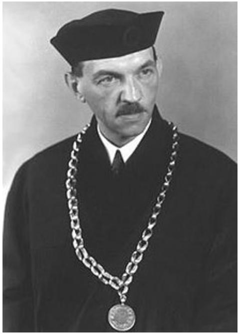
Grafos

Algoritmo de Prim

Prof. Edson Alves

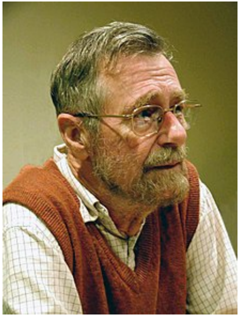
Faculdade UnB Gama

Proponentes



Vojtěch Jarník
(1930)

Robert Clay Prim
(1957)



Edsger Wybe Dijkstra
(1959)

Características do algoritmo de Prim

Características do algoritmo de Prim

- O algoritmo de Prim encontra uma MST usando uma abordagem gulosa

Características do algoritmo de Prim

- $\star$ O algoritmo de Prim encontra uma MST usando uma abordagem gulosa
- $\star$ Um vértice u é escolhido para iniciar um componente conectado C

Características do algoritmo de Prim

- $\star$ O algoritmo de Prim encontra uma MST usando uma abordagem gulosa
- $\star$ Um vértice u é escolhido para iniciar um componente conectado C
- $\star$ Enquanto $C \neq V$, deve se identificar o vértice $u \notin C$ mais próximo de C

Características do algoritmo de Prim

- ⋆ O algoritmo de Prim encontra uma MST usando uma abordagem gulosa
- ⋆ Um vértice u é escolhido para iniciar um componente conectado C
- ⋆ Enquanto $C \neq V$, deve se identificar o vértice $u \notin C$ mais próximo de C
- ⋆ Então u é inserido em C e a aresta que uniu u a C faz parte de uma MST

Características do algoritmo de Prim

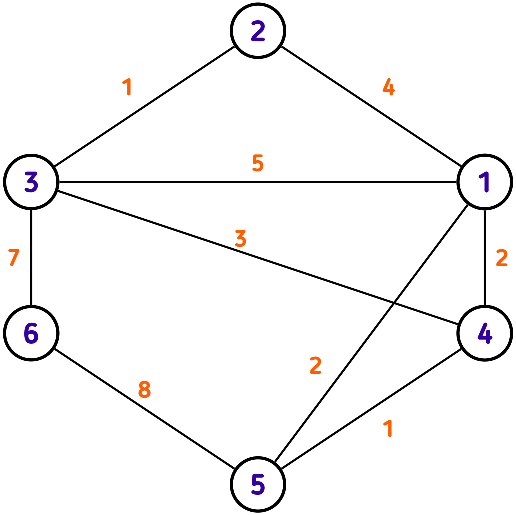
- ⋆ **O algoritmo de Prim encontra uma MST usando uma abordagem gulosa**
- ⋆ **Um vértice u é escolhido para iniciar um componente conectado C**
- ⋆ **Enquanto $C \neq V$, deve se identificar o vértice $u \notin C$ mais próximo de C**
- ⋆ **Então u é inserido em C e a aresta que uniu u a C faz parte de uma MST**
- ⋆ **Complexidade:** $O(E \log V)$

