Geometria Computacional

Algoritmo de Graham

Prof. Edson Alves

Faculdade UnB Gama

Sumário

Algoritmo de Graham

Algoritmo de Graham

- O algoritmo de Graham (*Graham Scan*, no original), foi proposto por Ronald Graham em 1972

Algoritmo de Graham

- O algoritmo de Graham (*Graham Scan*, no original), foi proposto por Ronald Graham em 1972
- Ele inicialmente ordena todos os N pontos de P de acordo com o ângulo que eles formam com um ponto pivô fixado previamente

Algoritmo de Graham

- O algoritmo de Graham (*Graham Scan*, no original), foi proposto por Ronald Graham em 1972
- Ele inicialmente ordena todos os N pontos de P de acordo com o ângulo que eles formam com um ponto pivô fixado previamente
- A escolha padrão para o pivô é o ponto de menor coordenada y

Algoritmo de Graham

- O algoritmo de Graham (*Graham Scan*, no original), foi proposto por Ronald Graham em 1972
- Ele inicialmente ordena todos os N pontos de P de acordo com o ângulo que eles formam com um ponto pivô fixado previamente
- A escolha padrão para o pivô é o ponto de menor coordenada y
- Caso exista mais de um ponto com coordenada y mínima, escolhe-se o de maior coordenada x dentre eles

Algoritmo de Graham

- O algoritmo de Graham (*Graham Scan*, no original), foi proposto por Ronald Graham em 1972
- Ele inicialmente ordena todos os N pontos de P de acordo com o ângulo que eles formam com um ponto pivô fixado previamente
- A escolha padrão para o pivô é o ponto de menor coordenada y
- Caso exista mais de um ponto com coordenada y mínima, escolhe-se o de maior coordenada x dentre eles
- Se P é armazenado em um vetor, o algoritmo pode ser simplificado movendo-se o pivô para a primeira posição

Implementação da escolha do pivô

```
template<typename T>
class GrahamScan {
private:
    static Point<T> pivot(vector<Point<T>>& P)
    {
        size_t idx = 0;

        for (size_t i = 1; i < P.size(); ++i)
            if (P[i].y < P[idx].y or (equals(P[i].y, P[idx].y) and P[i].x > P[idx].x))
                idx = i;

        swap(P[0], P[idx]);

        return P[0];
    }
```

Ordenação dos pontos de acordo com o ângulo

- A ordem é dada, de forma crescente, pelo valor do ângulo que é formado entre um ponto e o eixo x positivo do pivô. Quando dois pontos formam um ângulo igual, a prioridade é dada ao que está mais perto do pivô

Ordenação dos pontos de acordo com o ângulo

- A ordem é dada, de forma crescente, pelo valor do ângulo que é formado entre um ponto e o eixo x positivo do pivô. Quando dois pontos formam um ângulo igual, a prioridade é dada ao que está mais perto do pivô
- Para realizar a ordenação dos pontos é preciso definir um operador booleano que receba dois pontos P e Q e retorne verdadeiro se P antecede Q de acordo com a ordenação proposta

Ordenação dos pontos de acordo com o ângulo

- A ordem é dada, de forma crescente, pelo valor do ângulo que é formado entre um ponto e o eixo x positivo do pivô. Quando dois pontos formam um ângulo igual, a prioridade é dada ao que está mais perto do pivô
- Para realizar a ordenação dos pontos é preciso definir um operador booleano que receba dois pontos P e Q e retorne verdadeiro se P antecede Q de acordo com a ordenação proposta
- Como é necessário o conhecimento do pivô para tal ordenação, há três possibilidades para a implementação deste operador:

Ordenação dos pontos de acordo com o ângulo

- A ordem é dada, de forma crescente, pelo valor do ângulo que é formado entre um ponto e o eixo x positivo do pivô. Quando dois pontos formam um ângulo igual, a prioridade é dada ao que está mais perto do pivô
- Para realizar a ordenação dos pontos é preciso definir um operador booleano que receba dois pontos P e Q e retorne verdadeiro se P antecede Q de acordo com a ordenação proposta
- Como é necessário o conhecimento do pivô para tal ordenação, há três possibilidades para a implementação deste operador:
    1. implementar o operator $<$ da classe `Point`, tornando o pivô um membro da classe para que o operador tenha acesso a ele;

Ordenação dos pontos de acordo com o ângulo

- A ordem é dada, de forma crescente, pelo valor do ângulo que é formado entre um ponto e o eixo x positivo do pivô. Quando dois pontos formam um ângulo igual, a prioridade é dada ao que está mais perto do pivô
- Para realizar a ordenação dos pontos é preciso definir um operador booleano que receba dois pontos P e Q e retorne verdadeiro se P antecede Q de acordo com a ordenação proposta
- Como é necessário o conhecimento do pivô para tal ordenação, há três possibilidades para a implementação deste operador:
    1. implementar o operator $<$ da classe `Point`, tornando o pivô um membro da classe para que o operador tenha acesso a ele;
    2. tornar o pivô uma variável global;

