Números Reales - Valor absoluto

Elementos de Álgebra
Segundo Cuatrimestre 2022

Mg. María del Carmen Vannicola

Facultad de Informática
Departamento de Matemática

Valor absoluto

Definición

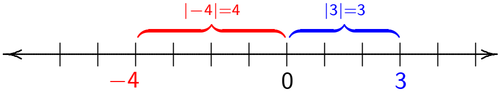
Sea $x \in \mathbb{R}$, el valor absoluto de x se define por

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Ejemplos:

$$|3| = 3, \qquad |0| = 0, \qquad |-4| = -(-4) = 4$$

Interpretación geométrica del valor absoluto: geométricamente el valor absoluto de x indica la distancia de x al 0



- Si $x = 3$ entonces $|3|$ es la distancia de 3 a 0, esto es, 3 unidades.
- Si $x = 0$ entonces $|0|$ es la distancia de 0 a 0, esto es, cero unidades.
- Si $x = -4$ entonces $|-4|$ es la distancia de -4 a 0, esto es, 4 unidades.

Propiedades de valor absoluto

Proposición

Sean $x, y \in \mathbb{R}$

1. 1.1 $|x| \geq 0$, 1.2 $|x| = 0 \iff x = 0$
2. $\forall\, a \in \mathbb{R},\ a > 0 : \ |x| = a \iff x = \pm a \iff x = a \ \vee \ x = -a$
3. $\forall\, a \in \mathbb{R},\ a > 0 : \ |x| \leq a \iff -a \leq x \leq a \iff -a \leq x \wedge x \leq a$
4. $\forall\, a \in \mathbb{R},\ a > 0 : \ |x| \geq a \iff x \geq a \ \vee \ x \leq -a$
5. $|x| = |y| \iff x = \pm y \iff x = y \ \vee \ x = -y$
6. 6.1 $|-x| = |x|$, 6.2 $-|x| \leq x \leq |x|$

Proposición

Sean $x, y \in \mathbb{R}$

1. 7.1 $|x+y| \leq |x|+|y|$, 7.2 $|x-y| \geq ||x|-|y||$
2. 8.1 $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$, 8.2 $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$, $y \neq 0$
3. $\forall n \in \mathbb{N}: \ |x^n| = |x|^n$
4. $\forall n \in \mathbb{N}: \ n \text{ es par} \Longrightarrow |x^n| = |x|^n = x^n$
5. $\forall n \in \mathbb{N}: \ n \text{ es par} \Longrightarrow \sqrt[n]{x^n} = |x|$
6. *Si* $0 < x \leq y$ *entonces* $0 < |x| \leq |y|$
7. *Si* $x \leq y < 0$ *entonces* $0 < |y| \leq |x|$

Ejemplos

Hallar los valores $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen

1. $|2x-5| = 0$
2. $|-2x-6| = 4$
3. $5|x+2| = -10$
4. $-3|4x+6| = -15$

1. Resolución de $|2x-5| = 0$.

$$|2x-5| = 0 \overset{Prop\ 1.2}{\Longleftrightarrow} 2x-5=0 \Longleftrightarrow 2x=5 \Longleftrightarrow x = \frac{5}{2}$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} : \ |2x-5| = 0\} = \{\frac{5}{2}\} = [\frac{5}{2}, \ \frac{5}{2}]$$

2. Resolución de $|-2x-6| = 4$. Cómo $4 > 0$ podemos usar la Prop 2.

$$|-2x-6| = 4 \overset{Prop\ 2}{\Longleftrightarrow} -2x-6 = 4 \ \vee \ -2x-6 = -4 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow -2x = 10 \ \vee \ -2x = 2 \Longleftrightarrow x = -5 \ \vee \ x = -1$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} : \ |-2x-6| = 4\} = \{-5, \ -1\} = [-5, -5] \cup [-1, -1]$$

3. Resolución de $5|x+2| = -10$.

$$5|x+2| = -10 \iff |x+2| = -2$$

No existen $x \in \mathbb{R}$ tales que $|x+2| = -2$ ya que $\forall x \in \mathbb{R}: \ |x+2| \geq 0$, por Prop 1.1.

$$S = \{x \in \mathbb{R}: \ |x+2| = -2\} = \emptyset = (1,1)$$

4. Resolución de $-3|4x+6| = -15$.

$$-3|4x+6| = -15 \iff |4x+6| = 5 \overset{5>0,\ Prop\ 2}{\iff} 4x+6 = 5 \ \vee \ 4x+6 = -5 \iff$$

$$\iff 4x = -1 \ \vee \ 4x = -11 \iff x = -\frac{1}{4} \ \vee \ x = -\frac{11}{4}$$

$$S = \{x \in \mathbb{R}: \ x = -\frac{1}{4} \ \vee \ x = -\frac{11}{4}\} = \{-\frac{1}{4}, -\frac{11}{4}\} = [-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}] \cup [-\frac{11}{4}, -\frac{11}{4}]$$

Ejemplos

Indicar, en términos de intervalos, el conjunto solución de las siguientes inecuaciones.

