ELEMENTOS DE ÁLGEBRA
(2do cuatrimestre de 2022)

TRABAJO PRÁCTICO N°3: Números reales

1. Resolver las siguientes desigualdades. Expresar el conjunto solución de cada una de ellas utilizando notación de intervalos.
   a) $4x - 3 \leq 4(x - 7)$
   b) $4x - 2 \leq 4(x + 1)$
   c) $x \geq 4 \ \wedge \ -x + 5 \leq \dfrac{1}{2}$
   d) $0 \leq 2x + \dfrac{1}{2} < 4$
   e) $(4x + 5)(x - 2) > 0$
   f) $(x - 2)(3x + 12) \neq 0$
   g) $-(x + 1)(x - 2) \geq 0$
   h) $\dfrac{1}{x} < 10$
   i) $\dfrac{x + 4}{x - 7} \geq 0$
   j) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{2x} \geq 5$
   k) $x^3 + x^2 \leq 0$

2. Hallar el conjunto de los $x \in \mathbb{R}$ de modo que las siguientes expresiones sean reales. Dejar expresado el conjunto con notación de intervalos y por comprensión.
   a) $x^2 - 31$
   b) $\sqrt[5]{x + \frac{1}{4}}$
   c) $\dfrac{4}{x^2 - 16}$
   d) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x - 1}}$
   e) $\dfrac{(x + 4)^{1/2}}{x^2 - 9}$
   f) $\dfrac{-3}{\sqrt[4]{4 - 6x}}$
   g) $\sqrt{-1 + \dfrac{1}{1 - x}}$

3. Hallar, si es posible, los valores $x \in \mathbb{R}$ que verifican las siguientes condiciones:
   a) $|x - 2| = 6$
   b) $|9 - x| = 0$
   c) $|3x| = -9$
   d) $|5 - 2x| \leq 0$
   e) $\left|\dfrac{8}{x}\right| > 4$
   f) $2 - \left|\frac{1}{2}x + 1\right| > 0$
   g) $-2|x - 4| \leq -8$
   h) $2 \leq |-2x - 8| < 6$

4. Escribir por comprensión los siguientes conjuntos de tal manera que la proposición que determina sus elementos esté expresada en términos de valor absoluto.
   a) Todos los puntos cuya distancia al origen es menor que 5
   b) Todos los puntos cuya distancia a $(-5/4)$ no es menor a $2,5$ unidades
   c) Todos los puntos cuyo duplo dista de 3 en más de $4,5$ unidades y en menos de $6,5$ unidades

5. Resolver geométricamente e interpretar en términos de distancia
   a) $|x - 2| > 3$
   b) $|2x + 3| \leq 1$
   c) $|4 - 3x| > 2$
   d) $2 \leq |x + 1| < 3$

6. Escribir con notación de valor absoluto:
   a) $-3 \leq x \leq 3$
   b) $-2 \leq x + 5 \leq 2$
   c) $(x < -4)$ ó $(x > 4)$
   d) $-8 \leq y \leq 6$
   e) $\dfrac{t - 1}{2} \in \left(\frac{5}{2}, 6\right)$
   f) $z \in (-\infty, -8) \cup (6, +\infty)$
   g) $x \in (-14, -10] \cup [4, 8)$

7. Hallar, si es posible, los valores $x \in \mathbb{R}$ para los cuales se verifica:
   a) $x^2 - 2 \leq 7$
   b) $-x^2 < 4$
   c) $(2 - x)^4 > 16$
   d) $2(1 - x)^2 - 8 \leq 0$
   e) $\dfrac{3x - 4}{|5 - x|} \geq 0$
   f) $\dfrac{x}{2} \leq \dfrac{2}{x}$
   g) $8x^2 + 16x + 10 \leq 4x^2 - 6$
   h) $x^2 - 4x + 13 < 0$
   i) $-x^2 + 10x \leq 100$

8. Analizar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas, justificando las respuestas.

   a) $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}: \ (xz = yz \Longrightarrow x = y)$.

   b) $\forall\, x \in \mathbb{R}: \ (-2)\sqrt{x-3}\,|x + \sqrt{2}| \leq 0$.

   c) $\forall\, x, y \in \mathbb{R}: \ (x \leq y \ \Longrightarrow \ x^2 \leq y^2)$.

   d) El conjunto $\{x \in \mathbb{R} / \ |3x + 3| \leq -4x\}$ es vacío.

   e) Si $A = \left\{x \in \mathbb{R} / \ \frac{-2}{(x-1)^2} \leq -32\right\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} / \ x^2(-3x + 24) < 0\}$ entonces $B \subseteq A'$.

   f) $\forall\, x, y \in \mathbb{R}: \ |x| = |y|$.

   g) $\forall\, x \in \mathbb{R}: \ \exists\, y \in \mathbb{R} \, / \ |x - 2| = |y|$.

   h) $\forall\, x \in \mathbb{R} - \{0\}: \ \sqrt{16x^2} = 4x$.

   i) $\forall\, x \in \mathbb{R}: \ x^2 < 0 \ \Longrightarrow \ x^{12} - 321x^8 + 43x^4 > 0$.

   j) Sean $A = \{x \in \mathbb{R}: \ -|x + 1| < 3\}$ y $B = \{y \in \mathbb{R}: \ y = 5x + 7, \ x \in \mathbb{R}\}$.