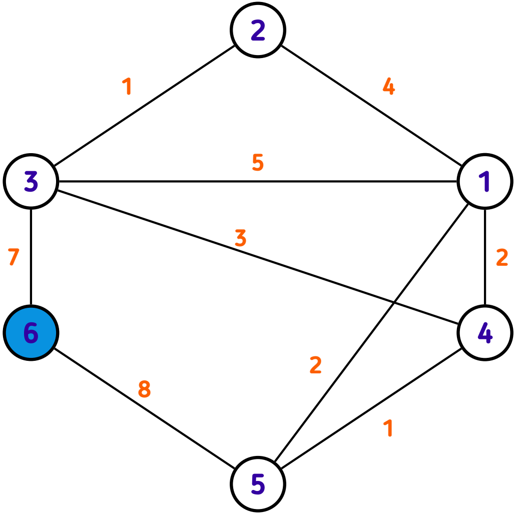
Pseudocódigo

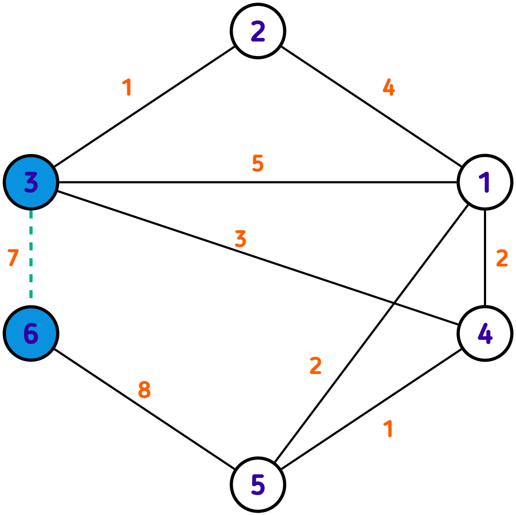
Pseudocódigo

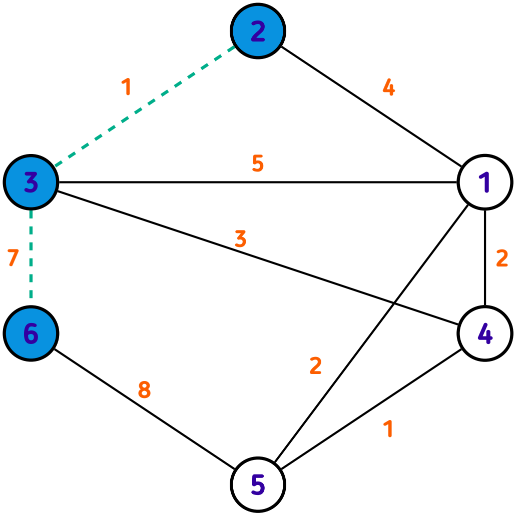
Entrada: um grafo ponderado $G(V, E)$
Saída: uma MST de G

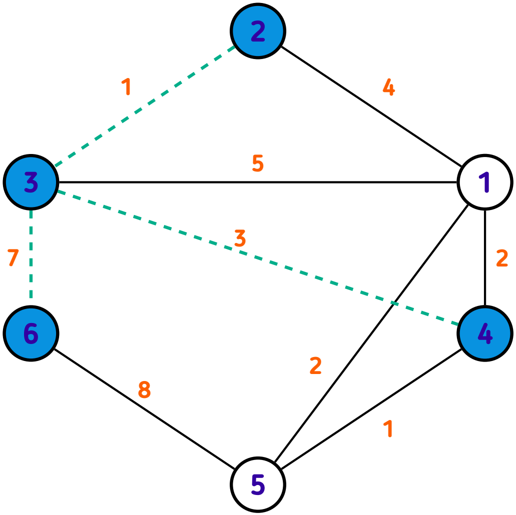
1. Escolha um vértice $u \in V$ e faça $C = \{u\}, M = \emptyset$
2. Enquanto $C \neq V$:
   (a) Escolha o vértice $v \notin C$ mais próximo de C
   (b) Inclua v em C e a aresta que une v a C em M
3. Retorne M