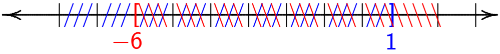
1. $|-2x-5| \leq 7$
2. $|x^2+x-6| \leq 0$
3. $|-x^3+9x-14| < 0$
4. $|5x-3| \leq -4$
5. $-5|4x+3|+10 > -20$
6. $\dfrac{2}{3|x+8|} \geq 2$

1. Resolución de $|-2x-5| \leq 7$.

Como $7 \in \mathbb{R}$ y $7 > 0$ entonces:

$$|-2x-5| \leq 7 \overset{Prop\ 3}{\iff} -7 \leq -2x-5 \leq 7 \iff -7+5 \leq -2x-5+5 \leq 7+5 \iff$$

$$\iff -2 \leq -2x \leq 12 \overset{-2<0}{\iff} 1 \geq x \geq -6 \iff -6 \leq x \leq 1$$



$$S = \{x \in \mathbb{R} : \ |-2x-5| \leq 7\} = [-6,\ 1]$$

2. Resolución de $|x^2+x-6| \leq 0$.

Observemos que $|x^2+x-6| \leq 0 \iff |x^2+x-6| < 0 \vee |x^2+x-6| = 0$.

Como $\forall x \in \mathbb{R}: \ |x^2+x-6| \geq 0$ entonces la proposición $|x^2+x-6| < 0$ es falsa, luego:

$$|x^2+x-6| < 0 \ \vee \ |x^2+x-6| = 0 \iff |x^2+x-6| = 0$$

Es decir, $|x^2+x-6| \leq 0 \iff |x^2+x-6| = 0 \iff x^2+x-6 = 0 \quad (1)$.

Cálculo auxiliar:

$$x^2+x-6=0 \iff x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-6)}}{2\cdot 1} = \frac{-1\pm\sqrt{25}}{2} = \frac{-1\pm 5}{2} \Longrightarrow$$

$$x = 2 \ \vee \ x = -3 \quad (2)$$

Retomamos el ejercicio: en (1):

$$|x^2+x-6| \leq 0 \iff x^2+x-6=0 \overset{(2)}{\iff} x = 2 \ \vee \ x = -3$$

$$S = \{x \in \mathbb{R}: \ |x^2+x-6| \leq 0\} = [-3, \ -3] \cup [2,2]$$

3. Resolución de $|-x^3+9x-14|<0$

$\forall x \in \mathbb{R}: \ |-x^3+9x-14| \geq 0$ entonces la proposición $|-x^3+9x-14|<0$ es falsa,

luego $\nexists\, x \in \mathbb{R} / \ |-x^3+9x-14|<0$, es decir,

$$S = \{x \in \mathbb{R}: \ |-x^3+9x-14|<0\} = (0,0)$$

4. Resolución de $|5x-3| \leq -4$

$\forall x \in \mathbb{R}: \ |5x-3| \geq 0$ entonces la proposición $|5x-3| \leq -4$ es falsa,

luego $\nexists\, x \in \mathbb{R} / \ |5x-3| \leq -4$, es decir,

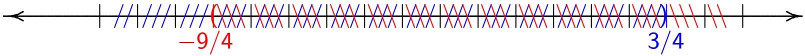
$$S = \{x \in \mathbb{R}: \ |5x-3| \leq -4\} = \emptyset = (-2,-2)$$

5. Resolución de $-5|4x+3|+10 > -20$

$$-5|4x+3|+10 > -20 \iff -5|4x+3| > -30 \overset{-5<0}{\iff} |4x+3| < 6$$

Como $6 \in \mathbb{R}$ y $6 > 0$ entonces

$$|4x+3| < 6 \overset{Prop\ 3}{\iff} -6 < 4x+3 < 6 \iff -9 < 4x < 3 \iff -\frac{9}{4} < x < \frac{3}{4}$$



$$S = \{x \in \mathbb{R} : \ -5|4x+3| > -30\} = (-\frac{9}{4}, \ \frac{3}{4})$$

6. Resolución de $\dfrac{2}{3|x+8|} \geq 2$

¿Es correcto el siguiente razonamiento?

$$\frac{2}{3|x+8|} \geq 2 \iff 2 \geq 2(3|x+8|)$$

¿Qué sucede si $x = -8$?

