Números Complejos

Elementos de Álgebra
Segundo Cuatrimestre 2022

Mg. María del Carmen Vannicola

Facultad de Informática
Departamento de Matemática

Definición

El conjunto $\mathbb{C} = \{a + bi : \ a, \ b \in \mathbb{R}\}$ *es el conjunto de los* ***números complejos****.*

$$z \in \mathbb{C} \iff z = a + bi, \ a, \ b \in \mathbb{R}$$

- Si un complejo "z" está expresado en la forma "$a + bi$", se dice que el complejo está escrito en forma **binómica**.
- "a" es la **parte real** del complejo "z" y lo notaremos $Re(z) = a$.
- "b" es la **parte imaginaria** del complejo "z" y lo notaremos $Im(z) = b$.
- "i" es la **unidad imaginaria** y verifica $i^2 = -1$.
- Si $Im(z) = 0$ se dice que el complejo $z = a + bi = a$ es **real**.
- Si $Re(z) = 0, \ Im(z) \neq 0$ entonces el complejo $z = a + bi = bi$ se denomina **imaginario puro**.

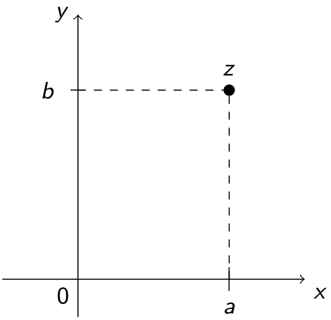
Gráfica de un número complejo

Sea $z \in \mathbb{C}$, $z = a + bi$. Todo número complejo se pueden graficar en el plano.

$Re(z) = a$ se grafica sobre el eje x. $Im(z) = b$ se grafica sobre el eje y

El complejo z es el punto (a, b).

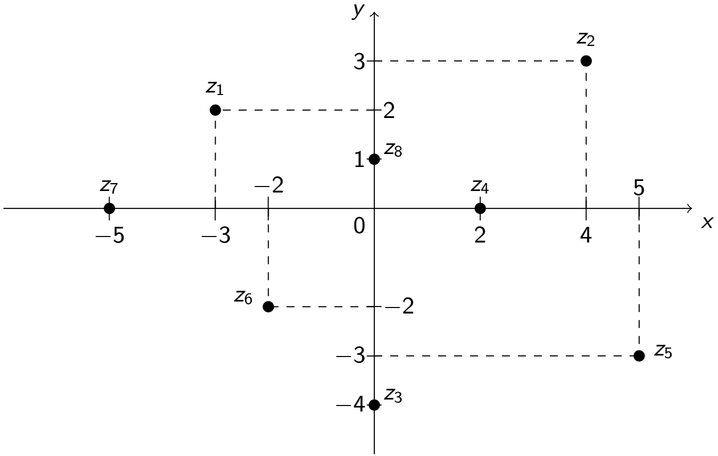
En el gráfico $a > 0$ y $b > 0$. En este caso el complejo se encuentra ubicado en el primer cuadrante.



Gráfica de un número complejo - Ejemplos

Ejemplo

Graficar en el plano los siguientes números complejos: $z_1 = -3 + 2i$, $z_2 = 4 + 3i$, $z_3 = -4i$, $z_4 = 2$, $z_5 = 5 - 3i$, $z_6 = -2 - 2i$, $z_7 = -5$ *y* $z_8 = i$.



Operaciones con números complejos

Definición

Sean $z, w \in \mathbb{C}$*. Se dice que los complejos* z *y* w *son* **iguales** *si y sólo si*

$$Re(z) = Re(w) \quad \wedge \quad Im(z) = Im(w)$$

Definición

Sean $z = a + bi$ *y* $w = c + di$ *dos números complejos, las operaciones de* **suma** *y* **producto** *entre números complejos se definen de la siguiente manera*

$$\textit{Suma:} \quad z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$\textit{Producto:} \quad z \cdot w = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Las operaciones de suma y producto definidas anteriormente son cerradas en el conjunto $\mathbb{C}$, es decir,

$$\text{si} \quad z, w \in \mathbb{C} \text{ entonces} \quad z + w \in \mathbb{C} \quad \text{y} \quad z \cdot w \in \mathbb{C}.$$

Operaciones con números complejos - Propiedades

Proposición

El conjunto $\langle \mathbb{C}; +, \cdot \rangle$ es un cuerpo y las operaciones de suma y producto verifican las siguientes propiedades.

(S1) *Ley asociativa de la suma:* $\forall z, w, v \in \mathbb{C}: \; z + (w + v) = (z + w) + v.$

(S2) *Ley conmutativa de la suma:* $\forall z, w \in \mathbb{C}: \; z + w = w + z.$

(S3) *Existencia de elemento neutro para la suma:*
$\exists \, 0 \in \mathbb{C} / \; \forall z \in \mathbb{C}: \; z + 0 = 0 + z = z.$

(S4) *Existencia de opuesto:* $\forall z \in \mathbb{C}: \; \exists \, -z \in \mathbb{C} / \; z + (-z) = (-z) + z = 0.$

(M1) *Ley asociativa del producto:* $\forall z, w, v \in \mathbb{C}: \; z \cdot (w \cdot v) = (z \cdot w) \cdot v.$

(M2) *Ley conmutativa del producto:* $\forall z, w \in \mathbb{C}: \; z \cdot w = w \cdot z.$

(M3) *Existencia de elemento neutro para el producto:*
$\exists \, 1 \in \mathbb{C} / \; \forall z \in \mathbb{C}: \; z \cdot 1 = 1 \cdot z = z.$

(M4) *Existencia de inverso multiplicativo:*
$\forall z \in \mathbb{C}, \; z \neq 0 \; \exists \, z^{-1} \in \mathbb{C} / \; z \cdot (z^{-1}) = (z^{-1}) \cdot z = 1.$

(D) *Ley distributiva del producto respecto a la suma:*
$\forall z, w, v \in \mathbb{C}: \; z \cdot (w + v) = (z \cdot w) + (z \cdot v).$

Operaciones con números complejos

Observaciones

- El "elemento neutro de la suma es 0" y tiene parte real e imaginaria nulas, es decir,
$$0 = 0 + 0i$$
- Si $z \in \mathbb{C}$, $z = a + bi$, "el opuesto de z" es:
$$-z = -a + (-b)i,$$
entonces $Re(-z) = -Re(z)$ y $Im(-z) = -Im(z)$.
- El "elemento neutro del producto es 1", tiene parte real 1 y parte imaginaria 0, es decir,
$$1 = 1 + 0i$$
- Si $z \in \mathbb{C} - \{0\}$, $z = a + bi$, el "inverso de z" es
$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i,$$
entonces $Re(z^{-1}) = \dfrac{Re(z)}{Re(z)^2 + Im(z)^2}$ y $Im(z^{-1}) = -\dfrac{Im(z)}{Re(z)^2 + Im(z)^2}$.