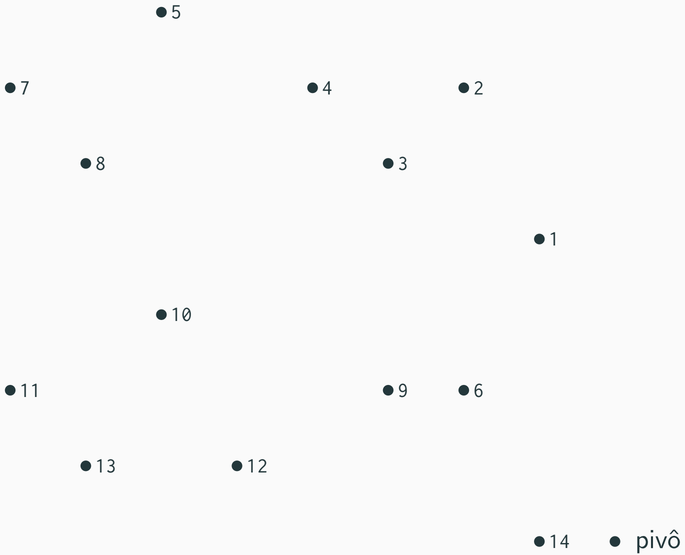
Ordenação dos pontos de acordo com o ângulo

- A ordem é dada, de forma crescente, pelo valor do ângulo que é formado entre um ponto e o eixo x positivo do pivô. Quando dois pontos formam um ângulo igual, a prioridade é dada ao que está mais perto do pivô
- Para realizar a ordenação dos pontos é preciso definir um operador booleano que receba dois pontos P e Q e retorne verdadeiro se P antecede Q de acordo com a ordenação proposta
- Como é necessário o conhecimento do pivô para tal ordenação, há três possibilidades para a implementação deste operador:
    1. implementar o operator $<$ da classe `Point`, tornando o pivô um membro da classe para que o operador tenha acesso a ele;
    2. tornar o pivô uma variável global;
    3. usar uma função lambda no terceiro parâmetro da função `sort()`, capturando o pivô por referência ou cópia

Ordenação dos pontos de acordo com o ângulo

- A ordem é dada, de forma crescente, pelo valor do ângulo que é formado entre um ponto e o eixo x positivo do pivô. Quando dois pontos formam um ângulo igual, a prioridade é dada ao que está mais perto do pivô
- Para realizar a ordenação dos pontos é preciso definir um operador booleano que receba dois pontos P e Q e retorne verdadeiro se P antecede Q de acordo com a ordenação proposta
- Como é necessário o conhecimento do pivô para tal ordenação, há três possibilidades para a implementação deste operador:
    1. implementar o operator $<$ da classe `Point`, tornando o pivô um membro da classe para que o operador tenha acesso a ele;
    2. tornar o pivô uma variável global;
    3. usar uma função lambda no terceiro parâmetro da função `sort()`, capturando o pivô por referência ou cópia
- O ângulo pode ser obtido através da função `atan2()` da biblioteca `math.h` da linguagem C/C++

Exemplo de ordenação por ângulo



Implementação da rotina de ordenação dos pontos

```cpp
static void sort_by_angle(vector<Point<T>>& P)
{
    auto P0 = pivot(P);

    sort(P.begin() + 1, P.end(), [&](const Point<T>& A, const Point<T>& B) {
        // pontos colineares: escolhe-se o mais próximo do pivô
        if (equals(D(P0, A, B), 0))
            return A.distance(P0) < B.distance(P0);

        auto alfa = atan2(A.y - P0.y, A.x - P0.x);
        auto beta = atan2(B.y - P0.y, B.x - P0.x);

        return alfa < beta;
    });
}
```

Identificação do envoltório convexo

- Após a ordenação dos pontos, o algoritmo procede empilhando três pontos de P: inicialmente os pontos cujos índices são $n - 1, 0$ e 1

Identificação do envoltório convexo

- Após a ordenação dos pontos, o algoritmo procede empilhando três pontos de P: inicialmente os pontos cujos índices são $n-1, 0$ e 1
- O invariante a ser mantido é que os três elementos do topo de pilha estão em sentido anti-horário $(D > 0)$

Identificação do envoltório convexo

- Após a ordenação dos pontos, o algoritmo procede empilhando três pontos de P: inicialmente os pontos cujos índices são $n-1, 0$ e 1
- O invariante a ser mantido é que os três elementos do topo de pilha estão em sentido anti-horário $(D > 0)$
- Para cada um dos demais pontos Q_i de P, com $i = 2, 3, \ldots, n-1$, verifica-se se este ponto mantem o sentido anti-horário com os dois elementos do topo da pilha

Identificação do envoltório convexo

- Após a ordenação dos pontos, o algoritmo procede empilhando três pontos de P: inicialmente os pontos cujos índices são $n-1, 0$ e 1
- O invariante a ser mantido é que os três elementos do topo de pilha estão em sentido anti-horário $(D > 0)$
- Para cada um dos demais pontos Q_i de P, com $i = 2, 3, \ldots, n-1$, verifica-se se este ponto mantem o sentido anti-horário com os dois elementos do topo da pilha
- Em caso afirmativo, o ponto é inserido na pilha

