

Paradigmas de Solução de Problemas

Divisão e Conquista – Transformada Rápida de Fourier

Prof. Edson Alves - UnB/FGA

2020

1. Transformada de Fourier
2. Transformada Rápida de Fourier
3. Referências

Transformada de Fourier

Série de Fourier

- Uma série de Fourier consiste na expansão de uma função periódica $f(x)$ em termos de senos e cosenos
- Isto possível porque as funções $\sin(mx)$ e $\sin(ny)$ são ortogonais para $m \neq n$ no intervalo $[-\pi, \pi]$:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \cos(nx) dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = 0\end{aligned}$$

- Para $m = n$, segue que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(mx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(mx) dx = \pi$$

- Deste modo,

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx),$$

onde

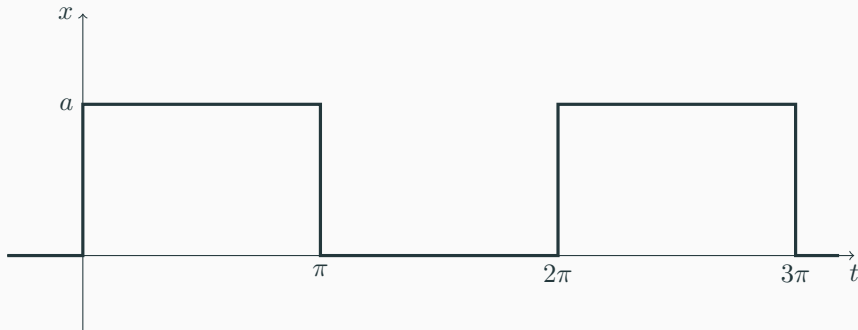
$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

Exemplo: Onda Quadrada

Considere a onda quadrada $x(t) = a \operatorname{sign}(\sin(t))$:



Exemplo: Onda Quadrada

- O coeficiente a_0 é dado por

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} a dt = a$$

- Os coeficientes a_n , para $n \geq 1$, são todos iguais a zero, pois

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt = \frac{a}{\pi} \left[\frac{\sin(nt)}{n} \right]_0^{\pi} = 0$$

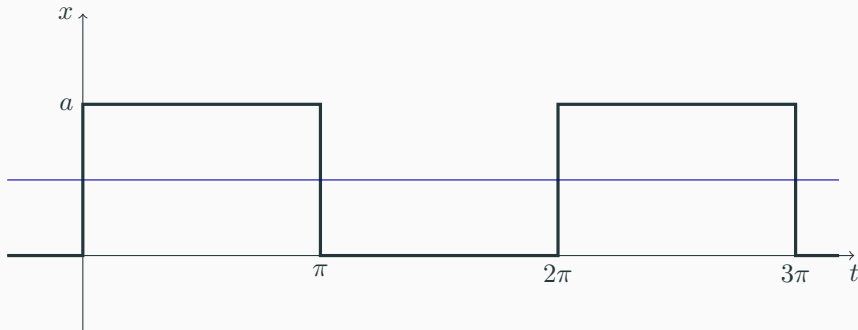
- Os coeficientes b_n são iguais a zero, para n par, e

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt = -\frac{a}{\pi} \left[\frac{\cos(nt)}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{2a}{n\pi},$$

se n é ímpar

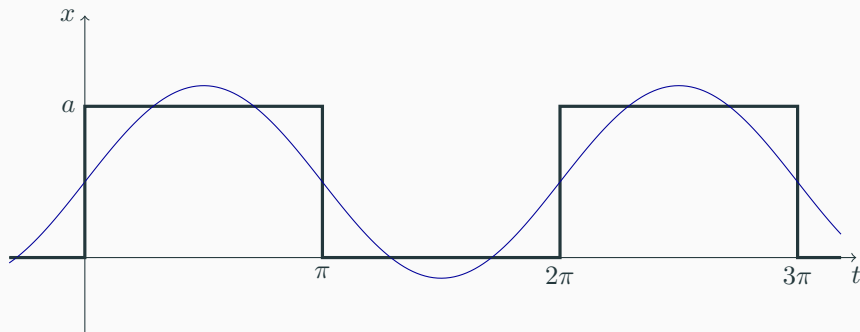
Exemplo: Aproximação da onda quadrada com $n = 0$

