Sistemas de ecuaciones lineales

Elementos de Álgebra
Segundo Cuatrimestre 2022

Mg. María del Carmen Vannicola

Facultad de Informática
Departamento de Matemática

Ecuación lineal - Definición

Definición

Una **ecuación lineal** *o de* **primer orden** *con "n" incógnitas* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *es una expresión de la forma*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b \quad (1)$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}$.

A los elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ se los llama **coeficientes** de la ecuación y a "b" se lo denomina **término independiente**. Si $b = 0$ la ecuación se dice **homogénea**

Son ejemplos de ecuaciones lineales

$$2x + 3y - z = 0 \quad \text{y} \quad -x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 - x_3 + 2x_4 - 3 = 0$$

La primera de estas ecuaciones es homogénea, mientras que la segunda no lo es, pues tiene término independiente 3

Las ecuación $x^2 + y = 1$ y $x^3 - 3x^2 + 5 = 0$ no son una ecuaciones lineales

Ecuación lineal - Solución

Definición

Se llama **solución de la ecuación lineal**

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b \qquad (1)$$

a toda n−úpla $(k_1, k_2, \ldots, k_n) \in \mathbb{R}^n$ *cuyos elmentos reemplazados ordenadamente en el lugar de las incógnitas* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *convierten a la expresión* (1) *en una identidad.*

Es decir, $(k_1, k_2, \ldots, k_n) \in \mathbb{R}^n$ es solución de la ecuación (1) si y sólo si

$$a_1k_1 + a_2k_2 + \ldots + a_nk_n = b$$

El **conjunto solución de una ecuación lineal** es el conjunto de todas las soluciones de dicha ecuación lineal, y lo indicaremos con

$$S = \{(k_1, k_2, \ldots, k_n) \in \mathbb{R}^n : \ a_1k_1 + a_2k_2 + \ldots + a_nk_n = b\}$$

Una n-úpla $(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ no es solución de la ecuación lineal (1) si

$$a_1t_1 + a_2t_2 + \ldots + a_nt_n \neq b$$

Ecuación lineal - Ejemplos

1. La ecuación lineal $2x - 4 = 0$ tiene una única solución que es $x = 2$, luego
$$S = \{x \in \mathbb{R} : 2x - 4 = 0\} = \{2\}$$
2. La ecuación $0x = 3$ no posee solución dentro del conjunto de los números reales pues para todo $x \in \mathbb{R}$ se verifica que $0x = 0$. Entonces
$$S = \{x \in \mathbb{R} : 0x = 3\} = \emptyset$$
3. Por lo dicho en el ejemplo anterior
$$S = \{x \in \mathbb{R} :\ 0x = 0\} = \mathbb{R}$$
4. Dada la ecuación lineal de dos incógnitas $-2x + y = 4$,

   el par $(3, 2)$ no es solución de la ecuación pues
$$(-2) \cdot (3) + 2 = -6 + 2 = -4 \neq 4,$$
   el par $(1, 6)$ es solución de la ecuación ya que
$$(-2) \cdot 1 + 6 = -2 + 6 = 4,$$

Ecuación lineal - Ejemplos

El par $(-\frac{1}{2}, 3)$ es solución de la ecuación $-2x + y = 4$, pues

$$(-2) \cdot (-\frac{1}{2}) + 3 = 1 + 3 = 4$$

Despejando la variable y de la ecuación obtenemos $y = 2x + 4$. Y todos los pares ordenados de la forma $(x,\ 2x + 4)$ son solución de la ecuación. Es decir,

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ -2x+y = 4\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ y = 2x+4\} = \{(x,\ 2x+4) : x \in \mathbb{R}\}$$

Definición

Dos ecuaciones lineales se dicen **equivalentes** *si y sólo si tienen el mismo conjunto solución*

Ecuación lineal - Ejemplo

Ejemplo

Analizar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justificar las respuestas