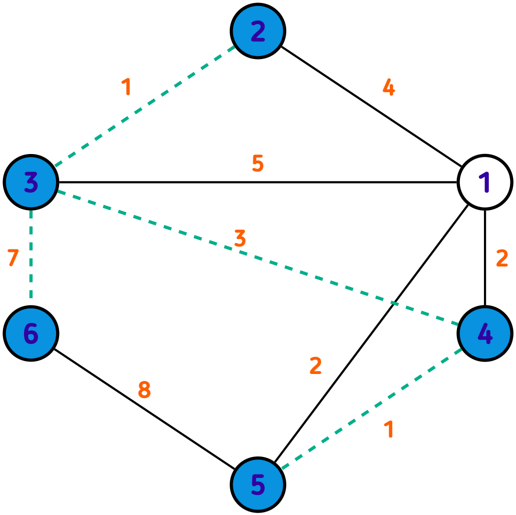

2
1
4
3
5
1
3
7
2
6
4
2
8
1
5

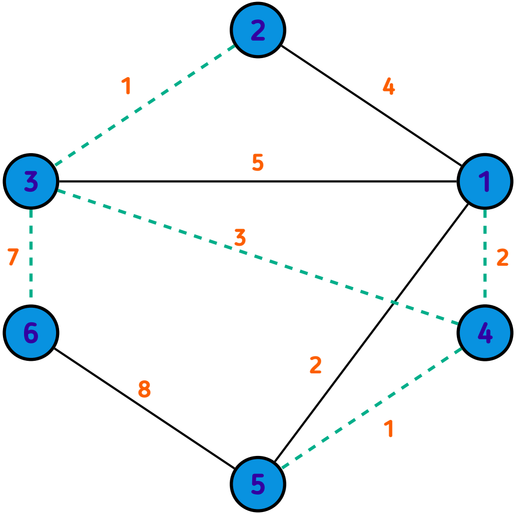

2
1
4
3
5
1
3
7
2
6
4
2
8
1
5


2
1
4
3
5
1
3
7
2
6
4
8
2
1
5


2
1
4
3
5
1
7
3
2
6
4
2
8
1
5


2
1
4
3
5
1
7
3
2
6
4
8
2
1
5


2
4
1
3
5
1
3
7
2
6
4
2
8
1
5



2
1
4
3
5
1
3
7
2
6
4
2
8
1
5

Identificação eficiente do vértice mais próximo de C

Identificação eficiente do vértice mais próximo de C

$\star$ A complexidade do algoritmo de Prim depende da identificação eficiente do vértice v mais próximo de C

Identificação eficiente do vértice mais próximo de C

$\star$ **A complexidade do algoritmo de Prim depende da identificação eficiente do vértice v mais próximo de C**

$\star$ **O vértice $v \notin C$ é o mais próximo de C se v minimiza a distância**

$$\text{dist}(v, C) = \min_{u \in C} \{ \text{ dist}(v, u) \ \}$$

Identificação eficiente do vértice mais próximo de C

$\star$ **A complexidade do algoritmo de Prim depende da identificação eficiente do vértice v mais próximo de C**

$\star$ **O vértice $v \notin C$ é o mais próximo de C se v minimiza a distância**

$$\text{dist}(v, C) = \min_{u \in C} \{ \text{dist}(v, u) \}$$

$\star$ **Uma forma de se identificar v é manter uma fila com prioridades q**

Identificação eficiente do vértice mais próximo de C

- $\star$ **Inicialmente, q estará vazia**

Identificação eficiente do vértice mais próximo de C

- $\star$ Inicialmente, q estará vazia
- $\star$ Esta fila será ordenada, de forma ascendente, pelas distâncias até C

Identificação eficiente do vértice mais próximo de C

- $\star$ Inicialmente, q estará vazia

- $\star$ Esta fila será ordenada, de forma ascendente, pelas distâncias até C

- $\star$ A cada vértice adicionado a C (inclusive o u inicial), insira em q pares (w, v), onde w o peso da aresta que une o vértice $v \notin C$ a u

Identificação eficiente do vértice mais próximo de C

- $\star$ Inicialmente, q estará vazia
- $\star$ Esta fila será ordenada, de forma ascendente, pelas distâncias até C
- $\star$ A cada vértice adicionado a C (inclusive o u inicial), insira em q pares (w, v), onde w o peso da aresta que une o vértice $v \notin C$ a u
- $\star$ O vértice mais próximo v será dado pelo par mais próximo do início da fila tal que $v \notin C$

```
int prim(int u, int N)
{
    set<int> C;
    C.insert(u);

    priority_queue<ii, vector<ii>, greater<ii>> pq;

    for (auto [v, w] : adj[u])
        pq.push(ii(w, v));

    int mst = 0;

    while ((int) C.size() < N)
    {
        int v, w;
```

```
        do {
            w = pq.top().first, v = pq.top().second;
            pq.pop();
        } while (C.count(v));

        mst += w;
        C.insert(v);

        for (auto [s, p] : adj[v])
            pq.push(ii(p, s));
    }

    return mst;
}
```

Aplicação: Minimax

Aplicação: Minimax

- Uma MST minimiza o maior peso entre as arestas presente em qualquer árvore geradora

Aplicação: Minimax

- ⋆ Uma MST minimiza o maior peso entre as arestas presente em qualquer árvore geradora