Observemos que $\forall x \in \mathbb{R}: \ |x+8| \geq 0$, entonces $\forall x \in \mathbb{R}: \ 3|x+8| \geq 0$

Además, $3|x+8| = 0 \iff |x+8| = 0 \iff x+8=0 \iff x=-8$

Entonces $3|x+8| \neq 0 \iff x \neq -8$, es decir,

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{-8\}: \ 3|x+8| > 0 \quad (1)$$

Luego

$$\frac{2}{3|x+8|} \geq 2 \overset{(1)}{\iff} 2 \geq 6|x+8| \ \wedge \ x \neq -8 \quad (2)$$

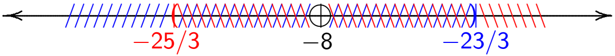
Ejemplos de ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto

$$2 \geq 6|x+8| \iff \frac{1}{3} \geq |x+8| \iff |x+8| \leq \frac{1}{3} \overset{1/3>0,\ Prop\ 3}{\iff} -\frac{1}{3} \leq x+8 \leq \frac{1}{3} \iff$$

$$\iff -\frac{25}{3} \leq x \leq -\frac{23}{3} \quad (3)$$

De (2) y (3)

$$S = \{x \in \mathbb{R} : \frac{2}{3|x+8|} \geq 2\} = \{x \in \mathbb{R} : -\frac{25}{3} \leq x \leq -\frac{23}{3} \wedge x \neq -8\}$$



Entonces:

$$S = [-\frac{25}{3}, -8) \cup (-8, -\frac{23}{3}]$$

Ejemplos

Resolver las inecuaciones que se plantean a continuación y expresar el conjunto solución en términos de distancia.

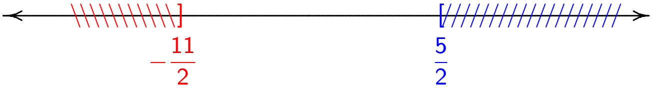
1. $(2x+3)^2 \geq 64$
2. $|x^4 + 3x^3 - 14| \geq 0$
3. $|x^4 - 5x^2 - 36| > 0$
4. $|-5x-4| \geq -6$
5. $-6|-4x+3| < -48$
6. $\dfrac{3}{-6|x-1|} < -2$

1. Resolución de $(2x+3)^2 \geq 64$

$$(2x+3)^2 \geq 64 \iff \sqrt{(2x+3)^2} \geq \sqrt{64} \overset{Prop\ 11}{\iff} |2x+3| \geq 8 \iff$$

$$\overset{8>0,\ Prop\ 4}{\iff} 2x+3 \geq 8 \ \vee\ 2x+3 \leq -8 \iff 2x \geq 5 \ \vee\ 2x \leq -11 \iff$$

$$\iff x \geq \frac{5}{2} \ \vee\ x \leq -\frac{11}{2}$$



Ejemplos de ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto

$$S = \{x \in \mathbb{R} : \ (2x+3)^2 \geq 64\} = (-\infty, \ -\frac{11}{2}] \cup [\frac{5}{2}, +\infty)$$

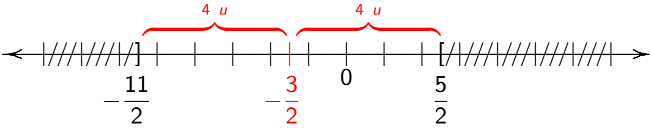
Veamos cómo expresar al conjunto S en términos de distancia.

$$(2x+3)^2 \geq 64 \iff |2x+3| \geq 8 \iff |2(x+\frac{3}{2})| \geq 8 \overset{Prop\ 8.1}{\iff}$$

$$\iff |2| \cdot |x+\frac{3}{2}| \geq 8 \iff 2|x-(-\frac{3}{2})| \geq 8 \iff |x-(-\frac{3}{2})| \geq 4$$

La inecuación $|x-(-\frac{3}{2})| \geq 4$ nos asegura que:

el conjunto S está formado por todos los números reales x, cuya distancia a $-\frac{3}{2}$ es mayor o igual a 4 unidades.



2. Resolución $|x^4 + 3x^3 - 14| \geq 0$

Por Prop 1.1, sabemos que $\forall x \in \mathbb{R}: \; |x^4 + 3x^3 - 14| \geq 0$, luego

$$S = \{x \in \mathbb{R}: \; |x^4 + 3x^3 - 14| \geq 0\} = \mathbb{R} = (-\infty, \; +\infty)$$

3. Resolución $|x^4 - 5x^2 - 36| > 0$

$$|x^4 - 5x^2 - 36| > 0 \iff |x^4 - 5x^2 - 36| \geq 0 \; \wedge \; |x^4 - 5x^2 - 36| \neq 0$$

$\forall x \in \mathbb{R}: \; |x^4 - 5x^2 - 36| \geq 0$ por Prop 1.1.

