Lógica proposicional

Elementos de Álgebra
Segundo Cuatrimestre 2022

Mg. María del Carmen Vannicola

Facultad de Informática
Departamento de Matemática

Definición

La ***lógica*** *es una ciencia formal que estudia la estructura o formas del pensamiento humano (como proposiciones, conceptos y razonamientos) para establecer leyes y principios válidos para obtener criterios de verdad.*

Como adjetivo, "lógico" o "lógica" significa que algo sigue las reglas de la lógica y de la razón. Indica también una consecuencia esperable, natural o normal. Se utiliza también para referirse al llamado "sentido común".

Procede del latín *logĭca*, y a su vez del griego "$\lambda o\gamma\iota\kappa\eta$" (logiké, "que posee razón", "intelectual", "dialéctico", "argumentativo"), que a su vez deriva de la palabra $\lambda o\gamma o\varsigma$ (logos, "palabra", "pensamiento", "razón", "idea", "argumento").

Definición

La ***lógica proposicional*** *es la rama de la lógica que estudia las proposiciones, las variables proposicionales, los conectivos lógicos (negación, conjunción, disyunción, implicación, equivalencia), los cuantificadores (para todo, para algún).*

Algunos autores también la identifican con la lógica matemática o la lógica simbólica, ya que utiliza una serie de símbolos especiales que la acercan al lenguaje matemático.

Proposiciones simples

Definición

Una **proposición** *es una oración respecto de la cual se puede decir si es verdadera o falsa, pero no ambas simultáneamente.*

Son ejemplos de proposiciónes

- Jorge Luis Borges falleció en Buenos Aires.
- A nuestra galaxia, la "via láctea", se la epresenta por una espiral.
- El polinomio $P(x) = x^3 - 3x^2 + 5$ tiene tres raíces reales

No son proposiciones

- ¿Es EL Aleph un cuento de Borges?
- ¡Qué desastre!
- a es un número de cuatro cifras

Valores de verdad

Definición

La verdad y falsedad son los **valores de verdad** *de una proposición.*

Definición

Una proposición se dice **simple** *si tiene un sujeto y un predicado, en el sentido gramatical.*

Notación:

- Proposiciones simples: las indicaremos con letras minúsculas $p, \ q, \ r, \ s, \ldots$
- Valor de verdad de una proposición p : $v(p)$
- Proposición verdadera: V o 1, es decir, $v(p) = V$ o $v(p) = 1$
- Proposición falsa: F o 0, es decir, $v(p) = F$ o $v(p) = 0$

Usando proposiciones simples y los conectivos lógicos crearemos nuevas proposiciones denominadas **proposiciones compuestas**

Conectivos lógicos

Conectivo	Símbolo	Traducción
Negación	$\sim \quad \neg$	$\sim p$: no p
Conjunción	$\wedge$	$p \wedge q$: p y q
Disyunción	$\vee$	$p \vee q$: p o q
Implicación o Condicional	$\Longrightarrow$	$p \Longrightarrow q$: si p entonces q
Equivalencia o Doble implicación	$\Longleftrightarrow$	$p \Longleftrightarrow q$: p si y sólo si q

$p \Longrightarrow q$ se traduce también como: si p, q o p implica q o q si p.

$p \Longleftrightarrow q$ se traduce: p es equivalente q o p equivale a q o p y q son equivalentes.

Ejemplo

Dadas las proposiciones simples p : 900 *es un número par* *y* q : $-900+1$ *es un número par. Traducir al lenguaje coloquial las proposiciones compuestas que se indican a continuación.*

1. $\sim p$: 900 no es un número par

   $\sim p$: 900 es un número impar.

2. $p \wedge q$: 900 es un número par y $-900+1$ es un número par

   $p \wedge q$: 900 y $-900+1$ son números pares.

3. $(\sim p) \vee q$: 900 es un número impar o $-900+1$ es un número par.

4. $p \Longrightarrow (\sim q)$: si 900 es par entonces $-900+1$ no lo es.

5. $p \Longleftrightarrow q$: 900 es par si y sólo si $-900+1$ lo es.

Conectivos lógicos - Ejemplos

Ejemplo

Expresar las proposiciones compuestas que se indican a continuación, por medio de proposiciones simples y conectivos lógicos.

1. *Un circuito eléctrico resistivo es un circuito que contiene resistencias, fuentes de voltaje y corriente.*
2. *Un diagrama de flujo es la representación gráfica de un algoritmo o proceso.*
3. *Si Juan es alumno de Elementos de Álgebra entonces está inscripto en la carrera de Licenciatura en Ciencias de la Computación*

1. p : un circuito eléctrico resistivo es un circuito que contiene resistencias.

   q : un circuito eléctrico resistivo es un circuito que contiene fuentes de voltaje.

   r : un circuito eléctrico resistivo es un circuito que contiene corriente.

   $p \wedge q \wedge r$: un circuito eléctrico resistivo es un circuito que contiene resistencias, fuentes de voltaje y corriente.

Conectivos lógicos - Ejemplos

2. p : un diagrama de flujo es la representación gráfica de un algoritmo.

   q : un diagrama de flujo es la representación gráfica de un proceso.

