# Inducción completa

**Elementos de Álgebra**
**Segundo Cuatrimestre 2022**

**Mg. María del Carmen Vannicola**

Facultad de Informática
Departamento de Matemática

# El símbolo $\sum$

El símbolo $\sum$ abrevia la notación de una suma cuyos términos tienen una característica en común.

Cuando notamos

$$\sum_{i=t}^{n} a_i$$

indicaremos: $a_t + a_{t+1} + a_{t+2} + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$

Donde:

- $t, \ n \in \mathbb{Z}$
- $t \leq n$
- $t$ es el **límite inferior** de la sumatoria y $n$ es el **límite superior** de la sumatoria
- $i$ es un contador que aumenta de 1 en 1
- $a_i$ expresión algebraica que depende de $i$ o es una costante

# El símbolo $\sum$ - Ejemplos

## Ejemplo

*Desarrollar y calcular las siguientes sumatorias*

1. $\displaystyle\sum_{i=-2}^{3} i^2$
2. $\displaystyle\sum_{i=0}^{4} \frac{1}{i+1}$
3. $\displaystyle\sum_{i=-1}^{4} -2$

1. $$\sum_{i=-2}^{3} i^2 = \underbrace{(-2)^2}_{i=-2} + \underbrace{(-1)^2}_{i=-1} + \underbrace{0^2}_{i=0} + \underbrace{1^2}_{i=1} + \underbrace{2^2}_{i=2} + \underbrace{3^2}_{i=3} = 4+1+0+1+4+9 = 19$$

2. $$\sum_{i=0}^{4} \frac{1}{i+1} = \frac{1}{\underbrace{0+1}_{i=0}} + \frac{1}{\underbrace{1+1}_{i=1}} + \frac{1}{\underbrace{2+1}_{i=2}} + \frac{1}{\underbrace{3+1}_{i=3}} + \frac{1}{\underbrace{4+1}_{i=4}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} =$$
$$= \frac{60+30+20+15+12}{60} = \frac{137}{60}$$

3. $$\sum_{i=-1}^{4} -2 = \underbrace{(-2)}_{i=-1} + \underbrace{(-2)}_{i=0} + \underbrace{(-2)}_{i=1} + \underbrace{(-2)}_{i=2} + \underbrace{(-2)}_{i=3} + \underbrace{(-2)}_{i=4} = 6(-2) = -12$$

Observaciones: ¿qué problemas tenemos en los siguientes casos?

- ¿Es posible calcular $\displaystyle\sum_{i=-2}^{4} \frac{1}{i+1}$?

  Cuando $i = -1$ no existe $\dfrac{1}{i+1}$, luego no se puede calcular $\displaystyle\sum_{i=-2}^{4} \frac{1}{i+1}$

- Sabiendo que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(5i-3) = \frac{n\cdot(5n-1)}{2}$. ¿Es posible encontrar $n$ para el cual $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(5i-3) = 6$?

$$\sum_{i=1}^{n}(5i-3) = 6 \iff \frac{n\cdot(5n-1)}{2} = 6 \iff 5n^2 - n = 12 \iff 5n^2 - n - 12 = 0$$

$$n = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 + 4\cdot 5\cdot(-12)}}{2\cdot 5} = \frac{1 \pm \sqrt{1+120}}{10} = \frac{1 \pm 11}{10}$$

Luego $n = \dfrac{6}{5}$ o $n = -1$. Como $n \in \mathbb{N}$ entonces $\nexists\, n \in \mathbb{N} / \sum_{i=1}^{n}(5i-3) = 6$

# Propiedades.

**Proposición**

*Sean $a_i, b_i$ dos expresiones reales y $k$ una costante real. Entonces*

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)=\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}b_i,$
- $\displaystyle\sum_{i=t}^{n}(a_i+b_i)=\sum_{i=t}^{n}a_i+\sum_{i=t}^{n}b_i,$
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}ka_i=k\sum_{i=1}^{n}a_i$
- $\displaystyle\sum_{i=t}^{n}ka_i=k\sum_{i=t}^{n}a_i$
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}k=\underbrace{k+k+\ldots+k}_{n-veces}=nk$
- $\displaystyle\sum_{i=t}^{n}k=\underbrace{k+k+\ldots+k}_{(n-t+1)-veces}=(n-t+1)k$

