n: \ \ a_{tj} = k_1 a_{sj} + k_2 a_{lj}$$

Si f_t es combinación lineal de las filas f_s y f_l, lo indicaremos diciendo

$$f_t = k_1 f_s + k_2 f_l$$

Proposición

Si $A \in M_n(\mathbb{C})$ entonces

1. *Si la matriz A tiene dos filas (columnas) proporcionales, entonces $|A| = 0$.*
2. *Si una fila (columna) de la matriz A es combinación lineal de otras dos filas (columnas) entonces $|A| = 0$.*

Ejemplos

Observemos que el item 10 de la proposición de la página 14 nos asegura que, cualquiera sea el orden de la matriz nula o la matriz identidad, tenemos

$$|0| = 0, \qquad |I| = 1$$

Ejemplo

Analizar para que valores de $k \in \mathbb{R}$, la matriz A no es inversible, siendo

$$A = \begin{bmatrix} 3k & 6 \\ k^2 - k & 2(k-1) \end{bmatrix}$$

A es no inversible si y sólo si $|A| = 0$

$|A| = 3k \cdot 2(k-1) - (k^2 - k)6 = 6k^2 - 6k - 6k^2 + 6k = 0$ entonces

$$0k^2 + 0k = 0$$

Esta última ecuación es verdadera para todo $k \in \mathbb{R}$, es decir,

$$\forall k \in \mathbb{R}: \; A \text{ no es inversible}$$

Ejemplo

Sea $B = \begin{bmatrix} k-1 & -2 \\ 2 & k-2 \end{bmatrix}$

1. *Calcular* $|B|$
2. *Analizar la verasidad de las siguientes afirmaciones y justificar los razonamientos.*
   i) $\{k \in \mathbb{R} : \; B \textit{ es inversible } \} = \mathbb{R}$
   ii) $\exists\, k \in \mathbb{C} / \; |B| = 0 \;\wedge\; \frac{3}{2}\pi \leq arg(k) < 2\pi$

1. Calculemos $|B|$. Como $o(B) = 2$ entonces

$$|B| = (k-1)(k-2) - 2(-2) = k^2 - 2k - k + 2 + 4 = k^2 - 3k + 6, \text{ luego}$$

$$|B| = k^2 - 3k + 6 \quad (1)$$

2.i) $\{k \in \mathbb{R} : \; B \text{ es inversible } \} = \mathbb{R}$

B es inversible si y sólo si $|B| \neq 0$.

$$|B| = 0 \overset{(1)}{\Longleftrightarrow} k^2 - 3k + 6 = 0 \Longleftrightarrow k = \frac{3 \pm \sqrt{9-24}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{-15}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{15}i}{2}$$

Como no existe $k \in \mathbb{R}$ que verifique $k^2 - 3k + 6 = 0$ entonces

$$\forall k \in \mathbb{R} : \; |B| \neq 0 \iff \forall k \in \mathbb{R} : \; B \text{ es inversible}$$

$\{k \in \mathbb{R} : \; B \text{ es inversible } \} = \mathbb{R}$ es verdadero.

2.ii) $\exists\, k \in \mathbb{C} / \; |B| = 0 \; \wedge \; \frac{3}{2}\pi \leq arg(k) < 2\pi$

Sabemos que $|B| = k^2 + 3k + 6$ y $|B| = 0$ si y sólo si $k = \dfrac{3 \pm \sqrt{15}i}{2}$

Para que se verifique $\frac{3}{2}\pi \leq arg(k) < 2\pi$, debemos tener que $Re(k) \geq 0$ y $Im(k) < 0$, luego $Re(k) = \frac{3}{2} \geq 0$ y $Im(k) = -\frac{\sqrt{15}}{2} < 0$

$\exists\, k \in \mathbb{C}, \; k = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{15}}{2} i \; / \; |B| = 0 \; \wedge \; \frac{3}{2}\pi \leq arg(k) < 2\pi$, es decir, la proposición es verdadera.

Propiedades de determinante - Ejemplos

Ejemplo

Sean $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ tales que $|A| = -3$ y $|B| = 6$. Calcular en caso de ser posible y justificar las respuestas.

1. $|A^t \cdot B|$
2. $|4A^2|$
3. $|2A + B|$
4. $|(2B - B) \cdot \frac{1}{2}A|$

1. $|A^t \cdot B| \overset{Prop\ 3}{=} |A^t| \cdot |B| \overset{Prop\ 2}{=} |A| \cdot |B| = (-3)6 = -18$

2. $|4A^2| \overset{Prop\ 4}{=} 4^3|A^2| \overset{Prop\ 5}{=} 4^3|A|^2 = 4^3(-3)^2 = 64 \cdot 9 = 576$

3. $|2A + B|$ con los datos dados no se puede calcular pues en general, $|A + B| \neq |A| + |B|$.

4. $|(2B - B) \cdot \frac{1}{2}A| \overset{Prop\ 3}{=} |2B - B| \cdot |\frac{1}{2}A| \overset{Prop\ 4}{=} |B| \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 |A| = 6 \cdot \frac{1}{8}(-3) = -\frac{9}{4}$