Operaciones con números complejos

Observaciones

- Sean $z, w \in \mathbb{C}$

$$z - w = z + (-w) \quad y \quad \frac{z}{w} = z \cdot \frac{1}{w} = z \cdot w^{-1}, \quad w \neq 0$$

- Si $z = a + bi$ y $w = c + di$

  $z \cdot w = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac + (ad + bc)i + bd(-1),$

  entonces

$$z \cdot w = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Definición

Sea $z \in \mathbb{C}$ entonces

$$\begin{array}{ll} z^0 = 1 & z \neq 0 \\ z^1 = z & \\ z^n = z^{n-1} \cdot z & \forall n \in \mathbb{N} \\ z^n = (z^{-1})^{-n} & \forall n \in \mathbb{Z}, \ n < 0, \quad z \neq 0 \end{array}$$

Proposición

Sean $z, w \in \mathbb{C}$ *y* $n, m \in \mathbb{Z}$

1. 1.1 $(z \cdot w)^n = z^n \cdot w^n$, 1.2 $\left(\dfrac{z}{w}\right)^n = \dfrac{z^n}{w^n}$, $w \neq 0$
2. 2.1 $z^n \cdot z^m = z^{n+m}$, 2.2 $\dfrac{z^n}{z^m} = z^{n-m}$, $z \neq 0$
3. $(z^n)^m = z^{n \cdot m} = (z^m)^n$

Ejemplo

Sean $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = -4i$, $z_3 = 5 + 7i$, $z_4 = 6$ *y* $z_5 = -1 - 2i$. *Hallar*

1. $z_3 + z_2 - z_1$
2. $z_4 \cdot z_5$
3. $2\, z_1^2$
4. z_1^{-3}
5. $-\dfrac{z_3}{z_5}$

1. $z_3 + z_2 - z_1 = [z_3 + z_2] - z_1 = [\,(5 + 7i) + (-4i)\,] - (2 - 3i) =$

$$= [\,(5 + 0) + (7 - 4)i\,] + (-2 + 3i) = (5 + 3i) + (-2 + 3i) \quad (1)$$

Operaciones con números complejos - Ejemplos

$$z_3 + z_2 - z_1 \overset{(1)}{=} (5+3i) + (-2+3i) = (5-2) + (3+3i)i = 3 + 6i$$

2. $$z_4 \cdot z_5 = 6(-1-2i) = 6(-1) + 6(-2)i = \; -6 - 12i$$

3. $$2\,z_1^2 = 2(z_1 \cdot z_1) = 2(2-3i)(2-3i) = 2(4 - 6i - 6i + 9i^2) = 2(4 - 12i - 9) =$$
$$= 2(4 - 9 - 12i) = 2(-5-12i) = -10 - 24i$$

4. $$z_1^{-3} = (z_1^3)^{-1} = (z_1^2 \cdot z_1)^{-1} = (\,(-5-12i)\cdot(2-3i)\,)^{-1} =$$
$$= (-10 + 15i - 24i + 36i^2)^{-1} = (-10 - 9i - 36)^{-1} = (-46 - 9i)^{-1} =$$
$$= \frac{-46}{(-46)^2 + (-9)^2} - \frac{-9}{(-46)^2 + (-9)^2}\,i = -\frac{46}{2197} + \frac{9}{2197}\,i$$

5. $$-\frac{z_3}{z_5} = -z_3 \cdot z_5^{-1} = -(5+7i) \cdot \frac{1}{-1-2i} =$$

$$= -(5+7i) \cdot \left(\frac{-1}{(-1)^2 + (-2)^2} - \frac{-2}{(-1)^2 + (-2)^2} i \right) =$$

$$= -(5+7i) \cdot \left(-\frac{1}{5} + \frac{2}{5} i \right) = -(-1 + 2i - \frac{7}{5} i + \frac{14}{5} i^2) =$$

$$= -(-1 + \frac{3}{5} i - \frac{14}{5}) = -(-\frac{19}{5} + \frac{3}{5} i) = \frac{19}{5} - \frac{3}{5} i$$

Sabemos que $i = 0 + 1 \cdot i$ y $i^2 = -1$ entonces

$i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$, $\quad$ $i^4 = i^3 \cdot i = (-i)i = -i^2 = -(-1) = 1 = i^0$,

$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i = i^1$, $\quad$ $i^6 = i^5 \cdot i = i \cdot i = i^2 = -1$,

$i^7 = i^6 \cdot i = (-1) \cdot i = -i = i^3$, $\quad$ $i^8 = i^7 \cdot i = i^3 \cdot i = i^4 = 1$,

Potencias de la unidad imaginaria i

$$i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{0}{0^2+1^2} - \frac{1}{0^2+1^2}i = 0 - i = -i = i^3,$$

$$i^{-2} = (i^{-1})^2 = (-i)^2 = (-i)\cdot(-i) = i^2 = -1,$$

$$i^{-3} = (i^{-1})^3 = (-i)^3 = -i^3 = -(-i) = i^1,$$

$$i^{-4} = (i^{-1})^4 = (-i)^4 = i^4 = 1 = i^0,$$

$$i^{-5} = (i^{-1})^5 = (-i)^5 = -i^5 = -i = i^3,$$

Observemos que las potencias de la unidad imaginaria i se repiten

n	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
i^n	i^1	i^2	i^3	i^0	i^1	i^2	i^3	i^0	i^1	i^2	i^3	i^0	i^1	i^2	i^3

y siempre se obtiene como resultado

$$i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i$$

Potencia de la unidad imaginaria i

Proposición

Sea $n \in \mathbb{Z}$ y sean q y r el cociente y el resto de dividir a n por 4. Entonces

$$i^n = i^r$$

Esto es, si $n = 4q + r$, con $q, r \in \mathbb{Z}$, $0 \leq r < 4$ entonces

$$i^n = i^r$$

Ejemplo

Calcular i^{239}, i^{-430} *e* i^{-725}.

Primero dividimos a 239, 430 y 725 por 4 para obtener el cociente y el resto en cada caso, entonces

$$239 = 4(59) + 3, \quad 430 = 4(107) + 2 \quad \text{y} \quad 725 = 4(181) + 1$$

Entonces $i^{239} = i^3 = -i$, $\quad i^{-430} = (i^{-1})^{430} = (-i)^{430} = i^{430} = i^2 = -1$

$$i^{-725} = (i^{-1})^{725} = (-i)^{725} = -(i^{725}) = -(i^1) = -i$$

Ejemplo

Hallar todos los complejos que verifican $3z + i^9 = -2z + 5 - 3i$.

En primer lugar observemos que $9 = 4 \cdot 2 + 1$ entonces $i^9 = i^1 = i \quad (1)$

$$3z + i^9 = -2z + 5 - 3i \overset{(1)}{\iff} 3z + i = -2z + 5 - 3i \iff 3z + 2z = 5 - 3i - i \iff$$

$$\iff 5z = 5 - 4i \iff z = \frac{1}{5}(5 - 4i) = 1 - \frac{4}{5}i$$

Verificación: si $z = 1 - \frac{4}{5}i$, debemos ver que $3z + i^9 = -2z + 5 - 3i$,

$$3z + i^9 = 3(1 - \frac{4}{5}i) + i^9 = 3 - \frac{12}{5}i + i = 3 - \frac{7}{5}i \quad (2)$$

$$-2z+5-3i = -2(1-\frac{4}{5}i)+5-3i = -2+\frac{8}{5}i+5-3i = (-2+5)+(\frac{8}{5}-3)i = 3-\frac{7}{5}i \quad (3)$$

Con (2) y (3) verificamos que $3z + i^9 = -2z + 5 - 3i$, si $z = 1 - \frac{4}{5}i$.