      I) $\forall\, x \in \mathbb{R}: \exists\, y \in \mathbb{R} / \ x \in A \ \wedge \ y \in B$.

      II) $\forall\, x \in \mathbb{R}: \exists\, y \in \mathbb{Z} / \ x \in A \ \wedge \ y \in B$.

   k) Sea $a \in \mathbb{R}$. Dada la expresión: $c(x) = \dfrac{\sqrt[4]{x^2 - a + 2}}{(x + 2)\sqrt{x + 3}}$

      I) Sea $a = 2$. $\forall\ x \in \mathbb{R}: \ c(x) \in \mathbb{R} \ \Longrightarrow \ x \in (-3, -2) \cup (-2, +\infty)$.

      II) $\{x \in \mathbb{R}: \ a < 2 \ \wedge \ c(x) \in \mathbb{R}\} \ \subseteq \ (-3, -2) \cup (-2, +\infty)$.

      III) $\forall\, a, x \in \mathbb{R}: \ a < -9 \ \Longrightarrow \ c(x) \in \mathbb{R}$.

      IV) Sea $a = x^2 + 3$. $\{x \in \mathbb{R}: \ c(x) \in \mathbb{R}\} = \emptyset$.

EJERCICIOS ADICIONALES

1. Hallar los valores $x \in \mathbb{R}$, que satisfacen las siguientes ecuaciones y verificar las soluciones

   a) $\dfrac{(x+1)(x^2-1)}{(x-1)} = 0$ *b*) $\dfrac{5}{x+2} + \dfrac{3}{x} = \dfrac{8x+6}{x(x+2)}$

2. Dados los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} : \ x^4 - 13x^2 + 36 = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : \ x^4 - 13x^2 + 36 \leq 0\}$,

   $C = \{x \in \mathbb{R} : \ ax^4 - 13ax^2 + 36a = 0\}$, $D = \{x \in \mathbb{R} : \ ax^4 - 13ax^2 + 36a \leq 0\}$

   a) El conjunto A tiene 4 elementos.

   b) $\forall\, a \in \mathbb{R} : \ A = C$.

   c) $\exists\, a \in \mathbb{R} : \ a < 0 \ \wedge \ D \subseteq B'$.

   d) $\nexists\, x \in B / \ x^2 + 7 < 7$.

   e) $\forall\, x \in \mathbb{N} : \ x < 3 \implies x \notin B$.

   f) $\forall\, x \in \mathbb{Q} : \ \exists\, y \in \mathbb{Z} / \ x \in B - A \ \wedge \ y < x$.

   g) $\exists\, a \in \mathbb{R} / \ a < 0 \implies (-\infty, \ -5) \subseteq D$.

3. Considerar los siguientes conjuntos

   $A = \{x \in \mathbb{R} : \ 3 \leq |-3x-1| < 8\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : \ 3 \leq |-3x-1|\}$,

   $C = \{x \in \mathbb{R} : \ |-3x-1| < 8\}$, $D = \{x \in \mathbb{R} : \ \dfrac{1}{\sqrt{9x^2+6x+1}} > \dfrac{1}{8}\}$,

   a) $\exists\, x \in \mathbb{Q} / \ x < -1 \implies x \in A$

   b) $A = B \cup C$

   c) $D = C$

   d) $B' \subseteq C$

   e) $\exists\, y \in C \,/\, \forall x \in A : \ x \in B \wedge y \in A$

   f) $\exists\, y \in C \,/\, y \in A - B \implies y \in A$

4. Hallar, si es posible, los valores $x \in R$ para los cuales se verifica:

   a) $\dfrac{2x}{|x+3|} \leq 1$ *b*) $|x-2| < \dfrac{x}{2}$

5. Sean los conjuntos $S_1 = \{x \in \mathbb{R} : \ \dfrac{\sqrt[4]{-x+5}}{x-2} \in \mathbb{R}\}$, $S_2 = \{x \in \mathbb{R} : \ \dfrac{1}{(x-2)\sqrt{-x+5}} \in \mathbb{R}\}$ y

   $S_3 = \{x \in \mathbb{R} : \ \dfrac{1}{(-x+4)\sqrt[6]{-x+5}} \in \mathbb{R}\}$

   a) $S_1 = S_2$

   b) $S_3 \subseteq S_1$

   c) $\exists\, x \in \mathbb{R} / \ x \in S_2' \ \wedge \ x \in S_3$