**Ejemplo**

*Sabiendo que* $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=n^2$ *calcular*

1. $\sum_{i=-3}^{24}\frac{1}{4}(2i-1)$
2. $\sum_{i=34}^{107}(3i-\frac{3}{2})$

1. $\sum_{i=-3}^{24}\frac{1}{4}(2i-1)=\frac{1}{4}\sum_{i=-3}^{24}(2i-1)=$

$$=\frac{1}{4}\left(\underbrace{(2(-3)-1)}_{i=-3}+\underbrace{(2(-2)-1)}_{i=-2}+\underbrace{(2(-1)-1)}_{i=-1}+\underbrace{(2\cdot 0-1)}_{i=0}+\sum_{i=1}^{24}(2i-1)\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(-7-5-3-1+\sum_{i=1}^{24}(2i-1)\right)=\frac{1}{4}(-16+24^2)=\frac{1}{4}(-16+576)=140$$

Luego $\sum_{i=-3}^{24}\frac{1}{4}(2i-1)=140$

2. $$\sum_{i=34}^{107}(3i-\frac{3}{2}) = \sum_{i=34}^{107}\frac{3}{2}(2i-1) = \frac{3}{2}\sum_{i=34}^{107}(2i-1) = \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{107}(2i-1) = \sum_{i=1}^{33}(2i-1) + \sum_{i=34}^{107}(2i-1) \iff$$

$$\sum_{i=1}^{107}(2i-1) - \sum_{i=1}^{33}(2i-1) = \sum_{i=34}^{107}(2i-1) \quad (2)$$

Reemplazando (2) en (1) tenemos

$$\sum_{i=34}^{107}(3i-\frac{3}{2}) \overset{(1)}{=} \frac{3}{2}\sum_{i=34}^{107}(2i-1) \overset{(2)}{=} \frac{3}{2}\left(\sum_{i=1}^{107}(2i-1) - \sum_{i=1}^{33}(2i-1)\right) =$$

$$= \frac{3}{2}(107^2-33^2) = \frac{3}{2}(11449-1089) = \frac{3}{2}\cdot 10360 = 15540$$

Por lo tanto $\displaystyle\sum_{i=34}^{107}(3i-\frac{3}{2}) = \frac{3}{2}(107^2-33^2)$

## Ejemplo

*Hallar* $\sum_{i=1}^{9}(2x_i - 4)^2$, *sabiendo que* $\sum_{i=1}^{8} x_i^2 = 160$, $\sum_{i=1}^{8} x_i = 120$ *y* $x_9 = 6$

$$\sum_{i=1}^{9}(2x_i - 4)^2 = \sum_{i=1}^{9}(4x_i^2 - 16x_i + 16) = \sum_{i=1}^{9} 4x_i^2 + \sum_{i=1}^{9} -16x_i + \sum_{i=1}^{9} 16 =$$

$$= 4\sum_{i=1}^{9} x_i^2 + (-16)\sum_{i=1}^{9} x_i + \sum_{i=1}^{9} 16 =$$

$$= 4\left[\sum_{i=1}^{8} x_i^2 + x_9^2\right] + (-16)\left[\sum_{i=1}^{8} x_i + x_9\right] + \sum_{i=1}^{9} 16 =$$

$$= 4[160 + 6^2] + (-16)[120 + 6] + 9 \cdot 16 = 4 \cdot 196 - 16 \cdot 126 + 144 =$$

$$= 784 - 2016 + 144 = -1088$$

# Principio de Inducción Completa

Sea $p(n)$ una proposición que depende de un número natural $n$. El siguiente teorema nos proporciona un método para demostrar una proposición cuantificada universalmente, que depende de un número natural