Ejemplo

Hallar $S = \{x \in \mathbb{C} : \ \dfrac{x-4}{x-(1+i)^{-2}} = 3+2i\}.$

Calculemos en primer lugar $(1+i)^{-2}$

$$(1+i)^{-2} = [(1+i)^{-1}]^2 = [\,\frac{1}{1^2+1^2} - \frac{1}{1^2+1^2}\,i\,]^2 = [\,\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\,]^2 =$$

$$= (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i) \cdot (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i - \frac{1}{4}i + \frac{1}{4}i^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}i - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}i$$

Entonces $(1+i)^{-2} = -\dfrac{1}{2}i \quad (1)$

$$\frac{x-4}{x-(1+i)^{-2}} = 3+2i \overset{(1)}{\iff} \frac{x-4}{x-(-\frac{1}{2}i)} = 3+2i \iff \frac{x-4}{x+\frac{1}{2}i} = 3+2i \iff$$

$$\iff x-4 = (3+2i)\cdot(x+\frac{1}{2}i) \quad \wedge \quad x+\frac{1}{2}i \neq 0 \iff$$

Resolución de ecuaciones lineales

$$\iff x - 4 = (3+2i)\cdot(x + \frac{1}{2}i) \quad \wedge \quad x + \frac{1}{2}i \neq 0 \iff$$

$$\iff x - 4 = (3+2i)x + (3+2i)(\frac{1}{2}i) \quad \wedge \quad x \neq -\frac{1}{2}i \iff$$

$$\iff x - (3+2i)x = (3+2i)(\frac{1}{2}i) + 4 \quad \wedge \quad x \neq -\frac{1}{2}i \iff$$

$$\iff x - (3+2i)x = 3\frac{1}{2}i + 2\frac{1}{2}i^2 + 4 \quad \wedge \quad x \neq -\frac{1}{2}i \iff$$

$$\iff (1 - 3 - 2i)x = \frac{3}{2}i - 1 + 4 \quad \wedge \quad x \neq -\frac{1}{2}i \iff$$

$$\iff (-2 - 2i)x = 3 + \frac{3}{2}i \quad \wedge \quad x \neq -\frac{1}{2}i \iff$$

$$\iff x = (3 + \frac{3}{2}i)\cdot(-2-2i)^{-1} \quad \wedge \quad x \neq -\frac{1}{2}i \quad (2)$$

Calculemos $(-2-2i)^{-1}$,

$$(-2-2i)^{-1} = \frac{-2}{(-2)^2+(-2)^2} - \frac{-2}{(-2)^2+(-2)^2}i = -\frac{2}{8} + \frac{2}{8}i = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i \quad (3)$$

Reemplazando (3) en (2) tenemos

$$x = (3 + \frac{3}{2}i) \cdot (-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i) \quad \wedge \quad x \neq -\frac{1}{2}i \iff$$

$$\iff x = -\frac{3}{4} + \frac{3}{4}i - \frac{3}{8}i + \frac{3}{8}i^2 \quad \wedge \quad x \neq -\frac{1}{2}i \iff$$

$$\iff x = -\frac{3}{4} + \frac{3}{4}i - \frac{3}{8}i - \frac{3}{8} \quad \wedge \quad x \neq -\frac{1}{2}i \iff$$

Luego $\dfrac{x-4}{x-(1+i)^{-2}} = 3+2i \iff x = -\dfrac{9}{8} + \dfrac{3}{8}i \quad \wedge \quad x \neq -\dfrac{1}{2}i$

$$S = \{x \in \mathbb{C} : \frac{x-4}{x-(1+i)^{-2}} = 3+2i\} = \{-\frac{9}{8} + \frac{3}{8}i\}$$

Conjugado de un número complejo

Definición

Sea $z \in \mathbb{C}$, $z = a + bi$. *El* **conjugado** *de* z *es* $a - bi$ *y se nota* $\overline{z}$, *es decir,*

$$\overline{z} = a - bi$$

Observaciones: sea $z = a + bi$, $z \neq 0$

- Si $z \neq 0$ entonces $\overline{z} \neq 0$, en efecto,
  $z = a + bi \quad \wedge \quad z \neq 0 \iff a \neq 0 \vee b \neq 0 \iff a \neq 0 \vee -b \neq 0 \iff$

  $\iff a - bi \neq 0 \iff \overline{z} \neq 0$

- $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{z} \cdot 1 = \dfrac{1}{z} \cdot \dfrac{\overline{z}}{\overline{z}} = \dfrac{1 \cdot \overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \dfrac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \dfrac{a - bi}{(a + bi) \cdot (a - bi)} =$

  $= \dfrac{a - bi}{a^2 - abi + abi - (bi)^2} = \dfrac{a - bi}{a^2 + b^2} = \dfrac{a}{a^2 + b^2} + \dfrac{-bi}{a^2 + b^2}$, luego

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i, \quad z \neq 0$$

Conjugado de un número complejo - Ejemplo

Ejemplo

Calcular $\overline{-2+3i} - \dfrac{2}{1-4i}$.

$$\overline{-2+3i} - \frac{2}{1-4i} = (-2-3i) - \frac{2}{1-4i} = (-2-3i) - \frac{2}{1-4i} \cdot \frac{\overline{1-4i}}{\overline{1-4i}} =$$

$$= (-2-3i) - \frac{2}{1-4i} \cdot \frac{1+4i}{1+4i} = (-2-3i) - \frac{2(1+4i)}{(1-4i)(1+4i)} =$$

$$= (-2-3i) - \frac{2+8i}{1^2+4i-4i-(4i)^2} = (-2-3i) - \frac{2+8i}{1^2+4^2} =$$

$$= -2-3i - \frac{2+8i}{17} = -2-3i - \frac{2}{17} - \frac{8}{17}i =$$

$$= (-2-\frac{2}{17}) + (-3-\frac{8}{17})i = -\frac{36}{17} - \frac{59}{17}i$$

Conjugado de un número complejo - Ejemplo

Ejemplo

Hallar $z \in \mathbb{C}$ *que verifique simultáneamente* $\overline{z} + 2 - 3i = z + 2$ *y* $2z + \overline{z} = \frac{3}{2}(1 - i)$.

Si $z = a + bi$ entonces $\overline{z} = a - bi$.

$$\overline{z} + 2 - 3i = z + 2 \iff \overline{z} - z = 2 - 2 + 3i \iff (a - bi) - (a + bi) = 3i \iff$$

$$\iff (a-a)+(-b-b)i = 3i \iff -2bi = 3i \iff b = -\frac{3}{2}. \quad \text{Luego } z = a - \frac{3}{2}i \ (1)$$

$$2z + \overline{z} = \frac{3}{2}(1 - i) \overset{(1)}{\iff} 2(a - \frac{3}{2}i) + \overline{(a - \frac{3}{2}i)} = \frac{3}{2}(1 - i) \iff$$

$$\iff 2(a - \frac{3}{2}i) + (a + \frac{3}{2}i) = \frac{3}{2}(1 - i) \iff 2a - 3i + a + \frac{3}{2}i = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i \iff$$

$$\iff 3a - \frac{3}{2}i = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i \iff 3a = \frac{3}{2} \iff a = \frac{1}{2} \quad (2)$$

De (1) y (2) deducimos que $z = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$.