1. *Las ecuaciones* $-2x + 4 = 0$ *y* $\frac{3}{2}x = 3$ *son equivalentes*
2. *Sean* $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ 2x - 3y + z + 1 = 0\}$ *y*
   $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ 2x + z + 1 = 0\}$, *entonces*
   $$S_1 \subseteq S_2 \ \vee \ S_2 \subseteq S_1$$
3. *Existe* $y \in \mathbb{R}$ *tal que*
   $$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ 2x - 3y + z + 1 = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ 2x + z + 1 = 0\}$$
4. $\exists \, y \in \mathbb{R}/$ *las ecuaciones* $2x - 3y + z + 1 = 0$ *y* $2x + z + 1 = 0$ *son equivalentes*

Ecuación lineal - Ejemplo

1. Las ecuaciones $-2x + 4 = 0$ y $\frac{3}{2}x = 3$ son equivalentes

   La proposición es verdadera, ya que los conjuntos solución de las dos ecuaciones coinciden, en efecto,

   $$-2x + 4 = 0 \iff -2x = -4 \iff x = \frac{-4}{-2} \iff x = 2$$

   $$\frac{3}{2}x = 3 \iff x = 3 \cdot \frac{2}{3} \iff x = 2$$

   Entonces

   $$\{x \in \mathbb{R} : \ -2x + 4 = 0\} = \{2\} = \left\{x \in \mathbb{R} : \ \frac{3}{2}x = 3\right\}$$

2. $2x - 3y + z + 1 = 0 \iff z = -2x + 3y - 1$ y

   $2x + z + 1 = 0 \iff z = -2x - 1$, entonces

$$S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 2x - 3y + z + 1 = 0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = -2x + 3y - 1\}$$

$$S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 2x + z + 1 = 0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = -2x - 1\}$$

- ¿Es $S_1 \subseteq S_2$?

$$(x,y,z) \in S_1 \implies z = -2x + 3y - 1 \overset{(1)}{\implies} z = -2x - 1 \implies (x,y,z) \in S_2$$

Para que la implicación (1) sea verdadera, debemos asegurar que $y = 0$ y esto no es verdadero en todos los casos. Luego

$$S_1 \not\subseteq S_2$$

Armemos un contraejemplo que justifique que $S_1 \not\subseteq S_2$

$(1,1,0) \in S_1$ ya que $-2x + 3y - 1 = -2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - 1 = 0 = z$, pero

$(1,1,0) \notin S_2$ ya que $-2x - 1 = -2 \cdot 1 - 1 = -3 \neq 0 = z$, entonces

$$\exists\, (1,1,0) \in \mathbb{R}^3 / \ (1,1,0) \in S_1 \ \wedge \ (1,1,0) \notin S_2$$

Ecuación lineal - Ejemplo

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; 2x - 3y + z + 1 = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; z = -2x + 3y - 1\}$$

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; 2x + z + 1 = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; z = -2x - 1\}$$

- ¿Es $S_2 \subseteq S_1$?

$$(x, y, z) \in S_2 \implies z = -2x - 1 \overset{(2)}{\implies} z = -2x + 3y - 1 \implies (x, y, z) \in S_1$$

La implicación (2) es verdadera, si y sólo si $y = 0$. Como no podemos probar que $y = 0$ entonces

$$S_2 \not\subseteq S_1$$

Armemos el contraejemplo

$(1, 1, -3) \in S_2$ pues $-3 = z = -2 \cdot 1 - 1$, pero

$(1, 1, -3) \notin S_1$ ya que $-2x + 3y - 1 = -2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - 1 = 0 \neq -3 = z$, luego

$$\exists\, (1, 1, -3) \in \mathbb{R}^3 /\ (1, 1, -3) \in S_2 \;\wedge\; (1, 1, -3) \notin S_1$$

Ecuación lineal - Ejemplo

3. Debemos analizar si existe $y \in \mathbb{R}$ tal que

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 2x - 3y + z + 1 = 0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 2x + z + 1 = 0\}$$

