Geometria Computacional

Triângulos

Prof. Edson Alves

Faculdade UnB Gama

Sumário

1. Definição de triângulo
2. Classificação de um triângulo
3. Perímetro e área
4. Lugares Geométricos

Definição de triângulo

Definição

- Um triângulo é uma figura geométrica fechada composta por três pontos não-colineares, denominados vértices, e três segmentos de retas formados por todos pares possíveis entre estes pontos, denominadas arestas ou lados

Definição

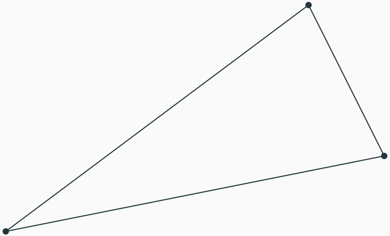
- Um triângulo é uma figura geométrica fechada composta por três pontos não-colineares, denominados vértices, e três segmentos de retas formados por todos pares possíveis entre estes pontos, denominadas arestas ou lados
- A cada vértice está associado um ângulo, definido pelos dois segmentos de reta dos quais o vértice é um dos extremos

Definição

- Um triângulo é uma figura geométrica fechada composta por três pontos não-colineares, denominados vértices, e três segmentos de retas formados por todos pares possíveis entre estes pontos, denominadas arestas ou lados
- A cada vértice está associado um ângulo, definido pelos dois segmentos de reta dos quais o vértice é um dos extremos
- O triângulo é o mais simples dentre os polígonos, mas possui uma série de características e propriedades notáveis

Definição

- Um triângulo é uma figura geométrica fechada composta por três pontos não-colineares, denominados vértices, e três segmentos de retas formados por todos pares possíveis entre estes pontos, denominadas arestas ou lados
- A cada vértice está associado um ângulo, definido pelos dois segmentos de reta dos quais o vértice é um dos extremos
- O triângulo é o mais simples dentre os polígonos, mas possui uma série de características e propriedades notáveis



Representação de um triângulo

- Um triângulo pode ser representado pelas coordenadas de seus vértices

Representação de um triângulo

- Um triângulo pode ser representado pelas coordenadas de seus vértices
- Outra alternativa é representar o triângulo pelos tamanhos de suas arestas

Representação de um triângulo

- Um triângulo pode ser representado pelas coordenadas de seus vértices
- Outra alternativa é representar o triângulo pelos tamanhos de suas arestas
- É possível deduzir estes tamanhos a partir da primeira representação

Representação de um triângulo

- Um triângulo pode ser representado pelas coordenadas de seus vértices
- Outra alternativa é representar o triângulo pelos tamanhos de suas arestas
- É possível deduzir estes tamanhos a partir da primeira representação
- Porém há infinitas possibilidades de coordenadas que satisfaçam as três medidas, uma vez que translações e rotações preservam tais valores

Representação de um triângulo

- Um triângulo pode ser representado pelas coordenadas de seus vértices
- Outra alternativa é representar o triângulo pelos tamanhos de suas arestas
- É possível deduzir estes tamanhos a partir da primeira representação
- Porém há infinitas possibilidades de coordenadas que satisfaçam as três medidas, uma vez que translações e rotações preservam tais valores
- A representação por vértices pode incluir a representação de um triângulo degenerado (quando os três pontos são colineares)

Representação de um triângulo

- Um triângulo pode ser representado pelas coordenadas de seus vértices
- Outra alternativa é representar o triângulo pelos tamanhos de suas arestas
- É possível deduzir estes tamanhos a partir da primeira representação
- Porém há infinitas possibilidades de coordenadas que satisfaçam as três medidas, uma vez que translações e rotações preservam tais valores
- A representação por vértices pode incluir a representação de um triângulo degenerado (quando os três pontos são colineares)
- A representação por medidas inclui mais casos especiais: pode ser que tais medidas não formem um triângulo