Proposición

Sean $z, w \in \mathbb{C}, \quad z = a + bi,$

1. $z = w \iff \overline{z} = \overline{w},$
2. $\overline{\overline{z}} = z,$
3. $z + \overline{z} = 2Re(z) = 2a,$
4. $z - \overline{z} = 2Im(z)i = 2bi,$
5. $z \cdot \overline{z} = Re(z)^2 + Im(z)^2 = a^2 + b^2,$
6. $z = \overline{z}$ *si y sólo si* $z \in \mathbb{R},$
7. $z = -\overline{z}$ *si y sólo si* z *es imaginario puro o* $z = 0,$
8. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w},$
9. $\overline{z - w} = \overline{z} - \overline{w},$
10. $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w},$
11. $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{w}}, \quad w \neq 0,$
12. $\forall\, n \in \mathbb{N} : \; \overline{z^n} = \overline{z}^n,$
13. $\forall\, n \in \mathbb{Z} : \; \overline{z^n} = \overline{z}^n, \; n < 0 \; z \neq 0.$

Conjugado de un número complejo - Ejemplo

Ejemplo

Hallar $z \in \mathbb{C}$ tal que $\overline{z}(2-i) = 3\overline{z} + i^7$.

Observemos que, $z = w$ equivale a que $\overline{z} = \overline{w}$, cualesquiera sean $z, w \in \mathbb{C}$. Entonces

$$\overline{z}(2-i) = 3\overline{z} + i^7 \iff \overline{\overline{z}(2-i)} = \overline{3\overline{z} + i^7} \overset{(Prop\ 10)}{\iff} \overline{\overline{z}}\,\overline{(2-i)} = \overline{3\overline{z} + i^7} \iff$$

$$\overset{(Prop\ 2)}{\iff} z\,\overline{(2-i)} = \overline{3\overline{z} + i^7} \overset{(1)}{\iff} z(2+i) = \overline{3\overline{z} + i^7} \iff$$

$$\overset{(Prop\ 8)}{\iff} z(2+i) = \overline{3\overline{z}} + \overline{i^7} \overset{(Prop\ 10)}{\iff} z(2+i) = \overline{3}\,\overline{\overline{z}} + \overline{i^7} \overset{(Prop\ 6)}{\iff}$$

$$\iff z(2+i) = 3\overline{\overline{z}} + \overline{i^7} \overset{(Prop\ 2)}{\iff} z(2+i) = 3z + \overline{i^7} \overset{(Prop\ 12)}{\iff} z(2+i) = 3z + (\overline{i})^7 \iff$$

$$\overset{(1)}{\iff} z(2+i) = 3z + (-i)^7 \overset{(2)}{\iff} z(2+i) = 3z + (-i)^3 \iff z(2+i) = 3z - (i)^3 \iff$$

Conjugado de un número complejo - Ejemplo

$$\iff z(2+i) = 3z - (-i) \iff z(2+i) = 3z + i \iff z(2+i) - 3z = i \iff$$

$$\iff z(2+i-3) = i \iff z(-1+i) = i \iff z = \frac{i}{-1+i} \iff$$

$$\iff z = \frac{i}{-1+i} \cdot \frac{-1-i}{-1-i} = \frac{i(-1-i)}{(-1)^2+(1)^2} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

Referencias:

(1) Definición de conjugado de un complejo.

(2) Propiedad de la potencia de i.

2. Si $z \in \mathbb{C},\ z = a + bi$ entonces $z + \overline{z} = 2Re(z)$

$H)\ z \in \mathbb{C},\ z = a + bi$ $\qquad T)\ z + \overline{z} = 2Re(z)$

Demostración:

$$z + \overline{z} \overset{H)}{=} (a + bi) + \overline{(a + bi)} \overset{(1)}{=} (a + bi) + (a - bi) \overset{(2)}{=} (a + a) + (b + (-b))i =$$

$$= 2a \overset{(3)}{=} 2Re(z).$$ Por lo tanto

$$z + \overline{z} = 2Re(z)$$

Referencias:

(1) Definición de conjugado.

(2) Definición de suma de complejos.

(3) Definición de parte real del complejo z.

Conjugado - Algunas demostraciones

6. Sea $z \in \mathbb{C}$. $z = -\bar{z}$ si y sólo si z es imaginario puro o $z = 0$

- Primero demostraremos que, si $z = -\bar{z}$ entonces z es imaginario puro o $z = 0$.

$H_1)$ $z \in \mathbb{C},\ z = a + bi$ $\qquad H_2)$ $z = -\bar{z}$

$T)$ z es imaginario puro o $z = 0$

Demostración:

$$z = -\bar{z} \overset{H1)}{\iff} a + bi = -\overline{(a + bi)} \overset{(1)}{\iff} a + bi = -(a - bi) \overset{(2)}{\iff}$$

$$\iff a + bi = -a + bi \overset{(3)}{\iff} a = -a \ \wedge \ b = b \overset{(4)}{\iff} a = -a \iff$$

$$\iff a + a = 0 \iff 2a = 0 \iff a = 0$$

Hemos probado que $z = -\bar{z} \iff a = 0$ (5)

Como $b \in \mathbb{R}$, entonces $b = 0 \quad \vee \quad b \neq 0$

$$b = 0 \overset{H_2)}{\Longrightarrow} b = 0 \wedge z = -\overline{z} \overset{(5)}{\Longrightarrow} b = 0 \;\wedge\; a = 0 \overset{H_1)}{\Longrightarrow} z = 0 + 0i \Longrightarrow$$

$$z = 0$$

$$b \neq 0 \overset{H_2)}{\Longrightarrow} b \neq 0 \wedge z = -\overline{z} \overset{(5)}{\Longrightarrow} b \neq 0 \wedge a = 0 \overset{H_1)}{\Longrightarrow}$$

$$\Longrightarrow z = 0 + i = bi \;\wedge\; b \neq 0 \Longrightarrow$$

z es imaginario puro

Por lo tanto, z es imaginario puro o $z = 0$.

Referencias:

(1) Definición de conjugado.

(2) Definición de opuesto de un número complejo.

(3) Igualdad de complejos.

(4) Simplificación.

Conjugado - Algunas demostraciones

- Probemos ahora que: si z es imaginario puro o $z = 0$ entonces $z = -\overline{z}$.

  $H_1)$ $z \in \mathbb{C}$, $z = a + bi$ $\qquad$ $H_2)$ z es imaginario puro o $z = 0$

  $T)$ $z = -\overline{z}$

  Demostración:

  - z es imaginario puro $\overset{H_1)}{\Longrightarrow}$ $z = 0 + bi \ \wedge \ b \neq 0 \overset{(1)}{\Longrightarrow}$

    $\Longrightarrow \ z = 0 + bi = bi \ \Longrightarrow \ -\overline{z} = -\overline{bi} \ \overset{(2)}{=} \ -(-bi) = bi = z$

    Hemos demostrado que si z es imaginario puro entonces $-\overline{z} = z$. (3)

  - $z = 0 \Longrightarrow -\overline{z} = -\overline{0} \ \overset{(2)}{=} \ -(0) = 0 = z$, es decir,

    si $z = 0$ entonces $-\overline{z} = z$. (4)

  Luego, z es imaginario puro $\vee$ $z = 0 \overset{(3,\,4)}{\Longrightarrow} -\overline{z} = z \ \vee \ -\overline{z} = z \overset{(5)}{\Longrightarrow} -\overline{z} = z$

Referencias:

(1) Simplificación. (2) Definición de conjugado. (5) Idempotencia de la disyunción.