   $p \vee q$: un diagrama de flujo es la representación gráfica de un algoritmo o proceso.

3. t : Juan es alumno de Elementos de Álgebra.

   h : Juan está inscripto en la carrera de Licenciatura en Ciencias de la Computación.

   $t \Longrightarrow h$: si Juan es alumno de Elementos de Álgebra entonces está inscripto en la carrera de Licenciatura en Ciencias de la Computación.

   $t \Longrightarrow h$: si Juan es alumno de Elementos de Álgebra, él está inscripto en la carrera de Licenciatura en Ciencias de la Computación.

   $t \Longrightarrow h$: Juan está inscripto en la carrera de Licenciatura en Ciencias de la Computación, si él es alumno de Elementos de Álgebra.

Tabla de verdad de la negación

La negación cambia el valor de verdad de la proposición original

p	$\sim p$
V	F
F	V

Ejemplo

Dadas las proposiciones:

$$p : \textit{al dividir } 77 \textit{ por } 3 \textit{ obtenemos resto cero} \quad y$$

$$q : \; 77 \textit{ es un número menor a } 100.$$

Hallar el valor de verdad de $\sim p$ *y* $\sim q$.

$v(p) = F$ ya que $77 = 3 \cdot 25 + 2$, es decir, el resto de dividir a 77 por 3 es 2 que es distinto de cero, entonces

$$v(\sim p) = V$$

$v(q) = V$ pues $77 < 100$, luego

$$v(\sim q) = F$$

Tabla de verdad de la conjunción

La conjunción de dos proposiciones es verdadera sólo si las dos proposiciones lo son.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Ejemplo

Determinar el valor de verdad de la proposición compuesta que se enuncia a continuación:

"un algoritmo tiene un número finito de instrucciones y dichas instrucciones no son ambiguas".

r : un algoritmo tiene un número finito de instrucciones, $\quad v(r) = V$

s : las instrucciones de un algoritmo son ambiguas, $v(s) = F$, luego $v(\sim s) = V$

$$v(r \wedge \sim s) = V.$$

Tabla de verdad de la disyunción

La disyunción de dos proposiciones es falsa sólo si las dos proposiciones lo son.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ejemplo

Dadas las proposiciones simples: p : 156 *es un número par y*

q : 156 *es un número primo.*

Hallar el valor de verdad de $p \vee q$, $\sim p \vee q$ *y* $\sim (p \vee q)$.

Como 156 termina en 6 entonces 156 es un número par, luego $v(p) = V$.

Como 156 es divisible por 2, podemos asegurar que no es primo, entonces $v(q) = F$.

$v(p \vee q) = V$, por la segunda línea de la tabla de verdad de la disyunción.

$v(\sim p \vee q) = F$ por la última línea de la tabla de verdad de a disyunción.

$v(\sim (p \vee q)) = F$ pues $v(p \vee q) = V$.

Tabla de verdad de la implicación

En la implicación $p \Longrightarrow q$,

- p se denomina **antecedente** de la implicación
- q se llama **consecuente** de la implicación

La implicación de dos proposiciones es falsa sólo si el antecedente es verdadero y el consecuente es falso.

p	q	$p \Longrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Observemos que, cuando el antecedente es falso la implicación es siempre verdadera, sin importar el valor de verdad del consecuente.

Cuando el antecedente es verdadero debemos saber el valor de verdad del consecuente para determinar el valor de verdad de la implicación.

Tabla de verdad de la implicación - Ejemplo

Ejemplo

Dada la proposición:

> *"si Juan es alumno de Elementos de Álgebra entonces está inscripto en la carrera de Licenciatura en Ciencias de la Computación",*

indicar, justificando la respuesta, el valor de verdad de la misma.

t : Juan es alumno de Elementos de Álgebra.

h : Juan está inscripto en la carrera de Licenciatura en Ciencias de la Computación.

Consideremos que, Juan es alumnos de Elementos de Álgebra pero está inscripto en la carrera Licenciatura en Sistemas de Información. Entonces en este caso

$$v(t) = V, \qquad v(h) = F \qquad y \qquad v(t \Longrightarrow h) = F.$$

En cambio si Juan no es alumno de Elementos de álgebra y está inscripto en la carrera de Licenciatura en Ciencias de la Computación, tenemos

$$v(t) = F, \qquad v(h) = V \qquad y \qquad v(t \Longrightarrow h) = V.$$

Tabla de verdad de la equivalencia

La equivalencia o doble implicación entre dos proposiciones es verdadera sólo si las dos proposiciones tienen el mismo valor de verdad, es decir las dos son verdaderas o las dos son falsas.

p	q	$p \Longleftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Ejemplo

Dadas las proposiciones simples:

$$p: \ -8 \text{ es un número compuesto,}$$
$$q: \ -8 \text{ es divisible por } 3,$$

analizar el valor de verdad de $p \Longleftrightarrow q$, $p \Longleftrightarrow \sim q$ *y* $\sim p \Longleftrightarrow (p \wedge q)$

$v(p) = V$ pues $-8 = 2(-4)$, es decir, es un número compuesto.

$v(q) = F$ ya que si dividimos -8 por 3 obtenemos resto uno que es distinto de cero.