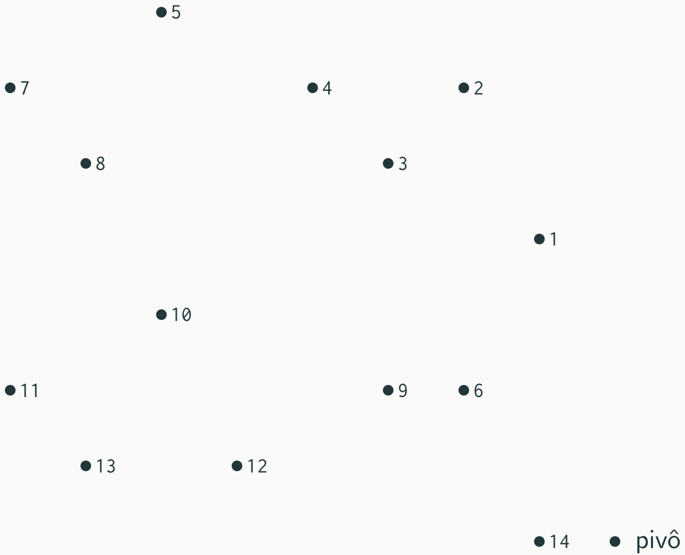
Identificação do envoltório convexo

- Após a ordenação dos pontos, o algoritmo procede empilhando três pontos de P: inicialmente os pontos cujos índices são $n - 1, 0$ e 1
- O invariante a ser mantido é que os três elementos do topo de pilha estão em sentido anti-horário $(D > 0)$
- Para cada um dos demais pontos Q_i de P, com $i = 2, 3, \ldots, n - 1$, verifica-se se este ponto mantem o sentido anti-horário com os dois elementos do topo da pilha
- Em caso afirmativo, o ponto é inserido na pilha
- Caso contrário, remove-se o topo da pilha e se verifica o invariante para Q_i novamente

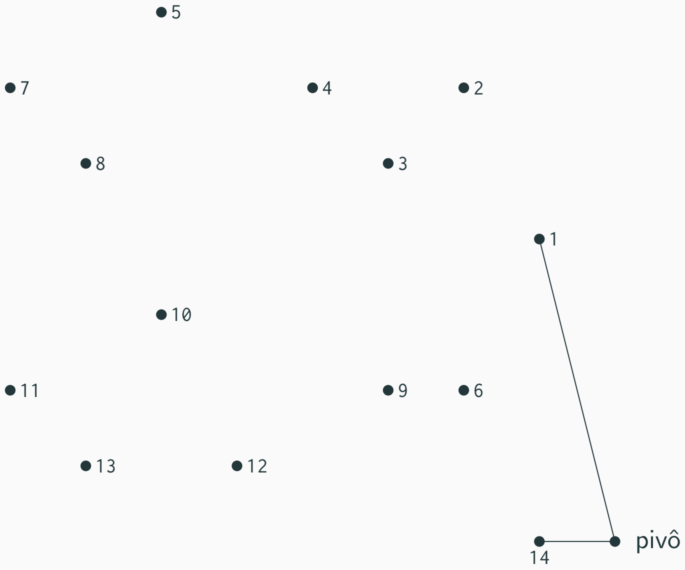
Identificação do envoltório convexo

- Após a ordenação dos pontos, o algoritmo procede empilhando três pontos de P: inicialmente os pontos cujos índices são $n-1, 0$ e 1
- O invariante a ser mantido é que os três elementos do topo de pilha estão em sentido anti-horário $(D > 0)$
- Para cada um dos demais pontos Q_i de P, com $i = 2, 3, \ldots, n-1$, verifica-se se este ponto mantem o sentido anti-horário com os dois elementos do topo da pilha
- Em caso afirmativo, o ponto é inserido na pilha
- Caso contrário, remove-se o topo da pilha e se verifica o invariante para Q_i novamente
- Como cada ponto é ou inserido ou removido uma única vez, este processo tem complexidade $O(N)$, e o algoritmo como um todo tem complexidade $O(N \log N)$, devido à ordenação

