Análise Combinatória

Combinações

Prof. Edson Alves

Faculdade UnB Gama

Sumário

Combinações

Definição

Definição de combinação

Seja A um conjunto com n elementos distintos e p um inteiro não negativo tal que $p \leq n$. Uma **combinação** deste n elementos, tomados p a p, consiste em uma escolha de p elementos distintos dentre os n possíveis, onde cada combinação difere das demais pela qualidade dos elementos, mas não pela ordem.

Notação: $C(n, p)$

Por exemplo, se $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $p = 2$, há 6 combinações distintas, a saber:

$$12, 13, 14, 23, 24, 34$$

Cálculo de $C(n, p)$

- Se $p < 0$, então $C(n, p) = 0$
- Nos demais casos, $C(n, p)$ pode ser computado a partir de $A(n, p)$: basta contar, como apenas um, todos os arranjos que diferem apenas pela ordem de seus elementos
- Como p elementos distintos geram $p!$ arranjos distintos, segue que

$$C(n, p) = \frac{A(n, p)}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \binom{n}{p}$$

Caracterização das combinações

- Assim como feito com as permutações e com os arranjos, as combinações também podem ser caracterizadas por meio de uma analogia com um sorteio de bolas
- Neste sentido, uma combinação $C(n, p)$ corresponderia a retira de p bolas dentre as n bolas distintas contidas em uma caixa, sem reposição, onde a ordem das bolas não é relevante
- Assim, as retiradas $123, 321$ e 213, por exemplo, seriam todas consideradas uma mesma combinação, uma vez que a qualidade das bolas é a mesma, embora tenha sido retiradas em ordens distintas

Coeficientes binomiais

Coeficientes binomiais

Definição de coeficiente binomial

Sejam n e p dois inteiros não-negativos tais que $n \geq p$. O coeficiente binomial é dado por

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$$

Implementação dos coeficientes binomiais

- Na prática, pode ser que o valor de $\binom{n}{p}$ possa ser armazenado em uma variável inteira, mas o cálculo dos fatoriais envolvidos no numerador e no denominador pode resultar em um *overflow*
- Há duas maneiras de contornar este problema: por cancelamento ou por recorrência
- A ideia do cancelamento é que, embora seja representado na forma de fração, $\binom{n}{p}$ é sempre um número inteiro
- Assim, é possível realizar os cancelamentos devidos antes de multiplicar os fatores restantes

Implementação dos binomiais por cancelamento

```
long long binom(int n, int m, const vector<long long>& primes)
{
    if (n < m)
        return 0;

    long long res = 1;

    for (auto p : primes) {
        if (p > n)
            break;

        for (int k = E(n, p) - E(m, p) - E(n - m, p); k > 0; --k)
            res *= p;
    }

    return res;
}
```

Triângulo de Pascal

- Os números binomiais surgem nas expansões do monômio $(a+b)^n$, para n não-negativo
- Estas expansões formam o Triângulo de Pascal:

```
1
1   1
1   2   1
1   3   3   1
1   4   6   4   1
1   5  10  10   5   1
...
```

- A observação cuidadosa deste triângulo permite definir os coeficientes binomiais recursivamente

Definição recursiva dos coeficientes binomiais

- Sejam n e m inteiros não-negativos. Então os casos-base da recursão são

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

- A transição é dada por

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$$

Implementação dos coeficientes binomiais por DP

```cpp
long long binom(int n, int m)
{
    vector<vector<long long>> dp(n + 1, vector<long long>(n + 1, 0));

    for (int i = 0; i <= n; ++i)
    {
        dp[i][0] = dp[i][i] = 1;

        for (int j = 1; j < i; ++j)
            dp[i][j] = dp[i - 1][j] + dp[i - 1][j - 1];
    }

    return dp[n][m];
}
```

Redução da complexidade de memória

- A implementação acima tem complexidade $O(n^2)$ para execução e para memória
- É possível reduzir o uso de memória para $O(m)$ através de uma implementação cuidadosa, que se vale das propriedades da recorrência
- A ideia central é computar os coeficientes de cada linha da direita para a esquerda, uma vez que o coeficiente da próxima linha é computado a partir do coeficiente que ocupa a mesma posição na linha anterior e o coeficiente da linha anterior na posição anterior

Implementação dos coeficientes binomiais em $O(nm)$ memória $O(m)$

```
long long binom(int n, int m)
{
    if (m > n)
        return 0;

    vector<long long> dp(m+1, 0);
    dp[0] = 1;

    for(int i = 1; i <= n; ++i)
        for(int j = m; j > 0; --j)
            dp[j] = dp[j] + dp[j - 1];

        return dp[m];
}
```