- ⋆ O problema de se minimizar tal peso é denominado *minimax*

Aplicação: Minimax

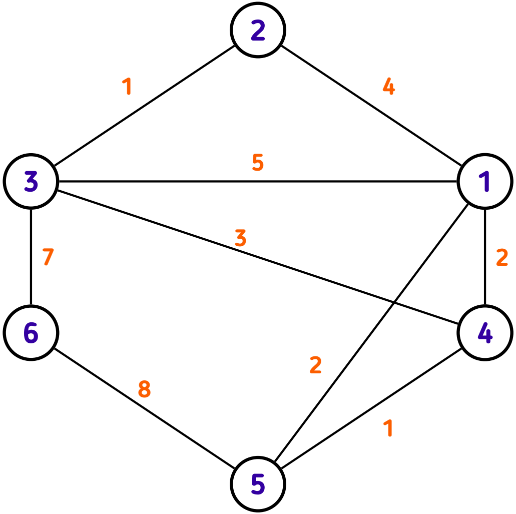
- Uma MST minimiza o maior peso entre as arestas presente em qualquer árvore geradora

- O problema de se minimizar tal peso é denominado *minimax*

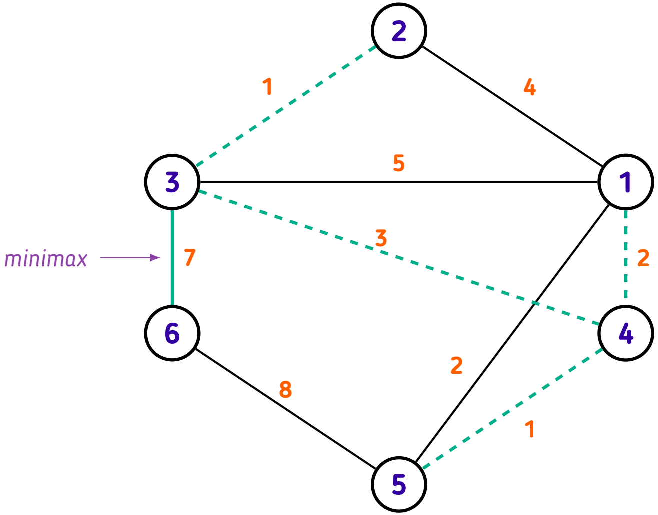
- Uma variante deste problema é o *maximin*, que maximiza o menor peso entre as arestas presentes em qualquer árvore geradora

Aplicação: Minimax

- ⋆ Uma MST minimiza o maior peso entre as arestas presente em qualquer árvore geradora
- ⋆ O problema de se minimizar tal peso é denominado *minimax*
- ⋆ Uma variante deste problema é o *maximin*, que maximiza o menor peso entre as arestas presentes em qualquer árvore geradora
- ⋆ Uma variante simples do algoritmo de Prim resolve o *minimax*



2
1
4
3
5
1
3
7
2
6
4
2
8
1
5



2
1
4
3
5
1
3
minimax
7
2
6
4
2
8
1
5

```cpp
int minimax(int u, int N)
{
    set<int> C;
    C.insert(u);

    priority_queue<ii, vector<ii>, greater<ii>> pq;

    for (auto [v, w] : adj[u])
        pq.push(ii(w, v));

    int minmax = -oo;

    while ((int) C.size() < N)
    {
        int v, w;
```

```
        do {
            w = pq.top().first, v = pq.top().second;
            pq.pop();
        } while (C.count(v));

        minmax = max(minmax, w);
        C.insert(v);

        for (auto [s, p] : adj[v])
            pq.push(ii(p, s));
    }

    return minmax;
}
```

Aplicação: Menor Subgrafo Gerador

Aplicação: Menor Subgrafo Gerador

- $\star$ **Seja $G(V, E)$ um grafo conectado e ponderado e $E' \subset E$**

Aplicação: Menor Subgrafo Gerador

- $\star$ Seja $G(V, E)$ um grafo conectado e ponderado e $E' \subset E$

- $\star$ O menor subgrafo gerador $S_{E'}$ de G é um subgrafo conectado que contém todas as arestas E' e que tem custo mínimo

