Árvores

Árvores Binárias de Busca: Busca e Travessia

Prof. Edson Alves - UnB/FGA

2018

Sumário

Tamanho de árvores binárias de busca

Tamanho de uma árvore binária de busca

- O tamanho de uma árvore corresponde ao número N de nós que ela possui
- O algoritmo abaixo computa este valor em $O(N)$:
  1. Começe no nó raiz e inicialize a variável tamanho com zero
  2. Para cada nó não nulo:
     i. Incremente em uma unidade da variável tamanho
     ii. Some à variável o tamanho da subárvore esquerda do nó
     iii. Some à variável o tamanho da subárvore direita do nó
- O algoritmo acima é recursivo
- O caso base é a árvore vazia, que tem tamanho zero
- O passo 2 corresponde à chamada recursiva, uma vez que cada uma das subárvores são, de fato, árvores

Implementação do tamanho de uma BST em C++

```cpp
template<typename T>
class BST {
private:
    struct Node {
        T info;
        Node *left, *right;
    };

    Node *root;

    int size(const Node *node) const
    {
        return node ?  size(node->left) + size(node->right) + 1 : 0;
    }

public:
    BST() : root(nullptr) {}

    int size() const { return size(root); }
};
```

Notas sobre o algoritmo de tamanho

- O algoritmo apresentado pode ser adaptado para computar o tamanho de árvores no caso geral
- Basta retornar a soma dos tamanho de todas as subárvore associadas ao nó atual
- Conforme dito, no pior caso a complexidade é $O(N)$
- Este é um exemplo de algoritmo cuja complexidade independente da forma da árvore, e é $O(N)$ mesmo em árvores balanceadas (pois é preciso visitar cada nó ao menos uma vez)
- Uma alternativa é adicionar um membro `size` na classe BST, e atualizá-la a cada inserção e a cada remoção
- Deste modo, o tamanho da árvore pode ser obtido em $O(1)$, bastando retornar o valor desta variável

Busca em árvores binárias de busca

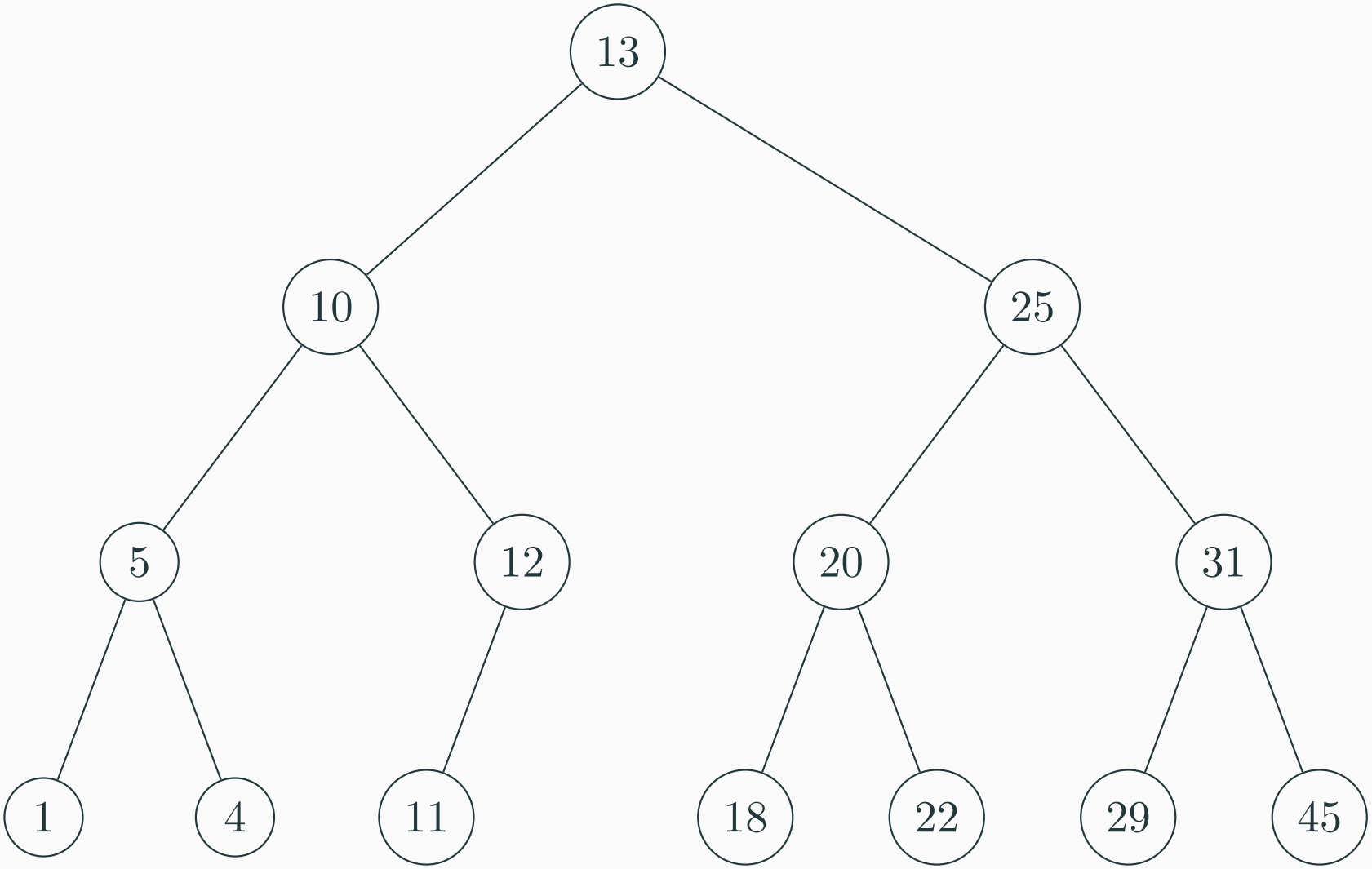
Busca em árvores binárias de busca

- A busca em uma árvore binária de busca procura responder a seguinte questão: a informação x está armazenada em algum dos nós da árvore?
- A importância desta operação nesta estrutura é tamanha que, de fato, a nomeia
- O algoritmo abaixo busca a informação x em uma árvore binária de busca:

1. Começe no nó raiz
2. Para cada nó não nulo:
   - 2.1 Se x está armazenado no nó, retorne verdadeiro
   - 2.2 Se x for menor do que o valor armazenado no nó, vá para a subárvore à esquerda
   - 2.3 Se x for maior do que o valor armazenado no nó, vá para a subárvore à direita
3. Retorne falso

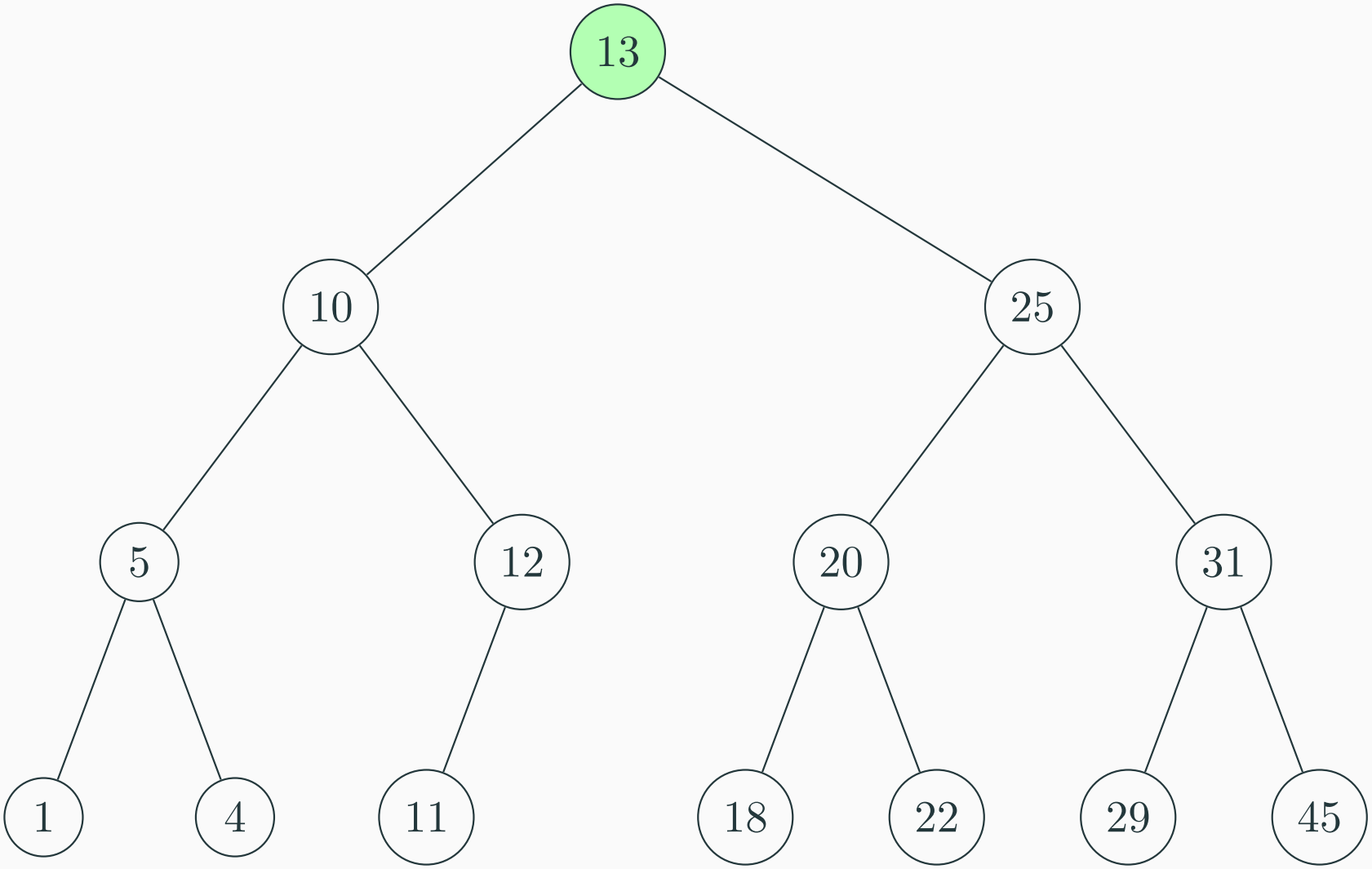
Exemplo de inserção em árvore binária de busca

Elemento a ser localizado: 24



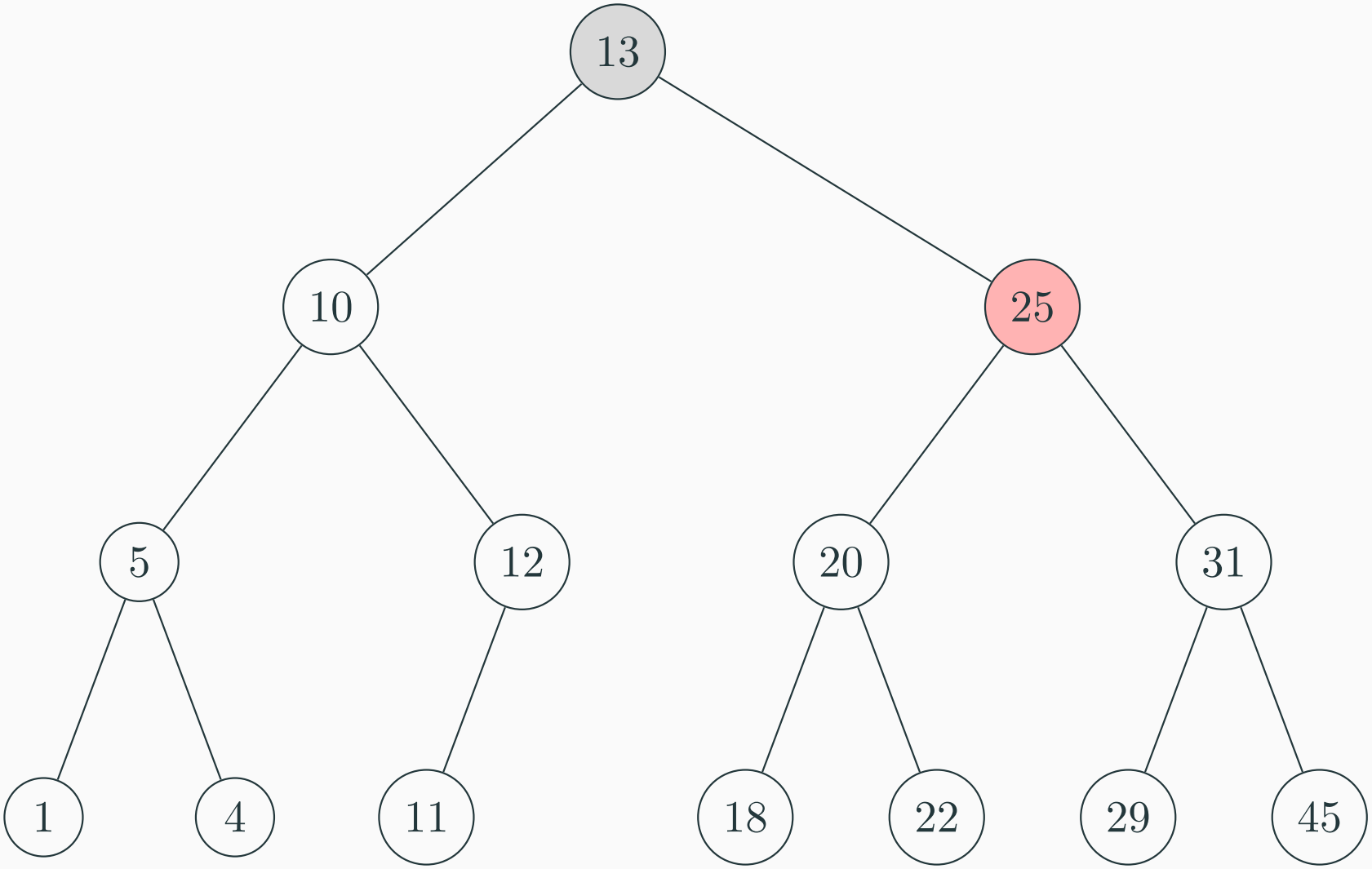
Exemplo de inserção em árvore binária de busca

Elemento a ser localizado: 24



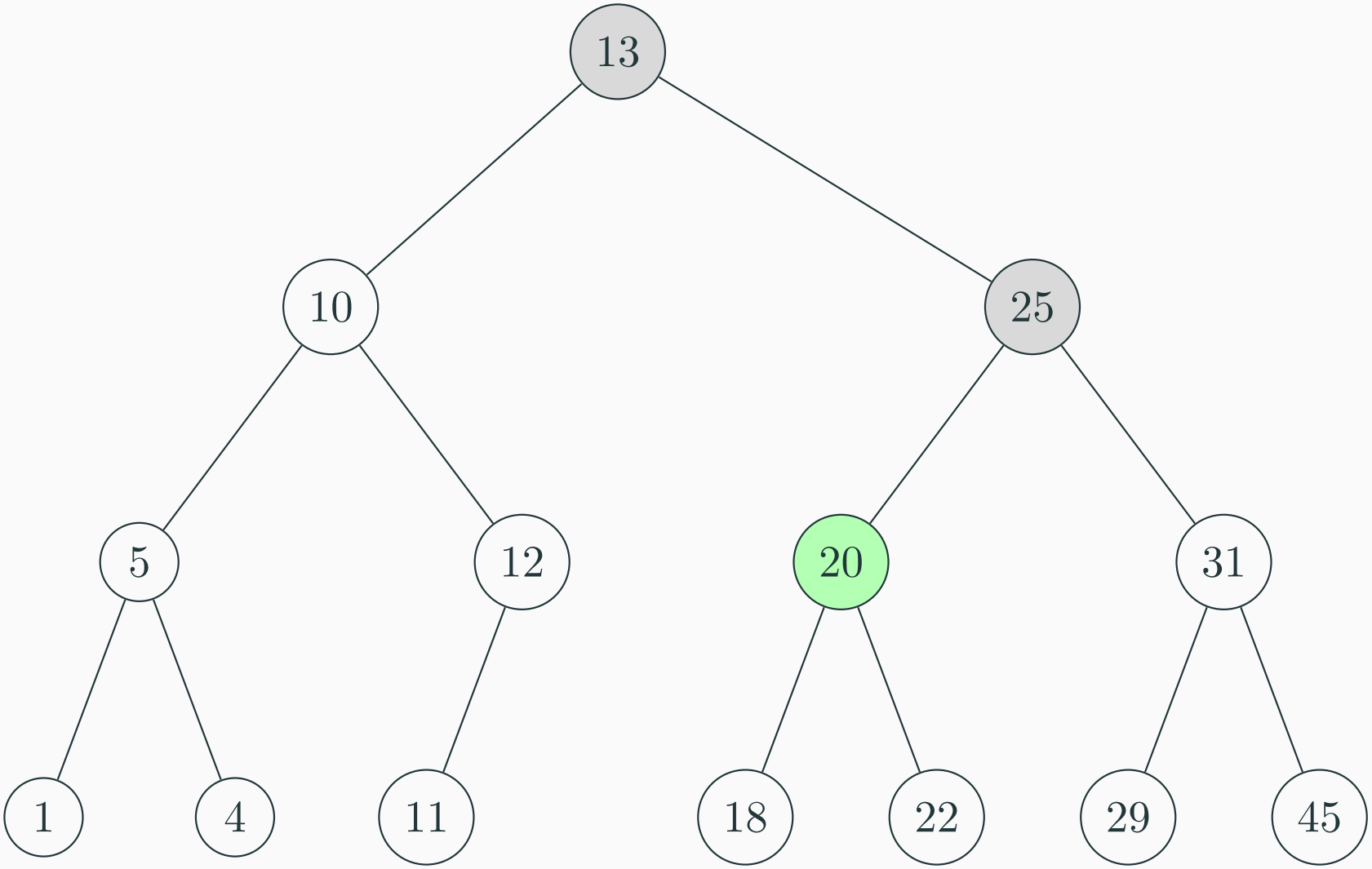
Exemplo de inserção em árvore binária de busca

Elemento a ser localizado: 24



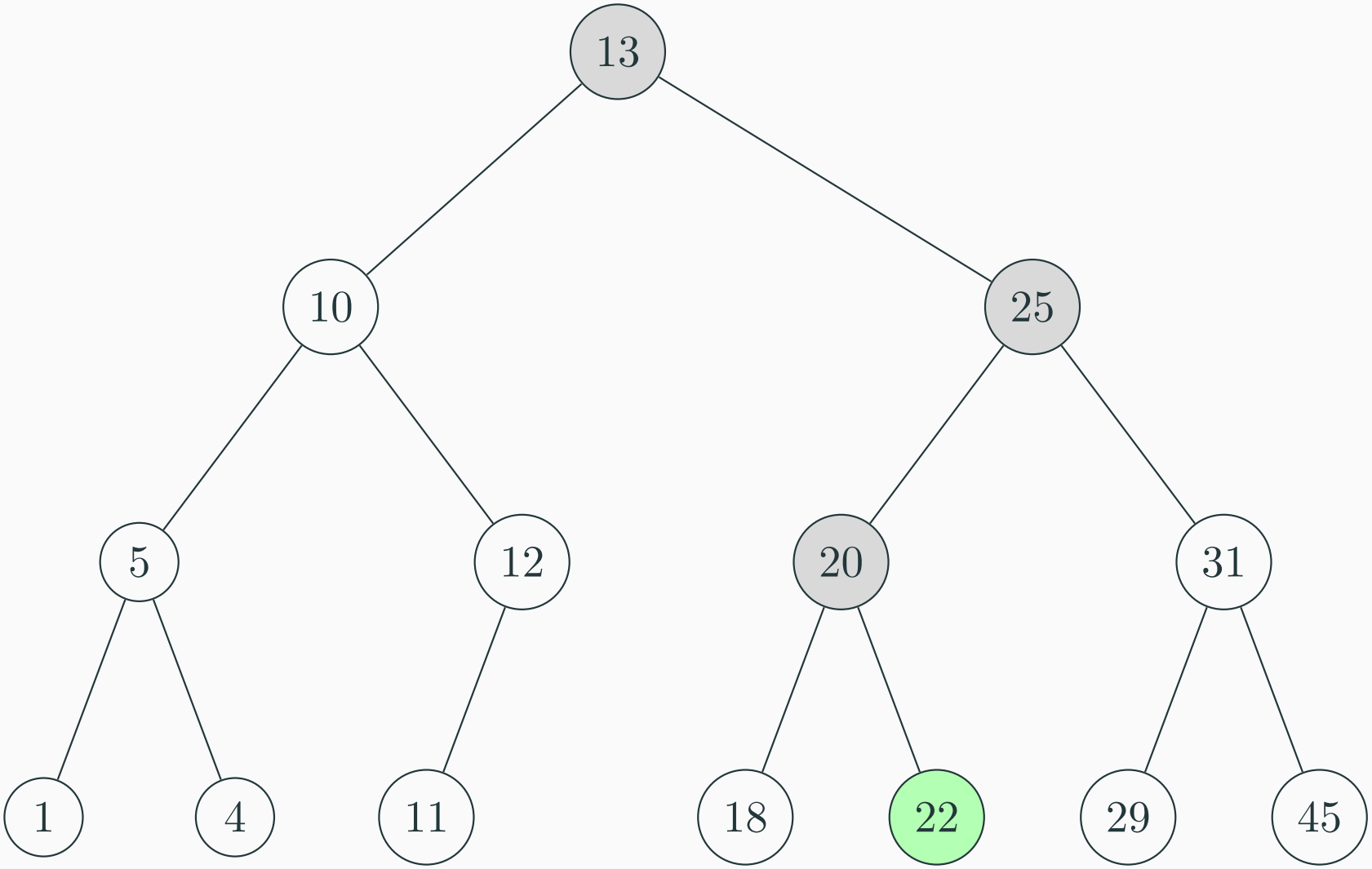
Exemplo de inserção em árvore binária de busca

Elemento a ser localizado: 24



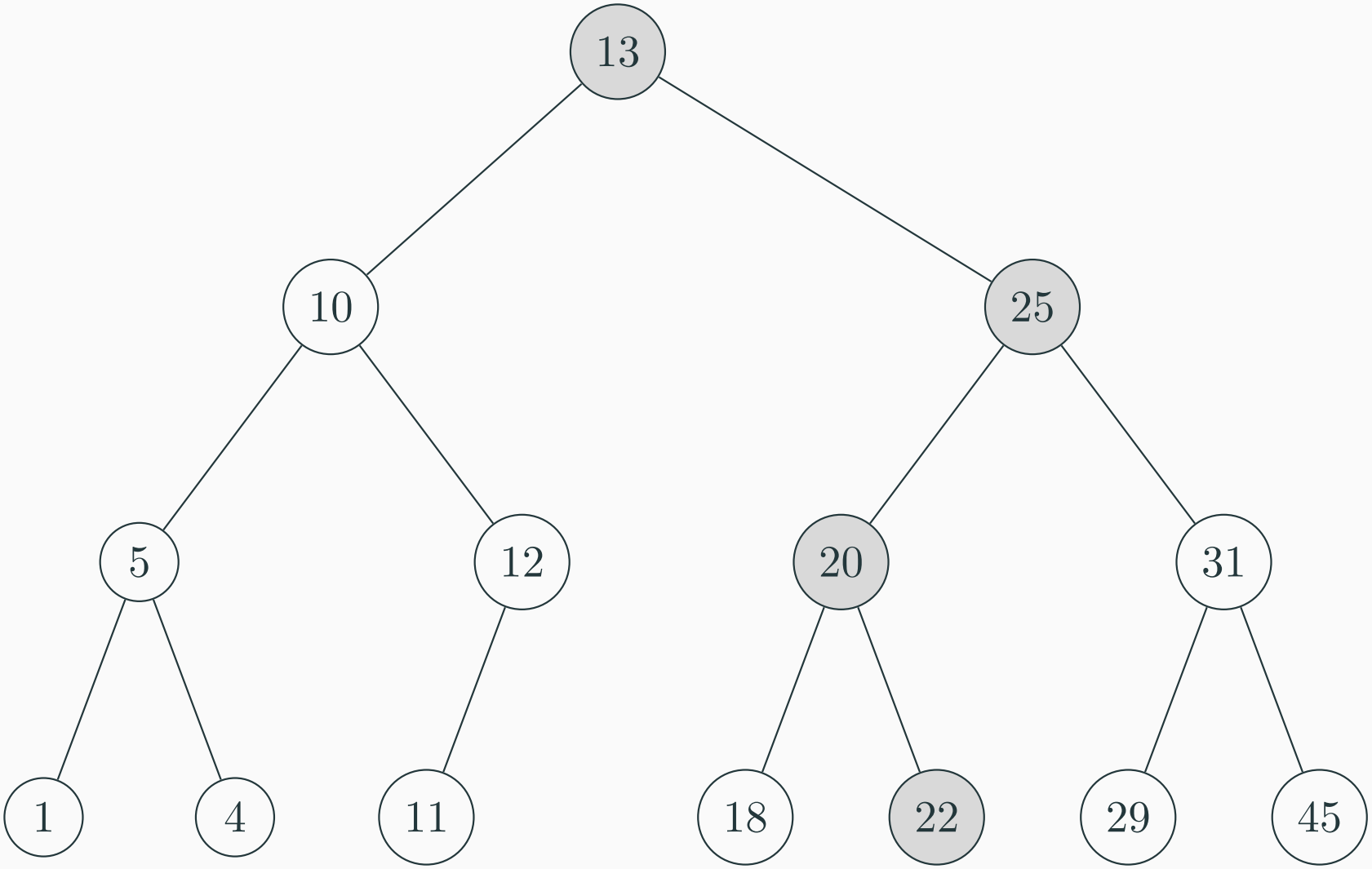
Exemplo de inserção em árvore binária de busca