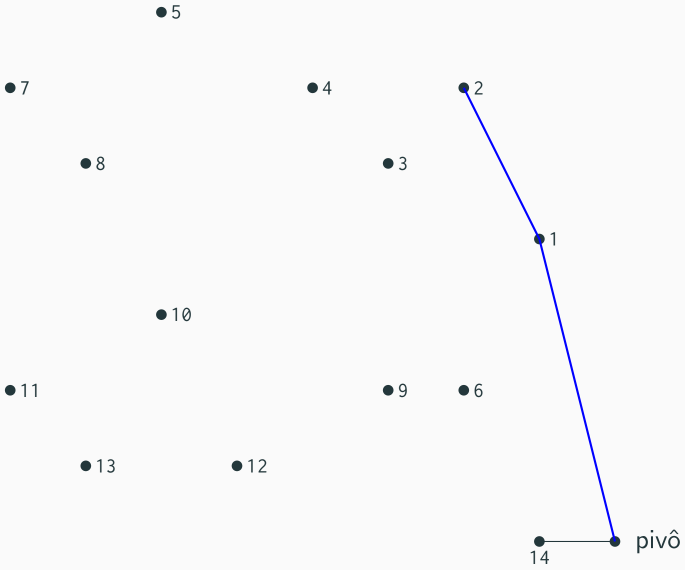
Visualização do algoritmo de Graham



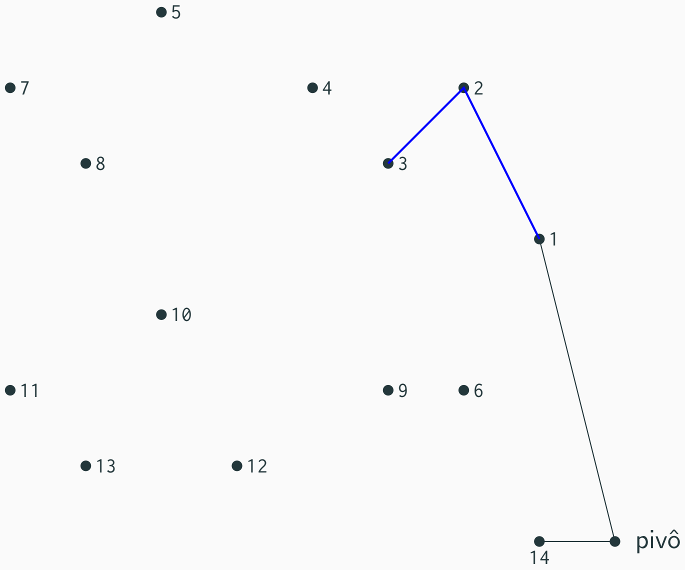
Visualização do algoritmo de Graham



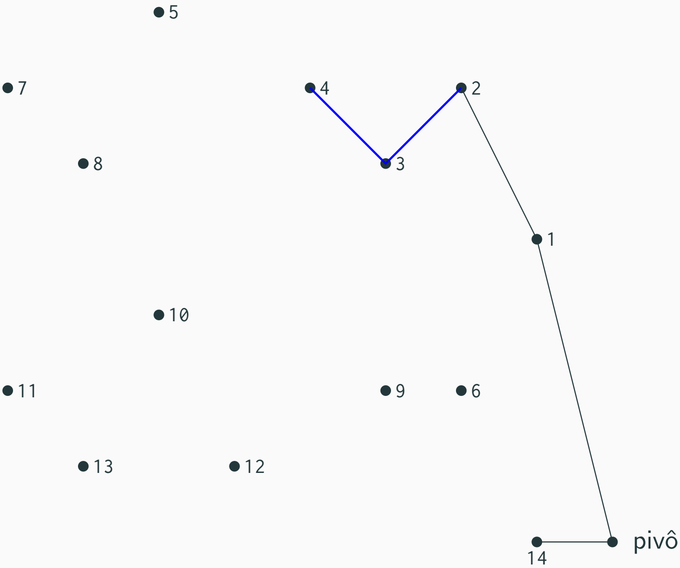
Visualização do algoritmo de Graham



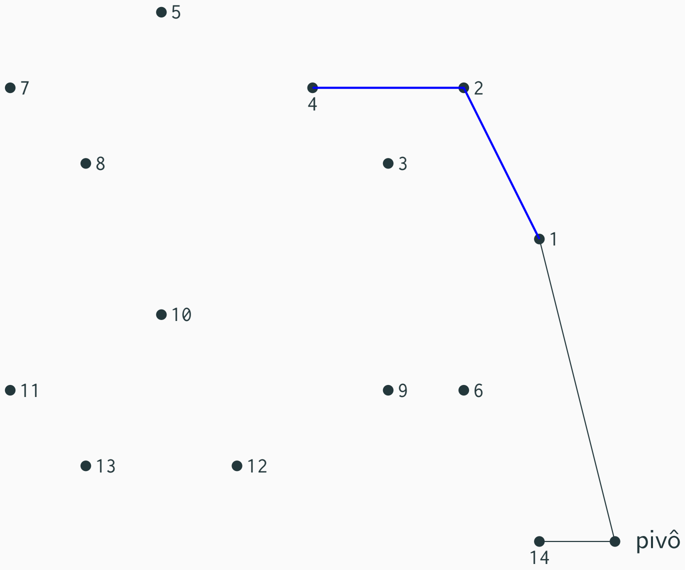
Visualização do algoritmo de Graham



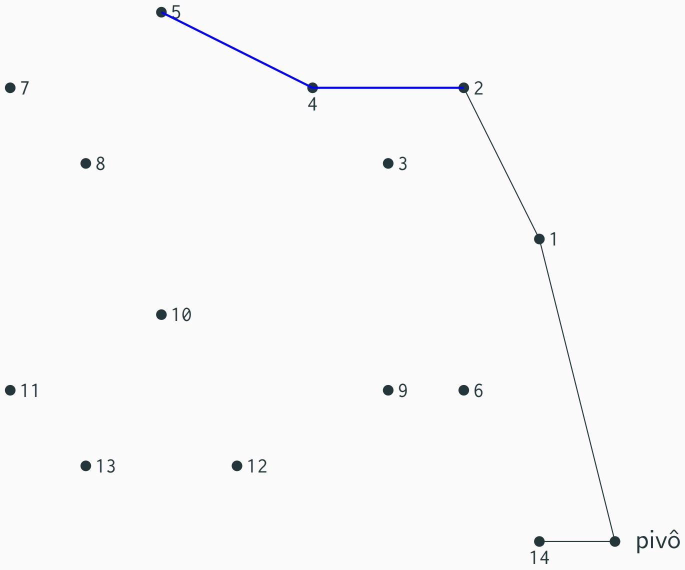
Visualização do algoritmo de Graham



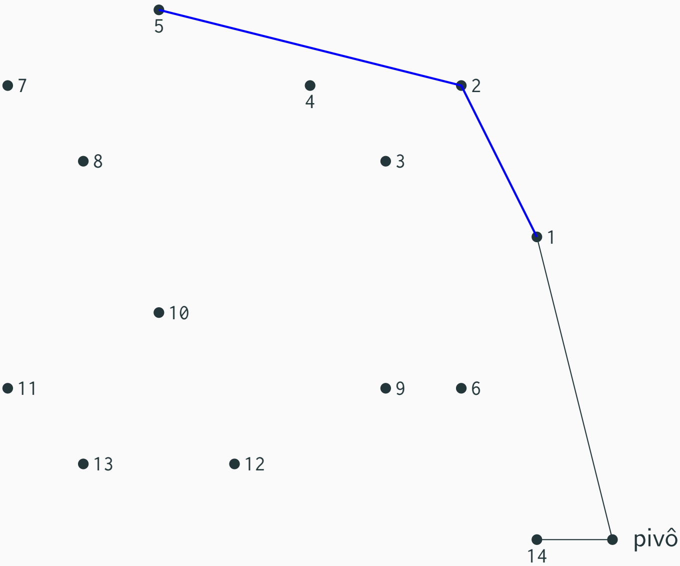
Visualização do algoritmo de Graham



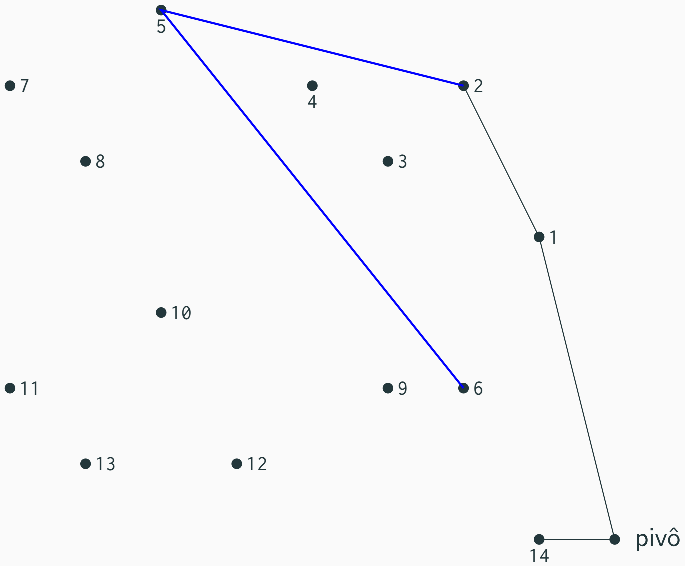
Visualização do algoritmo de Graham



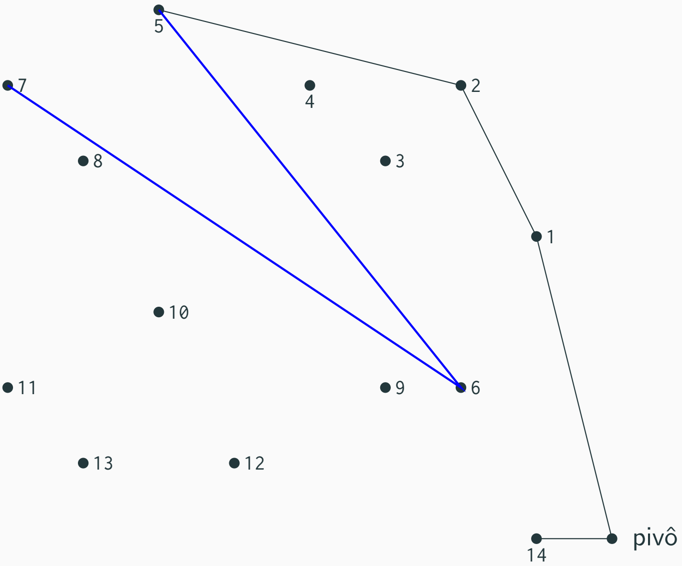
Visualização do algoritmo de Graham