Por lo analizado en el inciso anterior probemos que existe $y = 0$ tal que

$$S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 2x - 3y + z + 1 = 0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 2x + z + 1 = 0\} = S_2$$

$$(x,y,z) \in S_1 \iff 2x - 3y + z + 1 = 0 \overset{y=0}{\iff} 2x - 3 \cdot 0 + z + 1 = 0 \iff$$

$$\iff 2x + z + 1 = 0 \iff (x,y,z) \in S_2$$

Luego la proposición es verdadera

4. $\exists\, y \in \mathbb{R}/$ las ecuaciones $2x - 3y + z + 1 = 0$ y $2x + z + 1 = 0$ son equivalentes

Dos ecuaciones son equivalentes si y sólo si los conjuntos solución de dichas ecuaciones son iguales. Esto es lo que probamos en el inciso anterior, entonces estamos en condiciones de asegurar que la proposición es verdadera y la justificación está dada en el item 3.

Definición

Un **sistema de "m" ecuaciones lineales con "n" incógnitas** *es un conjunto finito de "m" ecuaciones de la forma* $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i, \quad 1 \leq i \leq m.$

Esto es,

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right. \qquad (2)$$

Donde $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq i \leq m, \ 1 \leq j \leq n$ y se denominan **coeficientes** y **términos independientes** del sistema respectivamente.

Si $b_i = 0$, para todo $i = 1, 2, \ldots, m$ entonces el sistema se dice **homogéneo**.

Solución de un sistema de ecuaciones lineales

Definición

Se llama **solución de un sistema de ecuaciones lineales** *a toda $n-$úpla $(k_1, k_2, \ldots, k_n) \in \mathbb{R}^n$ que satisface simultáneamente las "m" ecuaciones que componen el sistema.*

El **conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales** es el conjunto de todas las soluciones de dicho sistema de ecuaciones lineales y lo indicaremos con

$$S = \{(k_1, k_2, \ldots, k_n) \in \mathbb{R}^n : \ (k_1, k_2, \ldots, k_n) \text{ satisface } (2)\}$$

Una n-úpla $(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ no es solución del sistema de ecuaciones lineales si existe alguna ecuación "r" tal que

$$a_{r1}t_1 + a_{r2}t_2 + \ldots + a_{rn}t_n \neq b_r$$

Sistema de ecuaciones lineales - Compatibilidad

Si $S = \emptyset$ el sistema (2) no posee ninguna solución y diremos que el sistema es **incompatible** (I).

Si $S \neq \emptyset$ diremos que el sistema es **compatible** (C), es decir, existen soluciones para el sistema (2).

Si S posee un único elemento el sistema es **compatible determinado** (CD), esto es, el sistema (2) tiene una única solución.

Si S tiene un número infinito de elementos el sistema es **compatible indeterminado** (CI), luego el sistema (2) tiene infinitas soluciones.

Si el sistema es homogéneo entonces **siempre es compatible**, ya que la $n-$úpla nula es solución del sistema.

Sistemas de ecuaciones lineales equivalentes

Definición

Dos sistemas de "m" ecuaciones lineales con "n" incógnitas se dicen **equivalentes** *si tienen el mismo conjunto solución.*

Dado un sistema de ecuaciones lineales, aplicando operaciones elementales entre las ecuaciones del sistema obtenemos un sistema equivalente al dado. Las operaciones elementales que podemos realizar entre las ecuaciones son:

1. Intercambiar dos ecuaciones entre sí.
2. Reemplazar una ecuación del sistema por la multiplicación de ella por un escalar no nulo.
3. Reemplazar una ecuación del sistema por la suma de ella misma más un múltiplio escalar de otra.