Aplicação: Menor Subgrafo Gerador

- $\star$ Seja $G(V, E)$ um grafo conectado e ponderado e $E' \subset E$

- $\star$ O menor subgrafo gerador $S_{E'}$ de G é um subgrafo conectado que contém todas as arestas E' e que tem custo mínimo

- $\star$ Por conta da restrição E', $S_{E'}$, não é, necessariamente, uma MST

Aplicação: Menor Subgrafo Gerador

- $\star$ Seja $G(V, E)$ um grafo conectado e ponderado e $E' \subset E$

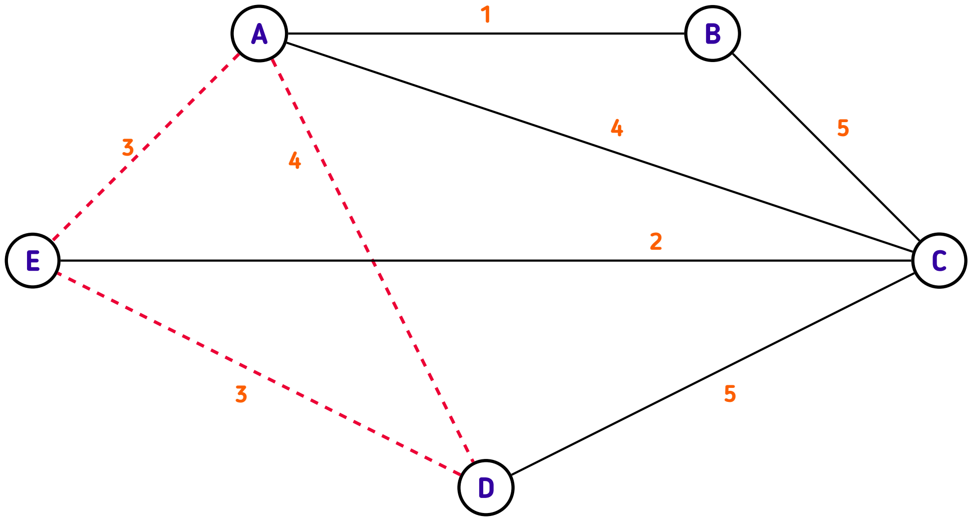
- $\star$ O menor subgrafo gerador $S_{E'}$ de G é um subgrafo conectado que contém todas as arestas E' e que tem custo mínimo

- $\star$ Por conta da restrição E', $S_{E'}$, não é, necessariamente, uma MST

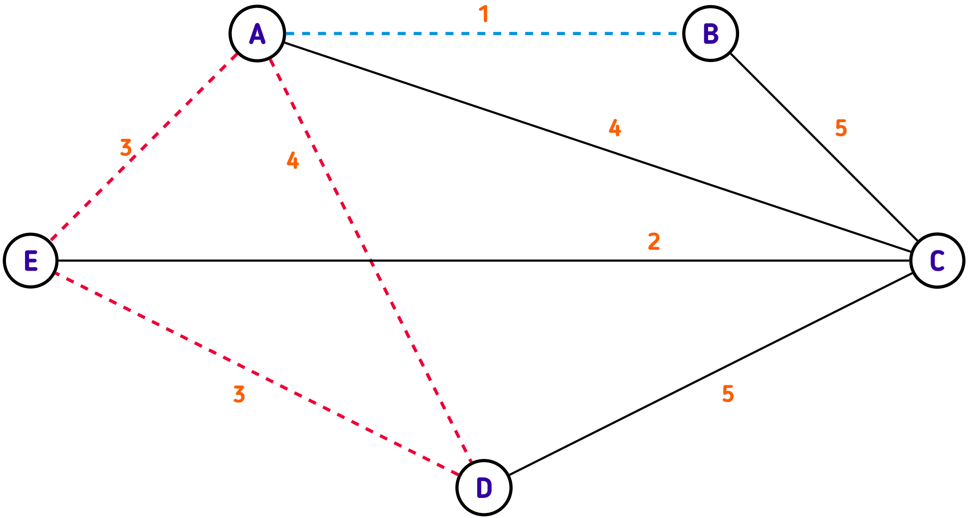
- $\star$ O menor subgrafo gerador pode ser encontrado atribuíndo a C todos os vértices ligados por alguma aresta em E' no passo inicial do algoritmo de Prim