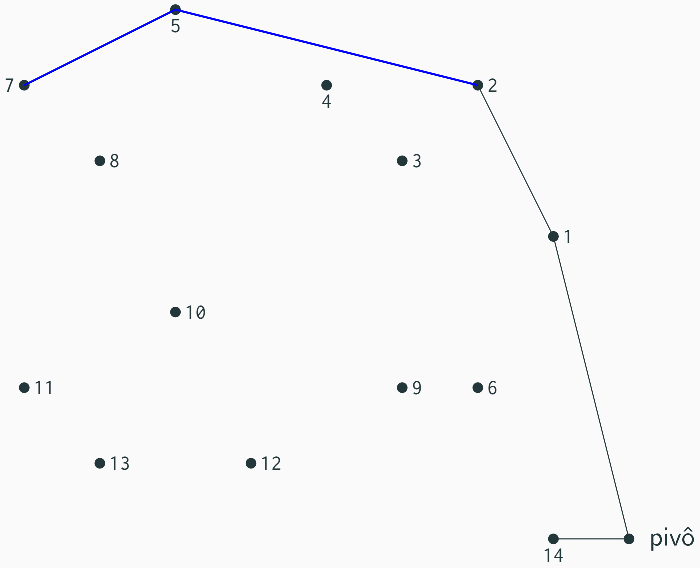
Visualização do algoritmo de Graham



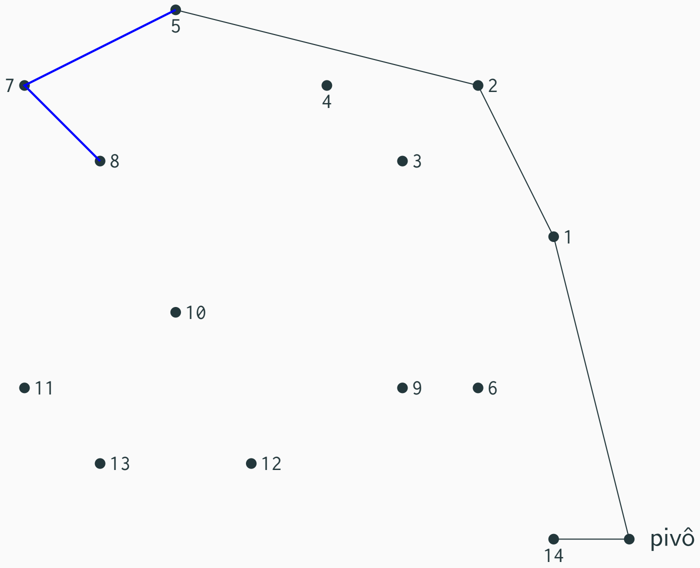
Visualização do algoritmo de Graham



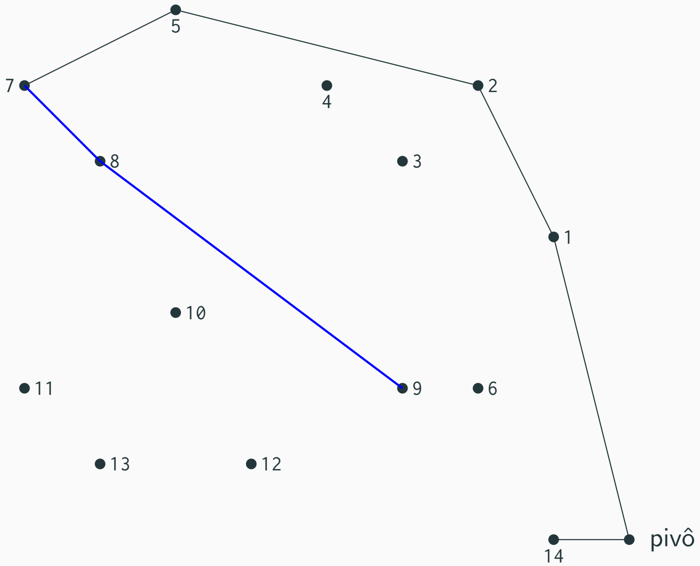
Visualização do algoritmo de Graham



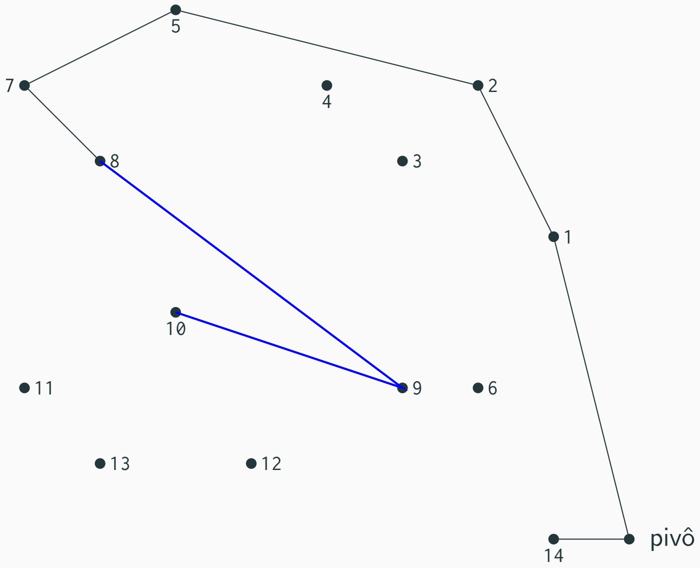
Visualização do algoritmo de Graham



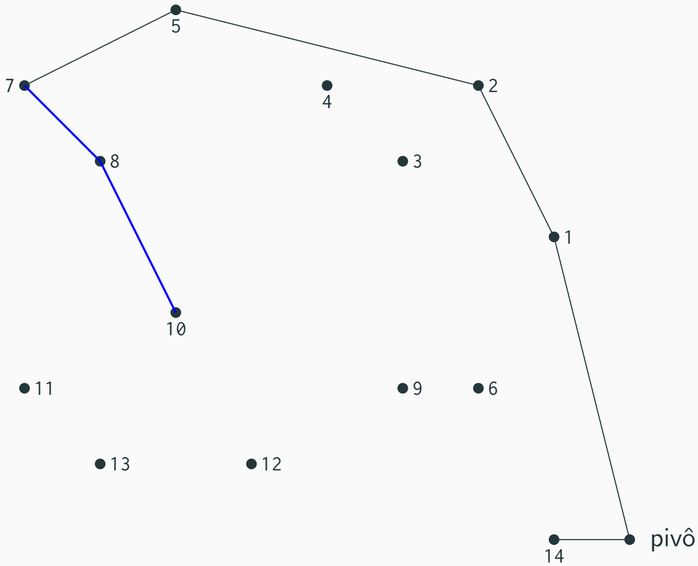
Visualização do algoritmo de Graham



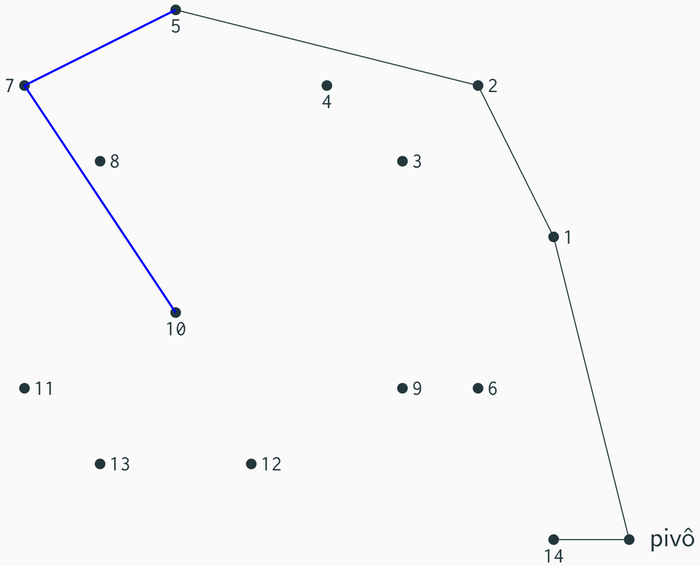
Visualização do algoritmo de Graham



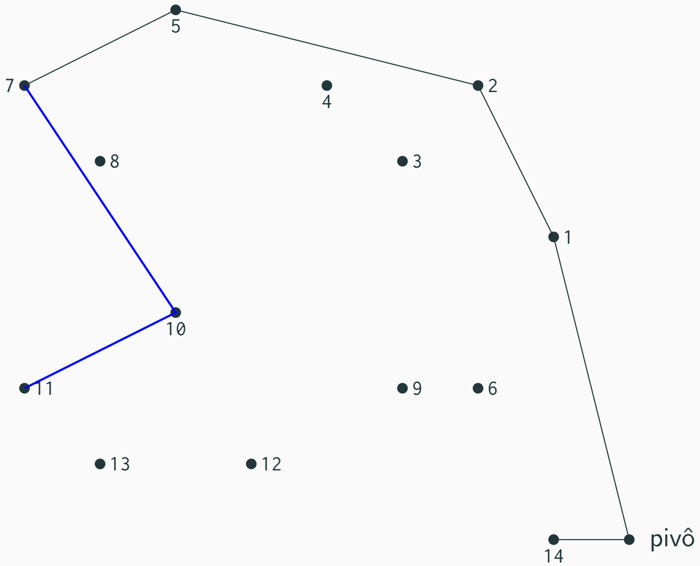
Visualização do algoritmo de Graham



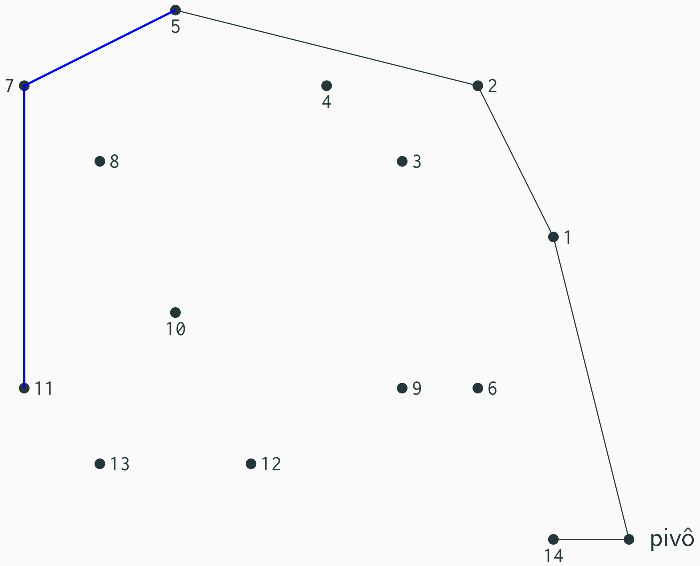
Visualização do algoritmo de Graham