Tabla de verdad de la equivalencia - Ejemplo

$v(p \iff q) = F$ por la segunda fila de la tabla de verdad de la equivalencia.

$v(p \iff \sim q) = V$ ya que $v(\sim q) = V$ y utilizamos la primera línea de la tabla de verdad la equivalencia.

Dado que $v(\sim p) = v(p \wedge q) = F$ entonces $v(\sim p \iff (p \wedge q)) = V$

Ejercicio

Dadas las proposiciones simples:

$$\begin{aligned} p &: \ 47 \ \textit{no es un número par} \\ q &: \ 47 \ \textit{es un número positivo} \\ r &: \ -47 \ \textit{no es un número positivo} \\ s &: \ \sqrt{47} = 6.8 \\ t &: \ 47(-2) + 25 \ \textit{no es positivo} \end{aligned}$$

escribir en lenguaje coloquial las proposiciones compuestas que se enuncian a continuación y analizar el valor de verdad de cada una de ellas, justificando todos los razonamientos.

$\sim p \wedge q, \quad \sim (p \wedge s), \quad \sim p \vee \sim s, \quad \sim s \vee t, \quad s \Longrightarrow t, \quad r \iff [(p \vee q) \wedge \sim t]$

Tautología, Contradicción e Implicaciones asociadas

Definición

Una **tautología** *es una proposición compuesta que siempre es verdadera, sin importar los valores de verdad de las proposiciones simples.*

Definición

Una **contradicción** *es una proposición compuesta que siempre es falsa, sin importar los valores de verdad de las proposiciones simples.*

Definición

Sean p y q proposiciones y consideremos la **implicación directa** $p \Longrightarrow q$ *entonces*

- **Implicación recíproca:** $q \Longrightarrow p$
- **Implicación contraria:** $\sim p \Longrightarrow \sim q$
- **Implicación contrarrecíproca:** $\sim q \Longrightarrow \sim p$

Demostraciones por medio de tablas de verdad

Probemos por tablas de verdad que las implicaciones directa y contrarrecíproca son equivalentes, es decir,

$$(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\sim q \Longrightarrow \sim p)$$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Longrightarrow q$	$\sim q \Longrightarrow \sim p$	$(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\sim q \Longrightarrow \sim p)$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Como en todas las filas, el valor de verdad de la última columna de la tabla es verdadero entonces la tabla asegura que la doble implicación entre las proposiciones directa y contrarrecíproca es una tautología, luego queda demostrada la equivalencia entre ellas.

Se plantea como ejercicio demostrar utilizando tablas de verdad que la implicación recíproca es equivalente a la implicación contraria.

Demostremos que $(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\sim p \vee q)$ y que $\sim (p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (p \wedge \sim q)$ utilizando tablas de verdad

p	q	$\sim p$	$p \Longrightarrow q$	$\sim p \vee q$	$(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\sim p \vee q)$
V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

p	q	$\sim q$	$p \Longrightarrow q$	$\sim (p \Longrightarrow q)$	$p \wedge \sim q$	$\sim (p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (p \wedge \sim q)$
V	V	F	V	F	F	V
V	F	V	F	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	F	F	V

Ejemplo

Sabiendo que q es una proposición verdadera y que r es una proposición falsa, hallar, en caso de ser posible, el valor de verdad de las siguientes proposiciones

$$[\sim (q \vee p) \wedge s] \Longrightarrow s \qquad\qquad (r \vee s) \Longrightarrow (\sim q \wedge s)$$

$$\underbrace{\underbrace{[\underbrace{\sim \underbrace{(\underbrace{q}_{V} \vee p)}_{V}}_{F} \wedge s]}_{F} \Longrightarrow s}_{V}$$

(1)

(2)

(3)

(4)

(5)

Ejemplos

Referencias:

(1) $v(q) = V$ porque es el dato del ejercicio

(2) como una de las proposiciones es verdadera, la disyunción es verdadera, sin importar el valor de verdad de p

(3) la negación de una proposición verdadera es una proposición falsa

(4) para que la conjunción sea verdadera las dos proposiciones que intervienen deben serlo, como una de las proposiciones que forman la conjunción es falsa entonces la conjunción también lo es

(5) el antecedente de la implicación es falso, luego la implicación es verdadera

Ejemplos

$$\underbrace{\underbrace{(\underbrace{r}_{F} \vee s)}_{V \text{ o } F} \Longrightarrow \underbrace{(\underbrace{\sim \underbrace{q}_{V}}_{F} \wedge s)}_{F}}_{F \text{ o } V}$$

(1)
(2)
(3)
(4)

Referencias:

(1) $v(r) = F$ y $v(q) = V$ porque son los dato del ejercicio

(2) la negación de una proposición verdadera es una proposición falsa

(3) el valor de verdad de la proposición $r \vee s$ no se puede asegurar, porque depende del valor de verdad de la proposición s y el valor de verdad de la conjunción $\sim q \wedge s$ es falso porque una de las proposiciones que intervienen en la conjución es falsa

(4) el valor de verdad de la implicación depende del valor de verdad del antecedente, ya que:

si $v(s) = V$ entonces $v(r \vee s) = V$ y la implicación es falsa

si $v(s) = F$ entonces $v(r \vee s) = F$ y la implicación es verdadera

Ejemplos

Ejemplo

Hallar el/los valores de verdad de $[(\sim p \wedge t) \Longrightarrow (p \wedge s)] \wedge (q \Longleftrightarrow r)$, *sabiendo que* $v(p \wedge q) = F$ *y* $v(p \Longrightarrow r) = F$.