Considere a onda quadrada $x(t) = a \operatorname{sign}(\sin(t))$:



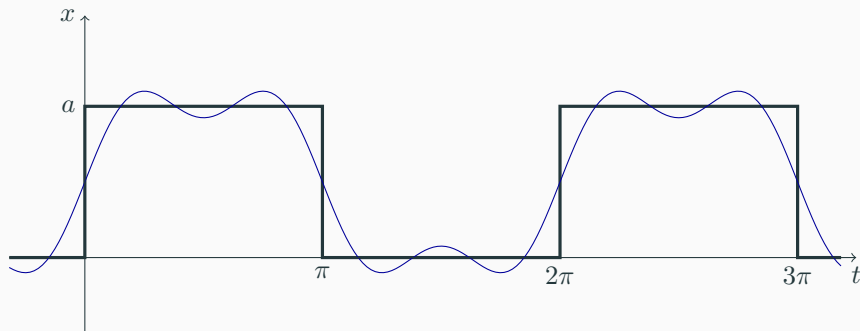
Exemplo: Aproximação da onda quadrada com $n = 1$

Considere a onda quadrada $x(t) = a \operatorname{sign}(\sin(t))$:



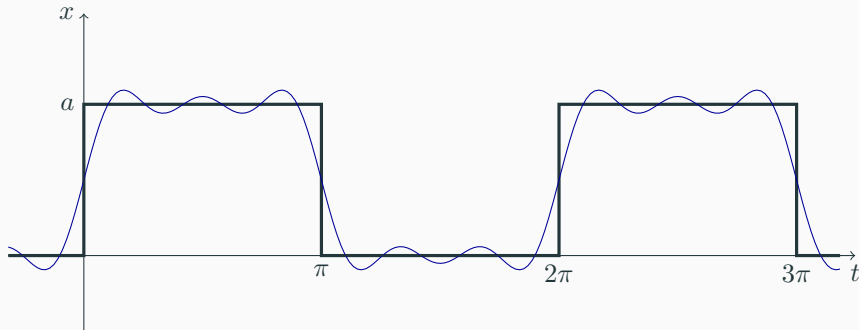
Exemplo: Aproximação da onda quadrada com $n = 3$

Considere a onda quadrada $x(t) = a \operatorname{sign}(\sin(t))$:



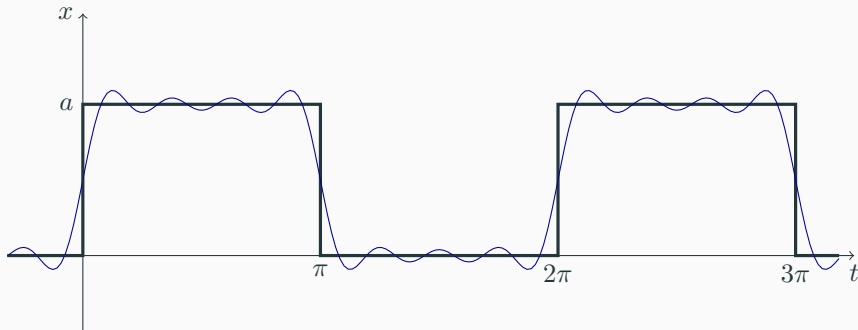
Exemplo: Aproximação da onda quadrada com $n = 5$

Considere a onda quadrada $x(t) = a \operatorname{sign}(\sin(t))$:



Exemplo: Aproximação da onda quadrada com $n = 7$

Considere a onda quadrada $x(t) = a \operatorname{sign}(\sin(t))$:



Transformada Rápida de Fourier

Referências

1. **CHEEVER**, Erick. [The Fourier Series](#), acesso em 12/08/2020.
2. Wolfram. [Fourier Series](#), acesso em 12/08/2020.