Representação de um triângulo

- Um triângulo pode ser representado pelas coordenadas de seus vértices
- Outra alternativa é representar o triângulo pelos tamanhos de suas arestas
- É possível deduzir estes tamanhos a partir da primeira representação
- Porém há infinitas possibilidades de coordenadas que satisfaçam as três medidas, uma vez que translações e rotações preservam tais valores
- A representação por vértices pode incluir a representação de um triângulo degenerado (quando os três pontos são colineares)
- A representação por medidas inclui mais casos especiais: pode ser que tais medidas não formem um triângulo
- A Desigualdade Triangular diz que, se a, b, c são números reais, eles serão medidas dos lados de um triângulo se, e somente se,

$$a \leq b + c, \quad b \leq a + c, \quad c \leq a + b$$

Exemplo de representação do triângulo pelos vértices

```cpp
// Definição da classe Ponto

template<typename T>
struct Triangle {
    Point<T> A, B, C;
};
```

Classificação de um triângulo

Classificação de acordo com as medidas dos lados

- Sejam a, b, c as medidas dos três lados de um triângulo T

Classificação de acordo com as medidas dos lados

- Sejam a, b, c as medidas dos três lados de um triângulo T
- T é dito equilátero se $a = b = c$

Classificação de acordo com as medidas dos lados

- Sejam a, b, c as medidas dos três lados de um triângulo T
- T é dito equilátero se $a = b = c$
- Se dois lados tem medidas iguais e o terceiro tem medida diferente, T é dito isóceles

Classificação de acordo com as medidas dos lados

- Sejam a, b, c as medidas dos três lados de um triângulo T
- T é dito equilátero se $a = b = c$
- Se dois lados tem medidas iguais e o terceiro tem medida diferente, T é dito isósceles
- Se as três medidas são diferentes o triângulo T é denominado escaleno

Implementação da classificação por medidas dos lados

```cpp
template<typename T>
struct Triangle {
    Point<T> A, B, C;

    enum Sides { EQUILATERAL, ISOSCELES, SCALENE };

    Sides classification_by_sides() const
    {
        auto a = dist(A, B), b = dist(B, C), c = dist(C, A);

        if (equals(a, b) and equals(b, c))
            return EQUILATERAL;

        if (equals(a, b) or equals(a, c) or equals(b, c))
            return ISOSCELES;

        return SCALENE;
    }
};
```

Classificação de acordo com as medidas dos ângulos internos

- Sejam α, β, γ os ângulos internos de um triângulo T

Classificação de acordo com as medidas dos ângulos internos

- Sejam α, β, γ os ângulos internos de um triângulo T
- Se um destes três ângulos for igual a 90°, T é dito retângulo

Classificação de acordo com as medidas dos ângulos internos

- Sejam α, β, γ os ângulos internos de um triângulo T
- Se um destes três ângulos for igual a 90°, T é dito retângulo
- Se um destes três ângulos for maior do que 90°, T é denominado obtusângulo

Classificação de acordo com as medidas dos ângulos internos

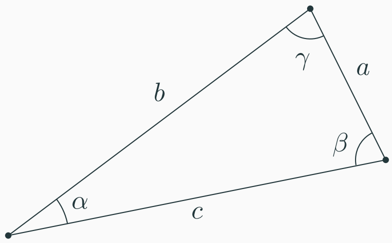
- Sejam α, β, γ os ângulos internos de um triângulo T
- Se um destes três ângulos for igual a 90°, T é dito retângulo
- Se um destes três ângulos for maior do que 90°, T é denominado obtusângulo
- Se $\alpha, \beta, \gamma < 90°$, T é chamado acutângulo

Classificação de acordo com as medidas dos ângulos internos

- Sejam α, β, γ os ângulos internos de um triângulo T
- Se um destes três ângulos for igual a 90°, T é dito retângulo
- Se um destes três ângulos for maior do que 90°, T é denominado obtusângulo
- Se $\alpha, \beta, \gamma < 90°$, T é chamado acutângulo
- Importante: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

Classificação de acordo com as medidas dos ângulos internos

- Sejam α, β, γ os ângulos internos de um triângulo T
- Se um destes três ângulos for igual a 90°, T é dito retângulo
- Se um destes três ângulos for maior do que 90°, T é denominado obtusângulo
- Se $\alpha, \beta, \gamma < 90°$, T é chamado acutângulo
- Importante: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$