Cálculo auxiliar $|x^4 - 5x^2 - 36| = 0 \iff x^4 - 5x^2 - 36 = 0 \quad (1)$

Cambio de variable: $x^2 = t \implies x^4 = t^2$

De (1) $x^4 - 5x^2 - 36 = 0 \iff t^2 - 5t - 36 = 0 \implies t = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 + 144}}{2} \iff$

$\iff t = \dfrac{5 \pm 13}{2} \iff t = 9 \; \vee \; t = -4$

Ejemplos de ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto

$$x^2 = t \wedge (t = 9 \vee t = -4) \text{ entonces}$$

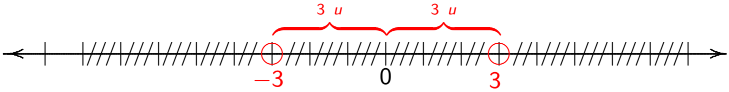
$$|x| = \sqrt{t} \iff x = \pm\sqrt{t} \iff x = \pm\sqrt{9} = \pm 3 \vee x = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i$$

Como $x \in \mathbb{R}$ entonces $x \neq \pm 2i$, luego $x = \pm 3$.

Luego $x^4 - 5x^2 - 36 \neq 0 \iff x \neq 3 \vee x \neq -3$

$$S = \{x \in \mathbb{R} : |x^4 - 5x^2 - 36| > 0\} = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$$

El conjunto S es el conjunto de todos los números reales x cuya distancia a cero no es igual a tres unidades.



4. Resolución de $|-5x-4| \geq -6$

Como $\forall x \in \mathbb{R}: \ |-5x-4| \geq 0 \ \wedge \ 0 \geq -6$ entonces

$$\forall x \in \mathbb{R}: \ |-5x-4| \geq -6,$$

es decir, $S = \{x \in \mathbb{R}: \ |-5x-4| \geq -6\} = \mathbb{R}$

5. Resolución de $-6|-4x+3| < -48$

$$-6|-4x+3| < -48 \overset{-6<0}{\Longleftrightarrow} |-4x+3| > 8 \overset{8>0, \ Prop \ 4}{\Longleftrightarrow} -4x+3 > 8 \vee -4x+3 < -8 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \ -4x > 5 \ \vee \ -4x < -11 \overset{-4<0}{\Longleftrightarrow} x < -\frac{5}{4} \ \vee \ x > \frac{11}{4}$$

$$S = \{x \in \mathbb{R}: \ -6|-4x+3| < -48\} = (-\infty, \ -\frac{5}{4}) \cup (\frac{11}{4}, \ +\infty)$$

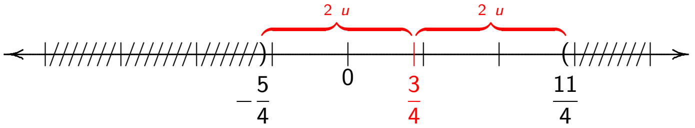
Veamos cómo expresar este conjunto solución en términos de distancia

$$-6|-4x+3|<-48 \iff |-4x+3|>8 \iff |-4(x-\frac{3}{4})|>8 \overset{Prop\ 8.1}{\iff}$$

$$\iff |-4|\cdot|x-\frac{3}{4}|>8 \iff 4|x-\frac{3}{4}|>8 \iff |x-\frac{3}{4}|>2$$

Los números reales que pertenecen al conjunto S son aquellos cuya distancia a $\frac{3}{4}$ es mayor a 2 unidades.

$$S=\{x\in\mathbb{R}:\ -6|-4x+3|<-48\}=(-\infty,\ -\frac{5}{4})\cup(\frac{11}{4},\ +\infty)$$



Centro: $\frac{1}{2}(\frac{11}{4}+(-\frac{5}{4}))=\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{4}=\frac{3}{4}$, Radio: $\frac{1}{2}(\frac{11}{4}-(-\frac{5}{4}))=\frac{1}{2}\cdot 4=2$

6. Resolución de $\dfrac{3}{-6|x-1|} < -2$

Sabemos que $\forall x \in \mathbb{R}: \ |x-1| \geq 0$ y que $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}: \ |x-1| > 0$, luego

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}: \ -6|x-1| < 0$$

$$\frac{3}{-6|x-1|} < -2 \iff 3 > 12|x-1| \ \wedge \ x \neq 1$$

$$3 > 12|x-1| \iff \frac{1}{4} > |x-1| \iff |x-1| < \frac{1}{4} \overset{1/4>0, \ Prop\ 3}{\iff} -\frac{1}{4} < x-1 < \frac{1}{4} \iff$$

$$\iff \frac{3}{4} < x < \frac{5}{4}$$

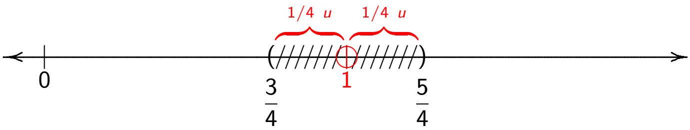
$$S = \{x \in \mathbb{R}: \ \frac{3}{-6|x-1|} < -2\} = (\frac{3}{4}, \ \frac{5}{4}) - \{1\} = (\frac{3}{4}, \ 1) \cup (1, \ \frac{5}{4})$$