Elemento a ser localizado: 24



Exemplo de inserção em árvore binária de busca

Elemento a ser localizado: 24



Implementação iterativa do algoritmo de busca

```
1  template<typename T>
2  class BST {
3  private:
4      struct Node {
5          T info;
6          Node *left, *right;
7      };
8
9      Node *root;
10
```

Implementação iterativa do algoritmo de busca

```
11      bool search(Node *node, const T& info)
12      {
13          while (node)
14          {
15              if (info == node->info)
16                  return true;
17              else if (info < node->info)
18                  node = node->left;
19              else
20                  node = node->right;
21          }
22
23          return false;
24      }
25
26  public:
27      BST() : root(nullptr) {}
28
29      bool search(const T& info) const { return search(root, info); }
30  };
```

Notas sobre o algoritmo de busca

- O algoritmo de busca em árvores binárias de busca também pode ser implementado recursivamente:

```
1 bool search(Node *node, const T& info)
2 {
3     if (node == nullptr) return false;
4
5     if (node->info == info) return true;
6
7     return info < node->info ? search(node->left, info) :
8         search(node->right, info);
9 }
```

- Uma variante do algoritmo retorna o ponteiro para o elemento, se encontrado, ou um ponteiro nulo, caso contrário
- A ordem de complexidade, no pior caso, é $O(N)$
- Em árvores balanceadas, o algoritmo é $O(\log N)$

Travessia em árvores binárias de busca

Definição

- A travessia de uma árvore é o processo de visitar cada nó exatamente uma vez
- Visitar significa processar, de algum modo, o nó visitado
- A travessia pode ser interpretada como o processo de linearização de uma árvore
- A definição de travessia não especifica a ordem na qual os nós devem ser visitados
- O número de travessias possíveis de uma árvore é igual o número de permutações de seus nós
- Se a árvore tem n nós, terá $n!$ travessias distintas
- Há, contudo, dois tipos especiais de travessia: travessia por extensão e travessia por profundidade

Travessia por extensão e por profundidade

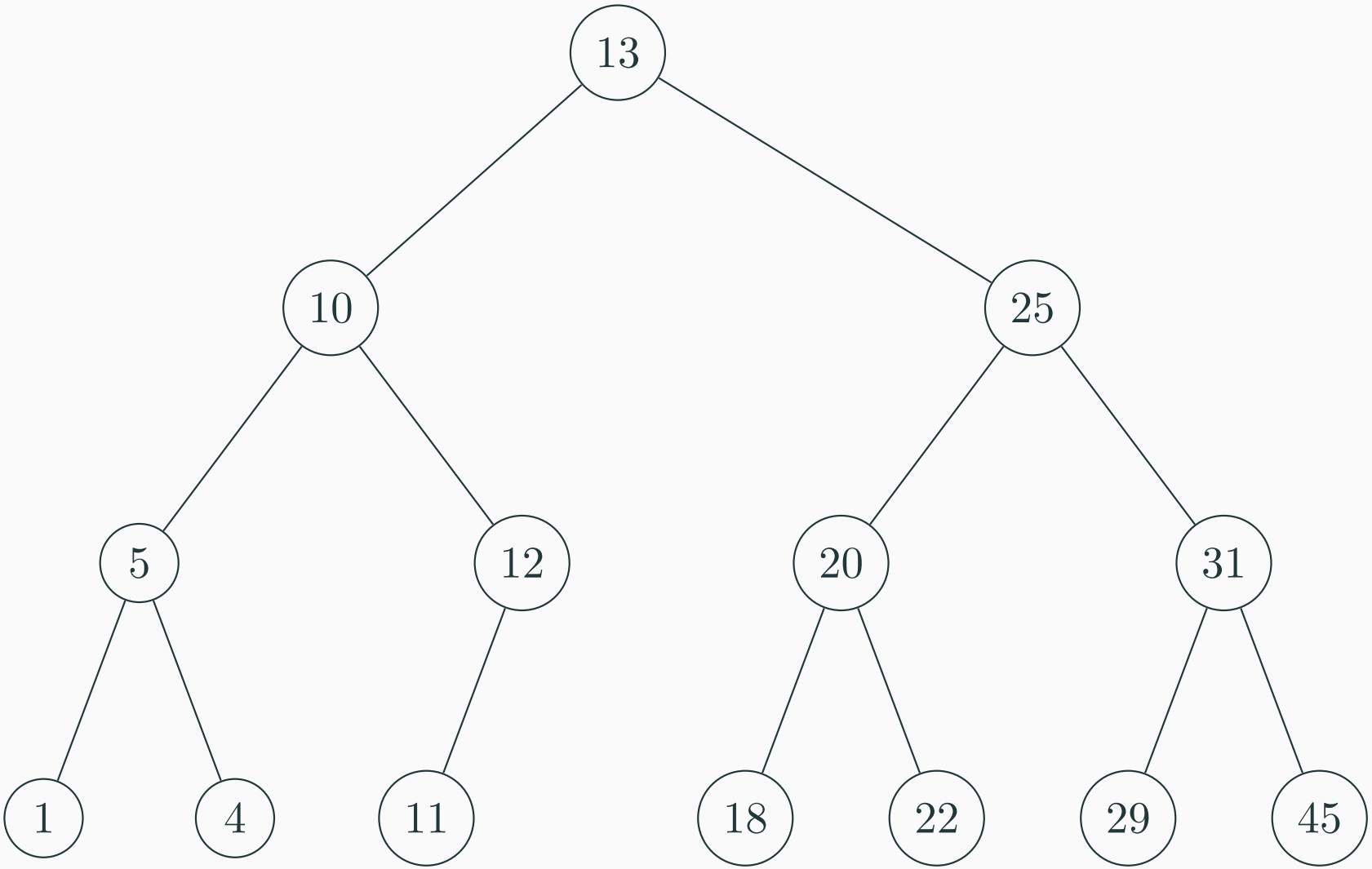
- A travessia por extensão consiste em visitar cada nó começando do nível mais baixo (ou mais alto) e seguindo para baixo (ou para cima) nível a nível, visitando todos os nós daquele nível da esquerda para a direita (ou em sentido oposto)
- Dada a natureza da travessia por extensão, sua implementação pode requerer o auxílio de uma fila
- A travessia por profundidade consiste em ir o mais longe possível à esquerda, retornar até o primeiro cruzamento, tomar à direita e novamente ir o máximo para a esquerda, até que todos os nós tenham sido visitados
- A travessia por profundidade pode ser implementada recursivamente
- Também pode ser implementada iterativamente, com o auxílio de uma pilha

Travessias por profundidade notáveis

- A definição de travessia por profundidade não especifica o momento em que o nó deve ser visitado
- Há 3 tarefas de interesse neste caso:
  1. Visitar o nó (`V`)
  2. Realizar a travessia da subárvore da esquerda (`L`)
  3. Realizar a travessia da subárvore da direita (`R`)
- As 6 possíveis permutações destas tarefas são travessias por profundidade válidas
- As travessias por profundidade mais comuns são:
  1. pré-ordem: `VLR`
  2. em-ordem: `LVR`
  3. pós-ordem: `LRV`

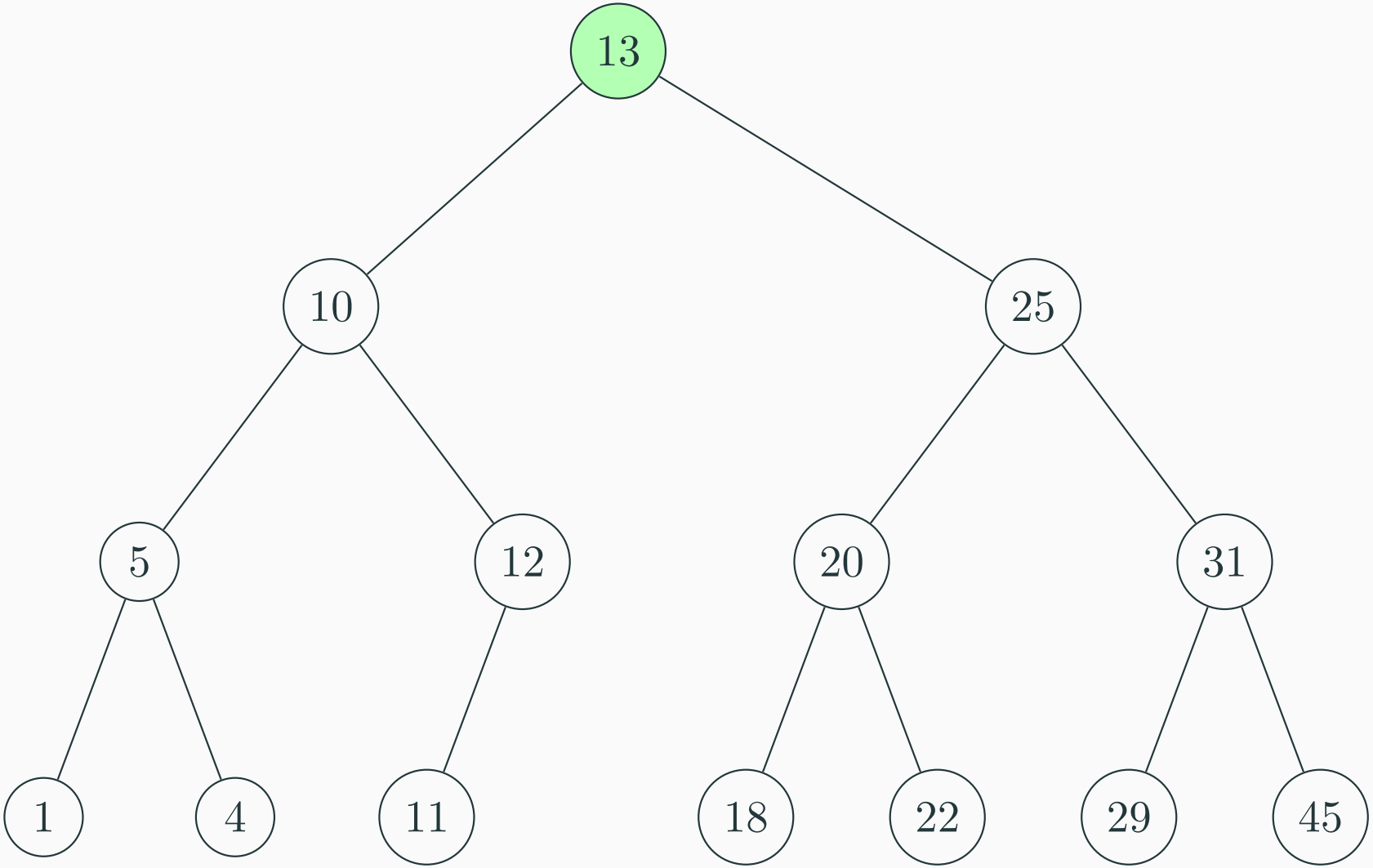
Exemplo de inserção em árvore binária de busca

Travessia pré-ordem:



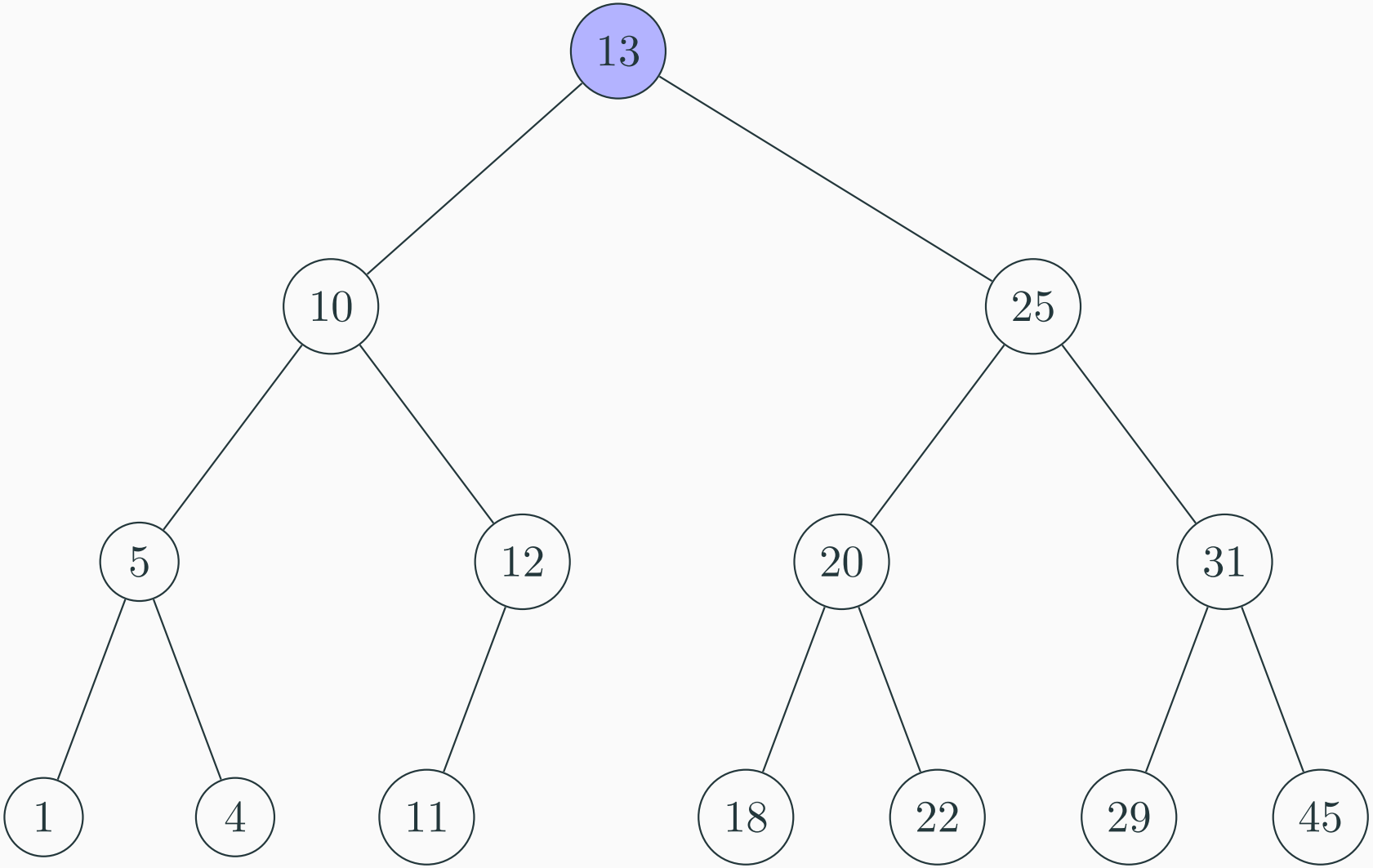
Exemplo de inserção em árvore binária de busca

Travessia pré-ordem:



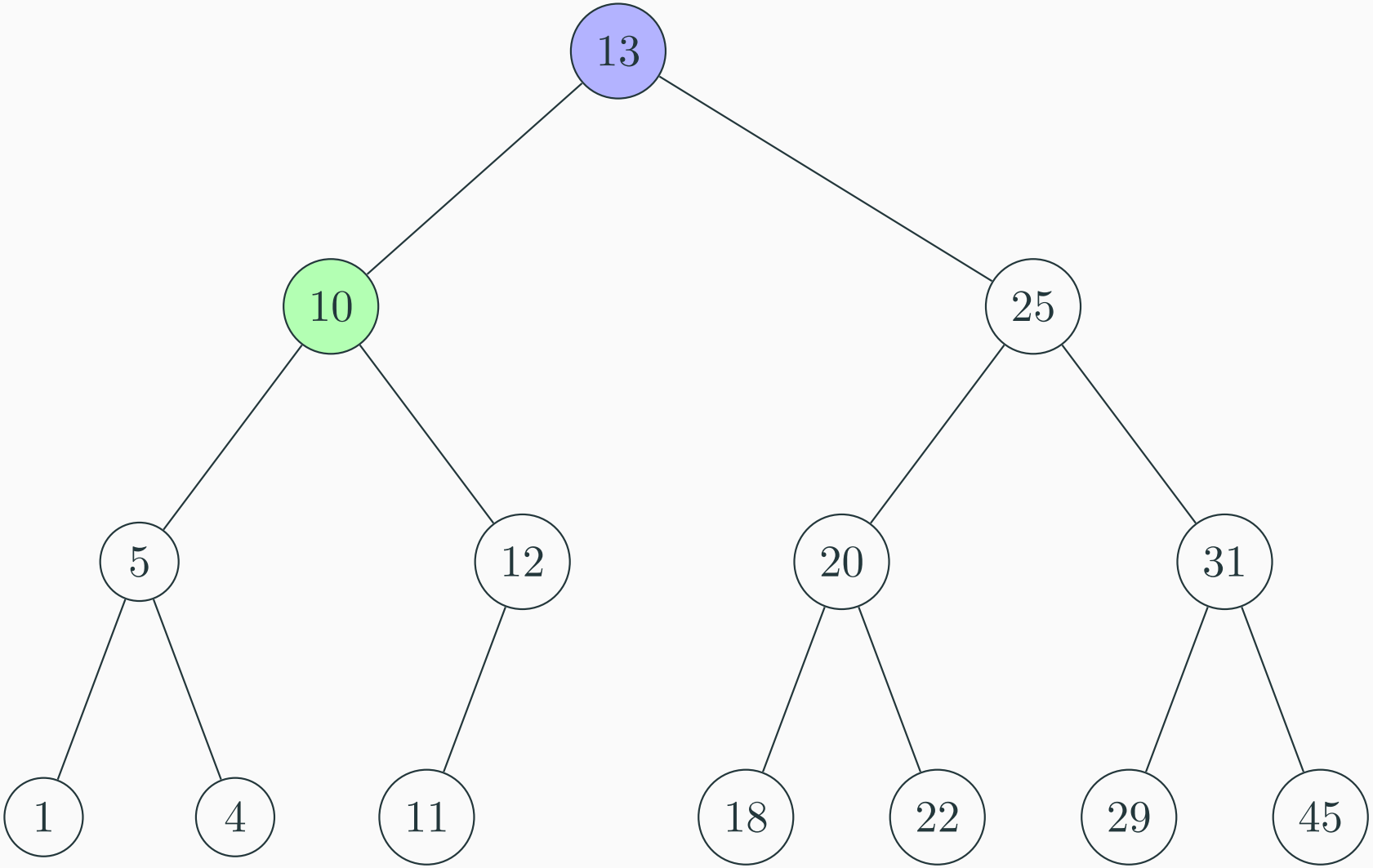
Exemplo de inserção em árvore binária de busca

Travessia pré-ordem: 13



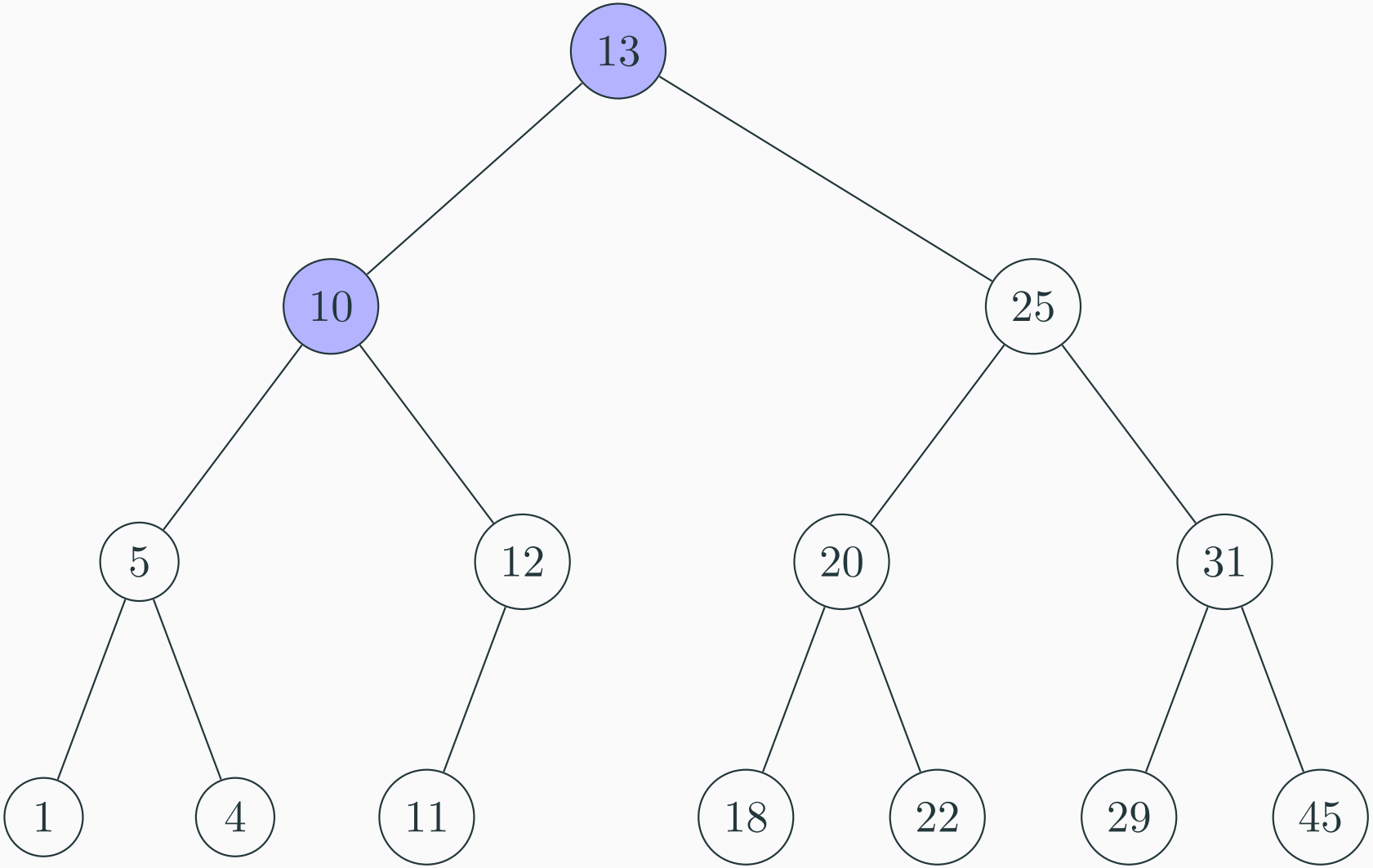
Exemplo de inserção em árvore binária de busca