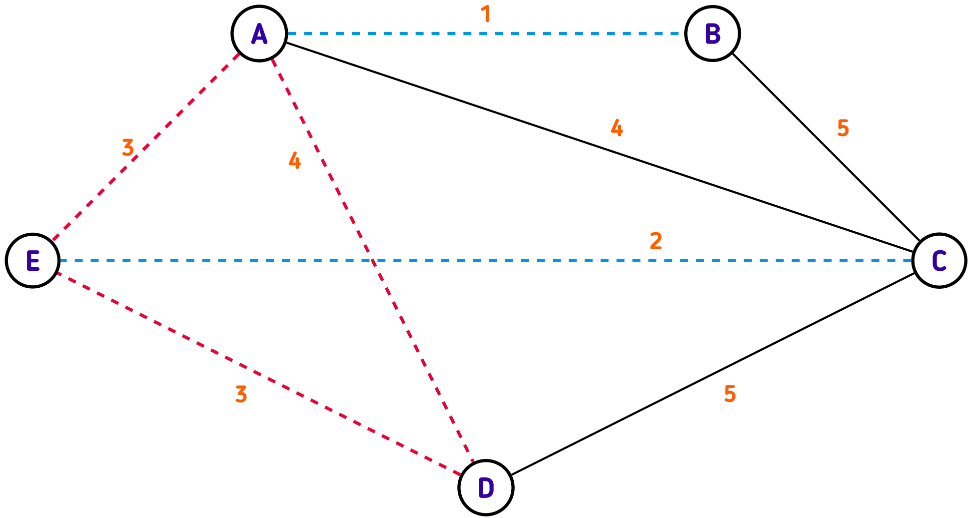
Aplicação: Menor Subgrafo Gerador

- $\star$ Seja $G(V, E)$ um grafo conectado e ponderado e $E' \subset E$
- $\star$ O menor subgrafo gerador $S_{E'}$ de G é um subgrafo conectado que contém todas as arestas E' e que tem custo mínimo
- $\star$ Por conta da restrição E', $S_{E'}$, não é, necessariamente, uma MST
- $\star$ O menor subgrafo gerador pode ser encontrado atribuíndo a C todos os vértices ligados por alguma aresta em E' no passo inicial do algoritmo de Prim
- $\star$ A complexidade é a mesma do algoritmo original



A
B
C
D
E
1
4
5
3
4
2
3
5


A
B
C
D
E
1
4
5
3
4
2
3
5


A
B
C
D
E
1
4
5
3
4
2
3
5

```cpp
int msg(int N, const vector<edge>& es)
{
    set<int> C;
    priority_queue<ii, vector<ii>, greater<ii>> pq;
    int cost = 0;

    for (auto [u, v, w] : es)
    {
        cost += w;

        C.insert(u);
        C.insert(v);

        for (auto [r, s] : adj[u])
            pq.push(ii(s, r));

        for (auto [r, s] : adj[v])
            pq.push(ii(s, r));
    }
```

```
    while ((int) C.size() < N)
    {
        int v, w;

        do {
            w = pq.top().first, v = pq.top().second;
            pq.pop();
        } while (C.count(v));

        cost += w;
        C.insert(v);

        for (auto [s, p] : adj[v])
            pq.push(ii(p, s));
    }

    return cost;
}
```

Problemas sugeridos

1. **CSES 1675 – Road Reparation**
2. **OJ 10048 – Audiophobia**
3. **OJ 10099 – Tourist Guide**
4. **SPOJ IITKWPCG – Help the old King**

Referências

1. **HALIM**, **Felix**; **HALIM**, **Steve**. *Competitive Programming 3*, **2010.**

2. **IT History Society.** *Dr. Robert Clay Prim*, **acesso em 28/08/2021.**

3. **LAAKSONEN**, **Antti**. *Competitive Programmer's Handbook*, **2018.**

4. **Wikipédia**. *Edsger Wybe Dijkstra*, **acesso em 28/08/2021.**

5. **Wikipédia**. *Prim's algorithm*, **acesso em 28/08/2021.**

6. **Wikipédia**. *Vojtěch Jarník*, **acesso em 28/08/2021.**