Conjugado - Algunas demostraciones

8. $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$, cualesquiera sean $z, w \in \mathbb{C}$

Demostración: sean $z = a + bi$ y $w = c + di$ entonces

$$\overline{z \cdot w} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} \overset{(1)}{=} (ac - bd) - (ad + bc)i \qquad (3)$$

$$\overline{z} \cdot \overline{w} = \overline{(a + bi)} \cdot \overline{(c + di)} \overset{(1)}{=} (a - bi) \cdot (c - di) \overset{(2)}{=} (ac - bd) + (-ad - bc)i =$$

$$= (ac - bd) - (ad + bc)i \qquad (4)$$

De (3) y (4) deducimos que $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

Referencias:

(1) Definición de conjugado

(2) Producto de números complejos

Conjugado de un número complejo - Ejercicio

Ejercicio

Sea $a \in \mathbb{R}$. *Dados los conjuntos* $A_a = \{z \in \mathbb{C} : \ \overline{z}(2-i) = 3\overline{z} + ai^7\}$ *y* $B = \{z \in \mathbb{C} : \ \overline{z}^2 - 2\overline{z} + 3 = 0\}$. *Analizar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justificar las respuestas.*

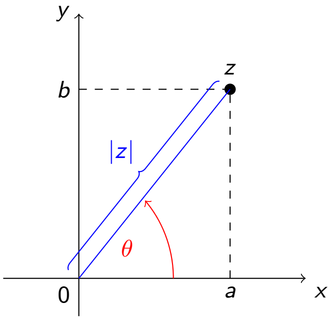
1. $\exists\, a \in \mathbb{R}, \ z \in A_a, \ w \in B / \ Re(z) = Im(z)$
2. $\forall\, a \in \mathbb{R}, \ z \in A_a : \ Re(z) = Im(z)$
3. $\exists\, a \in \mathbb{R} : \ A_a \subseteq B$
4. $\exists\, a \in \mathbb{R} : \ A_a = A_{2a}$
5. $\forall\, a \in \mathbb{R} : \ \exists\, z \in A_a / \ |-a-4| < 1 \implies |Im(z)+2| < \dfrac{1}{2}$

Módulo de un número complejo

Definición

Sea $z \in \mathbb{C}$, $z = a + bi$. El **módulo** *de z es un número real, positivo o nulo*

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



Observemos que $a^2 + b^2 \geq 0$ y $|z|$ es la raíz cuadrada aritmética del número $a^2 + b^2$, es decir, $|z|$ es la única raíz real positiva de $a^2 + b^2$

Geométricamente el módulo de z es la distancia del origen de coordenadas al punto (a, b), es decir, $|z|$ es la longitud del segmento que une el origen y el punto (a, b)

Si $z = 0$ entonces $a = 0,\ b = 0$ y $|z| = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0.$

Si $z \in \mathbb{R}$ entonces $b = 0$ y $|z| = \sqrt{a^2 + 0^2} = \sqrt{a^2} = |a| = |Re(z)|.$

Si z es es un imaginario puro, entonces $a = 0$ y $|z| = \sqrt{0^2 + b^2} = \sqrt{b^2} = |b| = |Im(z)|$

Ejemplo

Dados los complejos $z = -4 + 3i, \quad w = 1 - i \quad y \quad u = 2 + \frac{8}{3}i$, *calcular*

1. $|z|$
2. $|w|$
3. $|z \cdot w|$
4. $|z + w|$
5. $|z| + |w|$

1. $|z| = |-4 + 3i| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$
2. $|w| = |1 - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$
3. $|z \cdot w| = |(-4+3i) \cdot (1-i)| = |-4+4i+3i-3i^2| = |-1+7i| = \sqrt{(-1)^2 + 7^2} =$

   $= \sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = 5\sqrt{2}$ ¿Es $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$?
4. $|z + w| = |(-4 + 3i) + (1 - i)| = |-3 + 2i| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$
5. $|z| + |w| = 5 + \sqrt{2}$. ¿Es $|z + w| = |z| + |w|$?

Módulo de un número complejo - Ejemplos

Ejemplo

Hallar $-\frac{1}{2}|u|, \quad |-\frac{1}{2}|\cdot|u| \quad y \quad |-\frac{1}{2}u|$, *siendo* $u = 2 + \frac{8}{3}i$

- $-\frac{1}{2}|u| = -\frac{1}{2}\sqrt{2^2 + (\frac{8}{3})^2} = -\frac{1}{2}\sqrt{4 + \frac{64}{9}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{100}{9}} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{3} = -\frac{5}{3}$

- $|-\frac{1}{2}|\cdot|u| = \frac{1}{2}\cdot\frac{10}{3} = \frac{5}{3}$ ¿Es $-\frac{1}{2}|u| = |-\frac{1}{2}|\cdot|u|$?

- $|-\frac{1}{2}u| = |-\frac{1}{2}(2 + \frac{8}{3}i)| = |-1 - \frac{4}{3}i| = \sqrt{(-1)^2 + (-\frac{4}{3})^2} = \sqrt{1 + \frac{16}{9}} =$

  $= \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$ ¿Es $|-\frac{1}{2}u| = |-\frac{1}{2}|\cdot|u|$?

Módulo de un número complejo - Propiedades

Proposición

Sean $z,\ w \in \mathbb{C},\ z = a + bi\ \ y\ \ k \in \mathbb{R}$

1. 1.1 $|z| \geq 0$, 1.2 $|z| = 0$ *si y sólo si* $z = 0$
2. 2.1 $|z| \geq |a|$, 2.2 $|z| \geq |b|$
3. $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$
4. $|z| = |-z| = |\overline{z}|$
5. *5.1* $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ 5.2 $|k \cdot z| = |k| \cdot |z|$
6. $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|},\quad w \neq 0$
7. *7.1* $|z^n| = |z|^n\ \forall n \in \mathbb{N}$ 7.2 $|z^n| = |z|^n,\ \forall n \in \mathbb{Z},\ n < 0,\ z \neq 0$
8. *8.1* $|z + w| \leq |z| + |w|$, 8.2 $||z| - |w|| \leq |z - w|$

Propiedades de módulo - Algunas demostraciones

1. 1.1 $|z| \geq 0$

   Demostración: sea $z = a + bi$

   $z = a + bi \implies a,\ b \in \mathbb{R} \implies a^2 \geq 0 \ \wedge \ b^2 \geq 0 \implies a^2 + b^2 \geq 0 \implies$

   $\implies \exists \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R} \,/\, \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0 \stackrel{(1)}{\implies} |z| \geq 0$

   Luego, $\forall\, z \in \mathbb{C} : \ |z| \geq 0$

   Referencia: (1) Definición de módulo de un número complejo

2. 1.2 $|z| = 0 \iff z = 0$

   Demostración: sea $z = a + bi$

   - Supongamos que $|z| = 0$ y demostremos que $z = 0$
   - $|z| = 0 \stackrel{(1)}{\implies} \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \implies a^2 + b^2 = 0 \implies a^2 = -b^2 \stackrel{(2)}{\implies}$
   - $\implies a^2 = b^2 = 0 \implies a = b = 0 \implies z = 0$

   Por lo tanto, $|z| = 0 \implies z = 0$

Propiedades de módulo - Algunas demostraciones

- Supongamos que $z = 0$ y probemos que $|z| = 0$

  Demostración:

  $z = 0 \implies z = 0 + 0i \implies |z| = 0^2 + 0^2 = 0$. Luego $z = 0 \implies |z| = 0$