Travessia pré-ordem: 13



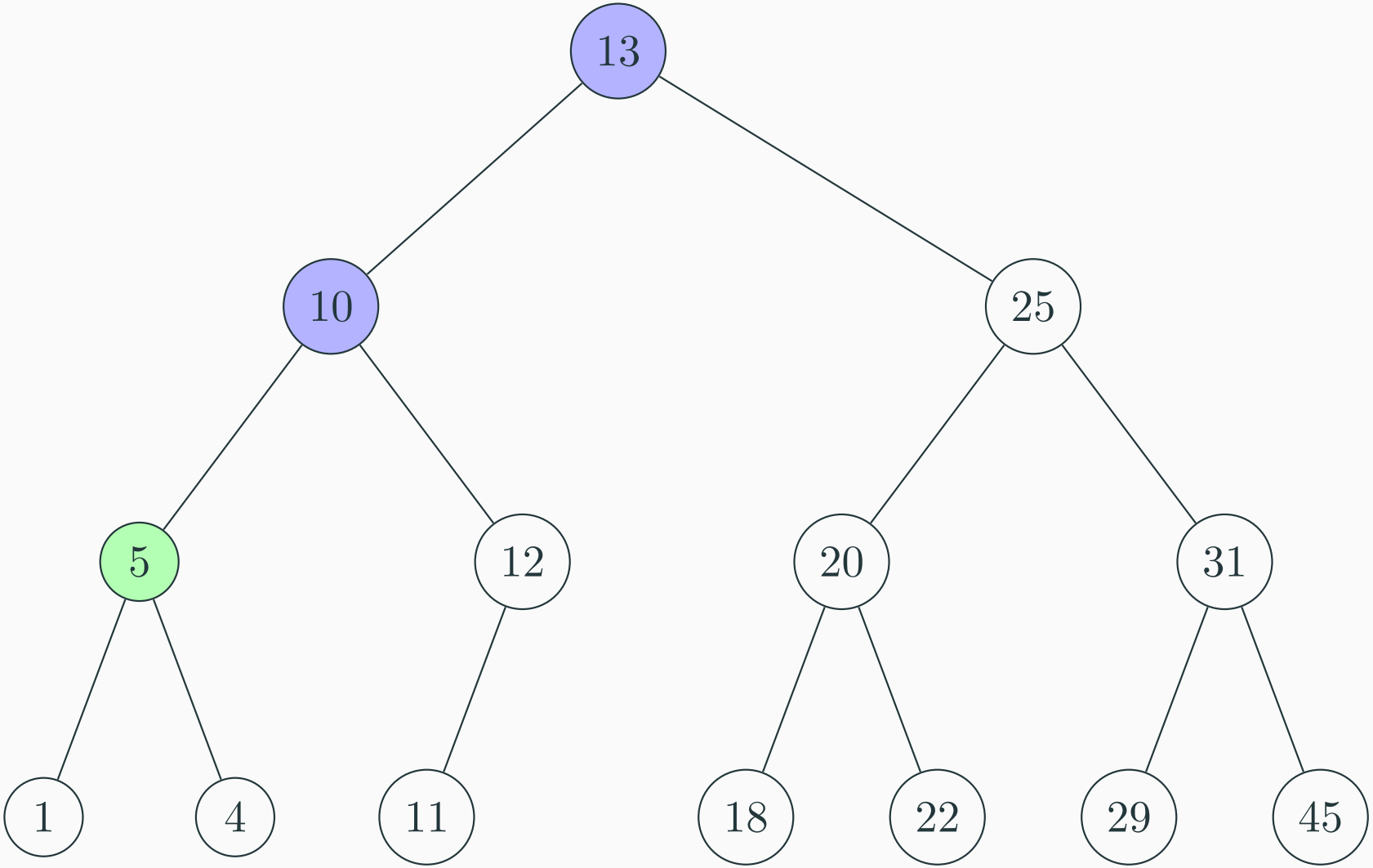
Exemplo de inserção em árvore binária de busca

Travessia pré-ordem: 13, 10



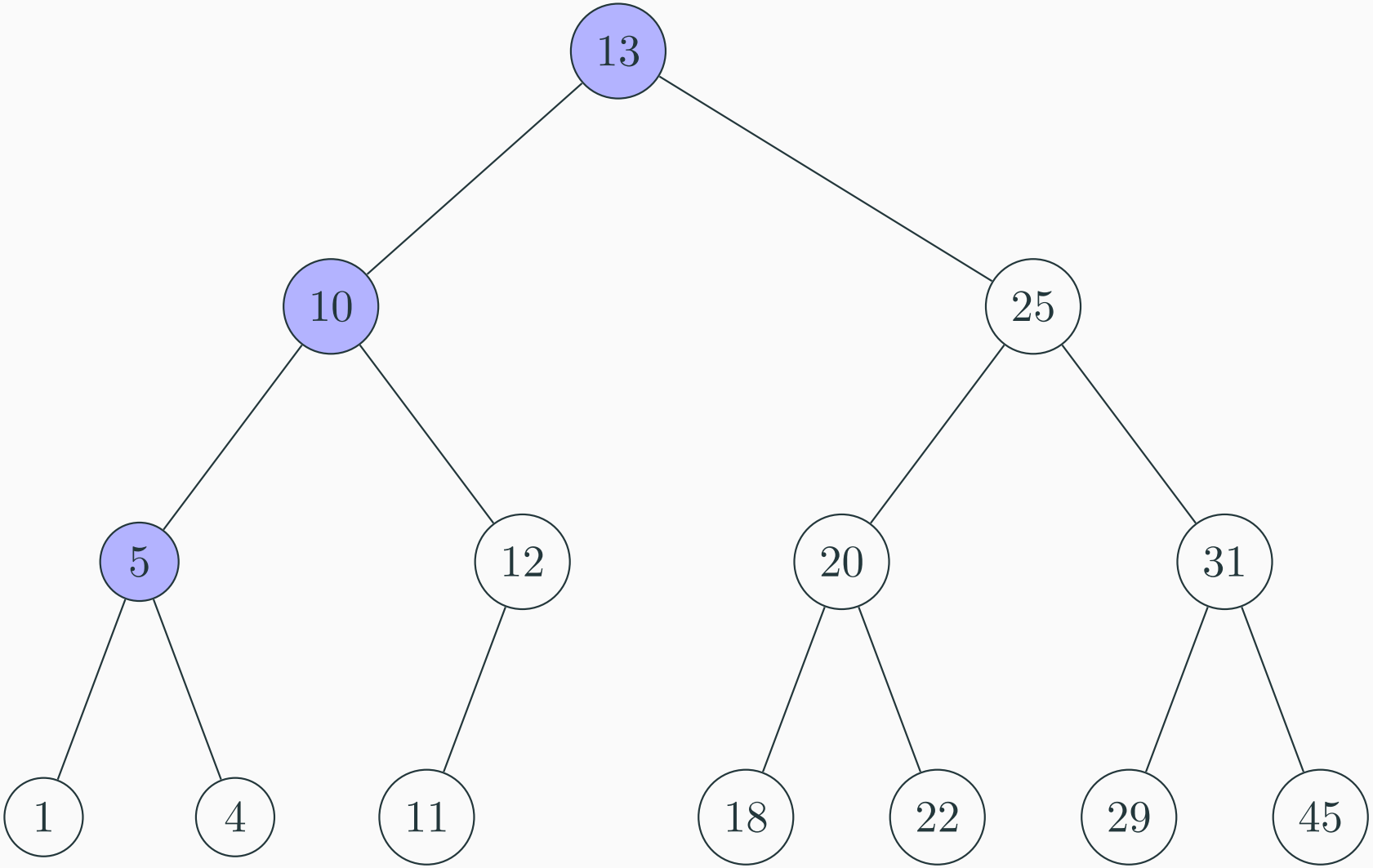
Exemplo de inserção em árvore binária de busca

Travessia pré-ordem: 13, 10



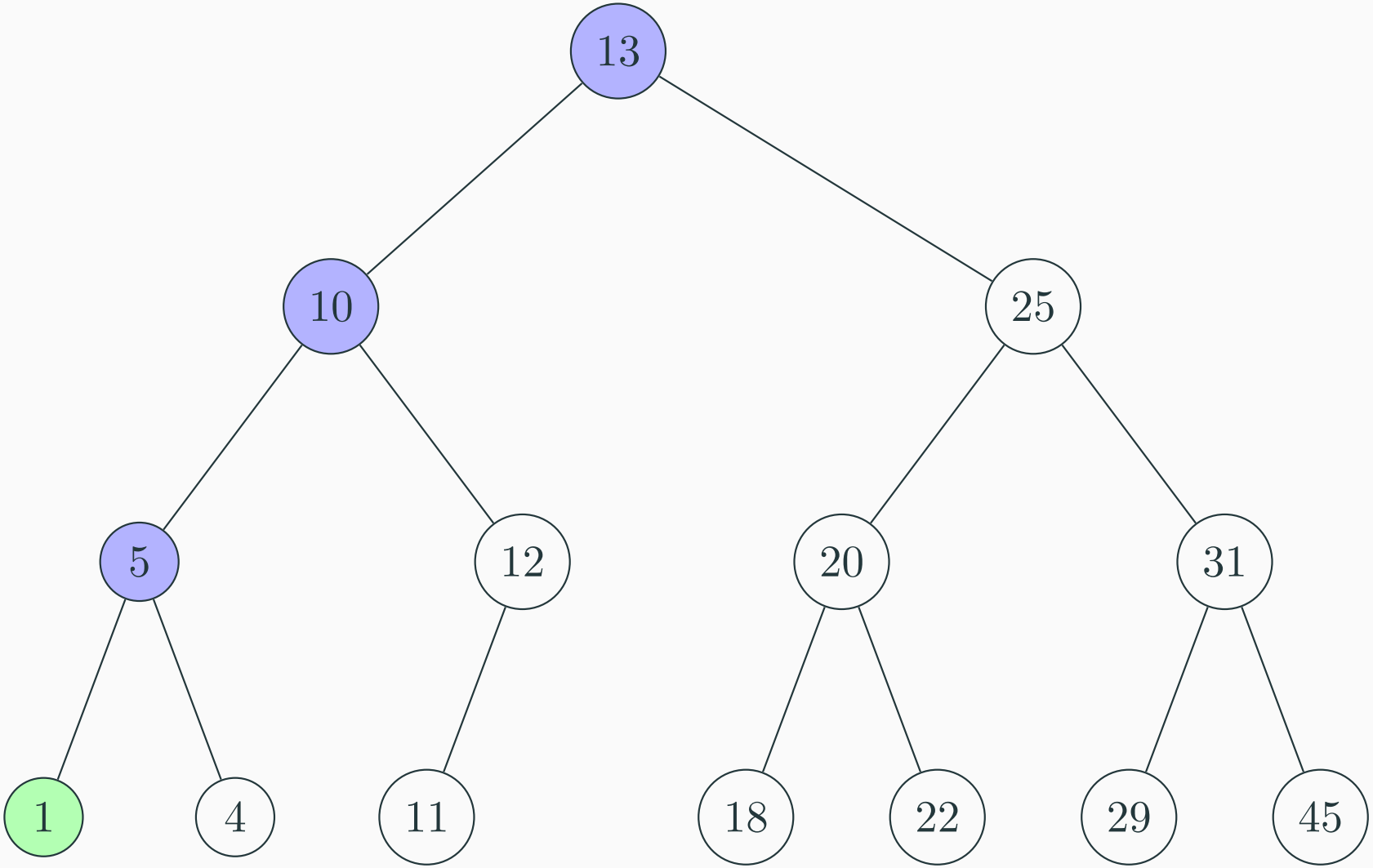
Exemplo de inserção em árvore binária de busca

Travessia pré-ordem: 13, 10, 5



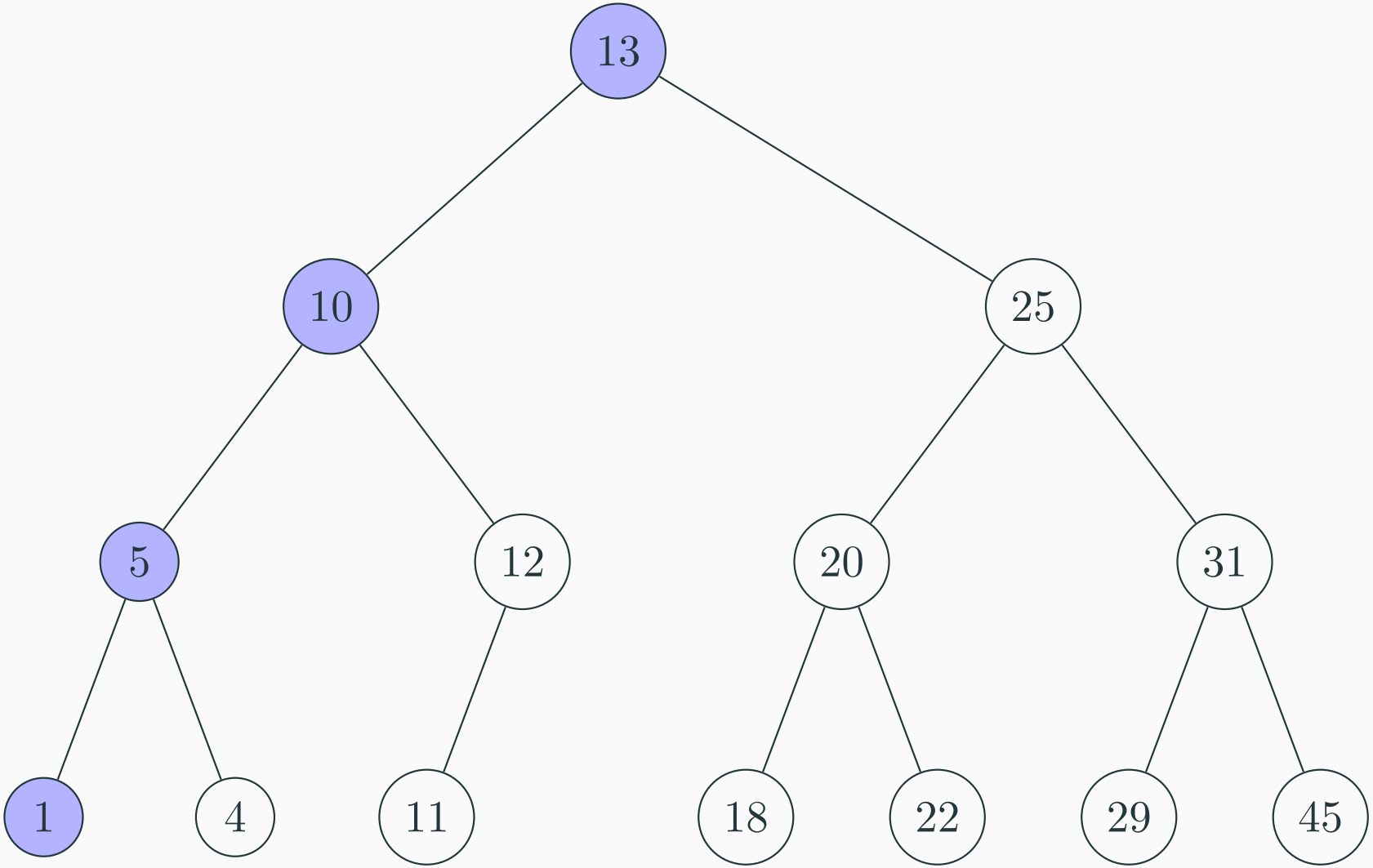
Exemplo de inserção em árvore binária de busca

Travessia pré-ordem: 13, 10, 5



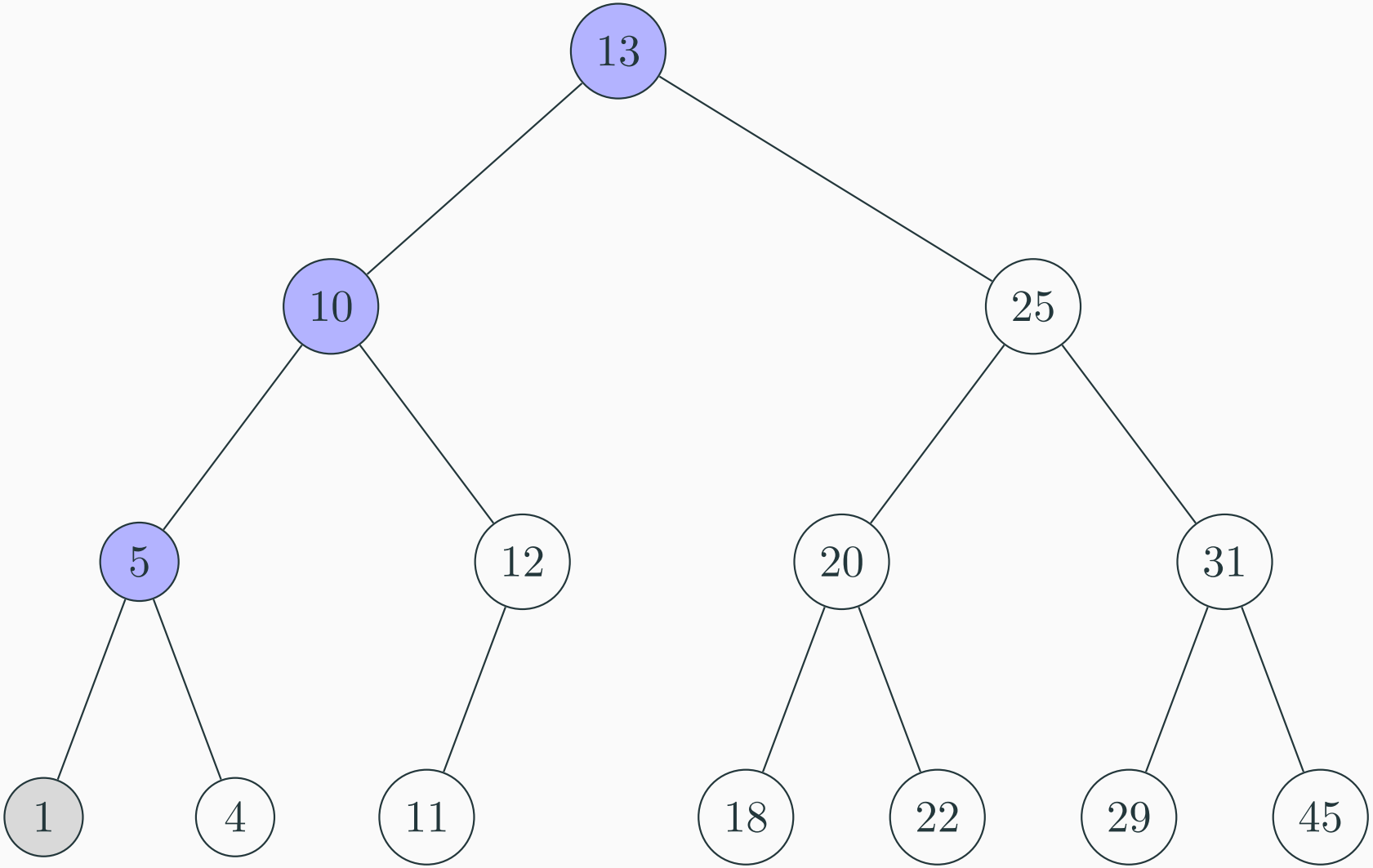
Exemplo de inserção em árvore binária de busca

Travessia pré-ordem: 13, 10, 5, 1



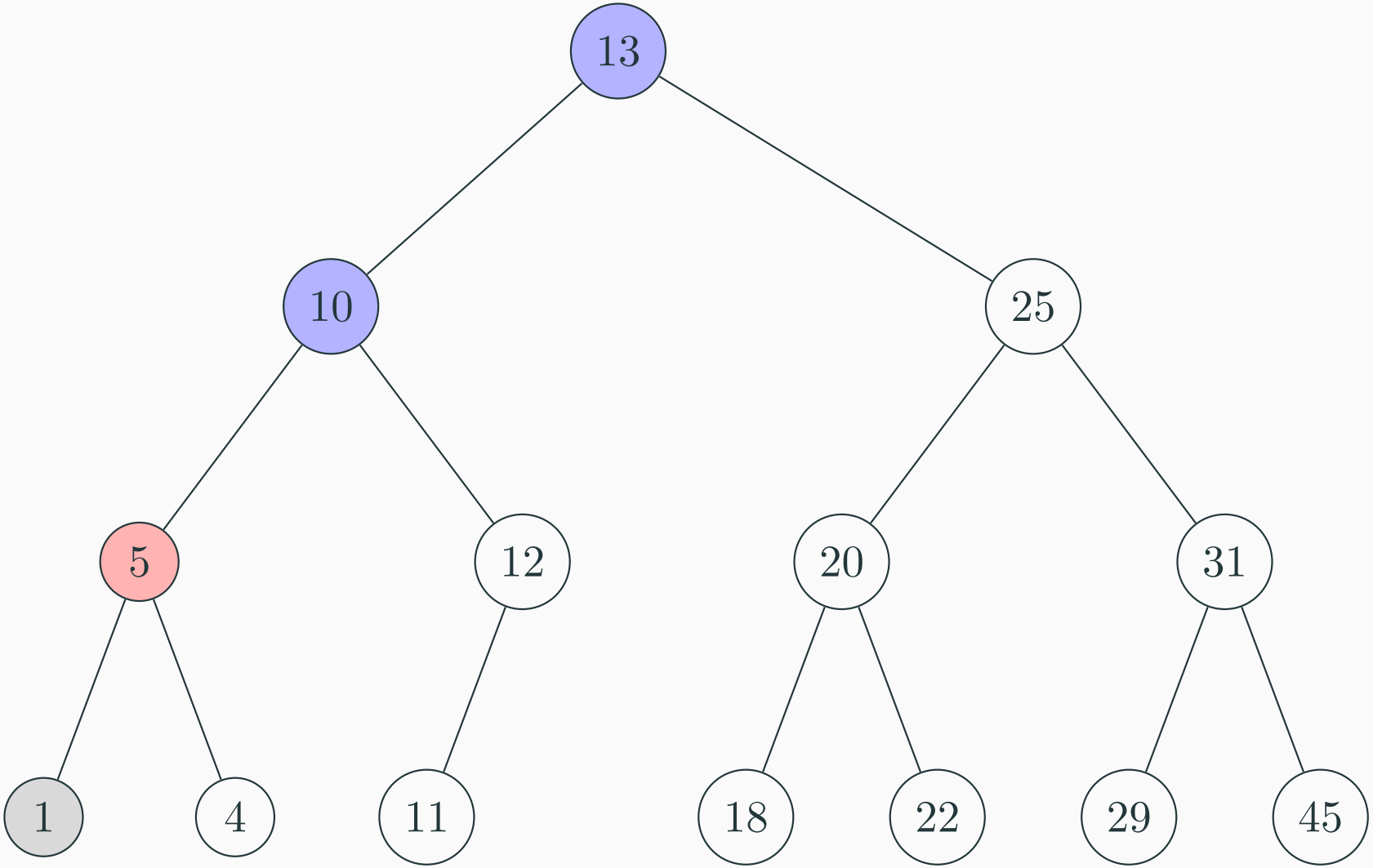
Exemplo de inserção em árvore binária de busca

Travessia pré-ordem: 13, 10, 5, 1



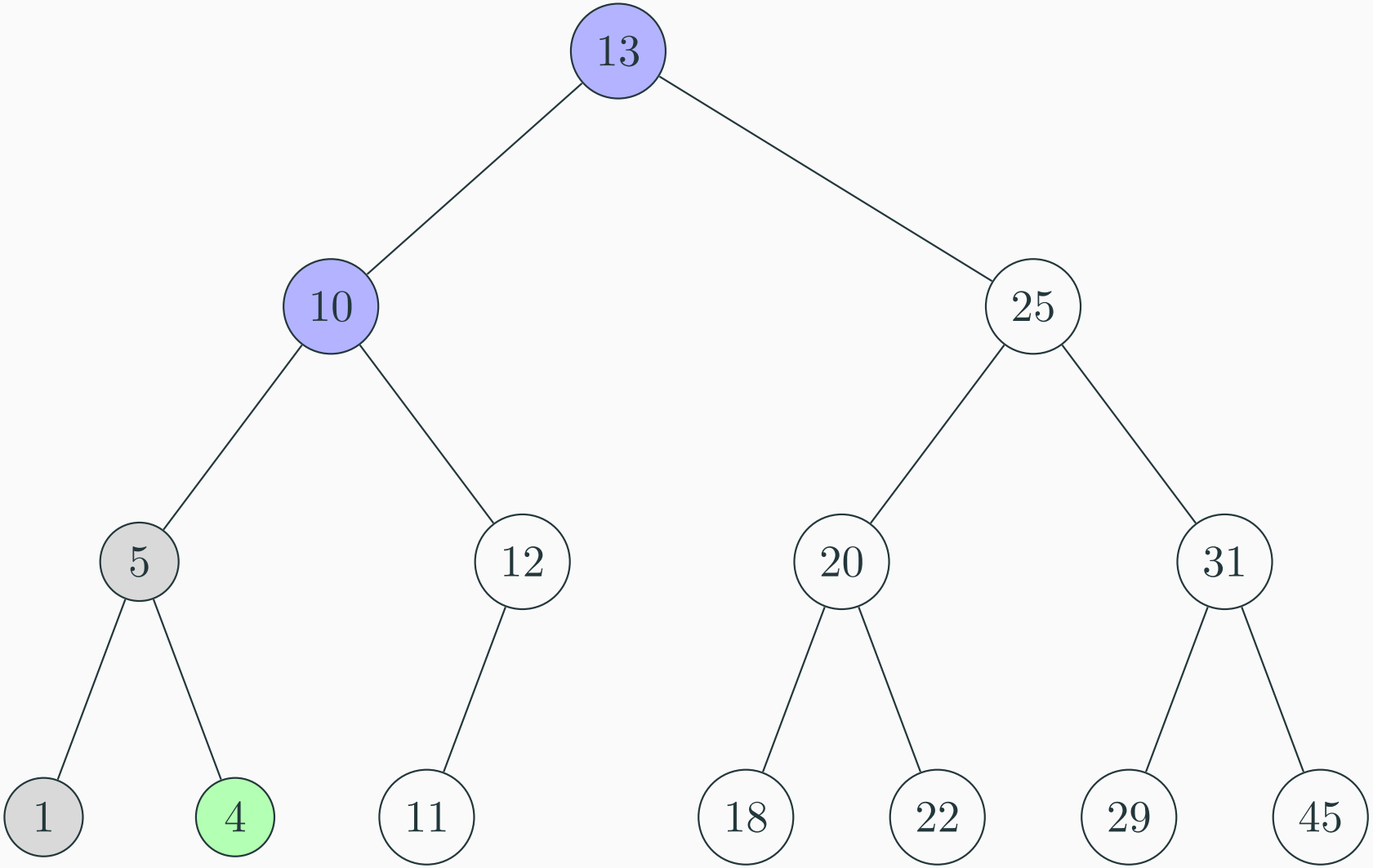
Exemplo de inserção em árvore binária de busca