Ejemplo

Busquemos un sistema equivalente a $\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & -3 \\ x & - & 2y & = & 1 \\ 3x & - & y & = & -2 \end{array}\right.$ *y hallemos su conjunto solución.*

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & -3 \\ x & - & 2y & = & 1 \\ 3x & - & y & = & -2 \end{array}\right. \overset{e_1 \leftrightarrow e_2}{\longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcr} x & - & 2y & = & 1 \\ 2x & + & y & = & -3 \\ 3x & - & y & = & -2 \end{array}\right. \overset{e_2 \leftrightarrow e_2 - 2e_1}{\longleftrightarrow}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & - & 2y & = & 1 \\ & & 5y & = & -5 \\ 3x & - & y & = & -2 \end{array}\right. \overset{e_3 \leftrightarrow e_3 - 3e_1}{\longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcr} x & - & 2y & = & 1 \\ & & 5y & = & -5 \\ & & 5y & = & -5 \end{array}\right. \overset{e_3 \leftrightarrow e_3 - e_2}{\longleftrightarrow}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & - & 2y & = & 1 \\ & & 5y & = & -5 \end{array}\right. \overset{e_2 \leftrightarrow \frac{1}{5} e_2}{\longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcr} x & - & 2y & = & 1 \\ & & y & = & -1 \end{array}\right. \overset{e_1 \leftrightarrow e_1 + 2e_2}{\longleftrightarrow}$$

$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & & & = & -1 \\ & & y & = & -1 \end{array}\right.$ Este último sistema es equivalente al dado y el conjunto solución es múy simple de obtener, luego el sistema original tiene como conjunto solución $S = \{(-1, -1)\}$

Matriz ampliada de un sistema de ecuaciones lineales

En el sistema del ejemplo anterior podemos observar que las operaciones elementales que aplicamos entre las ecuaciones, sólo modifican los coeficientes del sistema y los términos independientes del mismo. Por este motivo vamos a considerar la siguiente matriz.

El sistema (2) puede representarse por medio de la **matriz ampliada** del sistema que está formada por los coeficientes y los términos independientes del sistema.

$$A' = A_a = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Hacer operaciones elementales con las ecuaciones del sistema es equivalente a hacer **operaciones elmentales de filas** en la matriz ampliada del sistema.

Matriz escalonada y escalonada reducida

Definición

Sea $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$. Se dice que A está en forma **escalonada** *si verifica simultáneamente las siguientes tres condiciones:*

1. *Las filas que constan exclusivamente de ceros, si las hubiese, se agrupan todas en la parte inferior de la matriz.*
2. *Si una fila no consta exclusivamente de ceros, el primer elemento no nulo de dicha fila (leyendo de izquierda a derecha) es un uno. A este elemento se lo conoce como pivote.*
3. *Para dos filas consecutivas que no consten exclusivamente de ceros, el uno de la fila superior se encuentra a la izquierda del uno de la fila inferior.*

Definición

Sea $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$. Se dice que A está en forma **escalonada reducida** *si A está en forma escalonada y además satisface*

4. *Cada columna que posee un número uno como primer elemento de una fila no nula, tiene en el resto de los lugares de la columna ceros.*

Matriz escalonada y escalonada reducida - Ejemplos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A no verifica la primera condición, ya que posee la segunda fila nula y no es la última fila de la matriz.

A verifica la condición 2, pues la fila 1 y la fila 3 no son nulas y el primer elemento distinto de cero es un uno.

A verifica la condición 3, porque no hay dos filas consecutivas que consten exclusivamente de ceros.

A no verifica 4, ya que a_{32} es el pivote de la fila 3 y el resto de los elementos de la columna 2 no son todos nulos.

Luego, la matriz A no está en forma escalonada y por ende tampoco está en forma escalonada reducida.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

B verifica la primera condición, ya que posee una fila de ceros y es la última fila de la matriz.

B verifica la condición 2, pues la fila 1 y la fila 2 son no nulas y el primer elemento distinto de cero de cada una de ellas es un uno.

Matriz escalonada y escalonada reducida - Ejemplos

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

B verifica la condición 3, porque la fila 1 y la fila 2 son dos filas consecutivas que no constan exclusivamente de ceros. Y el pivote de la fila 1 se encuentra a la izquierda del pivote de la fila 2, ya que uno está ubicado en el lugar b_{11} y el otro en el lugar b_{22}

B no verifica 4, ya que a_{22} es el pivote de la fila 2 y el resto de los elementos de la columna 2 no son todos nulos.