  Referencias: (1) Definición de módulo de un número complejo

  (2) Como $a^2 \geq 0$ y $b^2 \geq 0$ entonces $a^2 \geq 0$ y $-b^2 \leq 0$

5. 5.2 $|k \cdot z| = |k| \cdot |z|$, cualesquiera sean $z \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{R}$

   Demostración: sea $z = a + bi$

   $$|k \cdot z| = |k(a + bi)| = |ka + kbi| = \sqrt{(ka)^2 + (kb)^2} = \sqrt{k^2a^2 + k^2b^2} =$$

   $$= \sqrt{k^2(a^2 + b^2)} = \sqrt{k^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = |k|\sqrt{a^2 + b^2} = |k| \cdot |z|$$

Se dejan como ejercicios justificar cada uno de los pasos de esta última demostración y hacer las demostraciones de las proposiciones:

3, 4, 5.1, 6, 7.1 y 7.2

Argumento de un número complejo

Definición

Dado un número complejo $z = a + bi,\ z \neq 0$, el **argumento** *de z, es al ángulo formado por el semieje real positivo y el segmento que detemina el módulo de z, a menos de un múltiplo entero de 2π, tomándose como sentido positivo el sentido antihorario.*

Observemos que si θ es el argumento de z, también serán argumento de z los ángulos de la forma: $\theta + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, o sea, que los valores que toma argumento de z son:

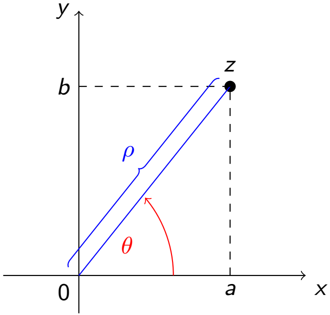
$$\ldots\ \theta - 6\pi,\ \theta - 4\pi,\ \theta - 2\pi,\ \theta,\ \theta + 2\pi,\ \theta + 4\pi,\ \theta + 6\pi \ldots$$

Llamaremos "argumento principal de z", al argumento de z comprendido entre 0 y 2π, es decir, que θ es el argumento principal de z si

$$0 \leq \theta < 2\pi.$$

Para indicar que θ es el argumento principal de z, escribiremos $\theta = arg(z)$.
Haremos abuso del lenguaje cuando digamos argumento de z para referirnos al argumento principal de z.

Argumento de un número complejo



Si $z = 0$ entonces $arg(z) = 0$

Si $z \in \mathbb{R},\ z > 0$ entonces $arg(z) = 0$

Si $z \in \mathbb{R},\ z < 0$ entonces $arg(z) = 180^\circ = \pi$

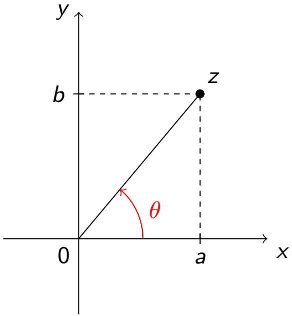
Si $z = bi,\ b > 0$ entonces $arg(z) = 90^\circ = \frac{1}{2}\pi$

Si $z = bi,\ b < 0$ entonces $arg(z) = 270^\circ = -\frac{1}{2}\pi$

Recordemos que: si $z \neq 0$

$$cos(\theta) = \frac{a}{\rho}, \qquad sen(\theta) = \frac{b}{\rho}, \qquad tg(\theta) = \frac{b}{a},\ a \neq 0$$

Argumento de un número complejo - Primer cuadrante



Primer Cuadrante

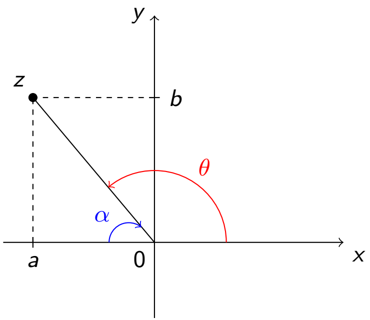
$$z = a + bi, \quad a > 0, \quad b \geq 0$$

$$tg(\theta) = \frac{b}{a} = \frac{|b|}{|a|} = \left|\frac{b}{a}\right|$$

$$\theta = arctg\left(\left|\frac{b}{a}\right|\right), \qquad 0 \leq \theta < \frac{1}{2}\pi$$

Oservaciones: $0 < cos(\theta) \leq 1, \quad 0 \leq sen(\theta) < 1$

Segundo Cuadrante



$$z = a + bi, \quad a < 0, \quad b \geq 0$$

Ángulo auxiliar:

$$tg(\alpha) = \frac{b}{|a|} = \frac{|b|}{|a|} = \left|\frac{b}{a}\right|,$$

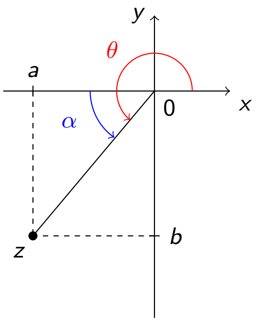
$$\alpha = arctg\left(\left|\frac{b}{a}\right|\right)$$

$$0 \leq \alpha < \frac{1}{2}\pi$$

$$\theta = 180^\circ - \alpha = \pi - \alpha, \qquad \frac{1}{2}\pi < \theta \leq \pi$$

Oservaciones: $cos(\theta) = -cos(\alpha), \quad sen(\theta) = sen(\alpha), \quad tg(\theta) = -tg(\alpha)$

$$-1 \leq cos(\theta) < 0, \qquad 0 \leq sen(\theta) < 1$$



Tercer Cuadrante

$$z = a + bi, \quad a < 0, \quad b \leq 0$$

Ángulo auxiliar:

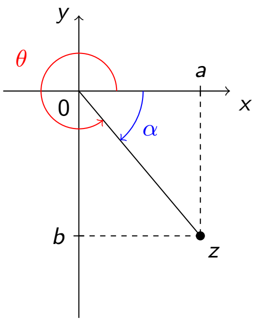
$$tg(\alpha) = \frac{|b|}{|a|} = \left|\frac{b}{a}\right|, \quad \alpha = arctg\left(\left|\frac{b}{a}\right|\right)$$

$$0 \leq \alpha < \frac{1}{2}\pi$$

$$\theta = 180^\circ + \alpha = \pi + \alpha, \qquad \pi \leq \theta < \frac{3}{2}\pi$$

Oservaciones: $cos(\theta) = -cos(\alpha), \quad sen(\theta) = -sen(\alpha), \quad tg(\theta) = tg(\alpha)$

$$-1 \leq cos(\theta) < 0, \quad -1 < sen(\theta) \leq 0$$



Cuarto Cuadrante

$$z = a + bi, \quad a > 0, \quad b \leq 0$$

Ángulo auxiliar:

$$tg(\alpha) = \frac{|b|}{|a|} = \left|\frac{b}{a}\right|, \quad \alpha = arctg\left(\left|\frac{b}{a}\right|\right)$$

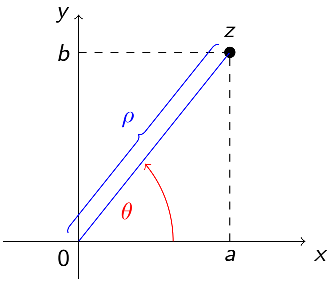
$$0 \leq \alpha < \frac{1}{2}\pi$$

$$\theta = 360^\circ - \alpha = 2\pi - \alpha, \qquad \frac{3}{2}\pi \leq \theta < 2\pi$$