Travessia pré-ordem: 13, 10, 5, 1



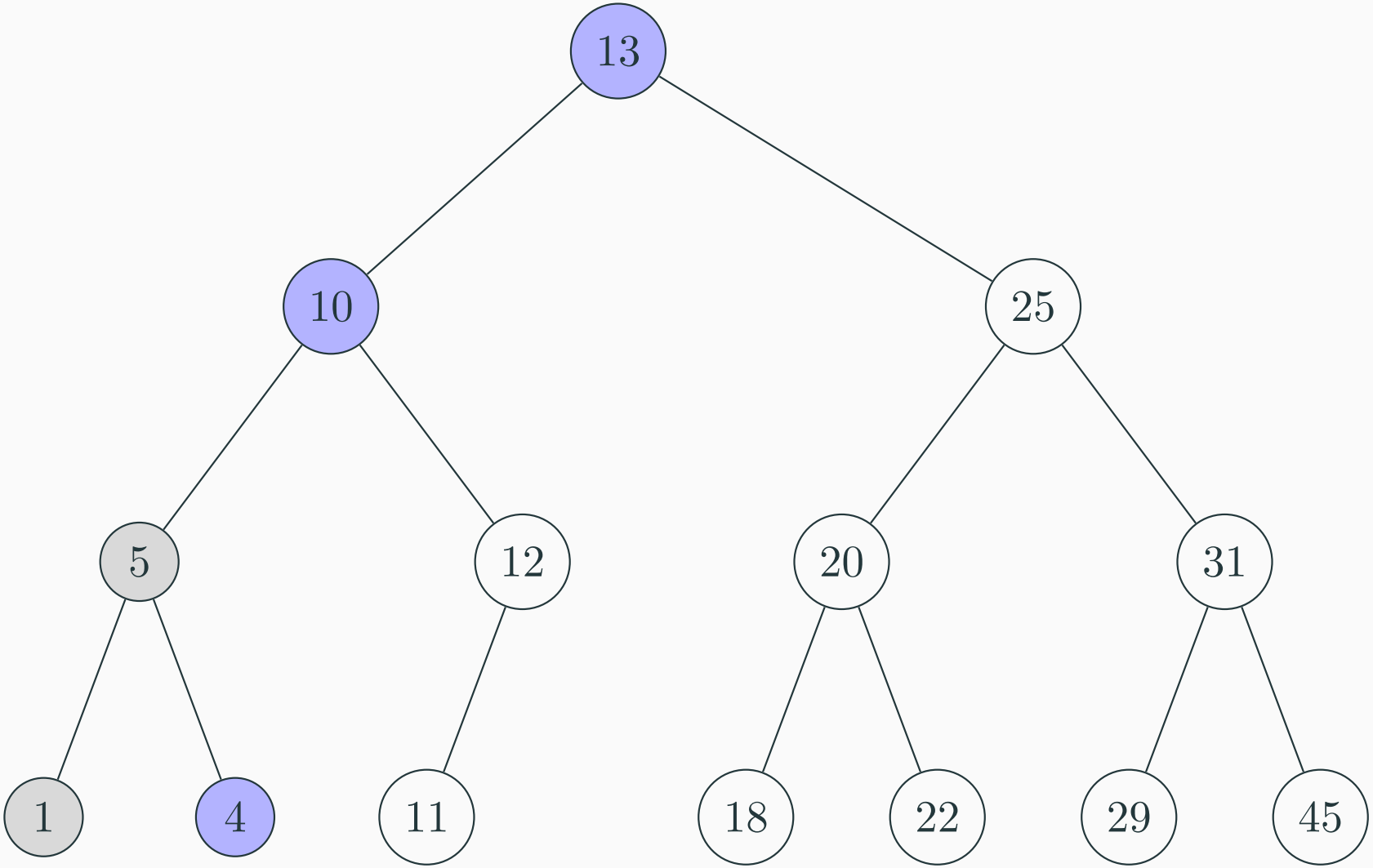
Exemplo de inserção em árvore binária de busca

Travessia pré-ordem: 13, 10, 5, 1



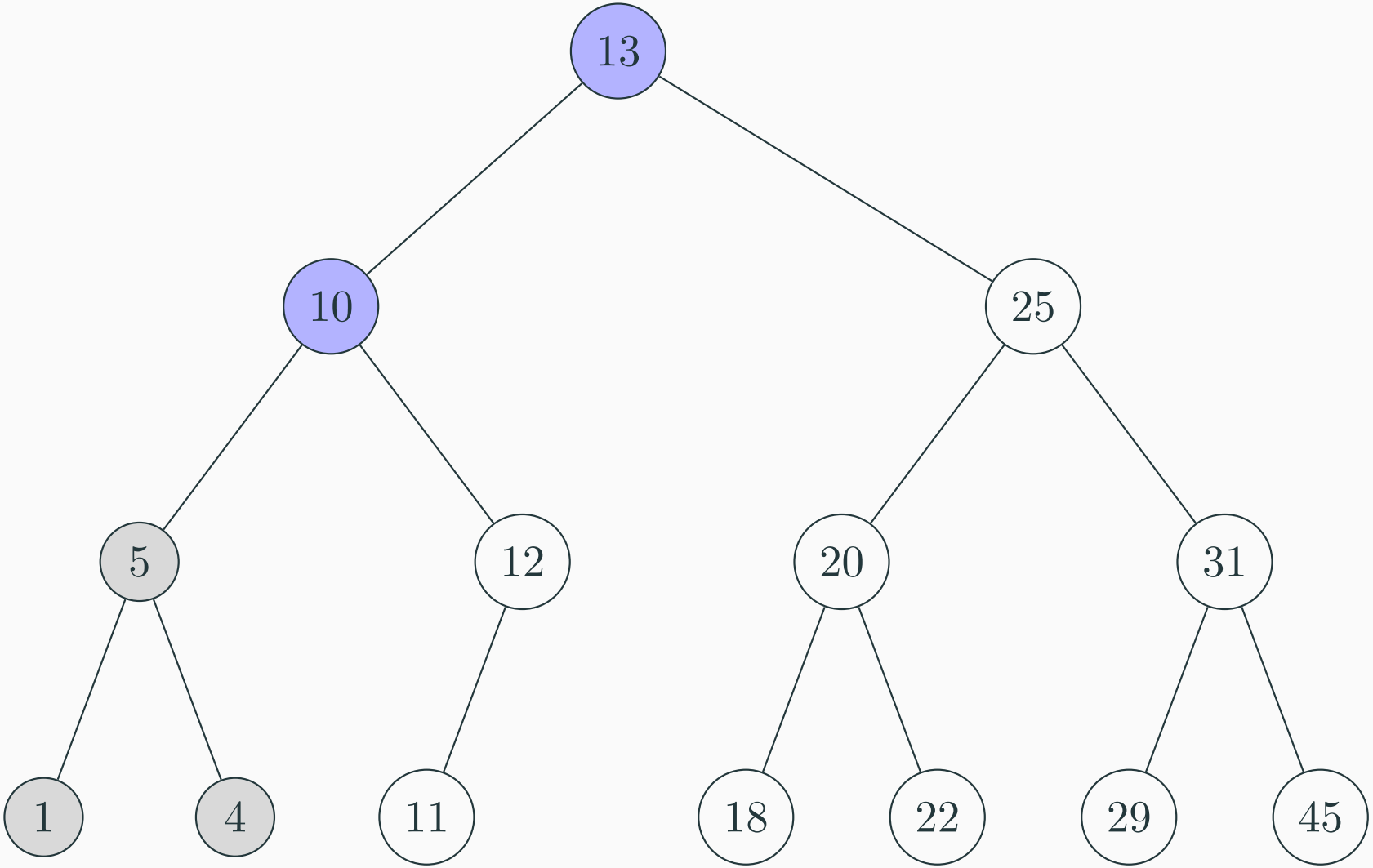
Exemplo de inserção em árvore binária de busca

Travessia pré-ordem: 13, 10, 5, 1, 4



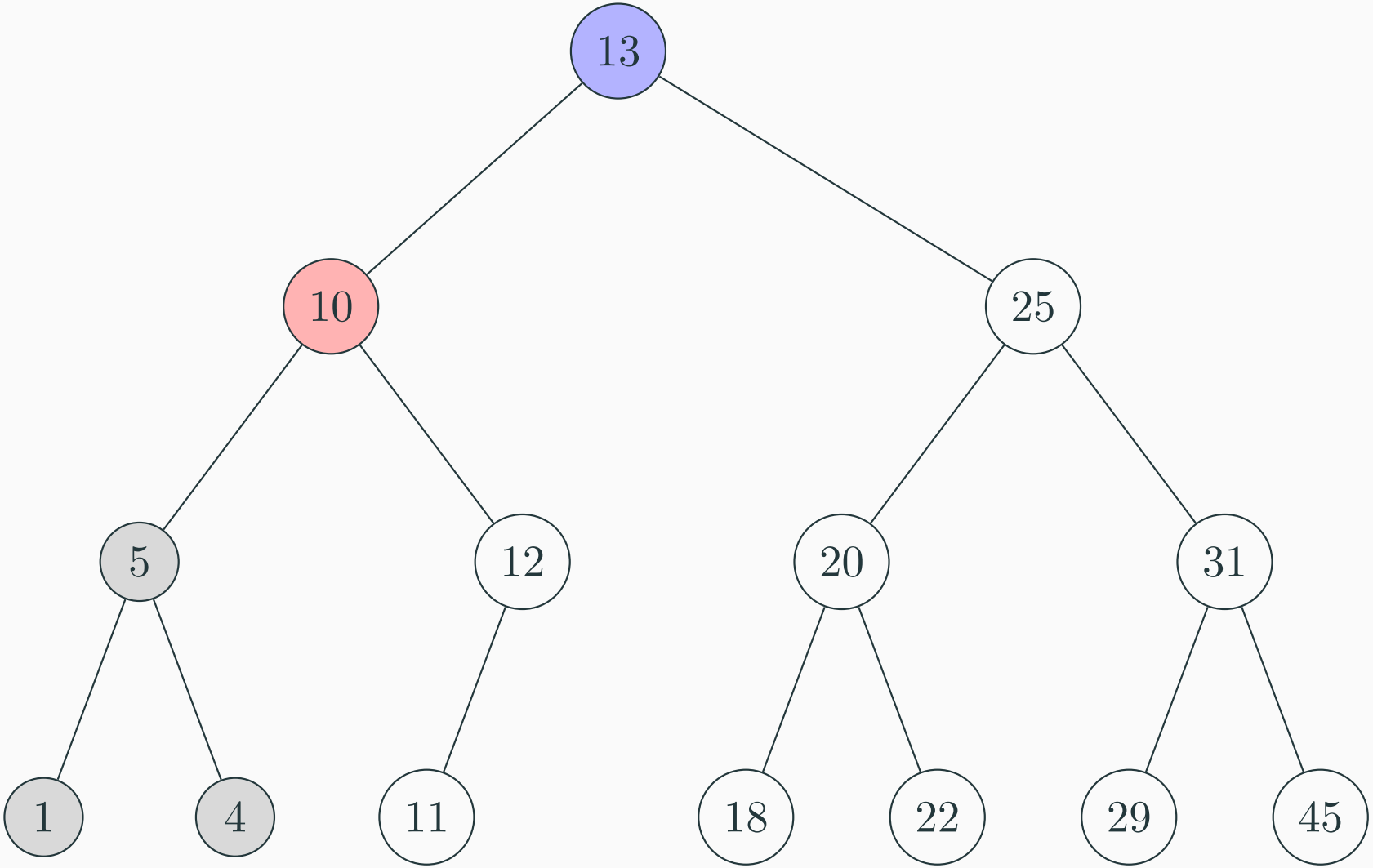
Exemplo de inserção em árvore binária de busca

Travessia pré-ordem: 13, 10, 5, 1, 4



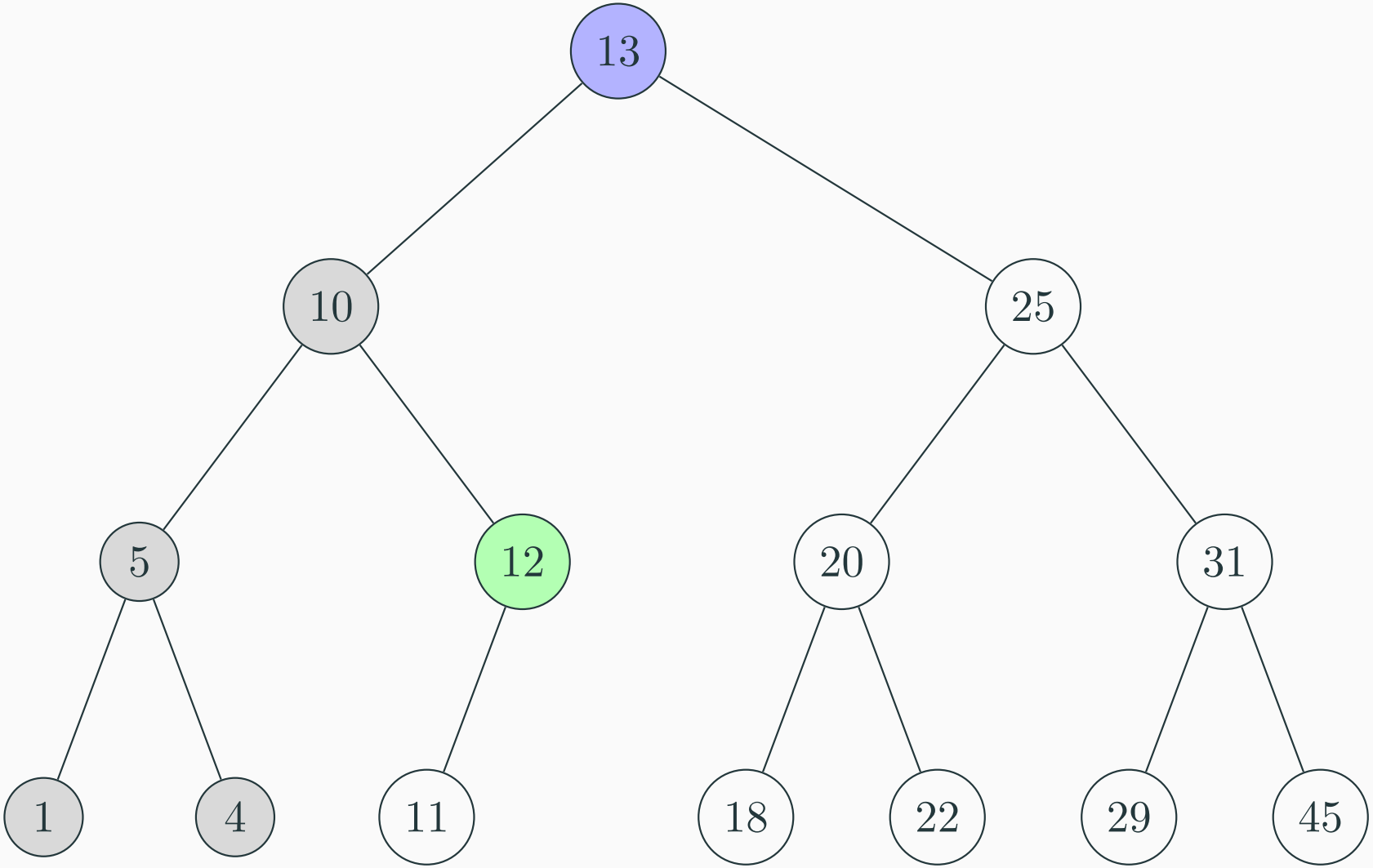
Exemplo de inserção em árvore binária de busca

Travessia pré-ordem: 13, 10, 5, 1, 4



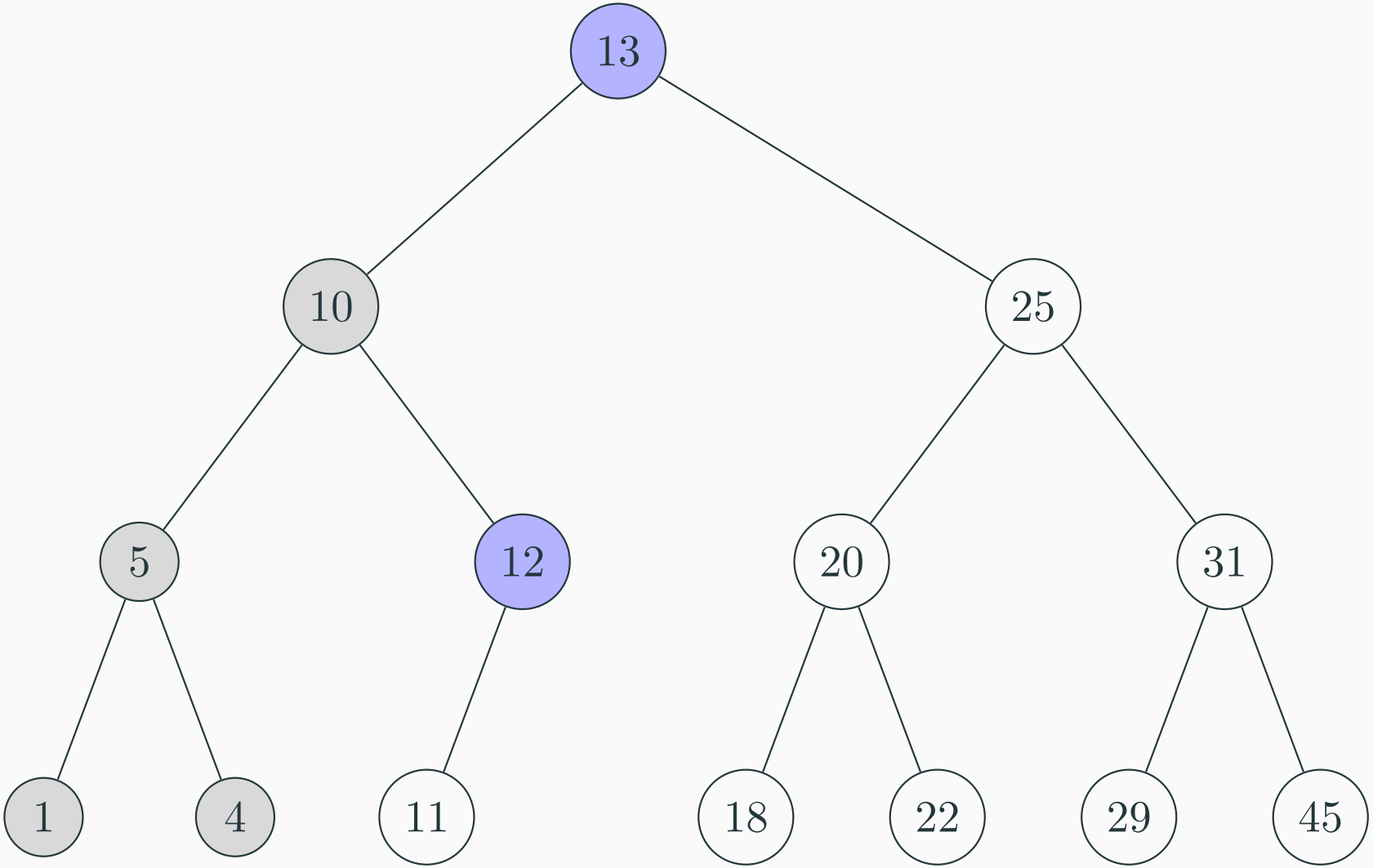
Exemplo de inserção em árvore binária de busca

Travessia pré-ordem: 13, 10, 5, 1, 4



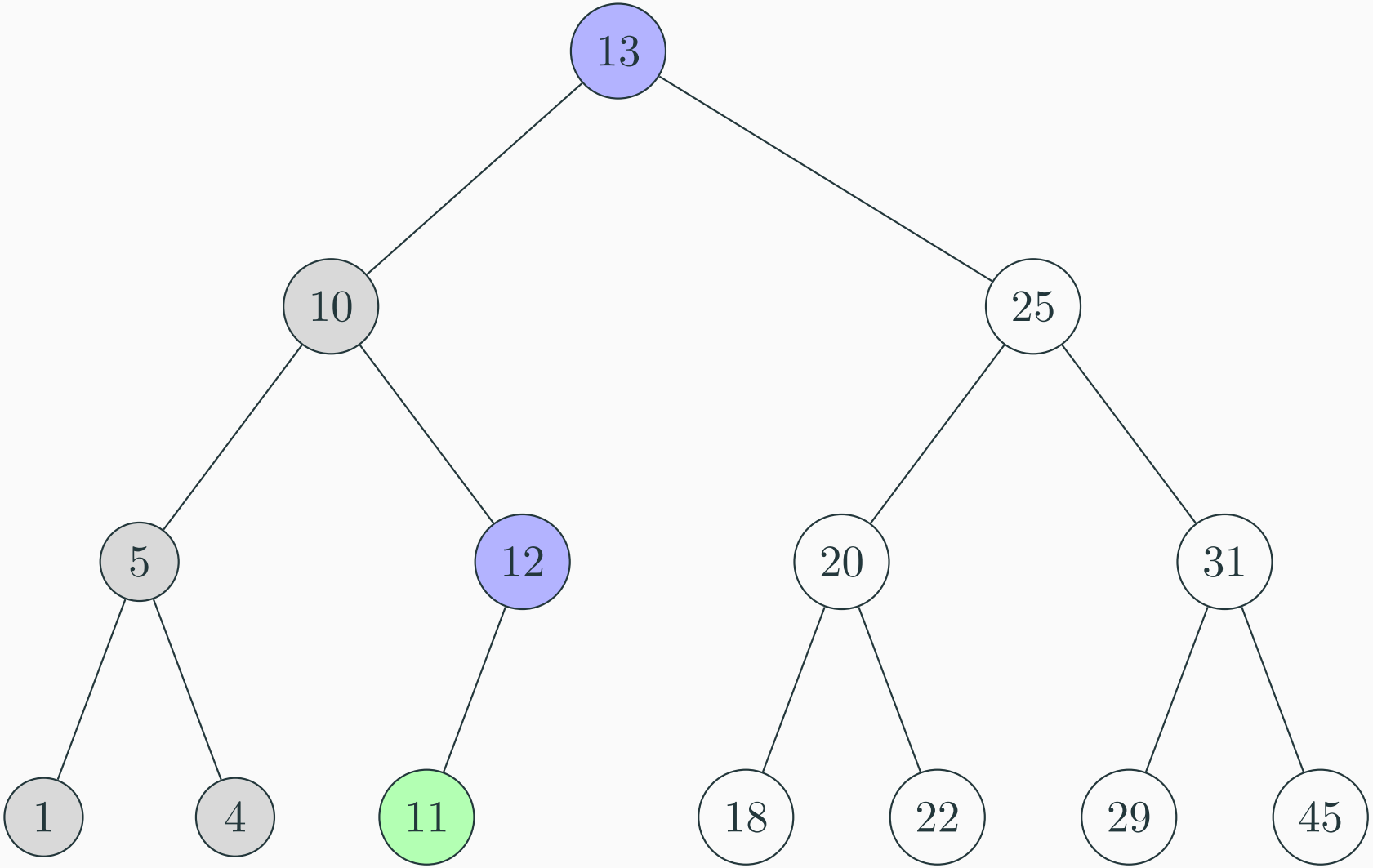
Exemplo de inserção em árvore binária de busca