La matriz B está en forma escalonada pero no está en forma escalonada reducida.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz C está en forma escalonada reducida pues

la única fila que es nula, está en la parte inferior de la matriz,

la primera fila comienza con un uno, que es el pivote,

como no hay dos filas consecutivas que no constan exclusivamente de ceros, se verifica la tercera condición y

el lugar $c_{11} = 1$ es el pivote de la primera fila y el resto de los elementos de la primera columna son ceros.

Matriz escalonada y escalonada reducida - Ejemplos

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

D no tiene filas nulas entonces verifica la primera condición.

El primer elemento no nulo de cada una de las filas es un uno, por este motivo verifica la condición 2.

No verifica la condición 3, porque las filas 2 y 3 son consecutivas pero el pivote de la fila 2 está a la derecha del pivote de la fila 3.

Como la matriz D no verifica la tercera condición entonces no es escalonada y tampoco es escalonada reducida.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

E tiene dos filas nulas y se encuentran en la parte inferior de la matriz, entonces verifica la primera condición.

El primer elemento no nulo de cada una de las filas que no constan exclusivamente de ceros es un uno, luego se verifica la condición 2.

Verifica la condición 3, porque las filas 1 y 2 son consecutivas y el pivote de la fila 1 que es el elemento e_{11} se encuentra a la izquierda del pivote de la fila 2. Lo mismo ocurre con las filas 2 y 3 ya que los pivotes son los elementos e_{23} y e_{34}.

Como la matriz E también verifica la cuarta condición porque para cada columna que posee un número uno como primer elemento de una fila no nula (las columnas 1, 3 y 4), tiene en el resto de los lugares de la columna ceros. Entonces E es escalonada reducida.

Método de eliminación de Gauss

Dado un sistema de ecuaciones lineales, el **método de eliminación de Gauss** nos permite obtener un sistema equivalente al dado, de rápida resolución. Para ello procedemos de la siguiente manera:

- Dado un sistema de "m" ecuaciones lineales con "n" incógnitas. Consideramos la matriz ampliada del sistema A_a.
- Buscamos una matriz B escalonada equivalente por filas a la matriz ampliada A_a.
- Por medio de la matriz B construimos un nuevo sistema de ecuaciones, equivalente al original.
- Buscamos el conjunto solución en el sistema equivalente al dado.

Ejemplo

Aplicar el método de eliminación de Gauss para encontrar el conjunto solución del sistema
$$\begin{cases} x+y+3z &= 2 \\ y+z &= -1 \\ 2x+y+5z &= 5 \end{cases}$$

$$A_a = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 5 & 5 \end{array}\right] \xleftrightarrow{f_3 \leftrightarrow f_3 - 2f_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xleftrightarrow{f_3 \leftrightarrow f_3 + f_2}$$

$$\longleftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Luego el sistema original es equivalente a $\begin{cases} x+y+3z &= 2 \\ y+z &= -1 \end{cases}$. Busquemos el conjunto solución en este nuevo sistema.

Despejando y de la segunda ecuación, tenemos $y = -1 - z$.

Reemplazando en la primera ecuación

$$x + (-1 - z) + 3z = 2 \iff x - 1 + 2z = 2 \iff x = 3 - 2z$$

Luego el conjunto solución del sistema es:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x = 3 - 2z \ \wedge \ y = -1 - z\}$$

$$S = \{(3 - 2z, -1 - z, z) : z \in \mathbb{R}\}$$

Observemos que el sistema de ecuaciones tiene infinitas soluciones, es decir, es CI.

Método de eliminación de Gauss - Ejemplos

Verifiquemos que las soluciones obtenidas son correctas

$$\begin{cases} x+y+3z &= 2 \\ y+z &= -1 \\ 2x+y+5z &= 5 \end{cases} \quad \text{y} \quad S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x=3-2z\ \wedge\ y=-1-z\}$$

- $x+y+3z=(3-2z)+(-1-z)+3z=2-2z-z+3z=2$,

  esto asegura que se verifica la primera ecuación del sistema

- $y+z=(-1-z)+z=-1$, verificamos así la segunda ecuación del sistema

- $2x+y+5z=2(3-2z)+(-1-z)+5z=6-4z-1-z+5z=5-5z+5z=5$,

  de esta manera probamos que las soluciones encontradas verifican la tercera ecuación

Método de Gauss-Jordan

Dado un sistema de ecuaciones lineales, el **método de Gauss-Jordan** nos permite obtener un sistema equivalente al dado, de rápida resolución. Para ello procedemos de la siguiente manera:

- Dado un sistema de "m" ecuaciones lineales con "n" incógnitas.