Oservaciones: $cos(\theta) = cos(\alpha), \quad sen(\theta) = -sen(\alpha), \quad tg(\theta) = -tg(\alpha)$

$$0 < cos(\theta) \leq 1, \quad -1 < sen(\theta) \leq 0$$

Números Complejos - Forma Polar



Si $z \neq 0$ y consideramos el módulo ρ y el argumento θ del complejo z, se pueden establecer las siguientes relaciones:

$$sen(\theta) = \frac{b}{\rho} \quad \text{entonces} \quad b = \rho \cdot sen(\theta)$$

$$cos(\theta) = \frac{a}{\rho} \quad \text{entonces} \quad a = \rho \cdot cos(\theta)$$

De lo que deducimos

$$z = a + bi = \rho \cdot cos(\theta) + \rho \cdot sen(\theta) i$$

$$z = a + bi = \rho(cos(\theta) + sen(\theta)i) = \rho(cos(\theta) + isen(\theta))$$

$$z = a + bi = \rho cis(\theta)$$

Definición

Sea $z \in \mathbb{C}$. La forma **polar o trigonométrica** *del complejo z es*

$$z = \rho(cos(\theta) + isen(\theta)) = \rho cis(\theta) = \rho_\theta$$

donde ρ es el módulo del complejo z y θ es el argumento de z

Ángulos notables - Primer cuadrante

$$0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi$$

θ	$0^\circ = 0\pi$	$30^\circ = \frac{1}{6}\pi$	$45^\circ = \frac{1}{4}\pi$	$60^\circ = \frac{1}{3}\pi$	$90^\circ = \frac{1}{2}\pi$
$sen(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$tg(\theta)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	

Forma polar - Ejemplo

Ejemplo

Sean $z_1 = 2 + 2\sqrt{3}i, \quad z_2 = -\sqrt{3} + i, \quad z_3 = -4 - 4i$ *y* $z_4 = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{6}i$. *Hallar la forma polar o trigonométrica de los complejos dados*

- $z_1 = 2 + 2\sqrt{3}i \implies |z_1| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 4 \cdot 3} = \sqrt{16} = 4$

  $z_1 = 2 + 2\sqrt{3}i$ es un complejo que está en el primer cuadrante entonces

$$arg(z_1) = arctg\left(\frac{2\sqrt{3}}{2}\right) = arctg(\sqrt{3}) = \frac{1}{3}\pi$$

  Entonces la expresión de z_1 en forma polar es

$$z_1 = 4cis(\frac{1}{3}\pi) \quad \text{o} \quad z_1 = 4(cos(\frac{1}{3}\pi) + isen(\frac{1}{3}\pi))$$

- $z_2 = -\sqrt{3} + i \implies |z_2| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = 2$

Forma polar - Ejemplo

$z_2 = -\sqrt{3} + i$ es un complejo que está en el segundo cuadrante entonces

$$arg(z_2) = \pi - \alpha$$

donde $\alpha = arctg\left(\left|\frac{1}{-\sqrt{3}}\right|\right) = arctg\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{6}\pi$, luego

$$arg(z_2) = \pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{5}{6}\pi$$

Entonces la expresión de z_2 en forma polar es

$$z_2 = 2cis(\frac{5}{6}\pi) \quad \text{o} \quad z_2 = 2(cos(\frac{5}{6}\pi) + isen(\frac{5}{6}\pi))$$

- $z_3 = -4 - 4i \implies |z_3| = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$

  $z_3 = -4 - 4i$ es un complejo que está en el tercer cuadrante entonces

$$arg(z_2) = \pi + \alpha$$

donde $\alpha = arctg\left(\left|\frac{-4}{-4}\right|\right) = arctg(1) = \frac{1}{4}\pi$, luego

Forma polar - Ejemplo

$$arg(z_3) = \pi + \frac{1}{4}\pi = \frac{5}{4}\pi$$

Entonces la expresión de z_3 en forma polar es

$$z_3 = 4\sqrt{2}cis(\frac{5}{4}\pi) \quad \text{o} \quad z_3 = 4\sqrt{2}(cos(\frac{5}{4}\pi) + isen(\frac{5}{4}\pi))$$

- $z_4 = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{6}i \implies |z_4| = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (-2\sqrt{6})^2} = \sqrt{8+24} = 4\sqrt{2}$

  $z_4 = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{6}i$ es un complejo que está en el cuarto cuadrante entonces

$$arg(z_4) = 2\pi - \alpha$$

donde $\alpha = arctg\left(\left|\frac{2\sqrt{2}}{-2\sqrt{6}}\right|\right) = arctg(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}) = arctg(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{1}{6}\pi$, luego

$$arg(z_4) = 2\pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{11}{6}\pi$$

Entonces la expresión de z_4 en forma polar es

$$z_4 = 4\sqrt{2}cis(\frac{11}{6}\pi) \quad \text{o} \quad z_4 = 4\sqrt{2}(cos(\frac{11}{6}\pi) + isen(\frac{11}{6}\pi))$$

Forma polar - Ejemplo

Ejemplo

Expresar los siguientes complejos en forma binómica

1. $w_1 = \sqrt{3}cis(\frac{1}{6}\pi)$
2. $w_2 = \sqrt{2}cis(\frac{3}{4}\pi)$
3. $w_3 = 3cis(\frac{7}{6}\pi)$
4. $w_4 = 12cis(\frac{5}{3}\pi)$

1. $w_1 = \sqrt{3}cis(\frac{1}{6}\pi) = \sqrt{3}(cos(\frac{1}{6}\pi) + isen(\frac{1}{6}\pi)) = \sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) =$

$$= \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}i = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

2. Observemos que $\frac{3}{4}\pi = \pi - \frac{1}{4}\pi$ es un ángulo que está en el segundo cuadrante

entonces $\quad cos(\frac{3}{4})\pi = -cos(\frac{1}{4}\pi) \quad \text{y} \quad sen(\frac{3}{4})\pi = sen(\frac{1}{4}\pi) \quad (1)$

$$w_2 = \sqrt{2}cis(\frac{3}{4}\pi) = \sqrt{2}(cos(\frac{3}{4}\pi) + isen(\frac{3}{4}\pi)) \overset{(1)}{=} \sqrt{2}(-cos(\frac{1}{4}\pi) + isen(\frac{1}{4}\pi)) =$$

$$= \sqrt{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i) = \sqrt{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2}) + \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}i = -1 + i$$

3. Observemos que $\frac{7}{6}\pi = \pi + \frac{1}{6}\pi$ es un ángulo que está en el tercer cuadrante entonces

$$cos(\frac{7}{6})\pi = -cos(\frac{1}{6}\pi) \quad \text{y} \quad sen(\frac{7}{6})\pi = -sen(\frac{1}{6}\pi) \quad (2)$$

$$w_3 = 3cis(\frac{7}{6}\pi) = 3(cos(\frac{7}{6}\pi) + isen(\frac{7}{6}\pi)) \overset{(2)}{=} 3(-cos(\frac{1}{6}\pi) - isen(\frac{1}{6}\pi)) =$$

$$= 3(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i) = -3\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$$