Travessia pré-ordem: 13, 10, 5, 1, 4, 12



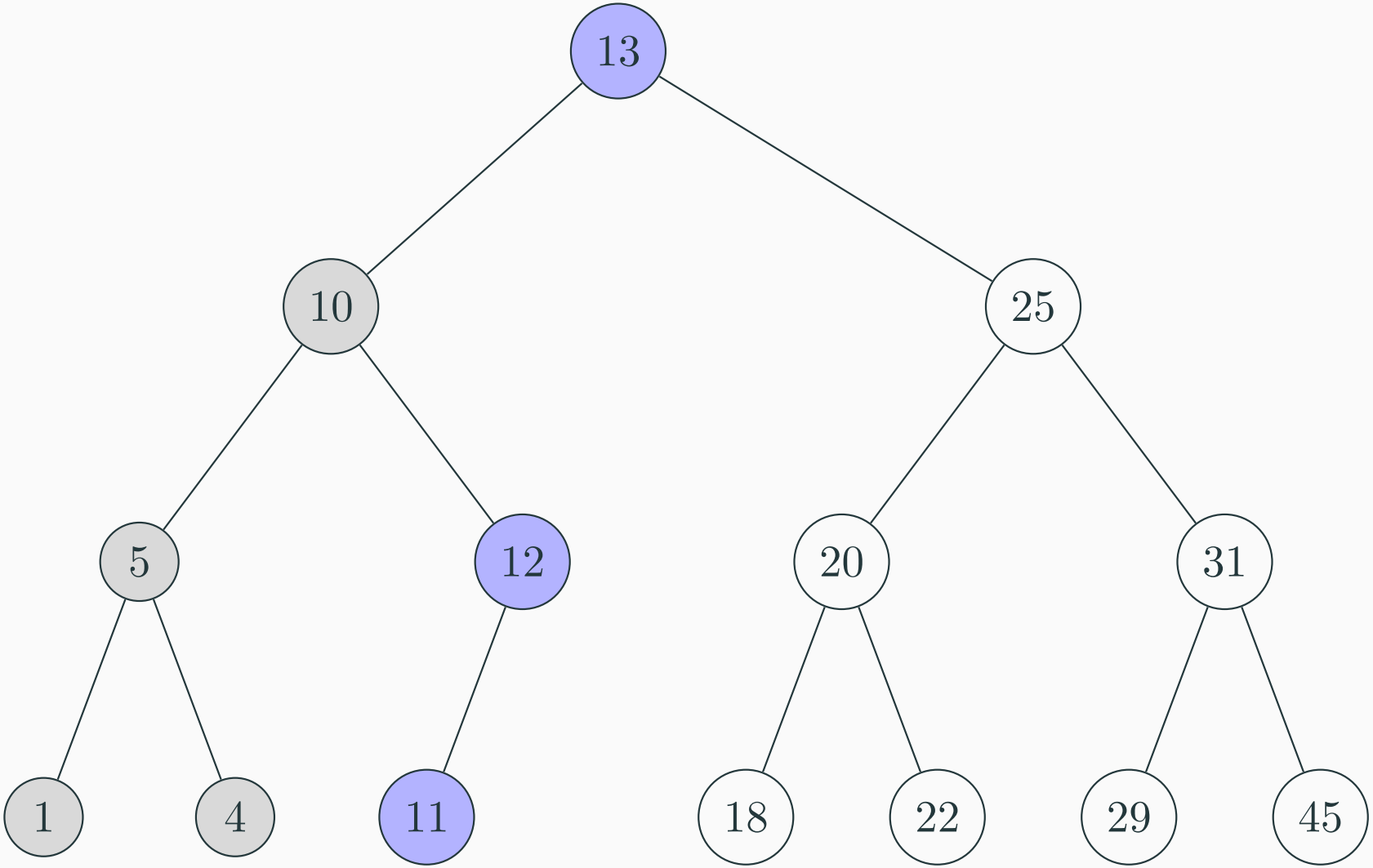
Exemplo de inserção em árvore binária de busca

Travessia pré-ordem: 13, 10, 5, 1, 4, 12



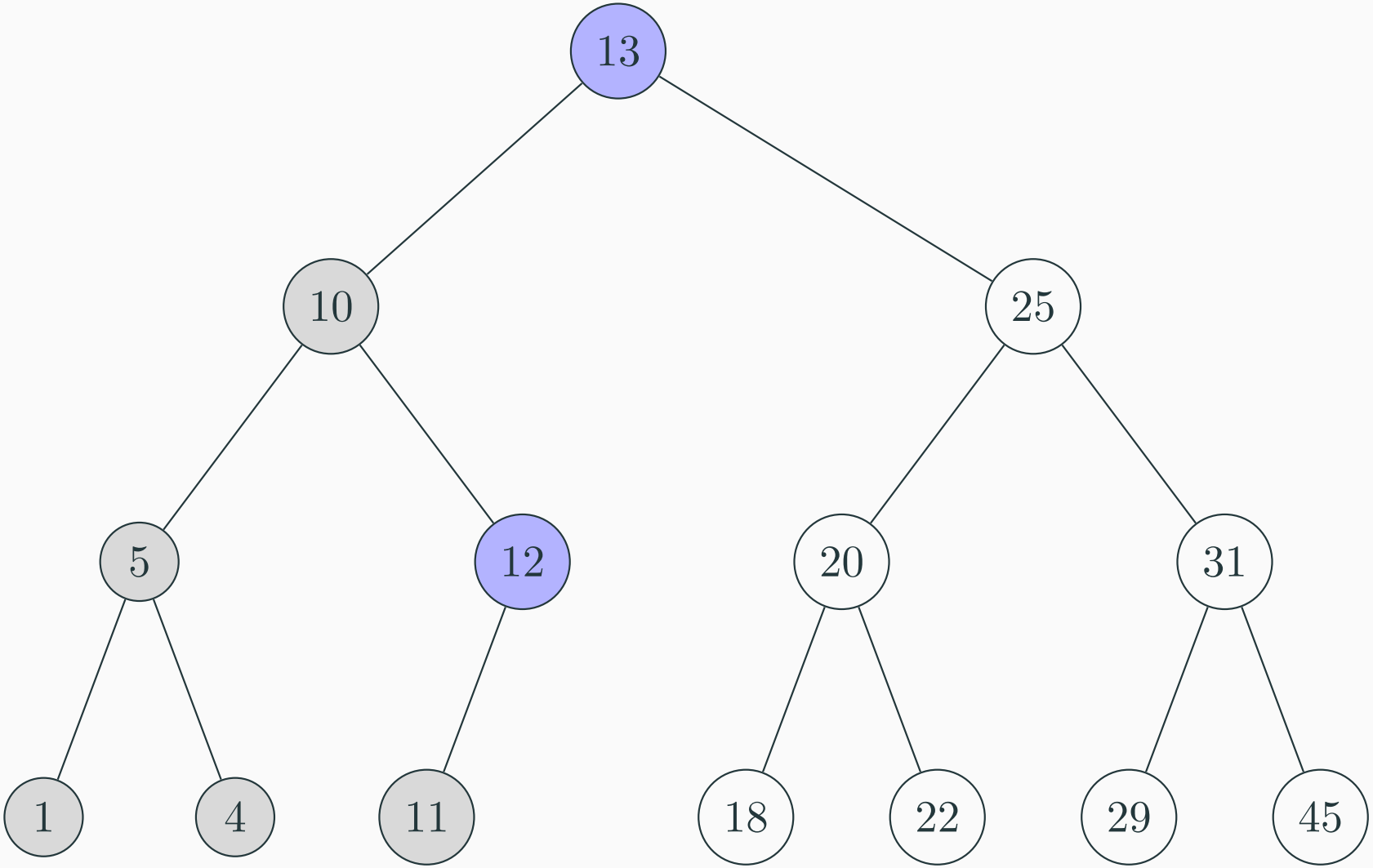
Exemplo de inserção em árvore binária de busca

Travessia pré-ordem: 13, 10, 5, 1, 4, 12, 11



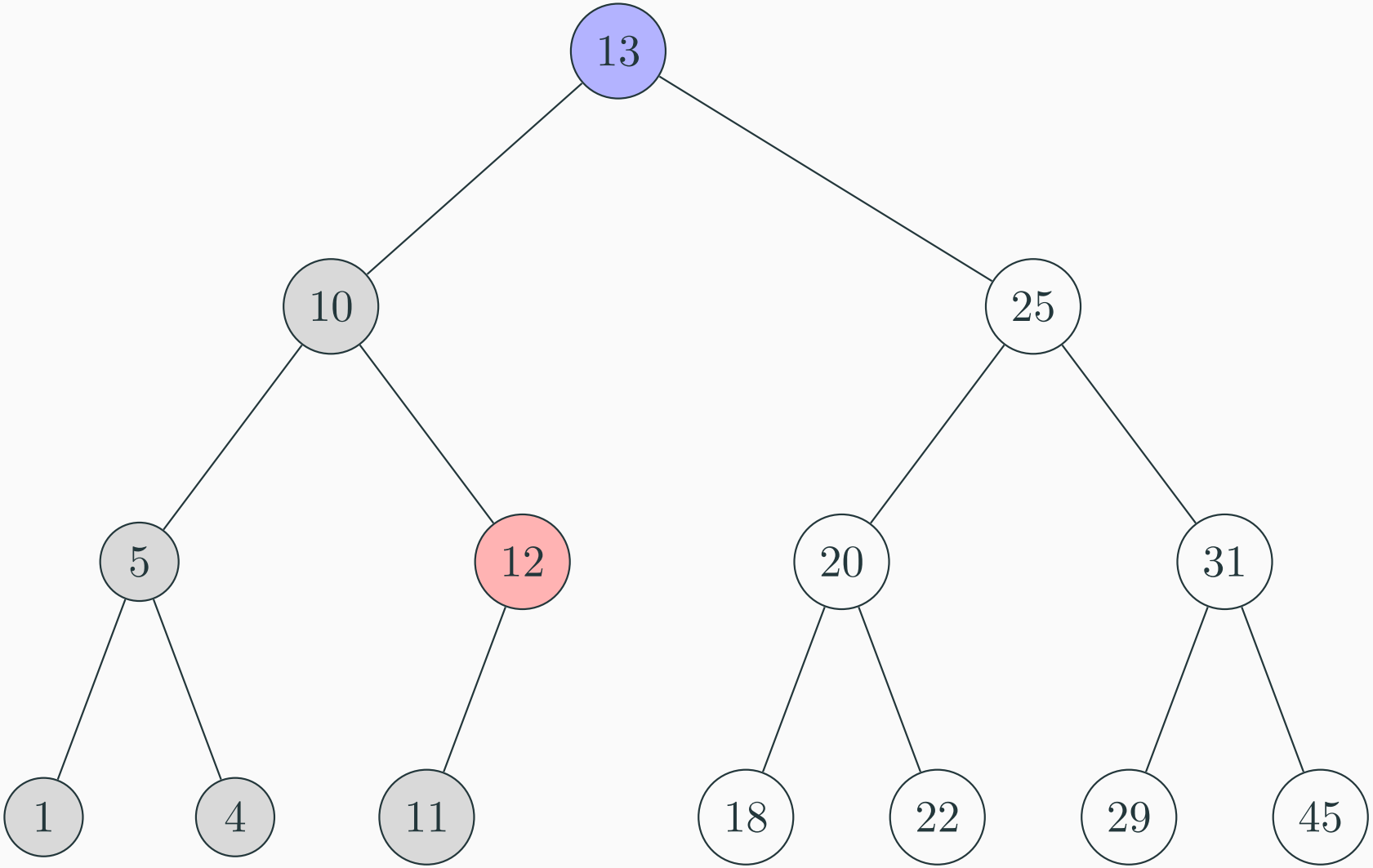
Exemplo de inserção em árvore binária de busca

Travessia pré-ordem: 13, 10, 5, 1, 4, 12, 11



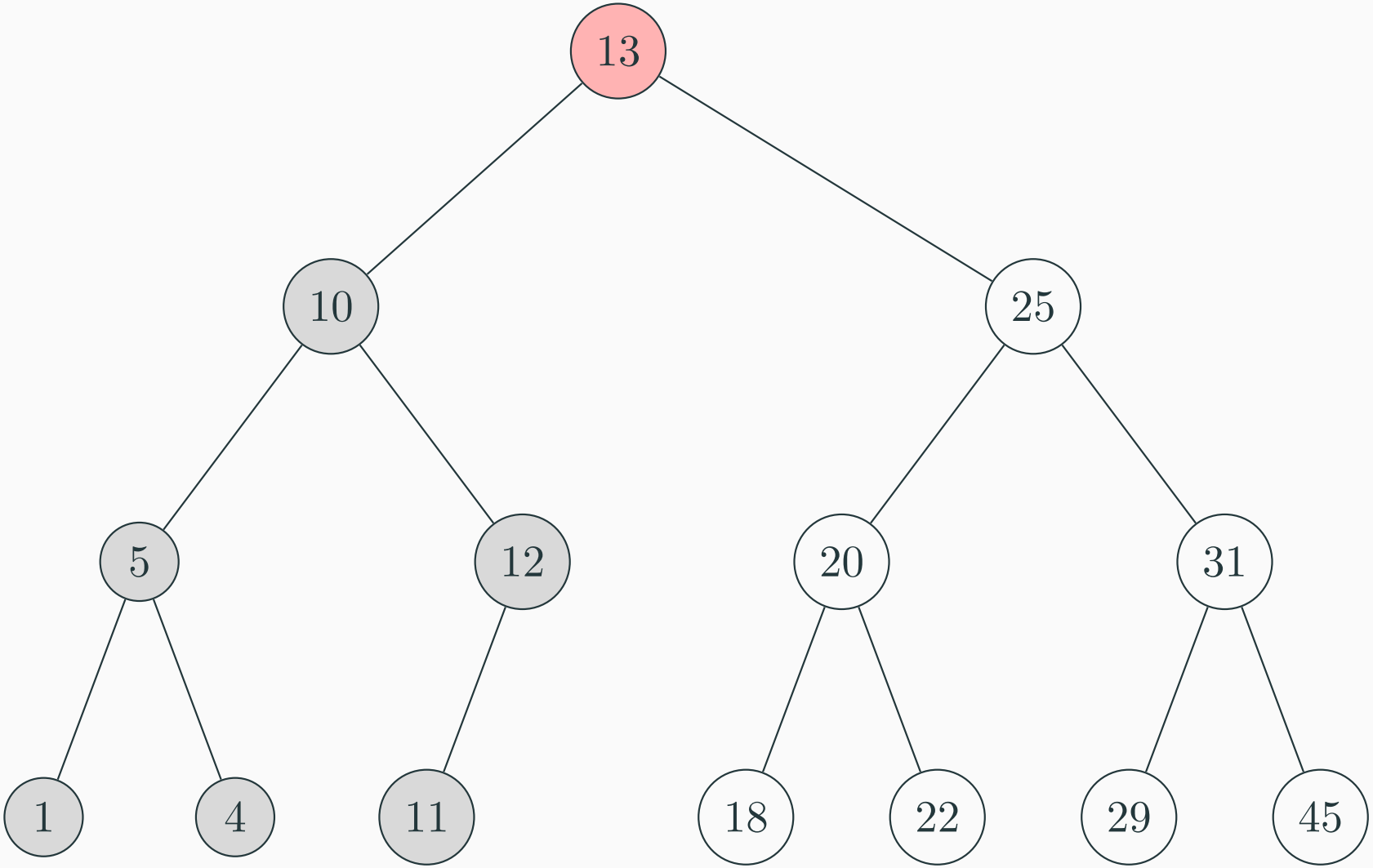
Exemplo de inserção em árvore binária de busca

Travessia pré-ordem: 13, 10, 5, 1, 4, 12, 11



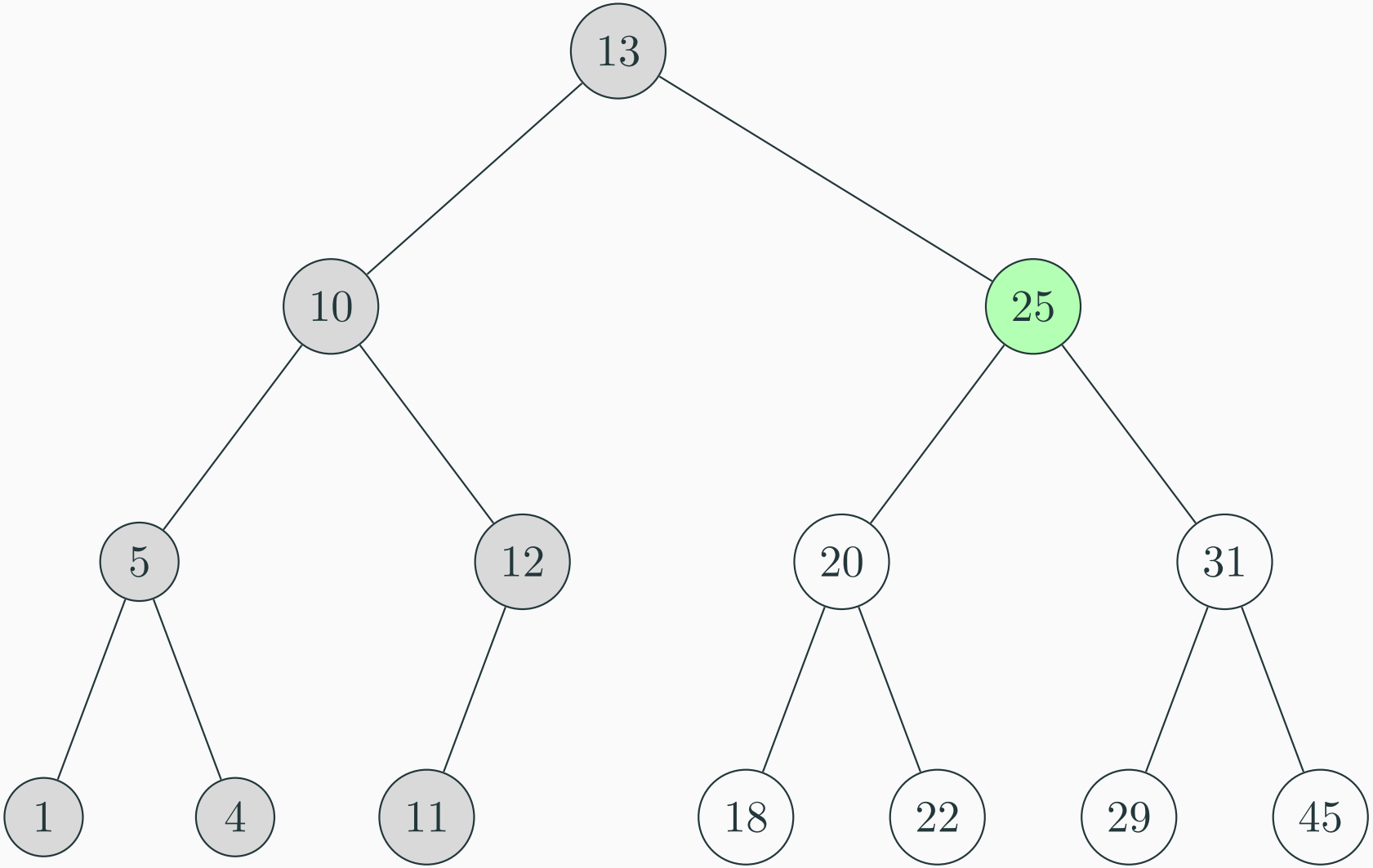
Exemplo de inserção em árvore binária de busca

Travessia pré-ordem: 13, 10, 5, 1, 4, 12, 11



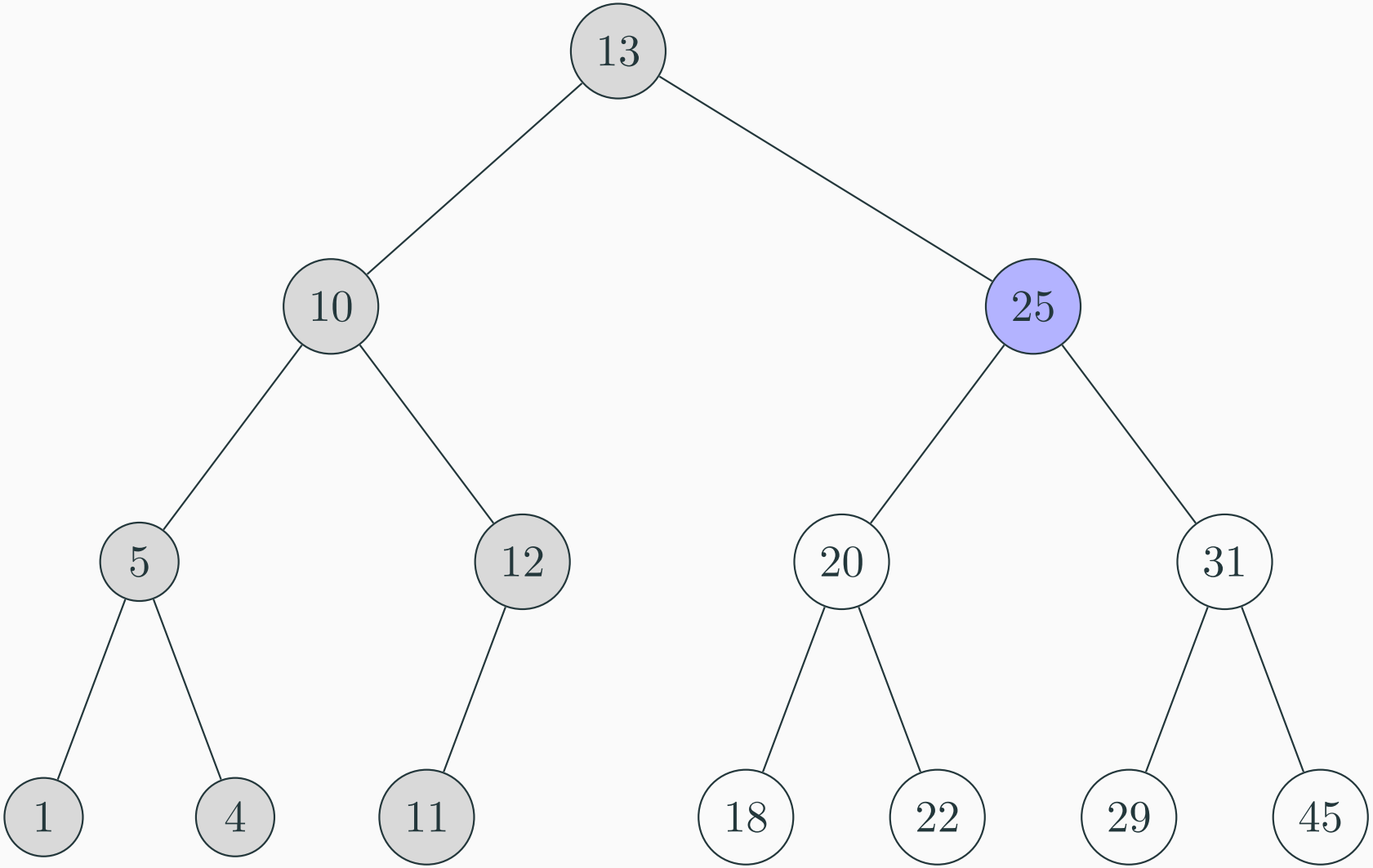
Exemplo de inserção em árvore binária de busca