  Consideramos la matriz ampliada del sistema A_a.

- Buscamos una matriz B escalonada reducida equivalente por filas a la matriz ampliada A_a.

- Por medio de la matriz B construimos un nuevo sistema de ecuaciones, equivalente al original.

- Buscamos el conjunto solución en el sistema equivalente al dado.

Método de Gauss-Jordan - Ejemplo

Ejemplo

Dado el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rcr} x - y + 3z & = & -1 \\ y + 2z & = & 2 \\ x - 3y - 2z & = & 4 \end{array}\right.$$

Hallar el conjunto solución, verificar que el conjunto solución es correcto e indicar la compatibilidad del sistema.

$$A' = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & -2 & 4 \end{array}\right] \overset{f_3 \leftrightarrow f_3 - f_1}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -5 & 5 \end{array}\right] \overset{f_3 \leftrightarrow f_3 + 2f_2}{\longleftrightarrow}$$

$$\longleftrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 9 \end{array}\right] \overset{f_3 \leftrightarrow -f_3}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \end{array}\right] \longleftrightarrow$$

Método de Gauss-Jordan - Ejemplo

$$\longleftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \end{array}\right] \xleftrightarrow{f_2 \leftrightarrow f_2 - 2f_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \end{array}\right] \xleftrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_1 - 3f_3}$$

$$\longleftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 26 \\ 0 & 1 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \end{array}\right] \xleftrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_1 + f_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 46 \\ 0 & 1 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \end{array}\right]$$

El sistema es compatible determinado y el conjunto solución es $S = \{(46,\ 20,\ -9)\}$.

Verificación:

- $x - y + 3z = 46 - 20 + 3(-9) = 26 - 27 = -1$
- $y + 2z = 20 + 2(-9) = 20 - 18 = 2$
- $x - 3y - 2z = 46 - 3 \cdot 20 - 2(-9) = 46 - 60 + 18 = 4$

Método de Gauss-Jordan - Ejemplo

Ejemplo

Para el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} -x+2y+z & = & 1 \\ 2y+4z & = & -1 \\ 2x-y+2z & = & -3 \\ x+y+z & = & 1 \end{cases}$$

hallar el conjunto solución e indicar la compatibilidad del mismo

$$A' = \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xleftrightarrow{f_1 \leftrightarrow -f_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xleftrightarrow{f_3 \leftrightarrow f_3 - 2f_1}$$

$$\longleftrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xleftrightarrow{f_4 \leftrightarrow f_4 - f_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right] \longleftrightarrow$$

Método de Gauss-Jordan - Ejemplo

$$\longleftrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right] \xleftrightarrow{f_2 \leftrightarrow \frac{1}{2} f_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1/2 \\ 0 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right] \xleftrightarrow{f_3 \leftrightarrow f_3 - 3f_2}$$

$$\longleftrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1/2 \\ 0 & 0 & -2 & 1/2 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right] \xleftrightarrow{f_4 \leftrightarrow f_4 - 3f_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1/2 \\ 0 & 0 & -2 & 1/2 \\ 0 & 0 & -4 & 7/2 \end{array}\right] \xleftrightarrow{f_4 \leftrightarrow f_4 - 2f_3}$$

$$\longleftrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1/2 \\ 0 & 0 & -2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 \end{array}\right]$$

La última fila de la matriz ampliada se traduce en la ecuación lineal

$$0z = \frac{5}{2}$$

y esto muestra que el sistema es incompatible. Luego $S = \emptyset$

Método de Gauss-Jordan - Ejemplo

Ejemplo

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones, utilizando el método de Gauss-Jordan.

$$\left\{\begin{array}{rcr} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 & = & -1 \\ -x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 & = & -3 \\ \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 & = & -1 \\ x_3 - x_4 & = & 2 \end{array}\right.$$

Sea S el conjunto solución del sistema. Analizar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justificar.