Expresemos el conjunto solución en términos de distancia

Ejemplos de ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto

$$S = \{x \in \mathbb{R} : \ \frac{3}{-6|x-1|} < -2\} = \{x \in \mathbb{R} : \ |x-1| < \frac{1}{4} \wedge x \neq 1\} = (\frac{3}{4}, \ 1) \cup (1, \ \frac{5}{4})$$

Los números reales que verifican la inecuación $\dfrac{3}{-6|x-1|} < -2$ son aquellos cuya distancia a 1 no es cero y es menor a $\dfrac{1}{4}$ de una unidad.



Centro: $\quad \frac{1}{2}(\frac{5}{4} + \frac{3}{4}) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1,$ $\qquad$ Radio: $\quad \frac{1}{2}(\frac{5}{4} - \frac{3}{4}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

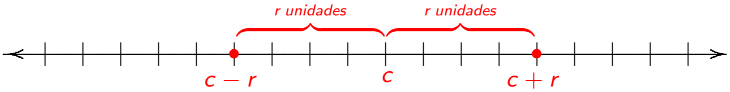
Interpretación geométrica del valor absoluto

Consideremos la expresión $|x-c|=r, \quad \forall c,\, r \in \mathbb{R}, \quad r>0$

Si deseamos resolver la ecuación $|x-c|=r$, como $r>0$ tenemos:

$$|x-c|=r \overset{r>0,\ Prop\ 2}{\Longleftrightarrow} x-c=r \ \vee \ x-c=-r \iff x=c+r \ \vee \ x=c-r$$

Gráficamente:



Interpretación geométrica:

Los números reales que verifican la ecuación $|x-c|=r$ son aquellos que distan "r" unidades del punto "c".

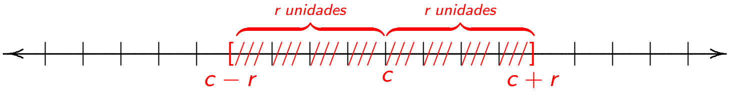
Consideremos la expresión $|x-c| \leq r, \quad \forall c,\ r \in \mathbb{R}, \quad r>0$

Si deseamos resolver la ecuación $|x-c| \leq r$, como $r>0$ tenemos:

$$|x-c| \leq r \overset{r>0,\ Prop\ 3}{\Longleftrightarrow} -r \leq x-c \leq r \Longleftrightarrow c-r \leq x \leq c+r$$

$$S=\{x \in \mathbb{R}:\ |x-c| \leq r,\ r>0\}=[c-r,\ c+r]$$

Gráficamente:



Interpretación geométrica:

Los números reales que verifican la inecuación $|x-c| \leq r$ son aquellos cuya distancia a "c" es menor o igual a "r" unidades.

"c" es el centro del intervalo y "r" se conoce como radio o semiamplitud del intervalo.

Interpretación geométrica del valor absoluto

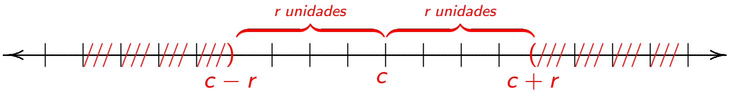
Consideremos la expresión $|x - c| > r, \quad \forall c,\ r \in \mathbb{R}, \quad r > 0$

Si deseamos resolver la ecuación $|x - c| > r$, como $r > 0$ tenemos

$$|x - c| > r \overset{r>0,\ Prop\ 4}{\iff} x - c > r \ \vee\ x - c < -r \iff x > c + r \ \vee\ x < c - r$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} : \ |x - c| \leq r,\ r > 0\} = (-\infty, c - r) \cup (c + r,\ +\infty)$$

Gráficamente:



Interpretación geométrica:

Los números reales que verifican la inecuación $|x - c| > r$ son aquellos cuya distancia a "c" es mayor a "r" unidades.

"c" es el centro del intervalo y "r" se conoce como radio o semiamplitud del intervalo.

Interpretación geométrica del valor absoluto

Observemos que en la interpretación geométrica que hicimos de

$$|x - c| = r, \quad |x - c| \leq r \quad \text{y} \quad |x - c| > r, \ \text{con } r > 0,$$

- el valor "c" es el punto medio entre los valores "$c + r$" y "$c - r$",
- el valor "r" es la distancia entre "c" y "$c + r$" o entre "c" y "$c - r$".