Travessia pré-ordem: 13, 10, 5, 1, 4, 12, 11



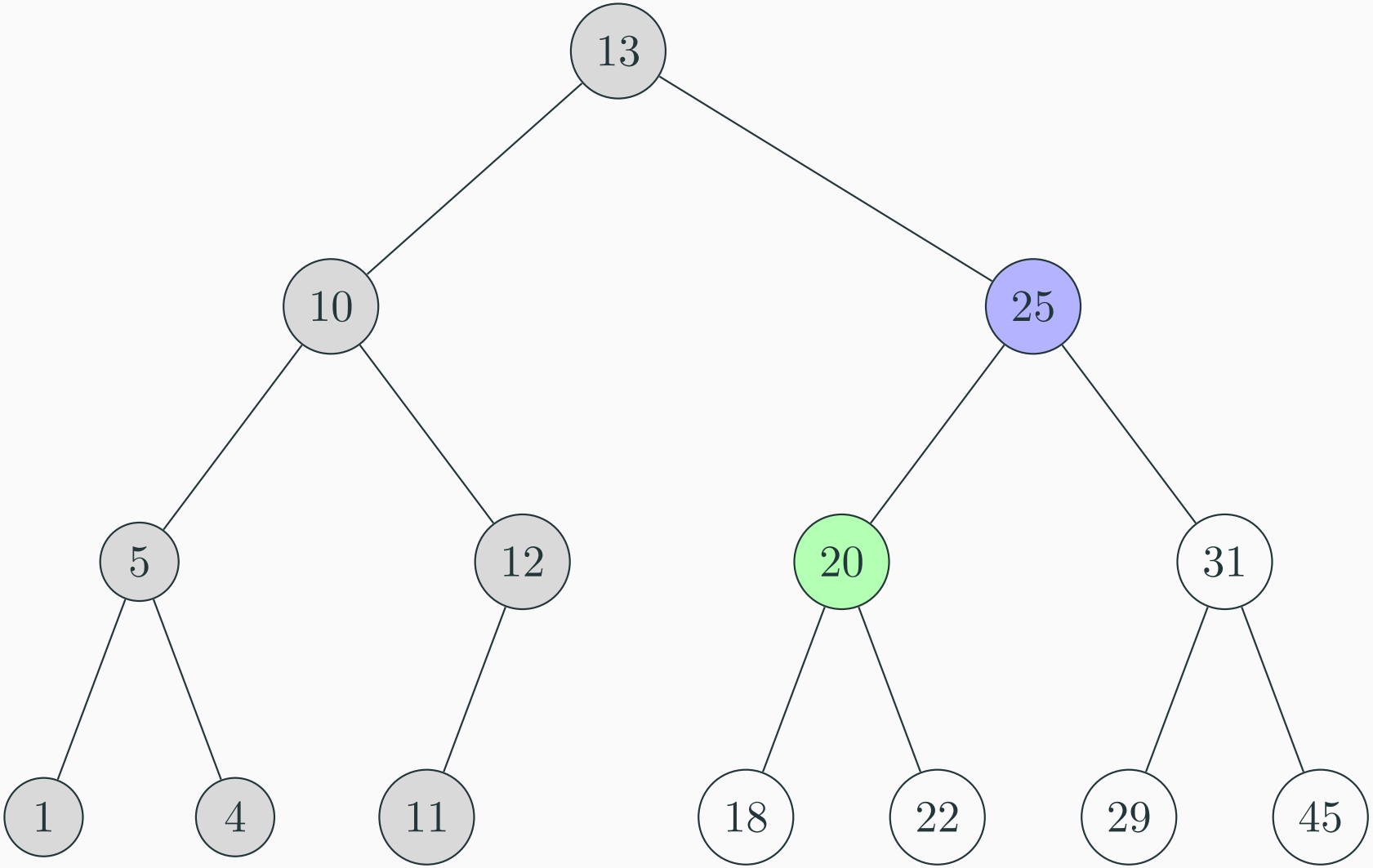
Exemplo de inserção em árvore binária de busca

Travessia pré-ordem: 13, 10, 5, 1, 4, 12, 11, 25



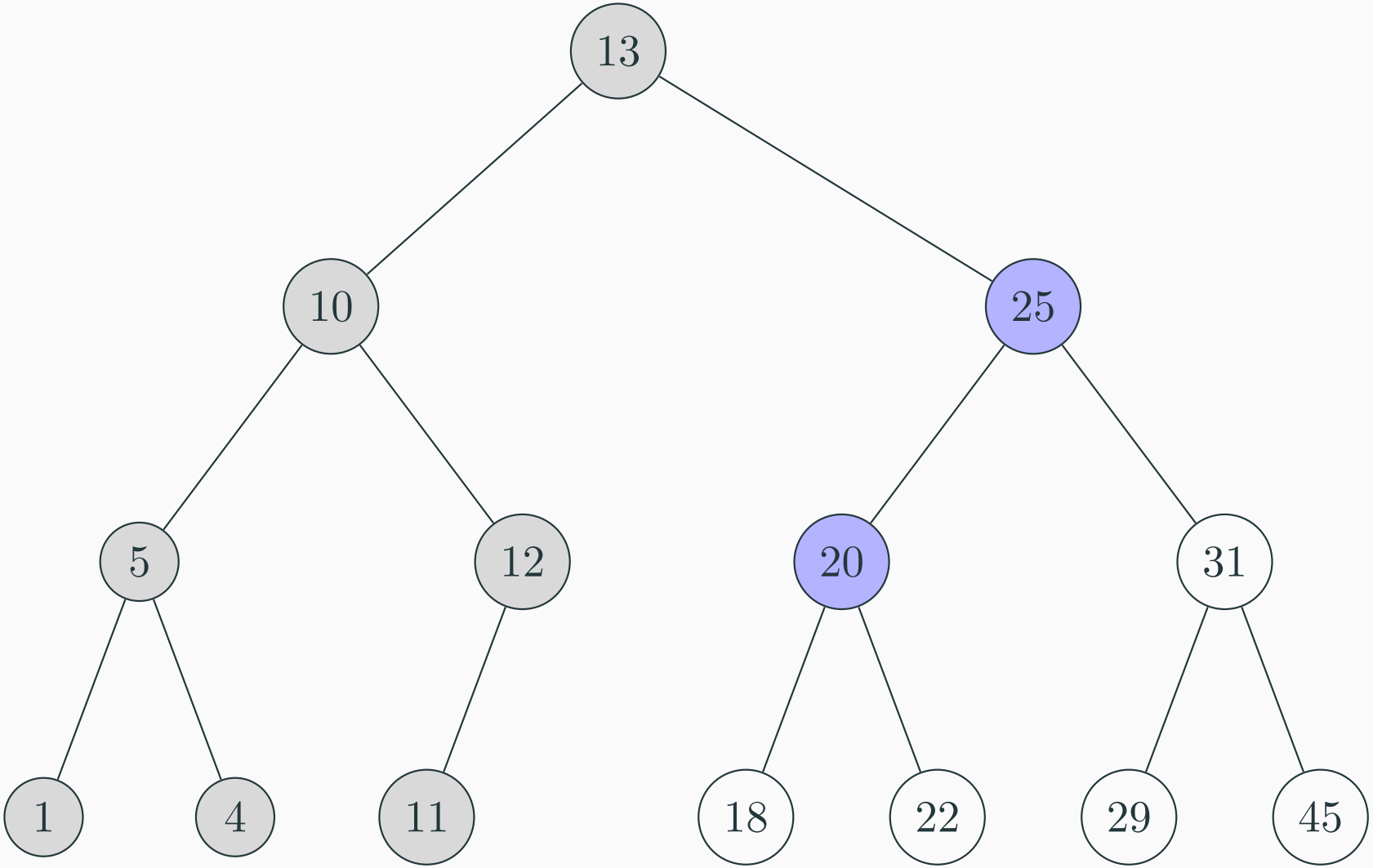
Exemplo de inserção em árvore binária de busca

Travessia pré-ordem: 13, 10, 5, 1, 4, 12, 11, 25



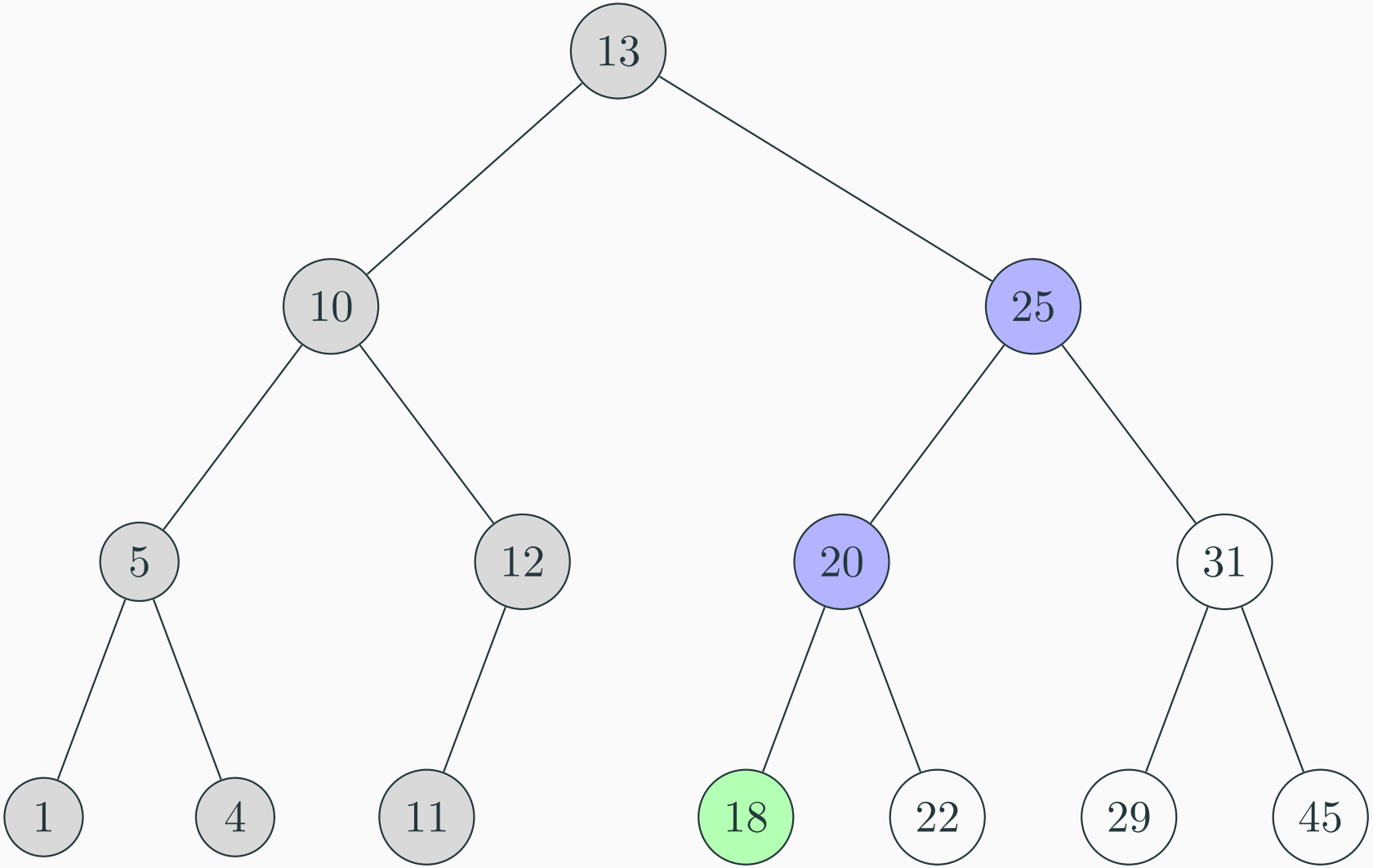
Exemplo de inserção em árvore binária de busca

Travessia pré-ordem: 13, 10, 5, 1, 4, 12, 11, 25, 20



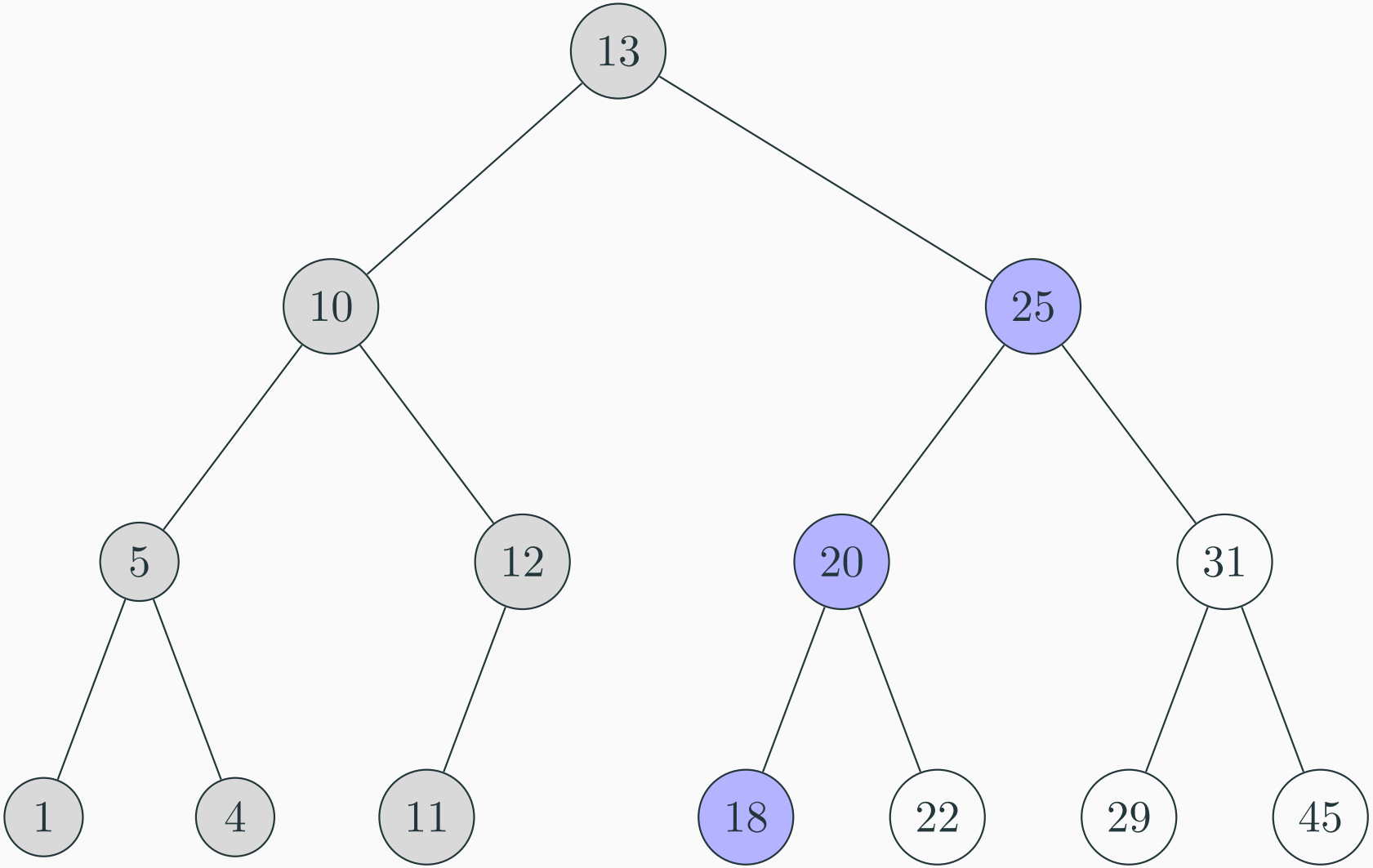
Exemplo de inserção em árvore binária de busca

Travessia pré-ordem: 13, 10, 5, 1, 4, 12, 11, 25, 20



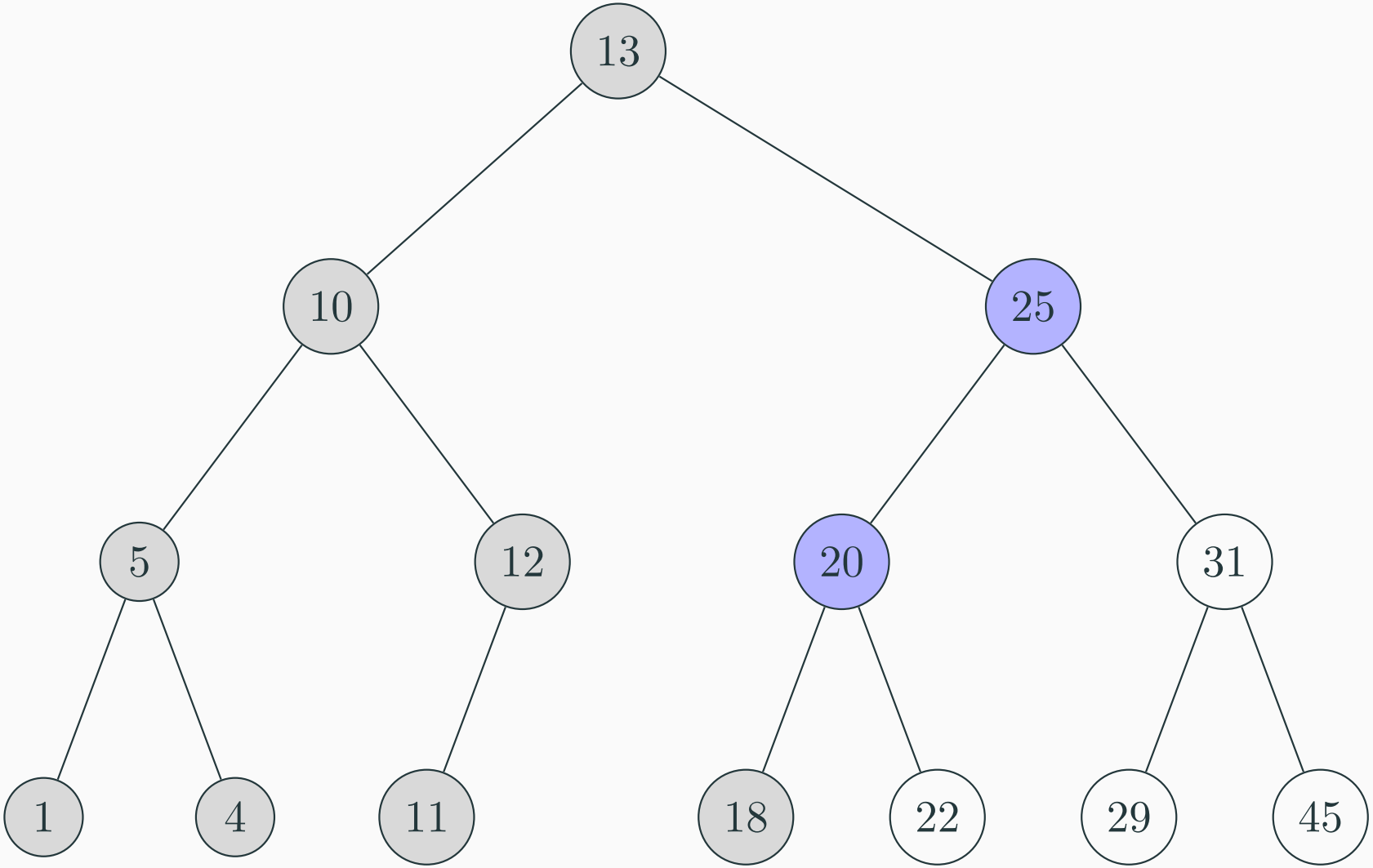
Exemplo de inserção em árvore binária de busca

Travessia pré-ordem: 13, 10, 5, 1, 4, 12, 11, 25, 20, 18



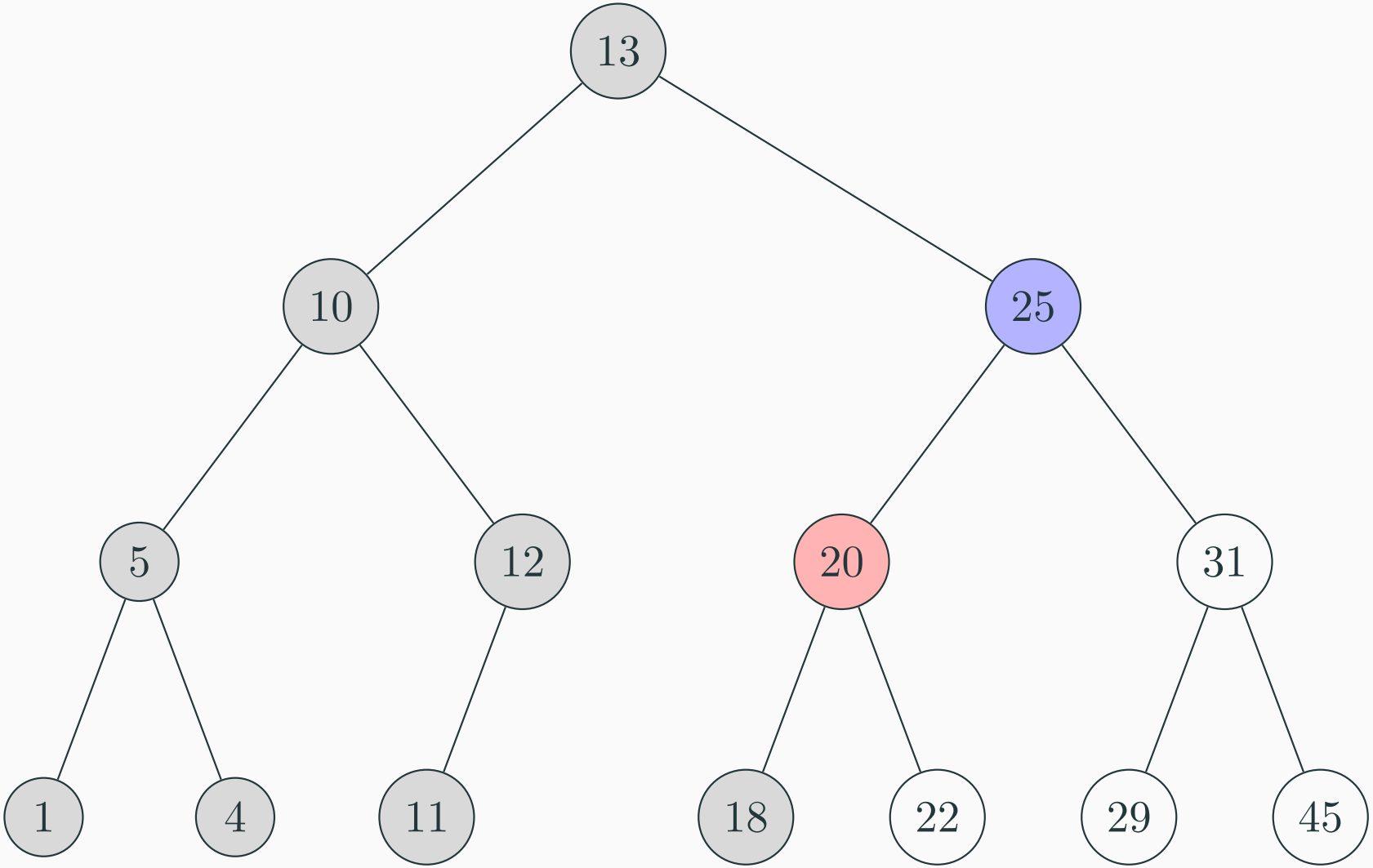
Exemplo de inserção em árvore binária de busca

Travessia pré-ordem: 13, 10, 5, 1, 4, 12, 11, 25, 20, 18



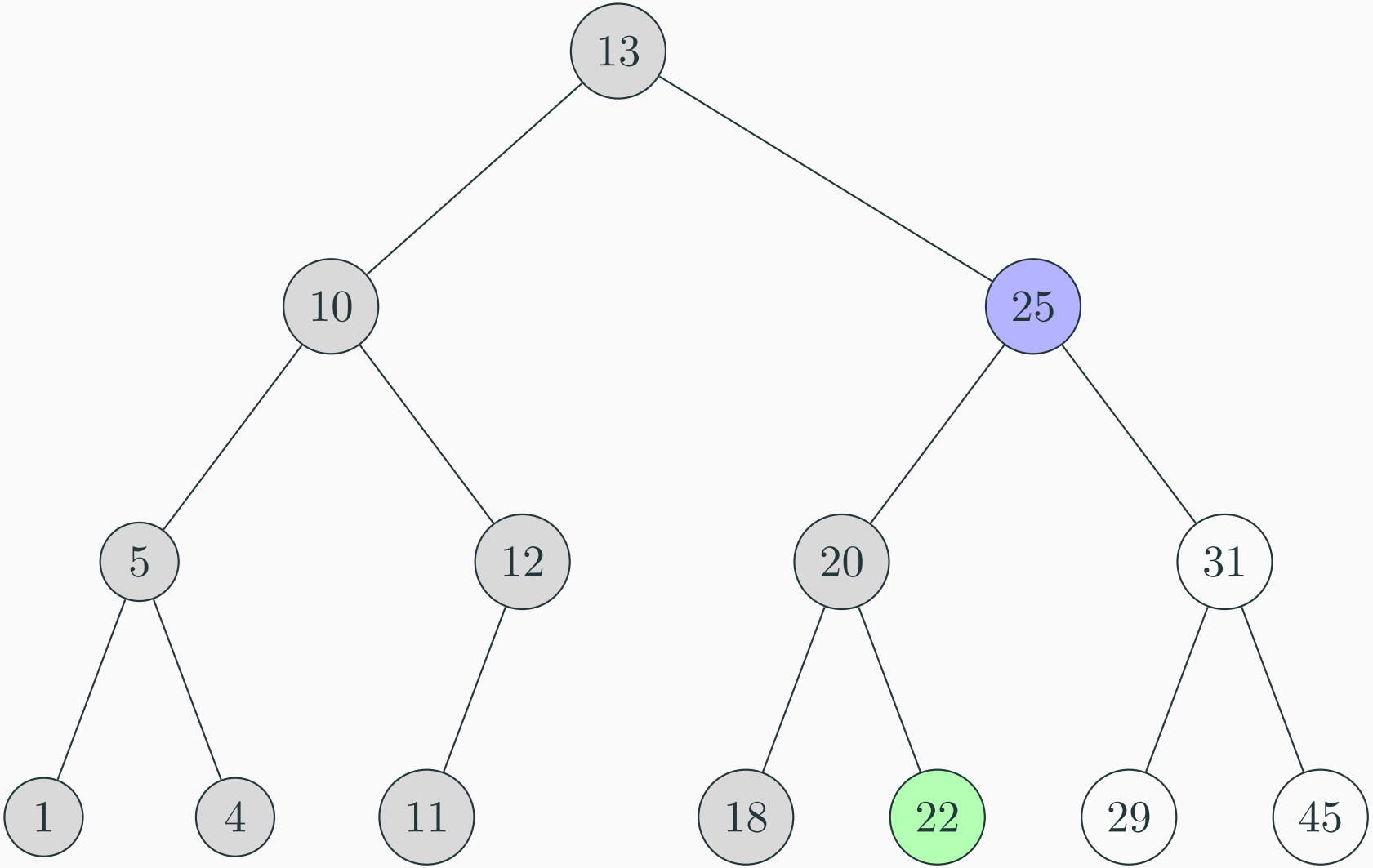
Exemplo de inserção em árvore binária de busca