Sabemos que $v(p \Longrightarrow r) = F$ entonces la tabla de verdad de la implicación nos asegura que

$$v(p) = V \quad (1) \qquad \text{y} \qquad v(r) = F \quad (2)$$

Como p es verdadera por (1) y $v(p \wedge q) = F$ por hipótesis entonces $v(q) = F$ (3)

$$\underbrace{\underbrace{\Big[\underbrace{\big(\underbrace{\sim \underbrace{p}_{V}}_{F} \wedge t\big)}_{F} \Longrightarrow (p \wedge s)\Big]}_{V} \wedge \underbrace{(\underbrace{q}_{F} \Longleftrightarrow \underbrace{r}_{F})}_{V}}_{V}$$

(4)

(5)

(6)

(7)

(8)

Ejemplos

Referencias:

(4) $v(p) = V$ por (1), $v(q) = F$ por (3), $v(r) = F$ por (2)

(5) la negación de una proposición verdadera es una proposición falsa y como una equivalencia es verdadera cuando las proposiciones que intervienen tienen el mismo valor de verdad entonces $q \Longleftrightarrow r$ es verdadera, ya que $v(q) = v(r)$

(6) una conjunción es falsa si una de las proposiciones lo es y como $v(\sim p) = F$, no importa el valor de verdad de t para asegurar que $\sim p \wedge t$ es falsa

(7) el antecedente de la implicación es falso, luego podemos asegurar que la implicación es verdadera, sin conocer el valor de verdad del consecuente

(8) la conjunción es verdadera pues las dos proposiciones que la determinan lo son

Ejemplo

Hallar el valor de verdad de las proposiciones simples que forman la siguiente proposición compuesta, sabiendo que dicha proposición compuesta es falsa

$$[(\sim p \wedge t) \iff r] \vee [(\sim p \implies q) \implies r]$$

$$\underbrace{\underbrace{[\,\underbrace{(\underbrace{\sim \underbrace{p}_{F}}_{V} \wedge \underbrace{t}_{V})}_{V} \iff \underbrace{r}_{F}\,]}_{F} \vee \underbrace{[\,\underbrace{(\underbrace{\sim p}_{V} \implies \underbrace{q}_{V})}_{V} \implies \underbrace{r}_{F}\,]}_{F}}_{F}$$

(1)

(2)

(3)

(4)

(5)

(6)

(7)

Ejemplos

Los valores de verdad de las proposiciones simples son

$$v(p) = F \quad v(q) = V \quad v(r) = F \quad v(t) = V \quad o \quad v(t) = F$$

Referencias:

(1) por el dato dado en el enunciado del ejercicio

(2) una disyunción es falsa sólo cuando las dos proposiciones que intervienen son falsas

(3) una implicación es falsa cuando el antecedente es verdadero y el consecuente es falso, es decir, $\sim p \Longrightarrow q$ es verdadero y r es falso

(4) como la equivalencia es falsa, los valores de verdad de $(\sim p \wedge t)$ y r deben ser distintos, entonces $v(\sim p \wedge t) = V$ ya que $v(r) = F$

(5) la conjunción es verdadera cuando las dos proposiciones que la determinan lo son

(6) la negación de un proposición verdadera es una proposición falsa

(7) como la implicación $(\sim p \Longrightarrow q)$ es verdadera y el antecedente también lo es entonces el consecuente es verdadero

Implicaciones lógicas

En las implicaciones lógicas y en las equivalencias lógicas "t" indica una tautología y "c" indica una contradiccion

1. Adición: $p \Longrightarrow (p \vee q)$
2. Simplificación: $(p \wedge q) \Longrightarrow p$
3. Modus ponens: $[p \wedge (p \Longrightarrow q)] \Longrightarrow q$
4. Modus tollens: $[(p \Longrightarrow q) \wedge \sim q] \Longrightarrow \sim p$
5. Silogismo disyuntivo: $[(p \vee q) \wedge \sim p] \Longrightarrow q$
6. Silogismo hipotético (transitividad de la implicación):

   $[(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow r)] \Longrightarrow (p \Longrightarrow r)$
7. Absurdo: $(p \Longrightarrow c) \Longrightarrow \sim p$

Equivalencias lógicas

1. Doble negación: $\sim(\sim p) \Longleftrightarrow p$

2. Leyes conmutativas: $(p \wedge q) \Longleftrightarrow (q \wedge p)$ (conmutativa de la conjunción)

   $(p \vee q) \Longleftrightarrow (q \vee p)$ (conmutativa de la disyunción)

3. Leyes asociativas: $[(p \wedge q) \wedge r] \Longleftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$ (asociativa de la conjunción)

   $[(p \vee q) \vee r] \Longleftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$ (asociativa de la disyunción)