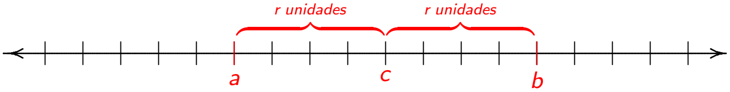
Dados dos números reales "a" y "b", $a \leq b$

el punto medio entre "a" y "b" es: $c = \dfrac{a + b}{2}$

la distancia de "c" a "a" es: $r = c - a$ o

la distancia de "c" a "b" es: $r = b - c$ o

la semi amplitud o radio del intervalo también se puede calcular como $r = \dfrac{b - a}{2}$



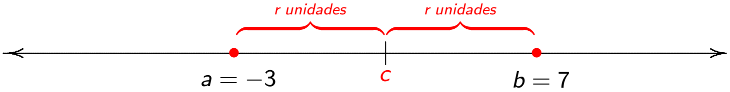
Interpretación geométrica del valor absoluto

Ejemplo

Dar una ecuación o una inecuación, en términos de valor absoluto, tal que el conjunto solución sea:

1. $S = \{-3, 7\}$
2. $S = (-8, 1)$
3. $S = (-\infty, 2] \cup [14, +\infty)$
4. $S = \{4\}$

1. Resolución de $S = \{-3, 7\}$



Como $a = -3$ y $b = 7$ entonces

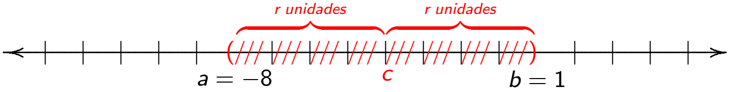
$$c = \frac{a+b}{2} = \frac{-3+7}{2} = 2, \qquad r = \frac{b-a}{2} = \frac{7-(-3)}{2} = 5$$

La ecuación que representa al conjunto solución $S = \{-3, 7\}$ es

$$|x-2| = 5$$

Interpretación geométrica del valor absoluto

2. Resolución de $S = (-8, 1)$



Como $a = -8$ y $b = 1$ entonces

$$c = \frac{a+b}{2} = \frac{-8+1}{2} = -\frac{7}{2}, \qquad r = \frac{b-a}{2} = \frac{1-(-8)}{2} = \frac{9}{2}$$

El conjunto solución $S = (-8, 1)$ está determinado por la inecuación

$$|x - (-\frac{7}{2})| < \frac{9}{2} \iff |x + \frac{7}{2}| < \frac{9}{2}$$

3. Resolución de $S = (-\infty, 2] \cup [14, +\infty)$

Como $a = 2$ y $b = 14$ entonces

$$c = \frac{a+b}{2} = \frac{2+14}{2} = 8, \qquad r = \frac{b-a}{2} = \frac{14-2}{2} = 6$$

La inecuación

$$|x-8| \geq 6$$

tiene como conjunto solución a $S = (-\infty, 2] \cup [14, +\infty)$

4. ¿Qué sucede con $S = \{4\}$?¿Qué ecuación, en términos de valor absoluto, determina este conjunto solución?

Ejemplo

Resolver la ecuación $\dfrac{|x+1|}{|2x-3|} = \dfrac{1}{4}$ *y dejar expresado el conjunto solución en términos de distancia.*

En primer lugar observemos que $|2x-3| \neq 0$

Cálculo auxiliar:

$$|2x-3| = 0 \overset{Prop\ 1.2}{\iff} 2x-3=0 \iff x = \frac{3}{2}$$

Luego $x \neq \dfrac{3}{2}$ (1)

$$\frac{|x+1|}{|2x-3|} = \frac{1}{4} \overset{(1)}{\iff} |x+1| = \frac{1}{4}|2x-3| \ \wedge\ x \neq \frac{3}{2} \quad (2)$$

Resolvamos $|x+1| = \dfrac{1}{4}|2x-3|$

$$|x+1| = \frac{1}{4}|2x-3| \iff 4\cdot|x+1| = |2x-3| \iff |4|\cdot|x+1| = |2x-3|$$

$$|4| \cdot |x+1| = |2x-3| \overset{Prop\ 8.1}{\iff} |4(x+1)| = |2x-3| \iff |4x+4| = |2x-3| \iff$$

$$\overset{Prop\ 5}{\iff} 4x+4 = 2x-3 \ \vee \ 4x+4 = -(2x-3) \iff$$

$$\iff 4x-2x = -3-4 \ \vee \ 4x+4 = -2x+3 \iff 2x = -7 \ \vee \ 4x+2x = 3-4 \iff$$

$$\iff x = -\frac{7}{2} \ \vee \ 6x = -1 \iff x = -\frac{7}{2} \ \vee \ x = -\frac{1}{6} \quad (3)$$