**Teorema**

*Si $p(n)$ es una proposición relativa al número natural $n$ y verifica que*

1. *$p(1)$ es verdadera,*
2. *para cada $k \in \mathbb{N}$, si $p(k)$ es verdadera entonces $p(k+1)$ es verdadera.*

*Entonces $p(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.*

**Ejemplo**

*Demostrar que* $\forall n \in \mathbb{N}: \sum_{i=1}^{n}(5i-3)=\frac{n\cdot(5n-1)}{2}$

Observemos que $p(n): \sum_{i=1}^{n}(5i-3)=\frac{n\cdot(5n-1)}{2}$

Demostremos que $p(1)$ es verdadera, es decir, probemos que

$$p(1): \sum_{i=1}^{1}(5i-3)=\frac{1\cdot(5\cdot 1-1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{1}(5i-3)=5\cdot 1-3=2 \quad (1)$$

$$\frac{1\cdot(5\cdot 1-1)}{2}=\frac{1\cdot 4}{2}=2 \quad (2)$$

Como $(1)=(2)$ entonces $\sum_{i=1}^{1}(5i-3)=\frac{1\cdot(5\cdot 1-1)}{2}$, es decir, $p(1)$ es verdadera.

# Principio de Inducción Completa - Ejemplo

Sea $k \in \mathbb{N}$. Demostremos que $p(k) \implies p(k+1)$ es verdadera

$Hi)$ $\displaystyle\sum_{i=1}^{k}(5i-3) = \frac{k\cdot(5k-1)}{2}$

$T)$ $\displaystyle\sum_{i=1}^{k+1}(5i-3) = \frac{(k+1)\cdot(5(k+1)-1)}{2}$

Demostración:

$$\sum_{i=1}^{k+1}(5i-3) = \underbrace{5\cdot 1-3}_{i=1} + \underbrace{5\cdot 2-3}_{i=2} + \ldots + \underbrace{5\cdot(k-1)-3}_{i=k-1} + \underbrace{5\cdot k-3}_{i=k} + \underbrace{5\cdot(k+1)-3}_{i=k+1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{k}(5i-3) + \underbrace{5\cdot(k+1)-3}_{i=k+1} \overset{Hi)}{=} \frac{k\cdot(5k-1)}{2} + (5\cdot(k+1)-3) =$$

$$= \frac{k(5k-1)+2(5(k+1)-3)}{2} = \frac{k(5k-1)+10(k+1)-6}{2} =$$

$$= \frac{5k^2-k+10k+10-6}{2} = \frac{5k^2+9k+4}{2} \qquad (3)$$

# Principio de Inducción Completa - Ejemplo

$$\frac{(k+1)\cdot(5(k+1)-1)}{2} = \frac{(k+1)(5k+5-1)}{2} = \frac{(k+1)(5k+4)}{2} =$$

$$= \frac{5k^2+4k+5k+4}{2} = \frac{5k^2+9k+4}{2} \qquad (4)$$

Como $(3) = (4)$ entonces

$$\sum_{i=1}^{k+1}(5i-3) = \frac{(k+1)\cdot(5(k+1)-1)}{2}$$

Hemos probado que $p(1)$ es verdadero y que $p(k) \Longrightarrow p(k+1)$ es verdadero si $k \in \mathbb{N}$.

Esto nos permite asegurar que $p(n)$ es verdadera, para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir,

$$\forall n \in \mathbb{N}: \sum_{i=1}^{n}(5i-3) = \frac{n\cdot(5n-1)}{2}$$

# Principio de Inducción Completa - Ejemplo

## Ejemplo

*Probar que* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Observación: $p(n) : \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Demostremos que $p(1) : \displaystyle\sum_{k=1}^{1} k^2 = \frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}$ es verdadera.

