

# Geometria Computacional

Retas e Vetores: problemas resolvidos

---

Prof. Edson Alves

2018

Faculdade UnB Gama

1. Codeforces Beta Round #7 – Problem C: Line

## **Codeforces Beta Round #7 – Problem C: Line**

---

# Problema

A line on the plane is described by an equation  $Ax + By + C = 0$ . You are to find any point on this line, whose coordinates are integer numbers from  $-5 \cdot 10^{18}$  to  $5 \cdot 10^{18}$  inclusive, or to find out that such points do not exist.

## Input

The first line contains three integers  $A$ ,  $B$  and  $C$  ( $-2 \cdot 10^9 \leq A, B, C \leq 2 \cdot 10^9$ ) – corresponding coefficients of the line equation. It is guaranteed that  $A^2 + B^2 > 0$ .

## Output

If the required point exists, output its coordinates, otherwise output -1.

## Exemplo de entradas e saídas

### Sample Input

2 5 3

### Sample Output

6 -3

## Observações sobre o problema

- A condição  $A^2 + B^2 > 0$  indica que ambos coeficientes não são ambos nulos, de modo que as retas da entrada não são degeneradas
- Os limites do problema impedem uma solução por busca completa (seriam, no pior caso, mais de  $10^{19}$  candidatos para o valor de  $x$ )
- A equação geral da reta pode ser reescrita como

$$Ax + By = -C$$

- Ainda assim, são duas variáveis para uma única equação. Como proceder neste caso?
- Esta é, na verdade, uma equação diofantina
- Equações diofantinas são equações cujas soluções deve ser inteiras

# Equações Diofantinas Lineares

- A equação diofantina linear, com duas variáveis  $x$  e  $y$ , são as mais comuns, e já foram amplamente estudadas
- Para que tal equação tenha solução, o maior divisor comum  $d = (A, B)$  de  $A$  e  $B$  deve dividir também o coeficiente  $C$
- Para encontrar uma solução, caso exista, deve ser utilizado o algoritmo de Euclides estendido
- Ele decorre do fato de que se  $A = Bq + r$ , com  $0 \leq r < B$ , então  $d = (A, B) = (B, r)$ , que  $(A, 0) = |A|$ , e que existem  $x_0, y_0$  inteiros tais que  $d = Ax_0 + By_0$
- No caso base,  $d = |A|, x_0 = \pm 1, y_0 = 0$ , onde o sinal de  $x_0$  é igual ao sinal de  $A$
- No caso geral,  $Ax_0 + By_0 = Bx_1 + ry_1$ , o que nos dá

$$x_0 = y_1, \quad y_0 = x_1 - qy_1,$$

pois  $r = A - Bq$

- Daí  $x = kx_0, y = ky_0$ , onde  $k = -C/d$



## Solução AC com complexidade $O(\log(A + B))$

```
1 #include <iostream>
2
3 using ll = long long;
4
5 ll ext_gcd(ll a, ll b, ll& x, ll& y)
6 {
7     if (b == 0)
8     {
9         x = 1;
10        y = 0;
11        return a;
12    }
13
14    ll x1, y1, d = ext_gcd(b, a % b, x1, y1);
15
16    x = y1;
17    y = x1 - y1*(a / b);
18
19    return d;
20 }
21
```

## Solução AC com complexidade $O(\log(A + B))$

```
22 int main()
23 {
24     ll A, B, C;
25     std::cin >> A >> B >> C;
26
27     ll x, y, d = ext_gcd(A, B, x, y);
28
29     if (C % d)
30     {
31         std::cout << -1 << '\n';
32         return 0;
33     }
34
35     ll k = -C / d;
36     x *= k;
37     y *= k;
38
39     std::cout << x << " " << y << '\n';
40
41     return 0;
42 }
```

1. Codeforces Beta Round #7 – Problem C: Line