4. Leyes distributivas: $[p \wedge (q \vee r)] \Longleftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$

   $[p \vee (q \wedge r)] \Longleftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$

5. Leyes de idempotencia: $(p \wedge p) \Longleftrightarrow p$ (idempotencia de la conjunción)

   $(p \vee p) \Longleftrightarrow p$ (idempotencia de la disyunción)

6. Leyes de absorción: $[p \vee (p \wedge q)] \Longleftrightarrow p$

   $[p \wedge (p \vee q)] \Longleftrightarrow p$

Equivalencias lógicas

6. Leyes de De Morgan: $\sim (p \wedge q) \Longleftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$ (negación de la conjunción)

   $\sim (p \vee q) \Longleftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$ (negación de la disyunción)

7. Definición de implicación: $(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\sim p \vee q)$

8. Negación de la Implicación: $\sim (p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (p \wedge \sim q)$

9. Contrarrecíproca: $(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\sim q \Longrightarrow \sim p)$

10. Leyes de identidad: $(p \vee c) \Longleftrightarrow p \quad (p \vee t) \Longleftrightarrow t$

    $(p \wedge c) \Longleftrightarrow c \quad (p \wedge t) \Longleftrightarrow p$

11. Reducción al absurdo: $(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow [(p \wedge \sim q) \Longrightarrow c]$

12. Definición de equivalencia: $(p \Longleftrightarrow q) \Longleftrightarrow [(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow p)]$

Ejemplo

Demostrar que utilizando equivalencias lógicas:

$$\sim (p \Longleftrightarrow q) \Longleftrightarrow [(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)].$$

$$\sim (p \Longleftrightarrow q) \overset{(1)}{\Longleftrightarrow} \sim [(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow p)] \overset{(2)}{\Longleftrightarrow} [\sim (p \Longrightarrow q) \vee \sim (q \Longrightarrow p)] \overset{(3)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Longleftrightarrow [\sim (\sim p \vee q) \vee \sim (\sim q \vee p)] \overset{(4)}{\Longleftrightarrow} [(\sim (\sim p) \wedge \sim q) \vee (\sim (\sim q) \wedge \sim p)] \overset{(5)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Longleftrightarrow [(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)] \overset{(6)}{\Longleftrightarrow} [(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)]$$

Referencias:

(1) Definición de equivalencia (2) De Morgan (negación de la conjunción)

(3) Definición de implicación (4) De Morgan (negación de la disyunción)

(5) Doble negación (6) Conmutativa de la conjunción

Funciones proposicionales. Cuantificadores.

Definición

Una **función proposicional** *es una proposición que depende de una o más variables.*

Son ejemplos de funciones proposicionales

- $p(x)$: x es un número positivo
- $q(x)$: x o $-x$ es un número mayor que dos
- $r(x,y)$: si $x < 0$ entonces $x \cdot y > 0$

Consideremos que x recorre un **universo** o un **dominio** $\mathcal{U}$ y construimos las proposiciones

$$\forall x \in \mathcal{U} : p(x) \qquad \exists\, x \in \mathcal{U} / p(x)$$

Estos nuevos símbolos se denominan **cuantificador universal** y **cuantificador existencial** respectivamente.

Cuantificadores. Valores de verdad.

Las proposiciones cuantificadas se traducen

- $\forall x \in \mathcal{U} : p(x)$: para todo (cada) x perteneciente al dominio $\mathcal{U}$ se verifica la proposición $p(x)$.
- $\forall x \in \mathcal{U} : p(x)$: cualquiera sea x en el dominio $\mathcal{U}$ se satisface la proposición $p(x)$.
- $\exists\, x \in \mathcal{U}/p(x)$: existe x perteneciente al dominio $\mathcal{U}$ tal que se verifica $p(x)$.
- $\exists\, x \in \mathcal{U}/p(x)$: para algún x en el dominio $\mathcal{U}$ se satisface $p(x)$.

Valores de verdad de las proposiciones cuantificadas

- $\forall x \in \mathcal{U} : p(x)$: es verdadera si $p(x)$ es verdadera para cada uno de los elementos x pertenecientes al universo $\mathcal{U}$.
- $\forall x \in \mathcal{U} : p(x)$: es falsa si por lo menos existe un elemento $x \in \mathcal{U}$ donde la proposición $p(x)$ es falsa.
- $\exists\, x \in \mathcal{U}/p(x)$: es verdadera si hay como mínimo un elemento x en el dominio $\mathcal{U}$ tal que $p(x)$ sea verdadera para ese elemento.
- $\exists\, x \in \mathcal{U}/p(x)$: es falsa si $p(x)$ es falsa para todos los elementos x en el dominio $\mathcal{U}$.

Cuantificadores. Valores de verdad

Analicemos los valores de verdad de las siguientes proposiciones cuantificadas.

- $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$

  El valor de verdad de esta proposición es verdadera. Justificaremos más adelante la veracidad de esta proposición.

- $\forall x \in \mathbb{C} : x^2 \geq 0$

  Esta proposición es falsa pues existe $x = 2i$ y $x \in \mathbb{C}$ tal que $(2i)^2 = -4 < 0$.