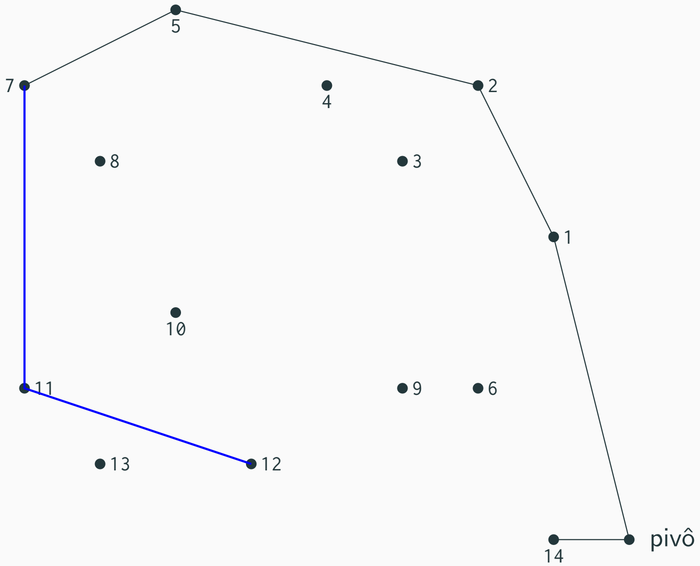
Visualização do algoritmo de Graham



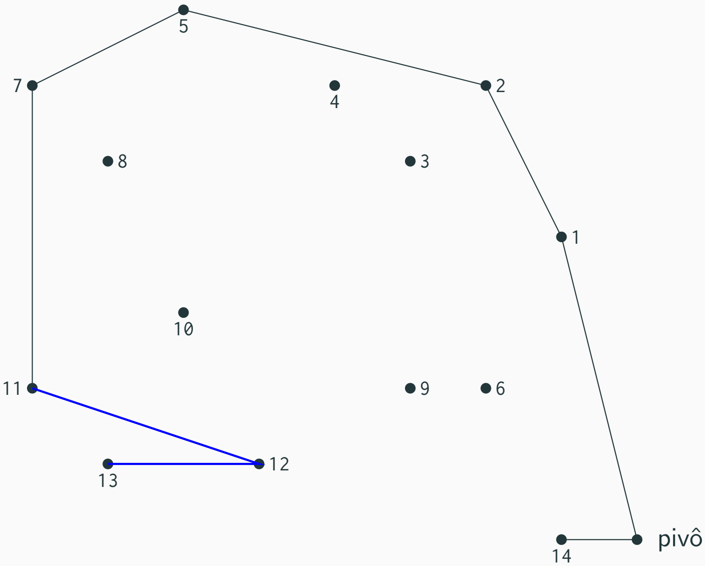
Visualização do algoritmo de Graham



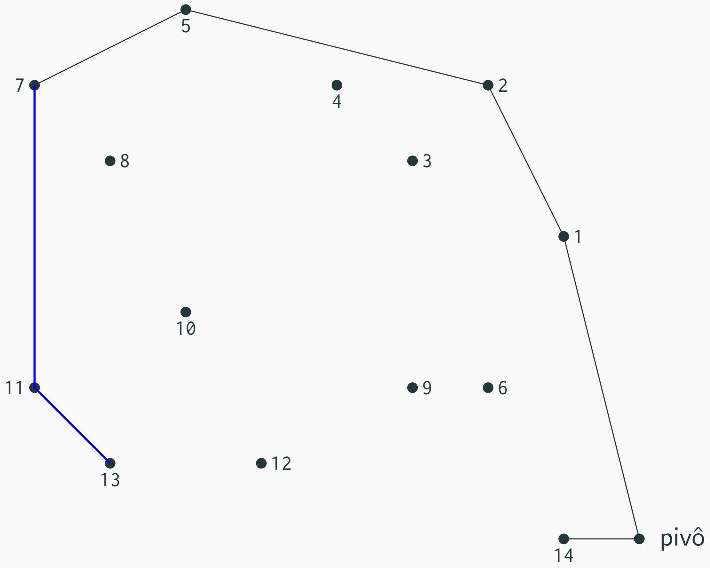
Visualização do algoritmo de Graham



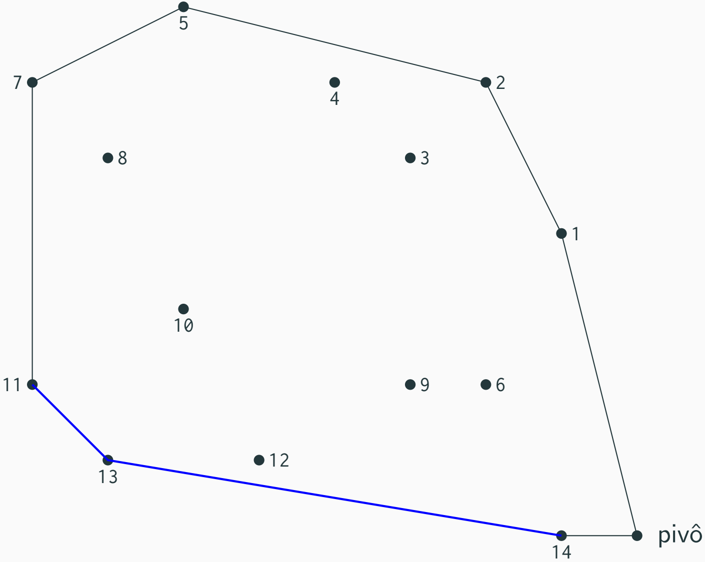
Visualização do algoritmo de Graham



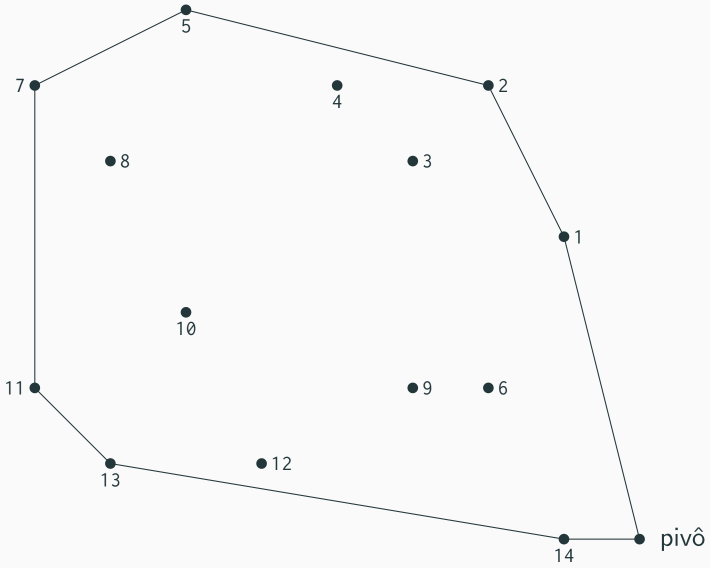
Visualização do algoritmo de Graham



Visualização do algoritmo de Graham



Visualização do algoritmo de Graham



Implementação da rotina de envoltório convexo

```
    static vector<Point<T>> convex_hull(const vector<Point<T>>& points)
    {
        vector<Point<T>> P(points);
