Matemática

Partições

Prof. Edson Alves

Faculdade UnB Gama

Partições

Partição

Definição

Uma partição de um inteiro positivo N corresponde a uma sequência de inteiros positivos $\{ a_1, a_2, \ldots, a_k \}$ tais que $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = N$.

Por exemplo, para $N = 5$ há 7 partições distintas:

$$\{ 5 \}, \{ 4, 1 \}, \{ 3, 2 \}, \{ 3, 1, 1 \}, \{ 2, 2, 1 \}, \{ 2, 1, 1, 1 \}, \{ 1, 1, 1, 1, 1 \}$$

Denotaremos $p(N)$ a cardinalidade do conjunto das partições de N.

Partições e programação dinâmica

Podemos interpretar o problema das partições como um problema do troco, onde as "moedas" seriam os inteiros positivos de 1 a N. Seja $\sigma(N, M)$ o número de partições de um inteiro positivo N cujos elementos são menores ou iguais a M. Os casos bases seriam:

1. $\sigma(0, M) = 1$ (há uma única partição de zero: o conjunto vazio)
2. $\sigma(N, 1) = 1$ (há uma única maneira de se particionar um número N como somas de uns)
3. $\sigma(N, 0) = 0$ (as partições deve ser compostas apenas por números positivos)

As transições serão dadas por

- $\sigma(N, M) = \sigma(N, M - 1)$, se $M > N$ (não é possível escolher M: siga para a próxima moeda estritamente menor que M)
- $\sigma(N, M) = \sigma(N - M, M) + \sigma(N, M - 1)$, se $M \leq N$ (há duas opções: escolher M ou ignorá-lo)

Implementação de $p(N)$ em C++

```cpp
ll sigma(int N, int M)
{
    if (N == 0 or M == 1)
        return 1;

    if (M == 0)
        return 0;

    if (dp[N][M] != -1)
        return dp[N][M];

    auto res = sigma(N, M - 1);

    if (N >= M)
        res += sigma(N - M, M);

    return (dp[N][M] = res);
}

ll p(int N) { return sigma(N, N); }
```

Interpretação alternativa

A implementação acima tem complexidade $O(N^2)$, o que permite computar $p(N)$ para valores de N menores ou iguais a aproximadamente 10^4.

Na modelagem anteior $\sigma(N, M)$ significa "o número de partições de N que utilizam valores menores ou iguais a M". Podemos usar uma modelagem semelhante, mas como significado ligeiramente diferente, o que será útil na definição de novos conceitos.

Seja $\rho(N, K)$ o número de partições de N cujo maior elemento é igual a K. Os casos bases são

1. $\rho(0, 0) = 1$ (existe uma única partição de zero com $K = 0 : \{\ 0\ \}$)
2. $\rho(N, K) = 0$, se $N \leq 0$ (as partições são definidas para inteiros positivos)
3. $\rho(N, K) = 0$, se $K \leq 0$ (os elementos da partição devem ser inteiros positivos)

Interpretação alternativa

A transição seria

$$\rho(N, K) = \rho(N - K, K) + \rho(N - 1, K - 1)$$

O primeiro termo da transição corresponde a tomar um termo K, que já garante a propriedade, e tomar todas as possíveis partições de $N - K$ com a mesma restrição; a segunda parte corresponde as partições do antecessor $N - 1$ que tem elemento máximo $K - 1$: neste cenário, basta escolher um dos elementos $K - 1$, somar o número 1 a ele e obter uma partição de N com elemento máximo K.

Para verificar que esta transição conta todos as partições com máximo K corretamente, veja que a primeira parte contabiliza as partições que tem dois ou mais termos iguais a K; já a segunda parte conta apenas as partições que tem exatamente um elemento igual a K.

Implementação alternativa em C++

```
ll rho(int N, int K)
{
    if (N == 0 and K == 0)
        return 1;

    if (N <= 0 or K <= 0)
        return 0;

    if (state[N][K] != -1)
        return state[N][K];

    auto res = rho(N - K, K) + rho(N - 1, K - 1);

    return (state[N][K] = res);
}
```

Implementação alternativa em C++

```cpp
ll p(int N)
{
    ll count = 0;

    for (int i = 1; i <= N; ++i)
        count += rho(N, i);

    return count;
}
```

Partição conjugada

É possível representar uma partição graficamente, e desta representação derivar uma importante propriedade. Considere a partição $5+4+3+1$ de 13. Estes números formam um matriz onde cada coluna é formada por cada um destes números:

As colunas da transposta desta matriz (lado direito da figura), fornecem uma nova partição de 13: $4+3+3+2+1$, a qual contém exatamente 5 elementos. A partição obtida através da matriz transposta de uma partição dada é denominada a conjugada da partição.

Relação entre uma partição e sua conjugada

Proposição

Seja P uma partição cujo maior elemento é K. Então a conjugada $\bar{P}$ de P contém exatamente K elementos. Em outros termos, seja $q(N, K)$ o número de partições de N que tem exatamente K elementos. Então

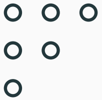
$$\rho(N, K) = q(N, K)$$

Partições autoconjugadas

Definição

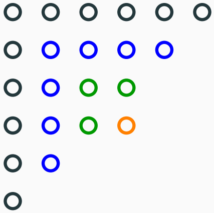
Uma partição é denominada autoconjugada se ela é igual a sua conjugada.

Por exemplo, a partição $3 + 2 + 1$ de 6 é autoconjugada: veja sua matriz abaixo



Propriedade das partições autoconjugadas

As partições autoconjugadas também tem uma importante propriedade. Considere a partição $6+5+4+4+2+1$ de 22 e observe a separação em níveis feitas por cores:



Esta é uma permutação autoconjugada. A soma dos elementos de cada nível gera a partição $11+7+3+1$, uma partição de 22 que contém apenas números ímpares distintos. Isto nos leva a outro importante resultado: o número de partições autoconjugadas de N é igual ao número de partições de N que contém apenas fatores ímpares distintos.

Proposição

Seja $q(N, K)$ o número de partições de N que tem exatamente K elementos. Então o número de maneiras de se distribuir N objetos idênticos, em K caixas idênticas, sem que nenhuma das caixas fique vazia, é igual a $q(N, K)$.

Referências

1. **SANTOS**, José Plínio O., **MELLO**, Margarida P., **MURARI**, Idani T. Introdução à Análise Combinatória, Editora Ciência Moderna, 2007.