4. Observemos que $\frac{5}{3}\pi = 2\pi - \frac{1}{3}\pi$ es un ángulo que está en el cuarto cuadrante entonces

$$cos(\frac{5}{3})\pi = cos(\frac{1}{3}\pi) \quad \text{y} \quad sen(\frac{5}{3})\pi = -sen(\frac{1}{3}\pi) \quad (3)$$

$$w_4 = 12cis(\frac{5}{3}\pi) = 12(cos(\frac{5}{3}\pi) + isen(\frac{5}{3}\pi)) \overset{(3)}{=} 12(cos(\frac{1}{3}\pi) - isen(\frac{1}{3}\pi)) =$$

$$= 12(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) = 6 - 6\sqrt{3}i$$

Operaciones en forma polar

Producto de números complejos en forma polar

Teorema

Sean $z = \rho cis(\theta)$ *y* $w = \tau cis(\beta)$. *Entonces*

$$z \cdot w = \rho \cdot \tau cis(\theta + \beta)$$

Cociente de números complejos en forma polar

Teorema

Sean $z = \rho cis(\theta)$ *y* $w = \tau cis(\beta), \quad w \neq 0$. *Entonces*

$$\frac{z}{w} = \frac{\rho}{\tau} cis(\theta - \beta)$$

Potencias enteras de números complejos en forma polar (Fórmula de De Moivre)

Teorema

Sean $z = \rho cis(\theta)$ *y* $n \in \mathbb{Z}$. *Entonces*

$$z^n = \rho^n cis(n\theta)$$

Ejemplo

Sean $z = 2 - 2i$, $\quad w = \sqrt{3} + i$, $\quad u = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \quad$ *y* $\quad t = 3cis(\frac{7}{6}\pi)$. *Resolver en forma polar las siguientes operaciones:*

1. $z \cdot w$
2. $z \cdot u$
3. $w : u$
4. t^{26}

1. $z \cdot w$

$$|z| = \sqrt{2^2 + (-2^2)} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}, \quad |w| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$$

z está ubicado en el cuarto cuadrante entonces $arg(z) = 2\pi - \alpha$, donde $\alpha = arctg(\left|\frac{-2}{2}\right|) = arctg(1) = \frac{1}{4}\pi$, luego $arg(z) = 2\pi - \frac{1}{4}\pi = \frac{7}{4}\pi$

w se encuentra en el primer cuadrante entonces $arg(w) = arctg(\frac{b}{a}) = arctg(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{1}{6}\pi$

Entonces $\; z = 2\sqrt{2}cis(\frac{7}{4}\pi), \quad w = 2cis(\frac{1}{6}\pi)$

$$z \cdot w = (2\sqrt{2})2cis(\frac{7}{4}\pi + \frac{1}{6}\pi) = 4\sqrt{2}cis(\frac{23}{12}\pi)$$

Observemos que cuando calculamos $z \cdot w$ su argumento principal coincidió con $arg(z) + arg(w)$, pero esto no ocurre con el siguiente ejemplo

2. $z \cdot u$

$$|u| = \sqrt{(-\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

u es un complejo que está ubicado en el segundo cuadrante entonces

$arg(u) = \pi - \alpha$, donde $\alpha = arctg(|(\frac{\sqrt{3}}{2}) : (-\frac{1}{2})|) = arctg(\sqrt{3}) = \frac{1}{3}\pi$

$arg(u) = \pi - \frac{1}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi$

Entonces $z \cdot u = (2\sqrt{2} \cdot 1)cis(\frac{7}{4}\pi + \frac{2}{3}\pi) = 2\sqrt{2}cis(\frac{29}{12}\pi)$

Como $\frac{29}{12}\pi \geq 2\pi$ no es el argumento principal de $z \cdot u$.

Busquemos el argumento principal de $z \cdot u$

$$cis(\frac{29}{12}\pi) = cis(\frac{24}{12}\pi + \frac{5}{12}\pi) = cis(2\pi + \frac{5}{12}\pi) = cis(\frac{5}{12}\pi)$$

Como $0 \leq \frac{5}{12}\pi \leq 2\pi$ entonces $z \cdot u = 2\sqrt{2}cis(\frac{5}{12}\pi)$

3. $w = 2cis(\frac{1}{6}\pi)$ y $u = 1cis(\frac{2}{3}\pi)$

$$w : u = \frac{2}{1}cis(\frac{1}{6}\pi - \frac{2}{3}\pi) = 2cis(-\frac{3}{6}\pi)$$

Como $-\frac{3}{6}\pi < 0$ entonces $-\frac{3}{6}\pi$ no puede ser el argumento principal de $w : u$, pero

$$cis(-\frac{3}{6}\pi) = cis(2\pi - \frac{3}{6}\pi) = cis(\frac{9}{6}\pi) = cis(\frac{3}{2}\pi)$$

Entonces $w : u = 2cis(\frac{3}{2}\pi) = 2(cos(\frac{3}{2}\pi) + isen(\frac{3}{2}\pi)) = 2(0 - i) = -2i$

Operaciones en forma polar - Ejemplos

4. $t^{26} = (3cis(\frac{7}{6}\pi))^{26} = 3^{26}cis(26 \cdot \frac{7}{6}\pi)$

   Busquemos el argumento principal de t^{26}

$$cis(26 \cdot \frac{7}{6}\pi) = cis(\frac{26 \cdot 7}{6}\pi) = cis(\frac{(24+2) \cdot 7}{6}\pi) = cis(\frac{24 \cdot 7 + 2 \cdot 7}{6}\pi) =$$

$$= cis(4 \cdot 7 + \frac{2 \cdot 7}{6})\pi = cis(14(2\pi) + \frac{14}{6}\pi) = cis(\frac{14}{6}\pi) =$$

$$= cis(\frac{7}{3}\pi) = cis(\frac{6+1}{3}\pi) = cis(2\pi + \frac{1}{3}\pi) = cis(\frac{1}{3}\pi)$$

   Luego $t^{26} = 3^{26}cis(\frac{1}{3}\pi) = 3^{26}(cos(\frac{1}{3}\pi) + isen(\frac{1}{3}\pi)) = 3^{26}(\frac{1}{2} + isen\frac{\sqrt{3}}{2})$

$$t^{26} = \frac{3^{26}}{2} + \frac{3^{26}\sqrt{3}}{2}i$$

Ejemplo

Sea $z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$. *Hallar todos los naturales* n *tales que* z^n *sea imaginario puro*

En primer lugar escribamos al complejo z en forma polar

$$|z| = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2+2} = 2$$

$arg(z) = \pi - \alpha$, siendo

$$\alpha = arctag\left(\left|\frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2}}\right|\right)) = arctg(1) = \frac{1}{4}\pi, \text{ entonces}$$

$$arg(z) = \pi - \frac{1}{4}\pi = \frac{3}{4}\pi$$

$$z^n = \left(2cis(\frac{3}{4}\pi)\right)^n = 2^n cis(\frac{3}{4}n\pi)$$

Como z^n debe eser imaginario puro entonces el argumento principal de z debe ser

$$arg(z) = \frac{1}{2}\pi \quad \text{o} \quad arg(z) = \frac{3}{2}\pi$$

Operaciones en forma polar - Ejemplos

Observemos que si n es par, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n = 2k$ entonces

$$\frac{3}{4}n = \frac{3}{4} \cdot 2k = \frac{3}{2}k$$

y k debe ser impar para que $cos(\frac{3}{2}k\pi) = 0$

Luego, todos los valores de $n \in \mathbb{N}$ que verifican que

$$z^n \text{ es imaginario puro}$$

son $n = 2k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad k$ impar