1. $(-13,\, -5,\, 1,\, -1) \in S \implies (-3,\, 2,\, 0,\, -2) \in S$
2. $S = \{(-10x_3 - 3,\, -3x_3 - 2,\, x_3,\, x_3 - 2) : \; x_3 \in \mathbb{R}\}$
3. $\forall\, k \in \mathbb{R} : \exists\, a \in \mathbb{R} /\ (-3 - 10k,\, -2 - 3k,\, k,\, a + k) \in S$
4. *Es posible agregarle al sistema dado una nueva ecuación con coeficientes todos no nulos y de manera tal que cambie la compatibilidad del sistema original*

Método de Gauss-Jordan - Ejemplo

$$A_a = \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \xleftrightarrow{f_2 \leftrightarrow f_2 + f_1} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 6 & 0 & -4 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \longleftrightarrow$$

$$\xleftrightarrow{f_2 \leftrightarrow \frac{1}{2} f_2} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \xleftrightarrow{f_3 \leftrightarrow f_3 - \frac{1}{2} f_2} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \xleftrightarrow{f_3 \leftrightarrow f_4}$$

$$\longleftrightarrow \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xleftrightarrow{f_2 \leftrightarrow f_2 - 3f_3} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xleftrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_1 - 3f_3}$$

$$\longleftrightarrow \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 0 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xleftrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_1 + 2f_2} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 10 & -23 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Método de Gauss-Jordan - Ejemplos

El sistema equivalente al dado que hemos encontrado es

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + 10x_4 & = & -23 \\ x_2 + 3x_4 & = & -8 \\ x_3 - x_4 & = & 2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & -23 - 10x_4 \\ x_2 & = & -8 - 3x_4 \\ x_3 & = & 2 + x_4 \end{array}\right.$$

Luego el sistema tiene infinitas soluciones, es decir es CI y el conjunto de soluciones está dado por:

$$S = \{(-23 - 10x_4,\ -8 - 3x_4,\ 2 + x_4,\ x_4) :\ x_4 \in \mathbb{R}\}$$

$$S = \{(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) \in \mathbb{R}^4 :\ x_1 = -23 - 10x_4\ \wedge\ x_2 = -8 - 3x_4\ \wedge\ x_3 = 2 + x_4\}$$

Anlicemos el valor de verdad de las proposiciones

1. $(-13,\ -5,\ 1,\ -1) \in S \implies (-3,\ 2,\ 0,\ -2) \in S$

$(-13,\ -5,\ 1,\ -1) \in S$ es verdadero porque si $x_4 = -1$ entonces

$$(-23 - 10x_4,\ -8 - 3x_4,\ 2 + x_4,\ x_4) = (-23 - 10(-1),\ -8 - 3(-1),\ 2 + (-1),\ -1) =$$

$$= (-13,\ -5,\ 1,\ -1)$$

$(-3,\,2,\,0,\,-2) \in S$ es falso, ya que si $x_4 = -2$ entonces

$$(-23-10x_4,\ -8-3x_4,\ 2+x_4,\ x_4) = (-23-10(-2),\,-8-3(-2),\,2+(-2),\ -2) =$$
$$= (-3,\,-2,\,0,\,-2) \neq (-3,\,2,\,0,\,-2)$$

Como la proposición $(-13,\,-5,\,1,\,-1) \in S$ es verdadera y la proposición es $(-3,\,2,\,0,\,-2) \in S$ es falsa entonces

la proposición $(-13,\,-5,\,1,\,-1) \in S \implies (-3,\,2,\,0,\,-2) \in S$ es falsa

2. $S = \{(-10x_3 - 3,\ -3x_3 - 2,\ x_3,\ x_3 - 2):\ x_3 \in \mathbb{R}\}$

Observemos que dimos el conjunto,solución en función de la variable x_4 y nos piden que lo expresemos, en caso de ser verdadero, en función de la variable x_3.