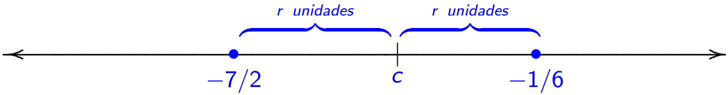
Retomando (2) tenemos:

$$\frac{|x+1|}{|2x-3|} = \frac{1}{4} \iff |x+1| = \frac{1}{4}|2x-3| \wedge x \neq \frac{3}{2} \overset{(3,\ 1)}{\iff} (x = -\frac{7}{2} \vee x = -\frac{1}{6}) \wedge x \neq \frac{3}{2}$$

Entonces

$$S = \{\in \mathbb{R} : \ \frac{|x+1|}{|2x-3|} = \frac{1}{4}\} = \{-\frac{7}{2},\ -\frac{1}{6}\}$$

$$S = \{ \in \mathbb{R} : \ \frac{|x+1|}{|2x-3|} = \frac{1}{4} \} = \{ -\frac{7}{2}, \ -\frac{1}{6} \}$$



$$c = \frac{1}{2}(-\frac{7}{2} - \frac{1}{6}) = \frac{1}{2}(\frac{-21-1}{6}) = -\frac{11}{6}$$

$$r = \frac{1}{2}(-\frac{1}{6} + \frac{7}{2}) = \frac{1}{2}(\frac{-1+21}{6}) = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

S es el conjunto de todos los puntos cuya distancia a $-\dfrac{11}{6}$ es igual a $\dfrac{5}{3}$.

Ejemplos de ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto

Veamos algunas ecuaciones e inecuaciones donde interviene el valor absoluto y utilizamos la definición para su resolución.

Ejemplo

Hallar el conjunto solución de la ecuación $\dfrac{|-3x+6|}{x-1} = 3$

Consideramos $x \neq 1$ y resolvemos $|-3x+6| = 3(x-1) = 3x-3$

Aplicamos la definición de valor absoluto a la expresión $|-3x+6|$

$$|-3x+6| = \begin{cases} -3x+6 & \text{si} \quad -3x+6 \geq 0 \\ -(-3x+6) & \text{si} \quad -3x+6 < 0 \end{cases} \qquad (1)$$

$|-3x+6| = 3x-3 \iff$

$[(|-3x+6| = 3x-3 \ \wedge \ -3x+6 \geq 0) \ \vee \ (|-3x+6| = 3x-3 \ \wedge \ -3x+6 < 0)] \overset{(1)}{\iff}$

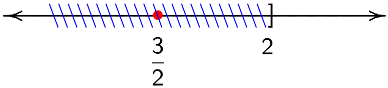
$\iff [(-3x+6 = 3x-3 \wedge -3x+6 \geq 0) \vee (-(-3x+6) = 3x-3 \wedge -3x+6 < 0)] \iff$

$$\Longleftrightarrow [(-3x+6 = 3x-3 \wedge -3x+6 \geq 0) \vee (-(-3x+6) = 3x-3 \wedge -3x+6 < 0)] \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow [(-3x + -3x = -3-6 \ \wedge \ -3x \geq -6) \vee (3x-6) = 3x-3 \ \wedge \ -3x < -6)] \Longleftrightarrow$$

$$\overset{-3<0}{\Longleftrightarrow} [(-6x = -9 \ \wedge \ x \leq 2) \ \vee \ (3x - 3x = -3+6 \ \wedge \ x > 2)] \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \ [(x = \frac{3}{2} \ \wedge \ x \leq 2) \ \vee \ (0x = 3 \ \wedge \ x > 2)] \ \Longleftrightarrow$$



$$\nexists x \in \mathbb{R} / \ 0x = 3$$

Luego, $x \in \{\frac{3}{2}\} \cup \emptyset$, entonces $x \in \{\frac{3}{2}\}$. Y como $\frac{3}{2} \neq 1$,

$$S = \{x \in \mathbb{R} : \ \frac{|-3x+6|}{x-1} = 3\} = \{\frac{3}{2}\} = [\frac{3}{2}, \ \frac{3}{2}]$$

Ejemplo

Resolver la inecuación $|2x-3| \leq x+7$ *y expresar su conjunto solución de la forma* $S = \{x \in \mathbb{R} : \; |x-c| \leq r\}$.