Travessia pré-ordem: 13, 10, 5, 1, 4, 12, 11, 25, 20, 18



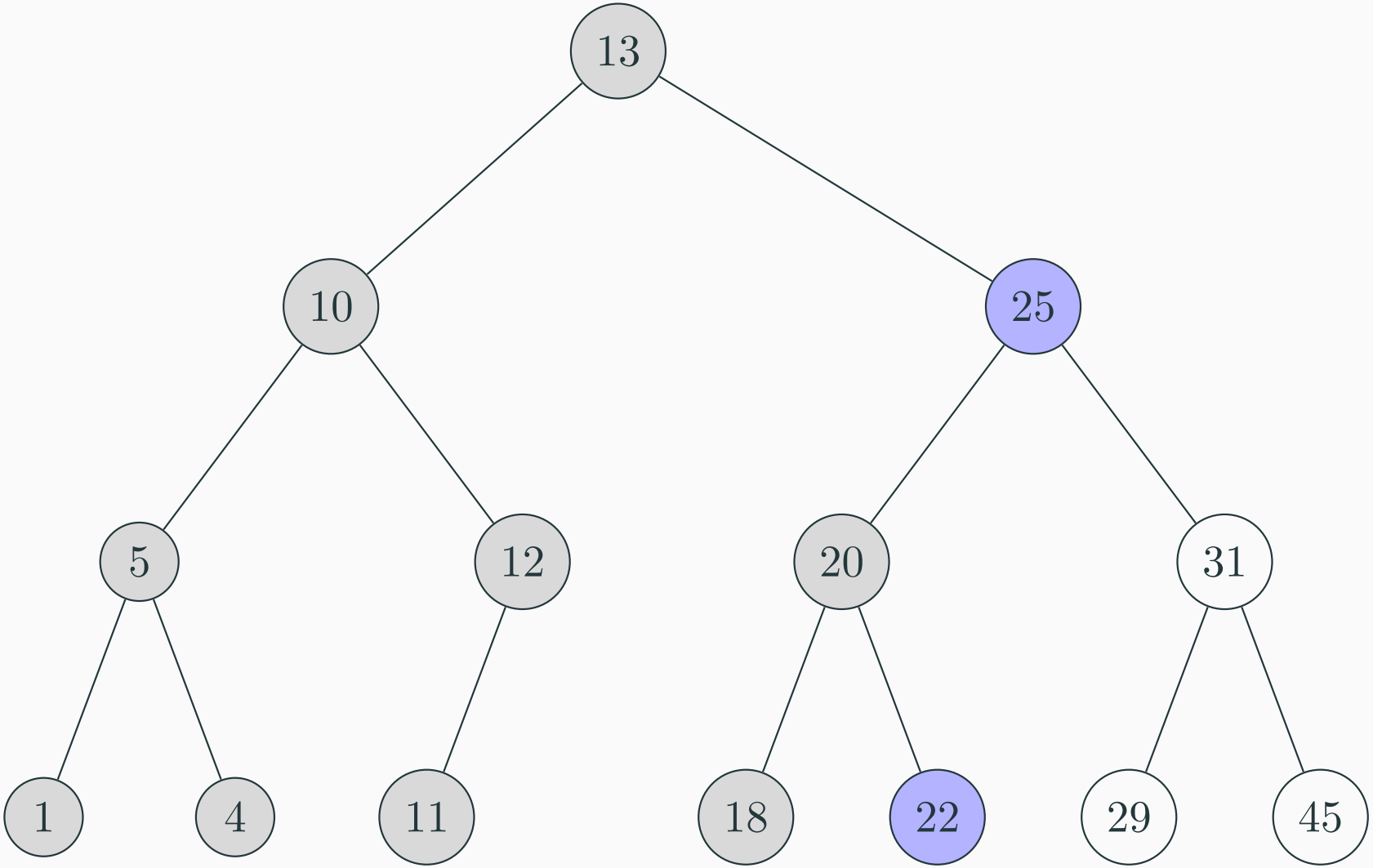
Exemplo de inserção em árvore binária de busca

Travessia pré-ordem: 13, 10, 5, 1, 4, 12, 11, 25, 20, 18



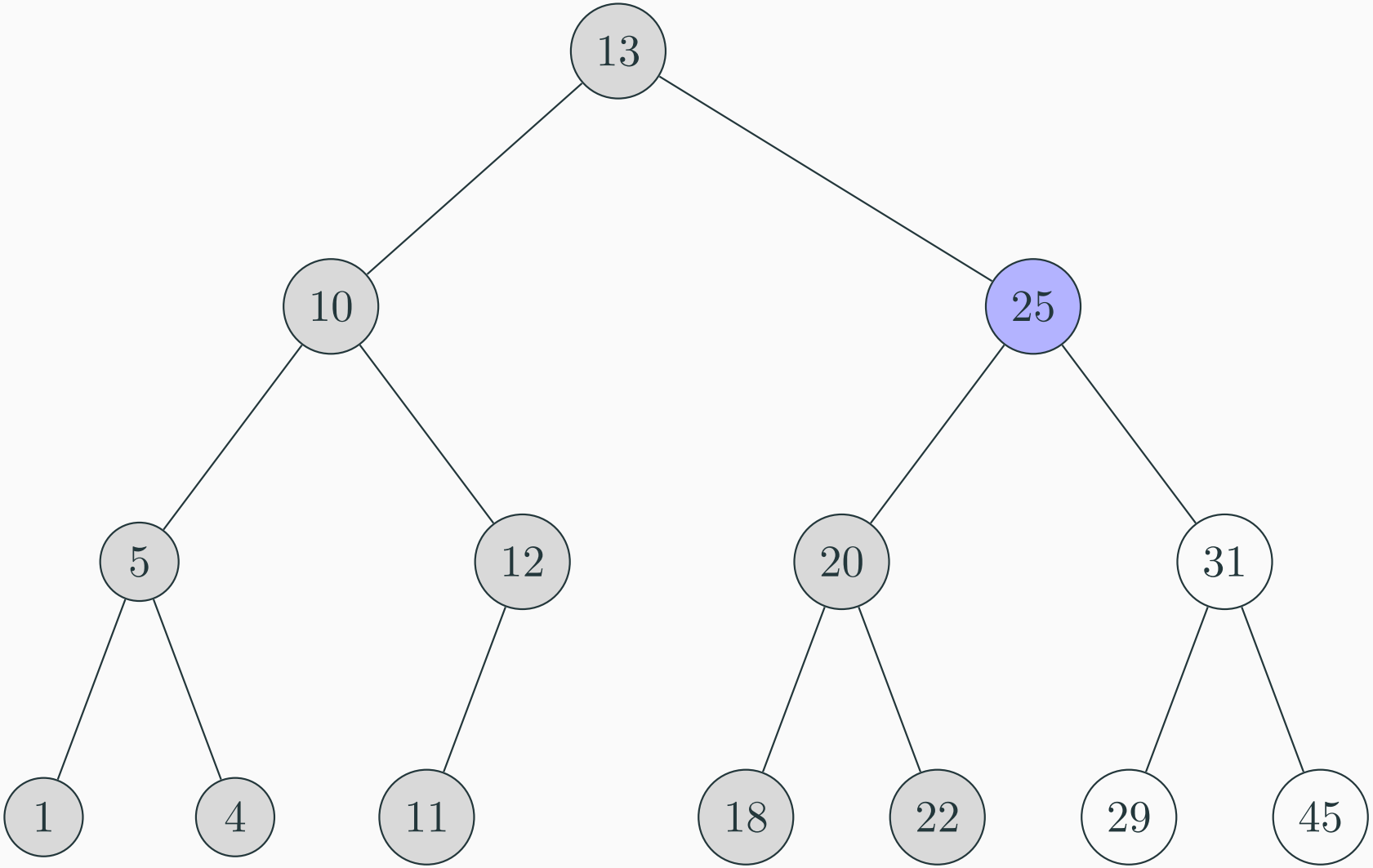
Exemplo de inserção em árvore binária de busca

Travessia pré-ordem: 13, 10, 5, 1, 4, 12, 11, 25, 20, 18, 22



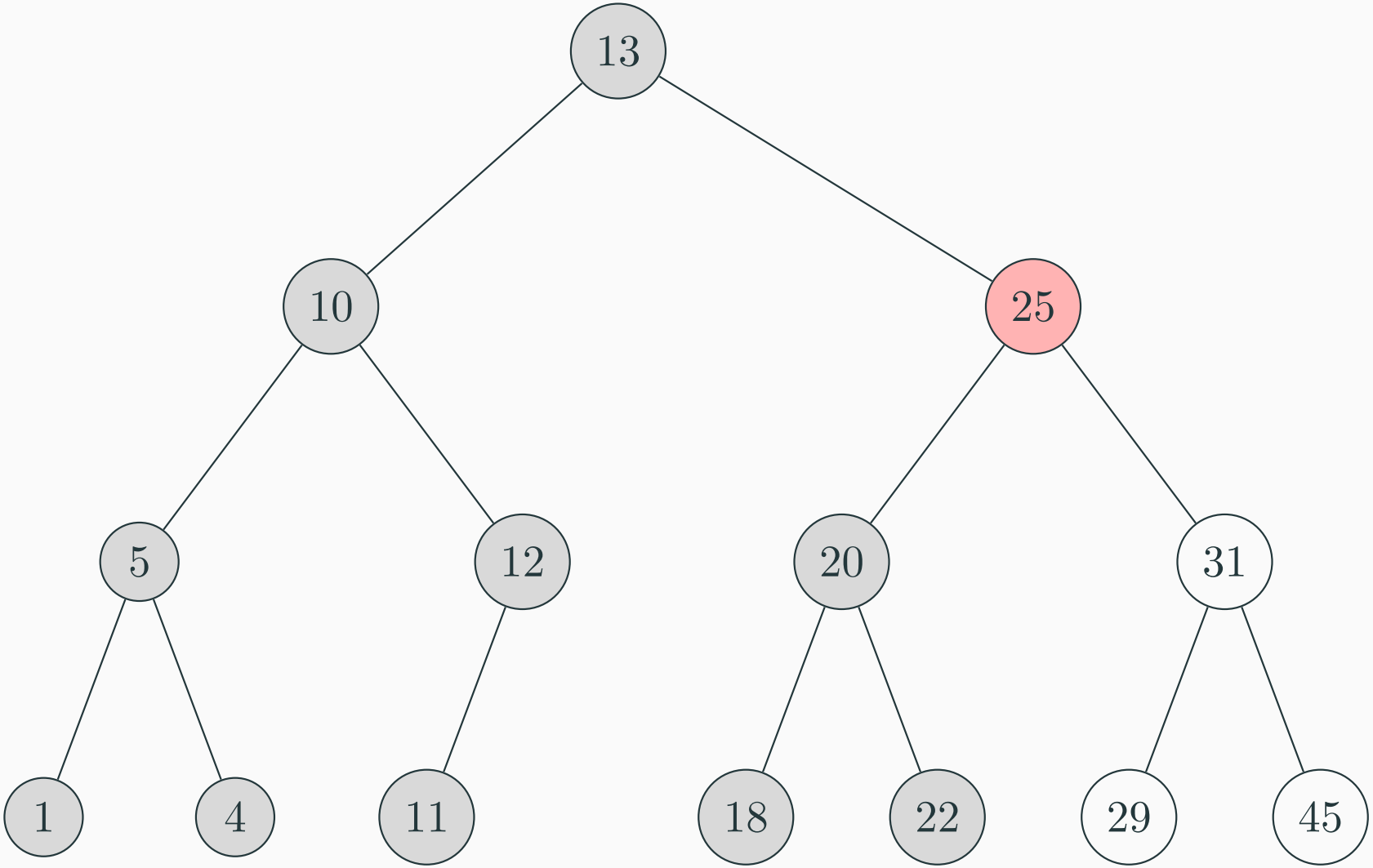
Exemplo de inserção em árvore binária de busca

Travessia pré-ordem: 13, 10, 5, 1, 4, 12, 11, 25, 20, 18, 22



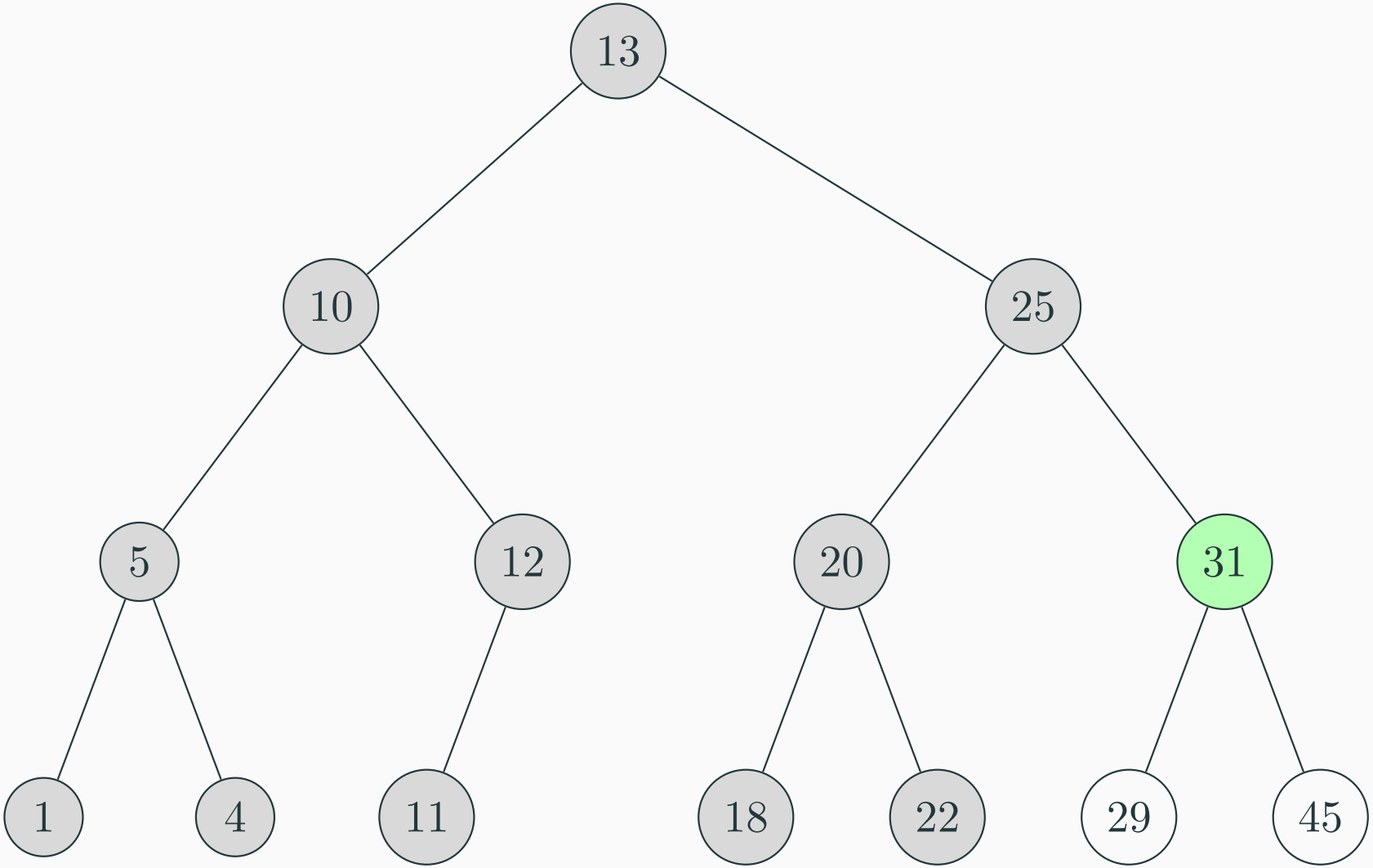
Exemplo de inserção em árvore binária de busca

Travessia pré-ordem: 13, 10, 5, 1, 4, 12, 11, 25, 20, 18, 22



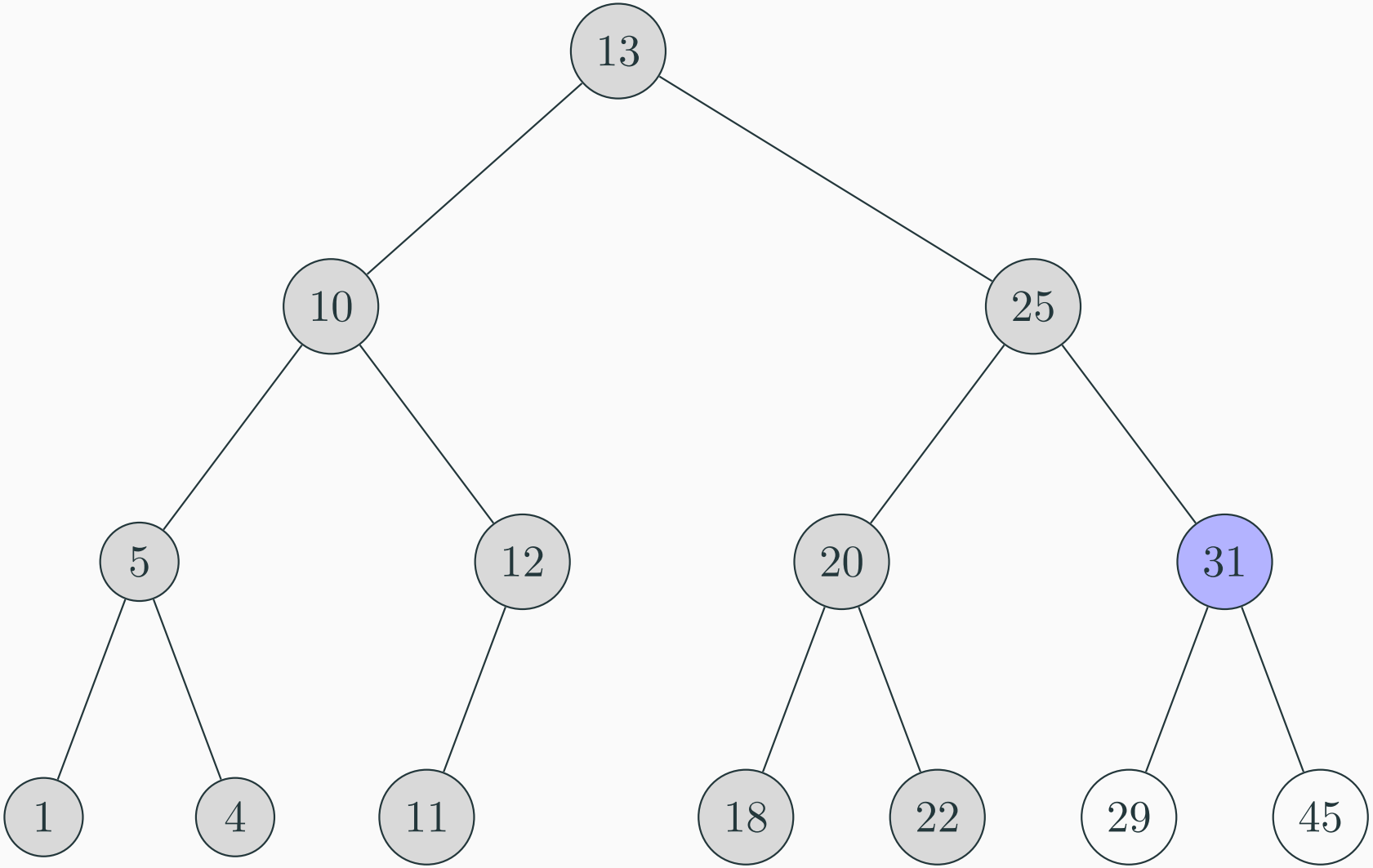
Exemplo de inserção em árvore binária de busca

Travessia pré-ordem: 13, 10, 5, 1, 4, 12, 11, 25, 20, 18, 22



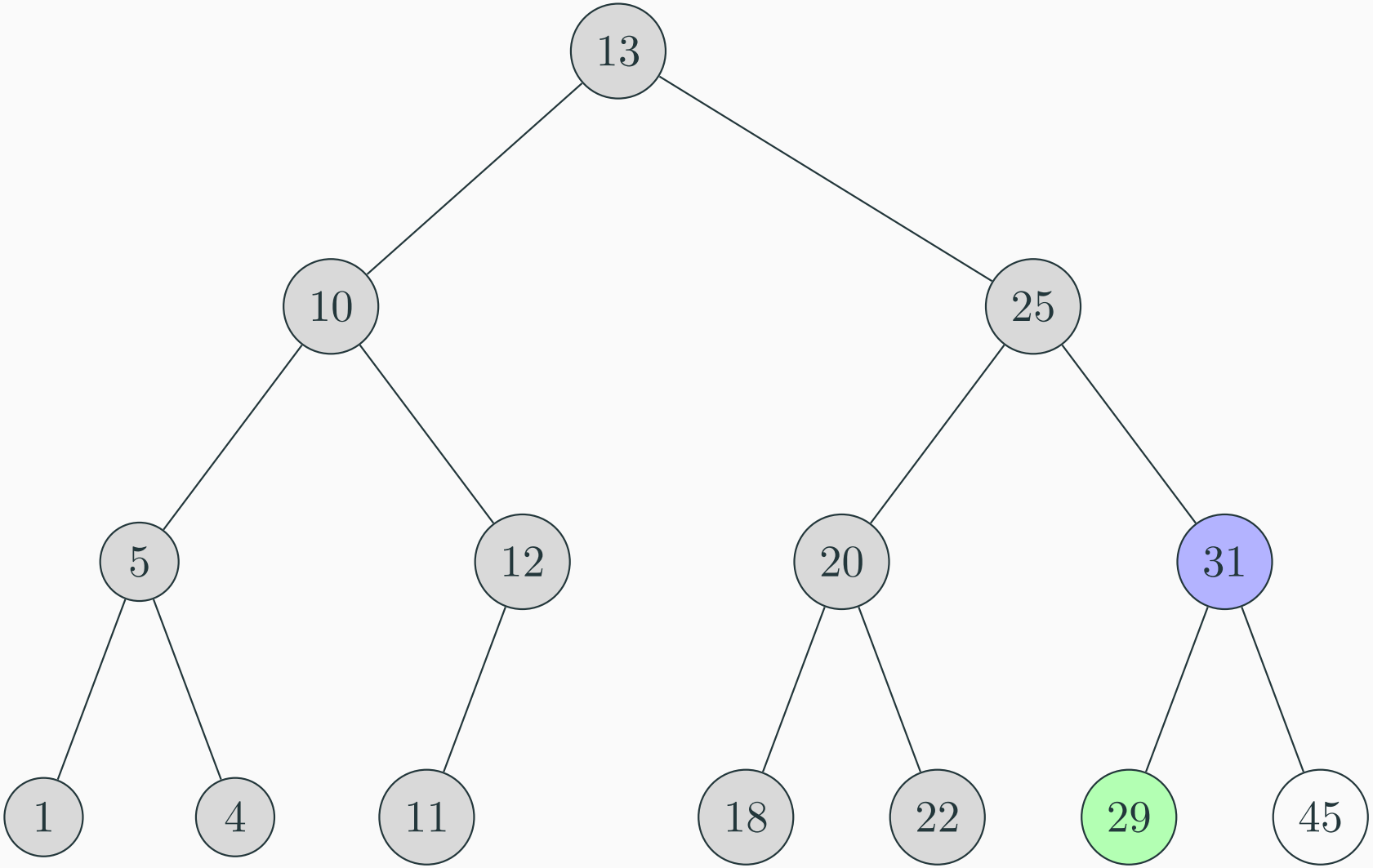
Exemplo de inserção em árvore binária de busca