        auto N = P.size();

        // Corner case: com 3 vértices ou menos, P é o próprio convex hull
        if (N <= 3)
            return P;

        sort_by_angle(P);

        vector<Point<T>> ch;
        ch.push_back(P[N - 1]);
        ch.push_back(P[0]);
        ch.push_back(P[1]);

        size_t i = 2;
```

Implementação da rotina de envoltório convexo

```
        while (i < N)
        {
            auto j = ch.size() - 1;

            if (D(ch[j - 1], ch[j], P[i]) > 0)
                ch.push_back(P[i++]);
            else
                ch.pop_back();
        }

        // O envoltório é um caminho fechado: o primeiro ponto é igual ao último
        return ch;
    }
```

Referências

1. **DE BERG**, Mark. *Computational Geometry: Algorithms and Applications*, Springer, 3rd edition, 2008.
2. **GRAHAM**, R. L. *An Efficient Algorithm for Determining the Convex Hull of a Finite Planar Set*. Information Processing Letters vol. 1 (4), pg. 132-133, 1972.
3. **HALIM**, Felix; **HALIM**, Steve. *Competitive Programming 3*, 2010.
4. **LAAKSONEN**, Antti. *Competitive Programmer's Handbook*, 2018 (*Open Access*).
5. **O'ROURKE**, Joseph. *Computational Geometry in C*, Cambridge University Press, 2nd edition, 1998.
6. Wikipedia. Graham scan, acesso em 09/06/2019.