- $\exists\, x \in \mathbb{N} / -\dfrac{3}{2} \leq x \leq \dfrac{9}{2}$

  Esta proposición es verdadera pues si consideramos $x = 1,\ x \in \mathbb{N}$ y se verifica que $-\dfrac{3}{2} \leq 1 \leq \dfrac{9}{2}$.

- $\exists\, x \in \mathbb{N} / -3 \leq x \leq -\dfrac{9}{2}$

  Esta proposición es falsa, ya que cualquier número natural es mayor a cero.

Negación de los cuantificadores

$$\sim(\forall x \in \mathcal{U} : p(x)) \Longleftrightarrow (\exists\, x \in \mathcal{U} / \sim p(x))$$

$$\sim(\exists\, x \in \mathcal{U} / \, p(x)) \Longleftrightarrow (\forall\, x \in \mathcal{U} : \, \sim p(x))$$

Observemos que cuando se niega una proposición cuantificada universal o existencialmente, se niega el cuantificador, se mantiene el dominio de la variable y se niega la función proposicional.

Ejemplo

Dada la proposición

$$p(x) : \forall x \in \mathbb{Z} : \;\; x \geq 0 \Longrightarrow \frac{1}{x} < 0.$$

Analizar su valor de verdad, negarla y dejar expresada la función proposicional con los conectivos "$\sim$" y "$\vee$" únicamente.

Analicemos el valor de verdad de $p(x)$.

La proposición $p(x)$ es falsa pues existe $x = 3$, $3 \in \mathbb{Z}$ tal que $3 \geq 0$ y $\dfrac{1}{3} \nless 0$

Ejemplo

Dada la proposición:

$$p(x): \ \forall x \in \mathbb{Z}: \ x \geq 0 \Longrightarrow \frac{1}{x} < 0.$$

Hallar la negación de $p(x)$ *y dejar expresada la proposición* $\sim p(x)$ *utilizando solamente los conectivos "*$\sim$*" y "*$\vee$*".*

$$\sim p(x) : \sim (\forall x \in \mathbb{Z}: \ x \geq 0 \Longrightarrow \frac{1}{x} < 0) \overset{(1)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Longleftrightarrow \ \exists x \in \mathbb{Z} / \ \sim (x \geq 0 \Longrightarrow \frac{1}{x} < 0) \overset{(2)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Longleftrightarrow \ \exists x \in \mathbb{Z} / \ \sim (\sim (x \geq 0) \vee \frac{1}{x} < 0) \overset{(3)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Longleftrightarrow \ \exists x \in \mathbb{Z} / \ \sim (\sim (x \geq 0)) \wedge \sim (\frac{1}{x} < 0) \overset{(4)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Longleftrightarrow \ \exists x \in \mathbb{Z} / \, x \geq 0 \wedge \frac{1}{x} \geq 0$$

Negación de cuantificadores - Ejemplo

La negación de la proposición $p(x)$ es

$$\sim p(x): \ \exists\, x \in \mathbb{Z}/\, x \geq 0 \wedge \frac{1}{x} \geq 0$$

Veamos cómo dejar expresada la función proposicional con los conectivos "$\sim$ " y "$\vee$" solamente

$$\sim p(x): \ \exists\, x \in \mathbb{Z}/\, x \geq 0 \wedge \frac{1}{x} \geq 0 \ \overset{(5)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Longleftrightarrow \ \exists\, x \in \mathbb{Z}/ \sim(\sim(x \geq 0)) \wedge \sim(\sim(\frac{1}{x} \geq 0)) \ \overset{(6)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Longleftrightarrow \ \exists\, x \in \mathbb{Z}/ \sim[\sim(x \geq 0) \vee \sim(\frac{1}{x} \geq 0)]$$

Referencias:

(1) Negación del cuantificador universal. (2) Definición de implicación.

(3) De Morgan, negación de la disyunción.

(4) Doble negación y negación de la relación "menor ".

(5) Doble negación. (6) De Morgan, negación de la disyunción.

Teorema - Demostración

Definición

Un **teorema** *consiste en un conjunto finito de proposiciones* $H_1, \ H_2, \ \ldots, H_n$ *llamadas* **hipótesis** *y una proposición* C (T) *denominada* **conclusión (tesis)** *del teorema y tal que la implicación*

$$H_1 \ \wedge \ H_2 \ \wedge \ \ \ldots \wedge H_n \Longrightarrow C$$

sea verdadera.

Definición

Una **demostración formal** *de un teorema consiste en una sucesión de proposiciones verdaderas que teminan en la conclusión. Dichas proposiciones se consideran válidas por alguna de las siguientes razones: que sea una hipótesis, o que sea una tautología conocida, o que pueda deducirse de proposiciones anteriores por medio de alguna de las reglas de inferencia de la lógica.*

Reglas de inferencia:

Adición, simplificación, conjunción, modus ponens, modus tollens, silogismo disyuntivo, silogismo hipotético, leyes de identidad.