Si aplicamos la definición de valor absoluto a $|2x-3|$ tenemos:

$$|2x-3| = \begin{cases} 2x-3 & \text{si } \; 2x-3 \geq 0 \\ -(2x-3) & \text{si } \; 2x-3 < 0 \end{cases} \qquad (1)$$

$$|2x-3| \leq x+7 \iff$$

$$\iff [(|2x-3| \leq x+7 \;\wedge\; 2x-3 \geq 0) \;\vee\; (|2x-3| \leq x+7 \;\wedge\; 2x-3 < 0)] \overset{(1)}{\iff}$$

$$\iff [(2x-3 \leq x+7 \;\wedge\; 2x-3 \geq 0) \;\vee\; (-(2x-3) \leq x+7 \;\wedge\; 2x-3 < 0)] \iff$$

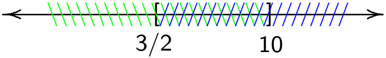
$$\iff [(2x-x \leq 7+3 \;\wedge\; 2x \geq 3) \;\vee\; (-2x+3 \leq x+7 \;\wedge\; 2x < 3)] \iff$$

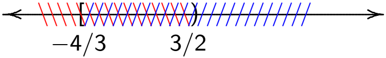
$$\iff [(x \leq 10 \;\wedge\; x \geq \frac{3}{2}) \;\vee\; (-2x-x \leq 7-3 \;\wedge\; x < \frac{3}{2})] \iff$$

Ejemplos de ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto

$$\Longleftrightarrow \; [(x \leq 10 \;\wedge\; x \geq \frac{3}{2}) \;\vee\; (-3x \leq 4 \;\wedge\; x < \frac{3}{2})] \overset{-3<0}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Longleftrightarrow \; [(x \leq 10 \;\wedge\; x \geq \frac{3}{2}) \qquad \vee \qquad (x \geq -\frac{4}{3} \;\wedge\; x < \frac{3}{2})]$$





$$S = \{x \in \mathbb{R} : \; |2x-3| \leq x+7\} = [\frac{3}{2}, \; 10] \cup [-\frac{4}{3}, \; \frac{3}{2}) = [-\frac{4}{3}, \; \frac{3}{2}) \cup [\frac{3}{2}, \; 10] = [-\frac{4}{3}, \; 10]$$

Necesitamos encontrar el centro y la semiamplitud del intervalo $[-\frac{4}{3}, \; 10]$ para poder expresar al conjunto S de la forma

$$S = \{x \in \mathbb{R} : \; |x - c| \leq r\}$$

$a = -\frac{4}{3}, \quad b = 10 \qquad c = \dfrac{-\frac{4}{3} + 10}{2} = \dfrac{13}{3}, \qquad r = \dfrac{10 - (-\frac{4}{3})}{2} = \dfrac{17}{3}$

$$S = \{x \in \mathbb{R} : \; |2x - 3| \leq x + 7\} = \{x \in \mathbb{R} : \; |x - \frac{13}{3}| \leq \frac{17}{3}\}$$

Ejemplo

Hallar los números reales que satisfacen $\dfrac{3-|x-4|}{x-4} \geq 2.$

$$|x-4| = \begin{cases} x-4 & \text{si} \quad x-4 \geq 0 \\ -(x-4) & \text{si} \quad x-4 < 0 \end{cases} \qquad (1)$$

$$[(\frac{3-|x-4|}{x-4} \geq 2 \ \wedge \ x-4 \geq 0) \ \vee \ (\frac{3-|x-4|}{x-4} \geq 2 \ \wedge \ x-4 < 0)] \overset{x \neq 4}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Longleftrightarrow [(3-|x-4| \geq 2(x-4) \ \wedge \ x-4 > 0) \ \vee \ (3-|x-4| \leq 2(x-4) \ \wedge \ x-4 < 0)] \overset{(1)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Longleftrightarrow [(3-(x-4) \geq 2(x-4) \ \wedge \ x > 4) \ \vee \ (3-(-(x-4)) \leq 2(x-4) \ \wedge \ x < 4)] \Longleftrightarrow$$

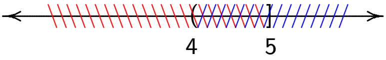
$$\Longleftrightarrow [(3-x+4 \geq 2x-8 \ \wedge \ x > 4) \ \vee \ (3+x-4 \leq 2x-8 \ \wedge \ x < 4)] \Longleftrightarrow$$

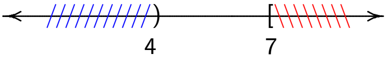
$$\Longleftrightarrow [(-3x \geq -15 \ \wedge \ x > 4) \ \vee \ (-x \leq -7 \ \wedge \ x < 4)] \overset{-3<0, \ -1<0}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Longleftrightarrow [(x \leq 5 \ \wedge \ x > 4) \ \vee \ (x \geq 7 \ \wedge \ x < 4)] \Longleftrightarrow$$

Ejemplos de ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto

$$\iff [(x \leq 5 \ \wedge \ x > 4) \quad \vee \quad (x \geq 7 \ \wedge \ x < 4)]$$





$$S = \{x \in \mathbb{R} : \ \frac{3 - |x-4|}{x-4} \geq 2\} = (4,\ 5] \cup \emptyset = (4,\ 5]$$