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1 \qquad (1)$$

$$\frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6} = 1 \qquad (2)$$

Como $(1) = (2)$ entonces $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} k^2 = \frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}$, es decir, $p(1)$ es verdadera

# Principio de Inducción Completa - Ejemplo

Demostremos que, si $t \in \mathbb{N}$ entonces $p(t) \Longrightarrow p(t+1)$ es verdadera.

$$Hi)\ p(t): \ \sum_{k=1}^{t} k^2 = \frac{t(t+1)(2t+1)}{6}$$

$$T)\ p(t+1): \ \sum_{k=1}^{t+1} k^2 = \frac{(t+1)((t+1)+1)(2(t+1)+1)}{6}$$

$$T)\ p(t+1): \ \sum_{k=1}^{t+1} k^2 = \frac{(t+1)(t+2)(2t+3)}{6}$$

Demostración:

$$\sum_{k=1}^{t+1} k^2 = \sum_{k=1}^{t} k^2 + (t+1)^2 \overset{Hi)}{=} \frac{t(t+1)(2t+1)}{6} + (t+1)^2 =$$

$$= \frac{t(t+1)(2t+1)+6(t+1)^2}{6} = \frac{(t+1)[t(2t+1)+6(t+1)]}{6} =$$

$$= \frac{(t+1)(2t^2+t+6t+6)}{6} = \frac{(t+1)(2t^2+7t+6)}{6} \qquad (3)$$

# Principio de Inducción Completa - Ejemplo

$$\frac{(t+1)(t+2)(2t+3)}{6} = \frac{(t+1)(2t^2+3t+4t+6)}{6} = \frac{(t+1)(2t^2+7t+6)}{6} \quad (4)$$

Como $(3) = (4)$ entonces $\displaystyle\sum_{k=1}^{t+1} k^2 = \frac{(t+1)(t+2)(2t+3)}{6}$

Luego como $p(1)$ y $p(t) \Longrightarrow p(t+1)$ son verdaderas, si $t \in \mathbb{N}$, entonces $p(k)$ es verdadera, cualquiera sea $k \in \mathbb{N}$, es decir, la proposición

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

es verdadera

**Ejemplo**

*Demostrar que cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$ se verifica:* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^{i-1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2\cdot 3^{n-1}}$

$$p(n) : \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^{i-1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2\cdot 3^{n-1}}$$

Demostremos que $p(1) : \displaystyle\sum_{i=1}^{1}\left(\frac{1}{3}\right)^{i-1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2\cdot 3^{1-1}}$ es verdadera

$$\sum_{i=1}^{1}\left(\frac{1}{3}\right)^{i-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{1-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{0} = 1 \quad (1)$$

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{2\cdot 3^{1-1}} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2\cdot 1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1 \quad (2)$$

Como $(1) = (2)$, tenemos que $\displaystyle\sum_{i=1}^{1}\left(\frac{1}{3}\right)^{i-1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2\cdot 3^{1-1}}$, es decir, $p(1)$ es verdadera

# Principio de Inducción Completa - Ejemplo

Sea $k \in \mathbb{N}$. Demostremos que la implicación $p(k) \Longrightarrow p(k+1)$ es verdadera

$$Hi) \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{1}{3}\right)^{i-1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^{k-1}} \qquad T) \sum_{i=1}^{k+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{i-1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^{(k+1)-1}}$$

Demostración:

$$\sum_{i=1}^{k+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{i-1} = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{1}{3}\right)^{i-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{(k+1)-1} \overset{Hi)}{=} \frac{3}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^{k-1}} + \left(\frac{1}{3}\right)^{k} =$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{-1}{2 \cdot 3^{k-1}} + \left(\frac{1}{3}\right)^{k} = \frac{3}{2} + \frac{-1}{2 \cdot 3^{k-1}} + \frac{1}{3^k} = \frac{3}{2} + \frac{-3+2}{2 \cdot 3^k} =$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{-1}{2 \cdot 3^k} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^k} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^{(k+1)-1}}$$

Como $p(1)$ es verdadera y $p(k) \Longrightarrow p(k+1)$ es verdadera, si $k \in \mathbb{N}$, entonces $p(n)$ es verdadera, cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$, luego

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^{i-1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^{n-1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$