

# Matemática

*Sequências e Séries*

Prof. Edson Alves  
Faculdade UnB Gama

# Definição de sequência e subsequência

Uma sequência  $a_n$  é uma função cujo domínio é um subconjunto  $A$  dos números naturais.

Uma subsequência  $b_n$  de  $a_n : A \rightarrow X$  é uma sequência  $b_n : B \subset A \rightarrow X$  tal que  $b_i = a_i$  para todos  $i \in B$ .

# Monotonicidade

Uma sequência  $a_n$  é monotamente crescente, ou não-decrescente, se  $a_{i+1} \geq a_i$  para todos  $i \in A$ .

Uma sequência  $a_n$  é monotamente decrescente, ou não-crescente, se  $a_{i+1} \leq a_i$  para todos  $i \in A$ .

# Sequência aritmética

Uma sequência (ou progressão) aritmética é uma sequência cuja diferença entre dois termos consecutivos é constante. Esta diferença recebe o nome de **razão** da progressão aritmética.

# Termo geral da progressão aritmética

O  $k$ -ésimo termo de uma progressão aritmética  $a_n$  de razão  $r$  é dado por

$$a_k = a_1 + (k - 1)r,$$

onde  $a_1$  é o primeiro termo da sequência.

De modo geral,

$$a_k = a_m + (k - m)r,$$

onde  $a_m$  é o  $m$ -ésimo elemento.

# Sequência geométrica

Uma sequência (ou progressão) geométrica é uma sequência cuja quociente entre dois termos consecutivos é constante. Este quociente recebe o nome de **razão** da progressão geométrica.

# Termo geral da progressão geométrica

O  $k$ -ésimo termo da progressão geométrica  $a_n$  de razão  $q$  é dado por

$$a_k = a_1 q^{k-1},$$

onde  $a_1$  é o primeiro termo da progressão.

# Séries

O  $k$ -ésimo termo da série  $S_n$  é determinado pela soma dos primeiros  $k$  termos de uma sequência  $a_n$ , isto é

$$S_k = \sum_{i=1}^k a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_k$$



# Série da progressão aritmética

O  $k$ -ésimo termo da série definida pela progressão aritmética  $a_n$  de razão  $r$  é dado por

$$S_k = \frac{k(a_1 + a_k)}{2}$$

Esta expressão pode ser deduzida através da soma das expressões

$$S_k = a_1 + (a_1 + r) + (a_1 + 2r) + \dots + (a_1 + (k - 1)r)$$

$$S_k = (a_k - (k - 1)r) + (a_k - (k - 2)r) + \dots + (a_k - r) + a_k$$

# Série da progressão geométrica

O  $k$ -ésimo termo da série definida pela progressão geométrica  $a_n$  de razão  $q$  é dado por

$$S_k = \frac{a_1(1 - q^k)}{1 - q}$$

Esta expressão pode ser deduzida através da diferença das expressões

$$\begin{aligned} S_k &= a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{k-1} \\ qS_k &= a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \dots + a_1 q^k \end{aligned}$$

# Soma da progressão geométrica infinita

Se  $a_n$  é uma progressão geométrica de razão  $|q| = 1$ , então a série  $S_n$  converge para o limite  $S$  quando  $n$  tende ao infinito, onde

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{a_1}{1 - q}$$

# Séries notáveis

Soma dos  $n$  primeiros naturais:

$$S_n = \sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Soma dos quadrados dos  $n$  primeiros naturais:

$$S_n = \sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

# Séries notáveis

Soma dos cubos dos  $n$  primeiros naturais:

$$S_n = \sum_{i=1}^n i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

Soma dos  $n$  primeiros ímpares:

$$S_n = \sum_{i=1}^n 2i - 1 = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

# Série de Newton

A série de Newton é formada pelos termos da equação de diferenças finitas de Newton. Ela consiste em uma versão discreta da série de Taylor:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k[f](a)}{k!} (x - a)_k,$$

onde

$$\Delta^k[f](a) = \Delta(\Delta^{k-1}[f](a)), \quad \Delta^1[f](a) = \Delta[f](a) = f(x+1) - f(x)$$

e

$$x_k = x(x-1)(x-2) \dots (x-k+1)$$

# Representação de sequências arbitrárias por meio de polinômios

A série de Newton pode ser utilizada para obter um polinômio  $p(x)$  que gera uma sequência finita  $a_n$  qualquer. Por exemplo, seja  $a_n = 3, 7, 13, 21, 31$ . O quadro abaixo computa as diferenças finitas para esta sequência.

$x$	$f = \Delta^0$	$\Delta^1$	$\Delta^2$	$\Delta^3$
1	3			
2	7	4		
3	13	6	2	
4	21	8	2	0
5	31	10	2	0

# Exemplo de representação de sequências arbitrárias por meio de polinômios

Conforme pode ser observado,  $\Delta^k = 0$  para todo  $k > 2$ . Isto significa que a sequência  $a_n$  pode ser representada por um polinômio de grau 2. Este polinômio pode ser obtido por meio da substituição dos termos  $\Delta$  da fórmula apresentada (em itálico na tabela):

$$\begin{aligned} f(x) &= \Delta^0 \cdot 1 + \Delta^1 \cdot \frac{(x-1)_1}{1!} + \Delta^2 \cdot \frac{(x-1)_2}{2!} \\ &= 3 \cdot 1 + 4(x-1) + 2 \cdot \frac{(x-1)(x-2)}{2} \\ &= x^2 + x + 1 \end{aligned}$$



# Problemas

- Codeforces
  1. [51D - Geometrical Problem](#)
  2. [255C - Almost Arithmetic Progression](#)
  3. [382C - Arithmetic Progression](#)
  4. [567C - Geometric Progression](#)
  5. [789B - Masha and Geometric Depression](#)

# Referências

1. Byju's Classes. [Sequence And Series](#). Acesso em 03/02/2021.
2. Wikipédia. [Arithmetic progression](#). Acesso em 03/02/2021.
3. Wikipédia. [Finite Difference](#). Acesso em 03/02/2021.
4. Wikipédia. [Geometric progression](#). Acesso em 03/02/2021.
5. Wikipédia. [Sequence](#). Acesso em 03/02/2021.