ELEMENTOS DE ÁLGEBRA
(2do cuatrimestre de 2022)

TRABAJO PRÁCTICO N°7: Matrices

---

1. Construir matrices bajo las siguientes condiciones

   a) $A = (a_{ij}) \in M_2(\mathbb{R})$ tal que $a_{ij} = 2i^3 + j - 3$

   b) $B = (b_{st}) \in M_3(\mathbb{R})$ definida por $\begin{cases} b_{st} - b_{ts} = 0 & \text{si } s \neq t \\ \dfrac{1}{2}(s+t) & \text{si } s = t \end{cases}$

   c) $C = (c_{ij}) \in M_{4\times 5}(\mathbb{Z})$ que verifica c_{ij} es el resto de dividir $i - 3j$ por 4

   d) $D = (d_{rt}) \in M_{3\times 4}(\mathbb{C})$ tal que $d_{rt} = \begin{cases} i^r + t & \text{si } r \leq t \\ -2ti & \text{si } r > t \end{cases}$

2. Dadas las matrices: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 2 & -10 \\ 3 & 4 \\ 0 & 22 \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

   a) Indicar el orden de cada una de ellas.

   b) Explicar por qué se pueden realizar los cálculos que se detallan a continuación e indicar el orden de la matriz resultante.

   $$4A, \quad -2B - D, \quad AB, \quad AB + D, \quad -3CD, \quad ABC, \quad A^2$$

   c) Justificar por qué no es posible realizar las siguientes operaciones.

   $$3A + B, \quad BD, \quad BC - D, \quad , (2C)^2$$

3. Dadas las siguientes matrices con elementos en $\mathbb{C}$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1/2 & -1 \\ 5 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 1/4 & 0 & -3 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 4 & -5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 3 & 1+i & 1-i & 4 \\ 0 & -i & 0 & 2i \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -i & 3 \end{bmatrix}$$

   a) De las siguientes operaciones, resolver las que sean posibles:

   $$\frac{1}{3}C, \quad 3(A - 2B), \quad E + 2D, \quad AC, \quad CB, \quad GD, \quad H - FC, \quad (FC)^2$$

   b) Considerando las matrices A, B, E y H dadas, analizar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justificar las respuetas

      i) $\forall X \in M_2(\mathbb{R}) : \; XE = EX.$

      ii) $\exists X \in M_2(\mathbb{R}) / XH - HX = 0.$

      iii) $\forall Y \in M_{4\times n}(\mathbb{Z}) : 8(A + B)Y = 8AY + 8BY.$

4. Sean $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

   Hallar, en caso de ser posible.

   a) la matriz X tal que $X - 2B = 3X + C$

   b) $x, y, z \in \mathbb{R}$ tales que $A \begin{bmatrix} x & -3 & z \\ 0 & y & 0 \end{bmatrix} = B$

   c) las matrices $Z = (z_{ij}), z_{ij} \in \mathbb{R}\ \forall i, j$ tales que $Z + \frac{1}{3}A^2 = I + \frac{1}{3}Z + kA$ y $|z_{11} + z_{12}| > -3z_{22}$

5. Decir si las siguiente afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando las respuestas.

   a) $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}) :\ AB = 0 \implies A = 0 \vee B = 0$

   b) $\exists A \in M_n(\mathbb{R}) \,/\, A \neq 0 \wedge A \neq I \wedge A^2 = A$

   c) $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}) :\ (AB)^2 = A^2B^2$

   d) $\exists A, B \in M_n(\mathbb{R}) \,/\, (A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

   e) $\forall A \in M_n(\mathbb{R}) :$ (A es escalar $\implies$ A es diagonal)

   f) $\forall A \in M_n(\mathbb{R}) :$ (A es diagonal $\implies$ A es escalar)

   g) $\forall A \in M_n(\mathbb{R}) :$ (A es triangular inferior y triangular superior $\implies$ A es escalar)

   h) $\forall A \in M_n(\mathbb{R}) :$ (A es diagonal $\implies$ A es triangular superior y triangular inferior)

   i) $\exists A \in M_n(\mathbb{R}) \,/\, A \neq 0 \wedge A \neq I \wedge A^t = A$

6. Sabiendo que $BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $E^tD = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Hallar todos los valores reales x e y tales que

$$[x^2(A^tB^t) + y^2D^tE]^t = I + 3BA$$

7. Analizar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justificar cada uno de los razonamientos.

   a) $\exists X \in M_2(R) \,/\, X$ es simétrica y $-4X \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -20 \\ -12 & -16 \end{bmatrix}$

   b) $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}) :$ (A es escalar $\implies$ $AB = BA$)

   c) $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}) :$ (A es diagonal $\implies$ $(AB)^t = B^tA$)

   d) $\forall n \in \mathbb{N} :\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

8. Dadas las siguientes matrices: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$

   Obtener en cada uno de los casos, si existe, la matriz inversa.

9. Dadas las matrices A y B del ejercicio anterior, hallar X tal que:

   a) $AX - 2I_3 = B$
   b) $(XA)^t - 2I_3 = B^t$
   c) $AX - 3I_3 = 2(AB - X)$
   d) $X(D^{-1}A)^{-1} + 2BD^t = 3BD$, con $D \in M_3(\mathbb{R})$ matriz diagonal e inversible.
   e) $X\left[(A+E)^2 - [(2EA^t)^t + (E^t)^2]\right]A^{-1} = BA$, con $E \in M_3(\mathbb{R})$ matriz escalar

10. Considerando que las matrices X, A y B tienen los órdenes adecuados para realizar las operaciones que sean necesarias, que X y B son matrices inversibles y dada la siguiente ecuación matricial:

$$(X^{-1}B)^{-1} + 2BA^t = (3AB^t)^t$$

al despejar X se obtiene

   a) $X = B^{-1}5BA^t$
   b) $X = BA^tB$
   c) $X = B^2A^t$
   d) $X = B(3A^tB - 2BA^t)$
   e) Ninguna de las anteriores