Método directo: partimos de las hipótesis del teorema, hacemos pasos lógicos verdaderos y debemos llegar a la tesis o conclusión del teorema

$$H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \implies \text{hacemos pasos lógicos verdaderos} \implies T$$

Ejemplo

Demostrar que $\forall x \in \mathbb{Z}: \; x \leq 0 \Longrightarrow -2x + 3 > 2.$

$H_1)\ x \in \mathbb{Z}$ $\quad H_2)\ x \leq 0$ $\quad T)\ -2x + 3 > 2$

Demostración por el método directo:

$$x \leq 0 \overset{(1)}{\Longrightarrow} -2x \geq 0 \overset{(1)}{\Longrightarrow} -2x + 3 \geq 3 \overset{(2)}{\Longrightarrow} -2x + 3 \geq 3 \wedge 3 > 2 \overset{(3)}{\Longrightarrow} -2x + 3 > 2$$

Referencias:

(1) propiedad de los números enteros

(2) $t: 3 > 2$ es una tautología y la identidad $p \Longrightarrow p \wedge t$ nos asegura que el paso es correcto

(3) transitividad de la relación de orden

Métodos de demostración - Métodos indirectos

Método del contrarrecíproco: partimos de la negación de la tesis del teorema, hacemos pasos lógicos verdaderos y debemos llegar a la negación del conjunto de hipótesis

$$\sim T \implies \text{hacemos pasos lógicos verdaderos} \implies \sim (H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n)$$

Ejemplo

Analizar el valor de verdad de la proposición:

para todo número natural x, si x es par entonces $x - 5$ es impar

y justificar la respuesta.

Observemos que:

x es par si y sólo si 2 divide a x, $(2|x)$, es decir, $\exists\ k \in \mathbb{N} : x = 2k$

x es impar si y sólo si 2 no divide a x, $(2 \nmid x)$, es decir, $\exists\ t \in \mathbb{N} : x = 2t+1 \vee x = 2t-1$

El enunciado de la proposición del ejemplo se puede traducir al lenguaje simbólico de la siguiente manera:

$$\forall x \in \mathbb{N} : 2|x \implies 2 \nmid x - 5$$

La proposición

$$\forall\, x \in \mathbb{N}: \; 2|x \implies 2 \nmid x-5$$

es verdadera. Para justificar esta afirmación haremos una demostración

$H_1)$ $x \in \mathbb{N}$ $\quad$ $H_2)$ x es par $\quad$ $\sim H_2)$ x es impar

$T)$ $x-5$ es impar $\quad$ $\sim T)$ $x-5$ es par

Demostración por el método del contrarrecíproco:

$x-5$ es par $\overset{(1)}{\implies} \exists\, k \in \mathbb{N}/\, x-5 = 2k \implies \exists\, k \in \mathbb{N}/\, x = 2k+5 \implies$

$\implies \exists\, k \in \mathbb{N}/\, x = 2k + (4+1) = (2k+4)+1 = 2(k+2)+1 \implies$

$\implies \exists\, t = k+2,\; t \in \mathbb{N}/\, x = 2t+1 \overset{(2)}{\implies} x$ es impar

Observemos que partiendo de la proposición $x-5$ es par que es la negación de la tesis y haciendo pasos lógicos correctos obtenemos la negación de la hipótesis que es: x es impar. Luego queda demostrado que $\forall\, x \in \mathbb{N}: \; 2|x \implies 2 \nmid x-5$

Referencias

(1) definición de número par $\quad$ (2) definición de número impar

Método de reducción al absurdo: utilizando el conjunto de hipótesis y la negación de la tesis del teorema, hacemos pasos lógicos verdaderos y debemos llegar a un absurdo, es decir, debemos obtener una proposición que es una contradicción.

Método del absurdo

$H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \sim T \implies$ hacemos pasos lógicos verdaderos $\implies$ Absurdo

Ejemplo

Demostrar que: $\forall x \in \mathbb{R} : x < 3 \implies 2x + 5 < 11.$

$H_1)\ x \in \mathbb{R} \qquad H_2)\ x < 3$

$T)\ 2x + 5 < 11 \qquad \sim T)\ 2x + 5 \geq 11$

Demostración por el método del absurdo:

$2x + 5 \geq 11 \wedge x < 3 \implies 2x \geq 6 \wedge 2x < 6$ esta última proposición es un absurdo, porque contradice la ley de tricotomía de los reales.

Luego queda demostrado que: $\forall x \in \mathbb{R} : x < 3 \implies 2x + 5 < 11.$

Ejemplo

Analizar el valor de verdad de las siguiente proposiciones y justificar la respuesta con demostración, ejemplo o contraejemplo, según corresponda.

1. $\forall\, x \in \mathbb{N}: \ 2|3x^2 - 3 \implies 2 \nmid x$
2. $\forall\, x \in \mathbb{R}: \ 2x \geq -4 \implies x^2 - 1 \geq 3$
3. $\exists\, x \in \mathbb{R} / \ x < 3 \implies -2x + 5 \geq -1$
4. $\exists\, x \in \mathbb{R}: \ x < 0 \ \wedge \ \sqrt{5x - 6} = x$

Métodos de demostración - Ejemplos

1. La proposición $\forall\ x \in \mathbb{N}:\ 2|3x^2 - 3 \implies 2 \nmid x$ es verdadera.

   Como la proposición está cuantificada universalmente, haremos una demostración formal para justificar que es verdadera.

