Matemática

Função exponencial e função logaritmo

Prof. Edson Alves

Faculdade UnB Gama

Função exponencial e função logaritmo

Número de Euler

Definição

O número de Euler é a constante e, dada por

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,71828\ldots$$

Este limite corresponde a uma taxa de juros com capitalização instantânea.

Função exponencial

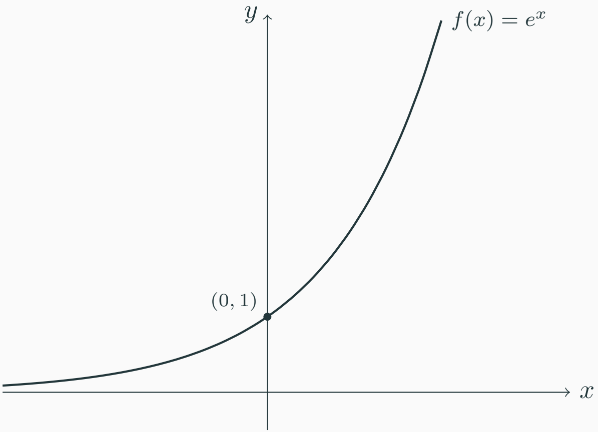
Definição

A função exponencial $\exp(x)$ é definida, para qualquer x real, por

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

Observe que imagem de $\exp(x)$ é o conjunto dos números reais positivos.

Gráfico da função exponencial



Função logaritmo

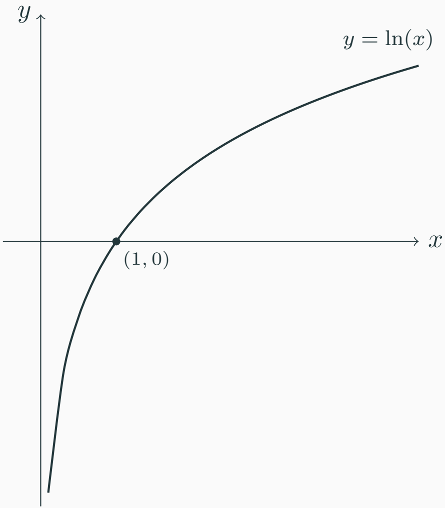
Definição

A função logaritmo $\ln(x)$ é definida, para qualquer x real positivo, por

$$\ln(x) = \log_e(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt$$

Observe que, se $0 < x < 1$, então $\ln x < 0$, por conta da inversão dos limites de integração.

Gráfico da função logaritmo



Relação entre as funções exponencial e logaritmo

- Embora sejam definidas em contextos distintos (limite no caso da exponencial, integral no caso do logaritmo), ambas funções estão profundamente relacionadas
- De fato, ambas são mutuamente inversas, isto é, $\ln e^x = x$ e $e^{\ln x} = x$
- Esta relação permite manipular expressões envolvendo expoentes, por meio das propriedades das exponenciais e dos logaritmos

Aplicação: Derivada da função exponencial

- Considere a seguinte equação diferencial: $y'(x) = y(x)$, com $y(0) = 1$
- Uma solução desta equação é uma função que coincide com sua derivada
- Esta equação pode ser reescrita como

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = 1$$

- Integrando em ambos lados segue que

$$\ln y(x) = x + C$$

Aplicação: Derivada da função exponencial

- Aplicando a exponencial em ambos lados obtém-se

$$y(x) = e^{\ln y(x)} = e^{x+C} = e^C e^x$$

- Do fato que $y(0) = 1$ segue que $e^C = 1$ e, portanto, que $y(x) = e^x$
- Ou seja, a derivada da função exponencial é a própria exponencial
- Uma consequência imediata deste fato é que

$$\int e^u du = e^u + C$$

Aplicação: Primeiros dígitos de uma exponenciação

- É possível determinar os primeiros dígitos do resultado de uma exponencial da forma a^k em uma base b dada, com $a > 0$ e $b > 1$
- Observe que

$$a^k = b^{\log_b a^k} = b^{k \log_b a}$$

- Seja $r = \lfloor k \log_b a \rfloor$ e $s = k(\log_b a) - r$. Daí

$$a^k = b^{k \log_b a} = b^{r+s}$$

Aplicação: Primeiros dígitos de uma exponenciação

- Como r é inteiro positivo, b^r adiciona r zeros ao final da representação de a^k em base b
- Assim, os dígitos não-nulos de a^k provém de a^s
- Por exemplo, $2^{80} = 1208925819614629174706176$ e $80 \log_{10} 2 = 24.082399653118497$
- Daí, $s = 0.082399653118497$ e

$$10^{0.082399653118497} = 1.2089258196146322$$

Aplicação: Meia-vida

- A meia-vida é o tempo necessário para desintegrar metade da massa de um radioisótopo
- Se a massa inicial é M_0 e o decaimento é exponencial, a massa no instante t é dada por

$$M(t) = M_0 e^{kt},$$

onde k é uma constante que depende do material

- Assim, a meia-vida seria o instante $t_{1/2}$ tal que

$$M(t_{1/2}) = \frac{M_0}{2} = M_0 e^{kt_{1/2}}$$

Aplicação: Meia-vida

- Aplicando o logaritmo em ambas expressões obtém-se

$$\ln M_0 - \ln 2 = \ln M_0 + kt_{1/2}$$

- Assim,

$$t_{1/2} = -\frac{\ln 2}{k}$$

- Veja que esta expressão permite computar a constante k se a meia-vida for conhecida

Série da função exponencial

Proposição

A função exponencial pode ser expandida na série de potências

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Esta série converge para qualquer x real.

Série da função logaritmo

Proposição

A função logaritmo deslocada pode ser expandida na série de potências

$$\ln(x+1) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{x^i}{i} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Esta série converge apenas no intervalo $-1 < x < 1$.

Exponenciais complexas

- Por meio da manipulação das séries de potência de $e^x, \cos x$ e $\sin x$ é possível mostrar que, para um número complexo $a + bi$, que

$$e^{a+bi} = e^a e^{bi} = e^a(\cos b + i \sin b)$$

- Desta igualdade surge a identidade de Euler, considerada a mais bela de toda matemática:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Referências

1. **Nabla**. Series, acesso em 24/02/2021.
2. **Wikipédia**. e (mathematical constant). Acesso em 24/02/2021.
3. **Wikipédia**. Exponential function. Acesso em 24/02/2021.
4. **Wikipédia**. Logarithm. Acesso em 24/02/2021.