Tenemos dos caminos para hacerlo. Podemos considerar

$$x_1 = -10x_3 - 3, \quad x_2 = -3x_3 - 2, \quad x_4 = x_3 - 2$$

reemplazar en las cuatro ecuaciones del sistema y ver si se verifican todas las ecuaciones simultáneamente. (Como lo hicimos en la página 24 de esta presentación)

Método de Gauss-Jordan - Ejemplo

Si todas las ecuaciones se verifican, la proposición es verdadera y en caso que alguna de las ecuaciones no se verifique la proposición será falsa.

Vamos a plantear un camino diferente al anterior. Tomamos el conjunto solución que encontramos utilizando el método de Gauss-Jordan

$$S = \{(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) \in \mathbb{R}^4 :\ x_1 = -23 - 10x_4\ \wedge\ x_2 = -8 - 3x_4\ \wedge\ x_3 = 2 + x_4\}$$

De la identidad $x_3 = 2 + x_4$ despejamos x_4 en función de x_3 entonces

$$x_4 = x_3 - 2$$

Reemplazando x_4 en x_1 y x_2 obtenemos

$x_1 = -23 - 10x_4 = -23 - 10(x_3 - 2) = (-23 + 20) - 10x_3 = -3 - 10x_3$

$x_2 = -8 - 3x_4 = -8 - 3(x_3 - 2) = (-8 + 6) - 3x_3 = -2 - 3x_3$

Luego

$$S = \{(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) \in \mathbb{R}^4 :\ x_1 = -3 - 10x_3\ \wedge\ x_2 = -2 - 3x_3\ \wedge\ x_4 = x_3 - 2\}$$

entonces la proposición es verdadera

3. $\forall\, k \in \mathbb{R} : \exists\, a \in \mathbb{R} /\ (-3-10k,\ -2-3k,\ k,\ a+k) \in S$

Si $(-3-10k,\ -2-3k,\ k,\ a+k) \in S$ entonces

$$x_4 = a + k$$

Veamos si existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $x_3 = k$ entonces

$x_3 = 2 + (a+k) = (2+a) + k = k \iff 2 + a = 0 \iff a = -2$

Verifiquemos que si $a = -2$ entonces $x_1 = -3 - 10k$ y $x_2 = -2 - 3k$

$x_1 = -23 - 10x_4 = -23 - 10(a+k) = -23 - 10(-2+k) = -23 + 20 - 10k = -3 - 10k$

$x_2 = -8 - 3x_4 = -8 - 3(a+k) = -8 - 3(-2+k) = -8 + 6 - 3k = -2 - 3k$

La proposición es verdadera pues

$$\forall\, k \in \mathbb{R} : \exists\, a \in \mathbb{R},\ a = -2 /\ (-3-10k,\ -2-3k,\ k,\ a+k) \in S$$

4. Es posible agregarle al sistema dado una nueva ecuación con coeficientes todos no nulos y de manera tal que cambie la compatibilidad del sistema original

Esta proposición es verdadera, por ejemplo

si agregamos la ecuación $x_1 - \frac{3}{2}x_2 + \frac{9}{2}x_3 + x_4 = -1$ el nuevo sistema

$$\left\{\begin{array}{rcr} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 & = & -1 \\ -x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 & = & -3 \\ \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 & = & -1 \\ x_3 - x_4 & = & 2 \\ x_1 - \frac{3}{2}x_2 + \frac{9}{2}x_3 + x_4 & = & -1 \end{array}\right. \quad \text{es incompatible}$$

si agregamos la ecuación $x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2$ el nuevo sistema

$$\left\{\begin{array}{rcr} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 & = & -1 \\ -x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 & = & -3 \\ \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 & = & -1 \\ x_3 - x_4 & = & 2 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 & = & 2 \end{array}\right. \quad \text{es compatible determinado}$$

La justificación de estas dos afirmaciones se deja como ejercicio