Travessia pré-ordem: 13, 10, 5, 1, 4, 12, 11, 25, 20, 18, 22, 31



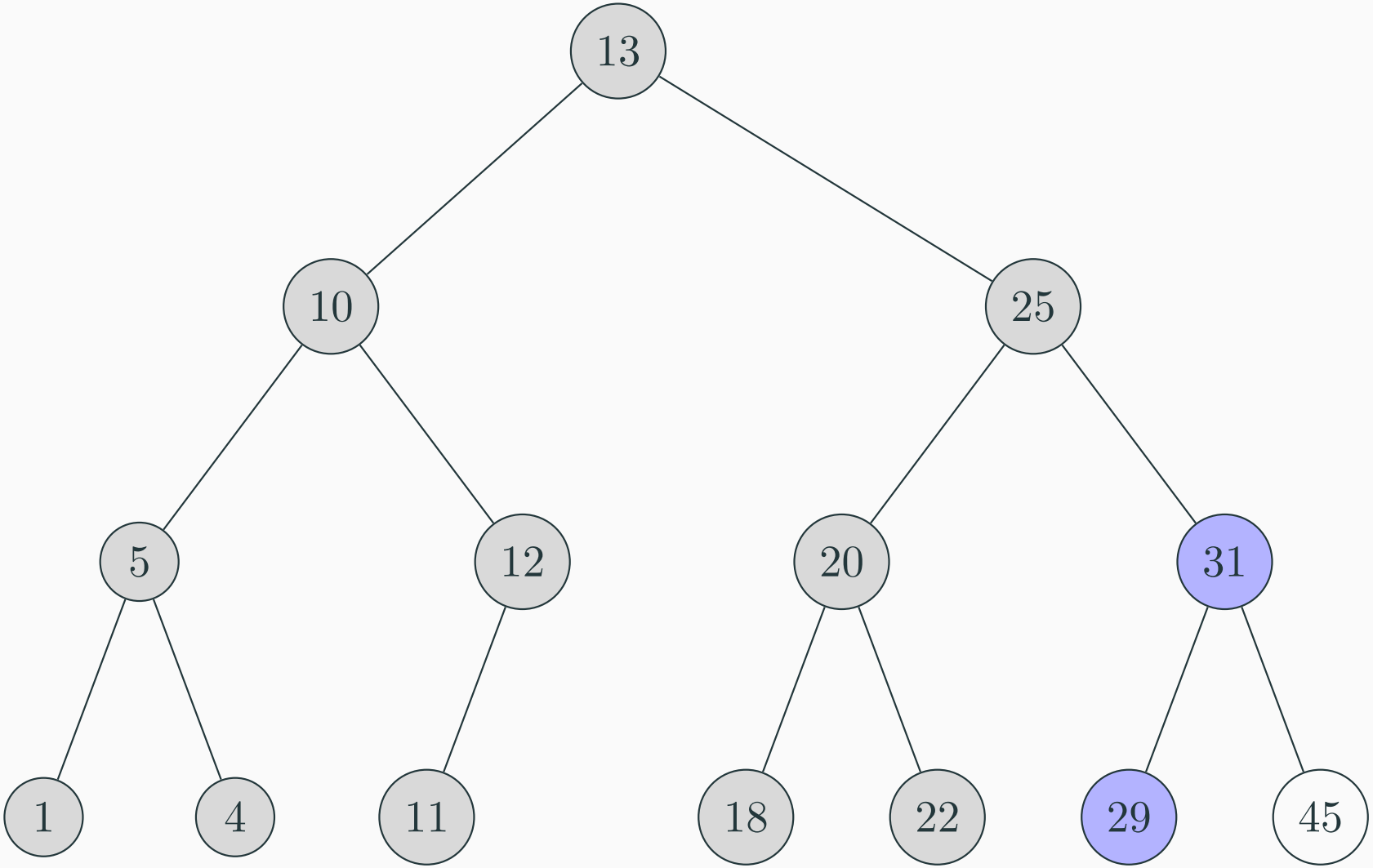
Exemplo de inserção em árvore binária de busca

Travessia pré-ordem: 13, 10, 5, 1, 4, 12, 11, 25, 20, 18, 22, 31



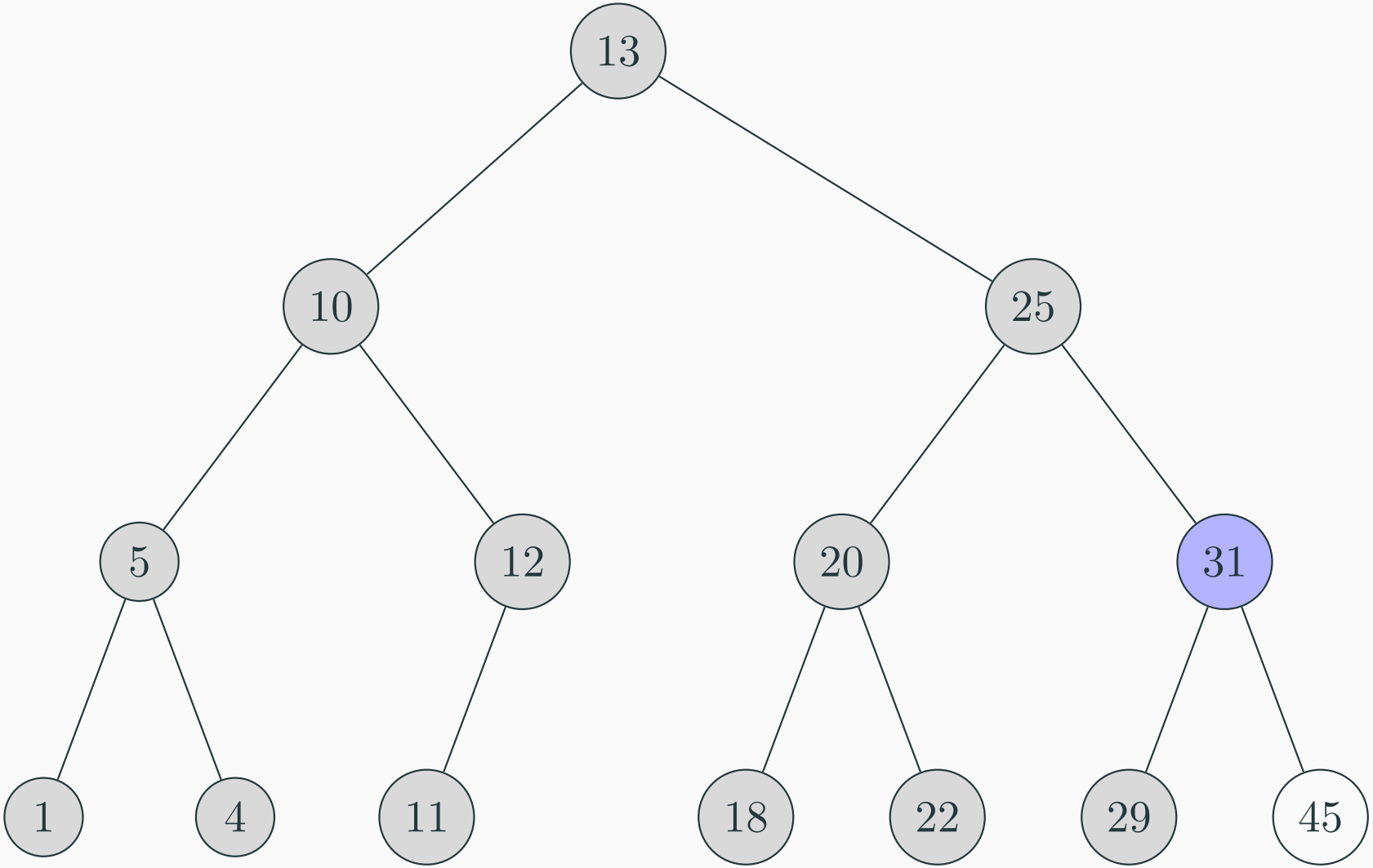
Exemplo de inserção em árvore binária de busca

Travessia pré-ordem: 13, 10, 5, 1, 4, 12, 11, 25, 20, 18, 22, 31, 29



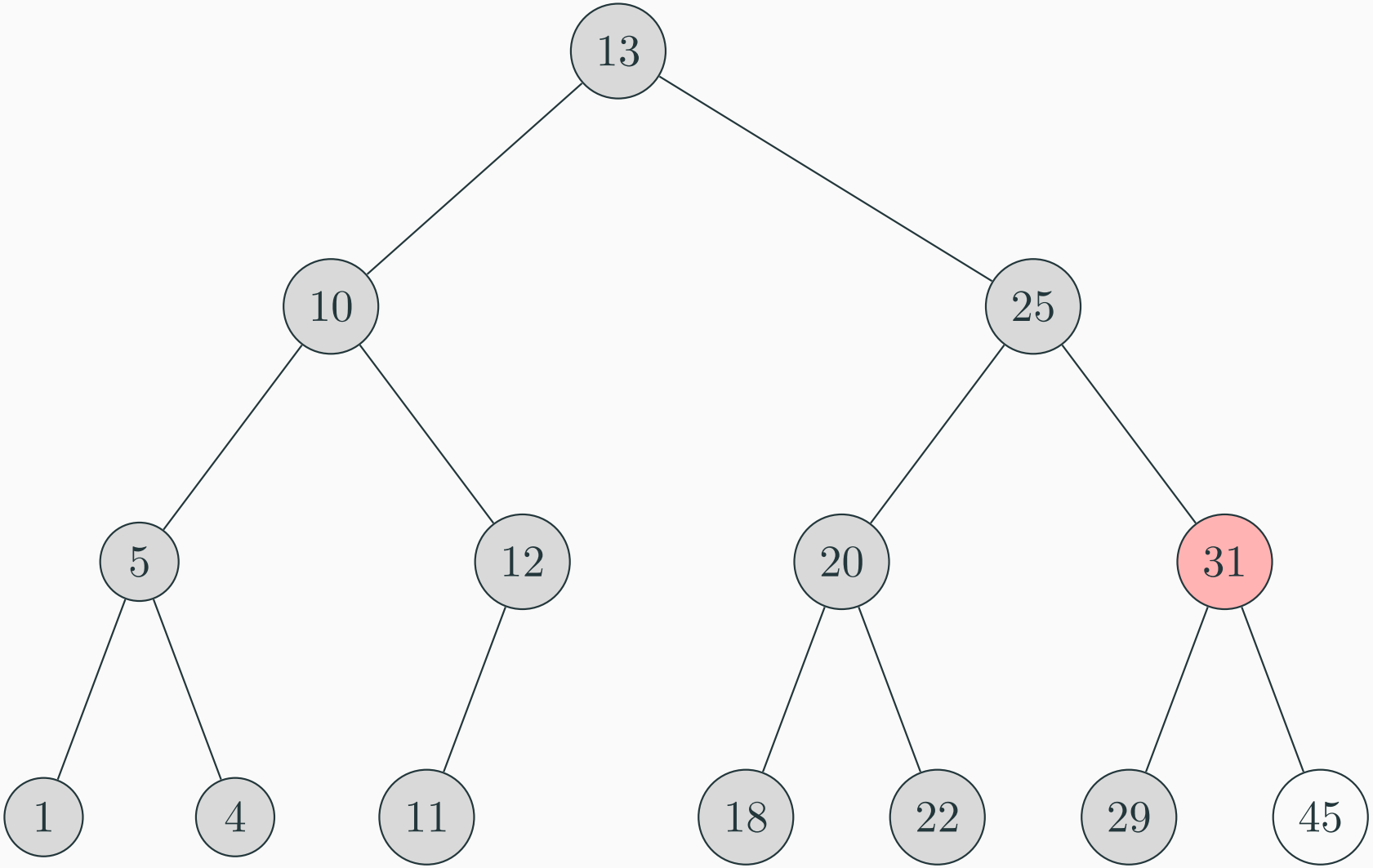
Exemplo de inserção em árvore binária de busca

Travessia pré-ordem: 13, 10, 5, 1, 4, 12, 11, 25, 20, 18, 22, 31, 29



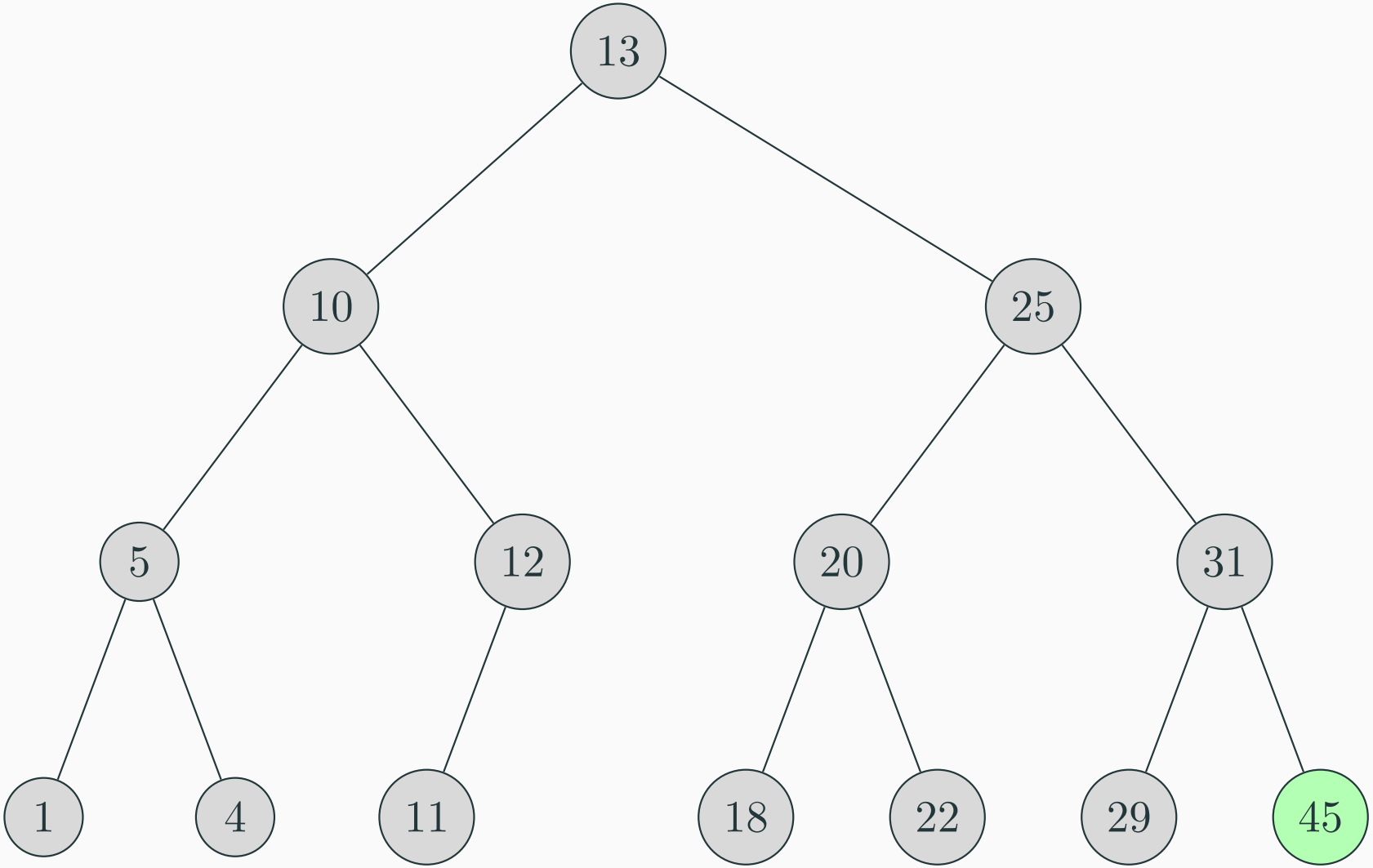
Exemplo de inserção em árvore binária de busca

Travessia pré-ordem: 13, 10, 5, 1, 4, 12, 11, 25, 20, 18, 22, 31, 29



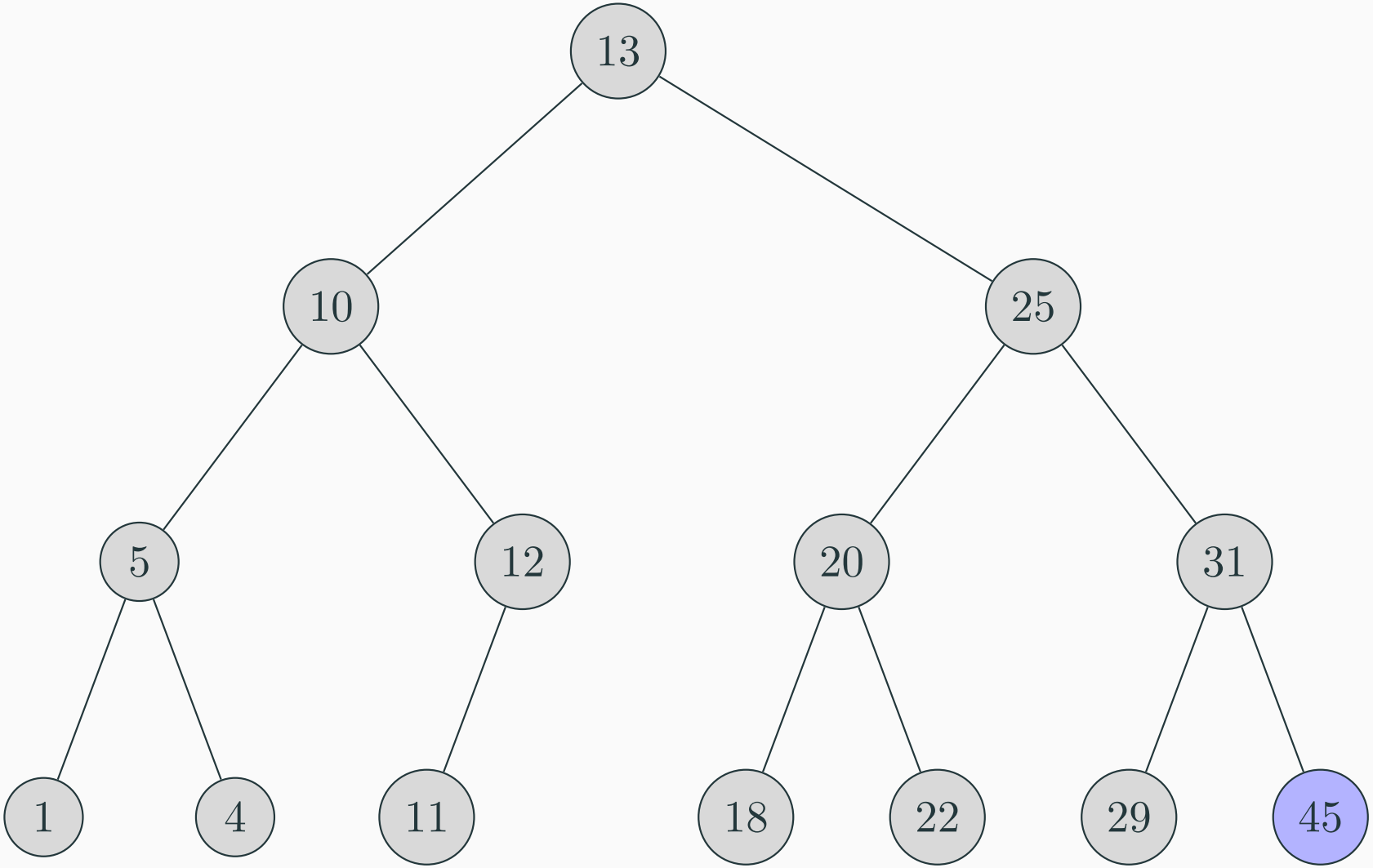
Exemplo de inserção em árvore binária de busca

Travessia pré-ordem: 13, 10, 5, 1, 4, 12, 11, 25, 20, 18, 22, 31, 29



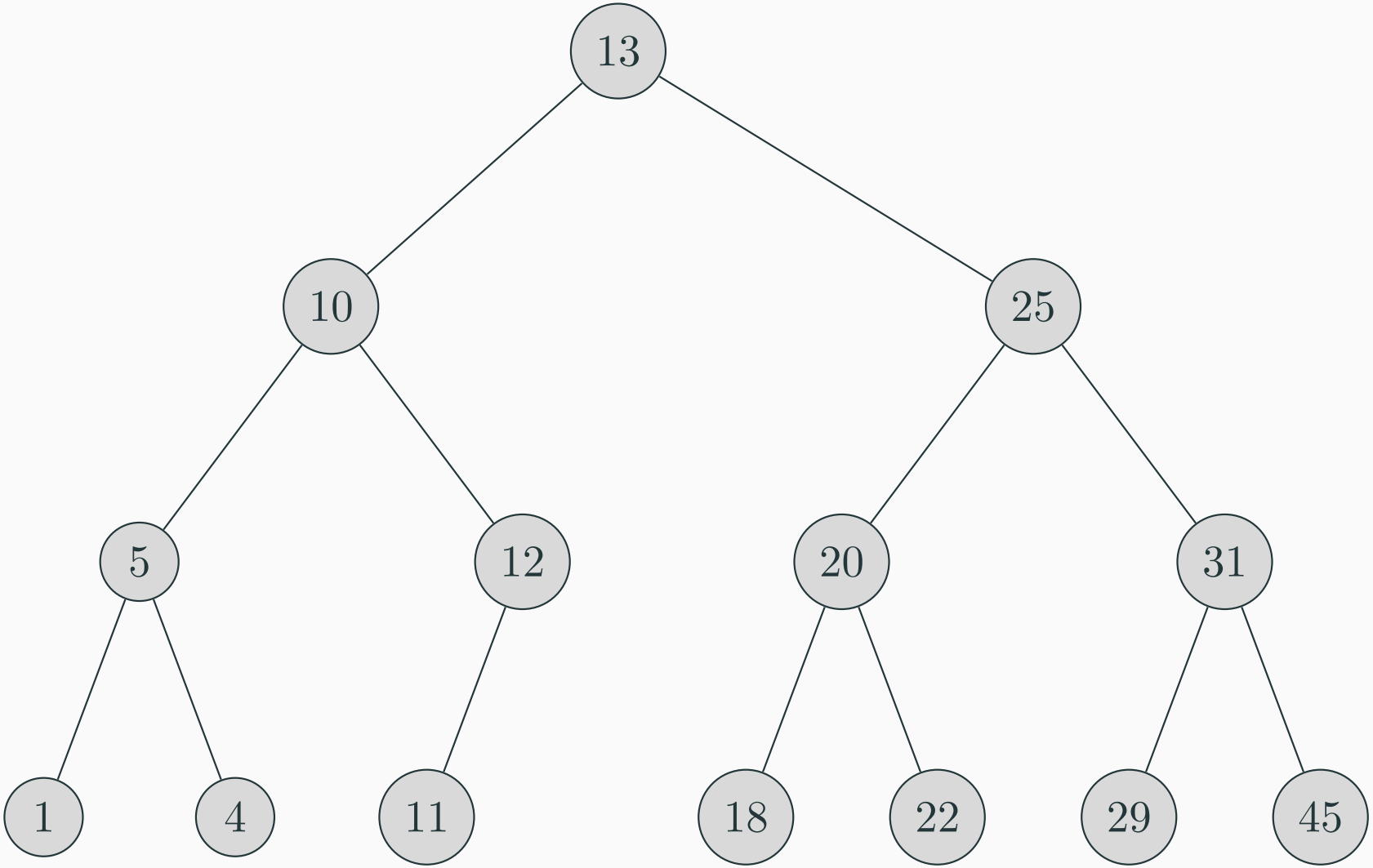
Exemplo de inserção em árvore binária de busca

Travessia pré-ordem: 13, 10, 5, 1, 4, 12, 11, 25, 20, 18, 22, 31, 29, 45



Exemplo de inserção em árvore binária de busca

Travessia pré-ordem: 13, 10, 5, 1, 4, 12, 11, 25, 20, 18, 22, 31, 29, 45



Implementação das travessias notáveis em C++

```
1  #include <funcional>
2
3  template<typename T>
4  class BST {
5  private:
6      struct Node {
7          T info;
8          Node *left, *right;
9      };
10
11     Node *root;
12
13     void preorder(Node *node, function<void(Node *)>& visit)
14     {
15         if (node)
16         {
17             visit(node);
18             preorder(node->left);
19             preorder(node->right);
20         }
21     }
```

Implementação das travessias notáveis em C++

```
22
23      void inorder(Node *node, function<void(Node *)>& visit)
24      {
25          if (node)
26          {
27              inorder(node->left);
28              visit(node);
29              inorder(node->right);
30          }
31      }
32
33      void postorder(Node *node, function<void(Node *)>& visit)
34      {
35          if (node)
36          {
37              postorder(node->left);
38              postorder(node->right);
39              visit(node);
40          }
41      }
42  };
```

Referências

1. **DROZDEK**, Adam. *Algoritmos e Estruturas de Dados em C++*, 2002.
2. **KERNIGHAN**, Bryan; **RITCHIE**, Dennis. *The C Programming Language*, 1978.
3. **STROUSTROUP**, Bjarne. *The C++ Programming Language*, 2013.
4. C++ Reference[1].

[1] https://en.cppreference.com/w/