   $H_1)\ x \in \mathbb{N} \qquad H_2)\ 2|3x^2 - 3 \qquad \sim H_2)\ 2 \nmid 3x^2 - 3$

   $T)\ 2 \nmid x \qquad \sim T)\ 2|x$

   Demostración (método del contrarrecíproco):

   $$2|x \stackrel{(1)}{\implies} \exists\ k \in \mathbb{N}/\ x = 2k \implies \exists\ k \in \mathbb{N}/\ x^2 = (2k)^2 = 4k^2 \implies$$

   $$\implies \exists\ k \in \mathbb{N}/\ 3x^2 = 3(4k^2) = 12k^2 \implies \exists\ k \in \mathbb{N}/\ 3x^2 - 3 = 12k^2 - 3 \implies$$

   $$\implies \exists\ k \in \mathbb{N}/\ 3x^2 - 3 = 12k^2 - 2 - 1 = 2(6k^2 - 1) - 1 \implies$$

   $$\implies \exists\ t = 6k^2 - 1,\ t \in \mathbb{N}/\ 3x^2 - 3 = 2t - 1 \stackrel{(2)}{\implies} 2 \nmid 3x^2 - 3$$

   Luego demostramos que $\forall\ x \in \mathbb{N}:\ 2|3x^2 - 3 \implies 2 \nmid x$

   Referencia:

   (1) Definición de número par. (2) Definición de número impar.

2. La proposición $\forall\ x \in \mathbb{R}:\ 2x \geq -4 \implies x^2 - 1 \geq 3$ es falsa.

   Como la proposición está cuantificada universalmente y es falsa, daremos un contrejemplo para mostrar que la implicación es falsa.

   Para ello necesitamos mostrar un valor real que haga verdadero el antecente de la implicación y falso el consecuente de la misma.

   Si tomamos $x = 1$ entonces

$$2x = 2 \cdot 1 = 2 \geq -4 \quad \text{y} \quad x^2 - 1 = 1^2 - 1 = 0 \not\geq 3$$

   Luego, si $x = 1$ tenemos

$$v(2x \geq -4 \implies x^2 - 1 \geq 3) = F$$

   entonces

$$v(\forall\ x \in \mathbb{R}:\ 2x \geq -4 \implies x^2 - 1 \geq 3) = F$$

Métodos de demostración - Ejemplo

3. La proposición $\exists\ x \in \mathbb{R}:\ x < 3 \implies -2x + 5 \geq -1$ es verdadera.

   Como la proposición está cuantificada existencialmente, para justificar que es verdadera es suficiente con mostrar un número real que verifique la implicación

   Si $x = -3$ entonces

$$x = -3 < 3 \quad y \quad -2x + 5 = -2(-3) + 5 = 11 \geq -1$$

   Luego, si $x = -3$ tenemos

$$v(x < 3 \implies -2x + 5 \geq -1) = V$$

   entonces

$$v(\exists\ x \in \mathbb{R}:\ x < 3 \implies -2x + 5 \geq -1) = V$$

Métodos de demostración - Ejemplo

4. La proposición $\exists\, x \in \mathbb{R}: \; x < 0 \;\wedge\; \sqrt{5x-6} = x$ es falsa

   Como la proposición es falsa, su negación es verdadera entonces la proposición

   $$\forall\, x \in \mathbb{R} : \sim (x < 0 \;\wedge\; \sqrt{5x-6} = x) \quad \text{es verdadera.}$$

   Escribamos la función proposicional $\sim (x < 0 \;\wedge\; \sqrt{5x-6} = x)$ como una implicación

   $$\sim (x < 0 \;\wedge\; \sqrt{5x-6} = x) \overset{(1)}{\iff} [\sim (x < 0) \vee \; \sim (\sqrt{5x-6} = x)] \iff$$

   $$\iff [\sim (x < 0) \;\vee\; \sqrt{5x-6} \neq x] \overset{(2)}{\iff} [x < 0 \Longrightarrow \sqrt{5x-6} \neq x]$$

   Entonces

   $$\forall\, x \in \mathbb{R} : \sim (x < 0 \;\wedge\; \sqrt{5x-6} = x) \iff \forall\, x \in \mathbb{R} : \; x < 0 \Longrightarrow \sqrt{5x-6} \neq x$$

   Haremos la demostración de la proposición $\forall\, x \in \mathbb{R} : \; x < 0 \Longrightarrow \sqrt{5x-6} \neq x$

   Referencias: (1) De Morgan (negación de la conjunción)

   (2) Definición de implicación

$H_1)\ x \in \mathbb{R} \qquad H_2)\ x < 0$

$T)\ \sqrt{5x-6} \neq x \qquad \sim T)\ \sqrt{5x-6} = x$

Demostración (método del absurdo):

$$\sqrt{5x-6} = x \implies 5x-6 = x^2 \implies x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \implies x = 3 \vee x = 2 \text{ y esto es un absurdo}$$

pues $H_2)$ nos asegura que $x < 0$

Luego, queda probado que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}:\ x < 0 \implies \sqrt{5x-6} \neq x$$

y por lo tanto la proposición dada en el enunciado es falsa