Propriedades dos coeficientes binomiais

- Combinações complementares (permite a redução do espaço de memória em 50%):
$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$
- Soma de uma linha (consequência da expansão do binômio $(1+1)^n$):
$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Propriedades dos coeficientes binomiais

- Soma alternada de uma linha (consequência da expansão do binômio $(1-1)^n$):

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$$

- Soma de uma coluna, com $n \geq p$ (*Hockey-Stick Identity*):

$$\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + \ldots + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

Identidades úteis

- Soma de uma linha com coeficientes lineares:

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

- Soma de uma linha com coeficientes quadráticos:

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} = (n^2 + n)2^{n-2}$$

Identidades úteis

- Soma dos quadrados dos coeficientes de uma linha:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

- Se $F(n)$ é o n-ésimo número de Fibonacci, vale que

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k} = F(n+1)$$

Equações lineares com coeficientes unitários

Equações lineares com coeficientes unitários

- Considere, para r natural e n inteiro, a equação linear dada por

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_r = n$$

- Quando as variáveis x_i pertencem aos reais, racionais ou inteiros, a equação tem infinitas soluções
- O número de soluções, porém, é finito, ou mesmo pode não existir solução, caso as variáveis estejam restritas aos inteiros positivos

Barras e estrela

- De fato, se $n < r$, a equação não tem solução nos inteiros positivos
- Para $n \geq r$, o valor n pode ser escrito como

$$n = 1 + 1 + 1 + \ldots + 1$$

- Cada solução pode ser construída substituindo-se $r - 1$ dentre os símbolos '+' da soma anterior por barras verticais'
- A soma resultante à esquerda de cada uma das barras, e à direita da última, corresponde aos valores das r variáveis x_i
- Esta estratégia é conhecida como barras e estrelas (*stars and bars*)

Soluções, restritas aos positivos, das equações lineares com coeficientes unitários

- Cada uma das soluções nos inteiros positivos corresponde a um posicionamento distinto das barras
- Assim, o total de soluções é dado por

$$S = C(n-1, r-1) = \binom{n-1}{r-1}$$

- Ou seja, basta tomar $r-1$ dentre os $n-1$ símbolos '+'

Equações lineares com coeficientes unitários restritas aos não-negativos

- Caso as variáveis x_i possam assumir também o valor zero, o novo total de soluções pode ser determinado por meio de uma mudança de variáveis
- Considere a equação abaixo, com r e n positivos e $x_i \geq 0$:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_r = n$$

- Fazendo $y_i = x_i + 1$, isto é, $x_i = y_i - 1$, obtém-se a equação equivalente

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_r = n + r, \quad y_i \geq 1$$

Soluções das equações lineares com coeficientes unitários restritas aos não-negativos

Assim, o número de soluções da equação original, restrito aos inteiros não-negativos, é dado por $C(n+r-1, r-1)$, ou sua combinação complementar, $C(n+r-1, n)$.

Por exemplo,

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10$$

tem

$$C(10-1, 3-1) = C(9, 2) = 36$$

soluções nos inteiros positivos, e

$$C(10+3-1, 3-1) = C(12, 2) = 66$$

soluções nos inteiros não-negativos.

Combinações com repetição

Definição de combinação com repetição

Uma combinação com repetição de n elementos distintos, tomados p a p, é um escolha de p objetos, dentre os n possíveis, onde cada objeto pode ser escolhido até p vezes.

Notação: $CR(n, p)$

Cálculo de $CR(n, p)$

- Seja x_i a quantidade de vezes que o objeto i foi escolhido em uma combinação, com $0 \leq x_i \leq p$
- Então o número de combinações com repetição de n elementos tomados p a p será igual ao número de soluções da equação

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = p$$

- Conforme visto anteriormente,

$$CR(n, p) = C(p + n - 1, n - 1) = C(p + n - 1, p)$$

Caracterização das combinações com repetições

- A combinação com repetição é o primeiro de quatro problemas fundamentais de contagem
- Estes problemas tratam da questão de se distribuir n bolas em p caixas
- Na combinação com repetições, as n bolas são idênticas e as p caixas são distintas
- Observe que, nesta analogia, uma ou mais caixas podem ficar vazias ($x_i \geq 0$)

Referências

1. **SANTOS**, José Plínio O., **MELLO**, Margarida P., **MURARI**, Idani T. *Introdução à Análise Combinatória*, Editora Ciência Moderna, 2007.