Relação entre medidas dos lados e ângulos

- A Lei dos Cossenos nos diz que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

Relação entre medidas dos lados e ângulos

- A Lei dos Cossenos nos diz que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

- Esta lei permite determinar o ângulo oposto a um lado escolhido:

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)$$

Relação entre medidas dos lados e ângulos

- A Lei dos Cossenos nos diz que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

- Esta lei permite determinar o ângulo oposto a um lado escolhido:

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)$$

- Observe que, se $\alpha = 90^\circ$, a Lei dos Cossenos se reduz ao Teorema de Pitágoras

Relação entre medidas dos lados e ângulos

- A Lei dos Cossenos nos diz que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

- Esta lei permite determinar o ângulo oposto a um lado escolhido:

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)$$

- Observe que, se $\alpha = 90^\circ$, a Lei dos Cossenos se reduz ao Teorema de Pitágoras
- A Lei dos Senos também relaciona lados e ângulos, com o bônus de permitir determinar o raio R do círculo que circunscreve o triângulo:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

Implementação da classificação por ângulos internos

```cpp
template<typename T>
struct Triangle {
    Point<T> A, B, C;

    enum Angles { RIGHT, ACUTE, OBTUSE };

    Angles classification_by_angles() const
    {
        auto a = dist(A, B);
        auto b = dist(B, C);
        auto c = dist(C, A);

        auto alpha = acos((a*a - b*b - c*c)/(-2*b*c));
        auto beta = acos((b*b - a*a - c*c)/(-2*a*c));
        auto gamma = acos((c*c - a*a - b*b)/(-2*a*b));

        auto right = PI / 2.0;

```

Implementação da classificação por ângulos internos

```
        if (equals(alpha, right) || equals(beta, right) || equals(gamma, right))
            return RIGHT;

        if (alpha > right || beta > right || gamma > right)
            return OBTUSE;

        return ACUTE;
    }
};
```

Perímetro e área

Perímetro de um triângulo

- O perímetro de um triângulo é dado pela soma da medidas de seus lados

Perímetro de um triângulo

- O perímetro de um triângulo é dado pela soma da medidas de seus lados
- Em notação matemática, se o triângulo T tem lados com medidas a, b, c, o perímetro P é dado por

$$P = a + b + c$$

Perímetro de um triângulo

- O perímetro de um triângulo é dado pela soma da medidas de seus lados
- Em notação matemática, se o triângulo T tem lados com medidas a, b, c, o perímetro P é dado por

$$P = a + b + c$$

```cpp
template<typename T>
struct Triangle {
    Point<T> A, B, C;

    double perimeter() const
    {
        auto a = dist(A, B), b = dist(B, C), c = dist(C, A);

        return a + b + c;
    }
};
```

Área de um triângulo

- Há três formas de se computar a área de um triângulo

Área de um triângulo

- Há três formas de se computar a área de um triângulo
- A primeira delas é usar a fórmula ensinada no ensino médio:

$$A = \frac{bh}{2}$$

onde b é a medida da base do triângulo (um de seus lados) e h é a altura do segmento de reta, perpendicular à base, com um ponto sobre a base e o outro no vértice oposto a esta

Área de um triângulo

- Há três formas de se computar a área de um triângulo
- A primeira delas é usar a fórmula ensinada no ensino médio:

$$A = \frac{bh}{2}$$

  onde b é a medida da base do triângulo (um de seus lados) e h é a altura do segmento de reta, perpendicular à base, com um ponto sobre a base e o outro no vértice oposto a esta
- Contudo, na representação por pontos ou por medidas, esta abordagem é pouco prática, pois envolve o cálculo da altura

Área de um triângulo

- Há três formas de se computar a área de um triângulo
- A primeira delas é usar a fórmula ensinada no ensino médio:

$$A = \frac{bh}{2}$$

  onde b é a medida da base do triângulo (um de seus lados) e h é a altura do segmento de reta, perpendicular à base, com um ponto sobre a base e o outro no vértice oposto a esta
- Contudo, na representação por pontos ou por medidas, esta abordagem é pouco prática, pois envolve o cálculo da altura
- A altura pode ser obtida como a distância do vértice oposto até a base

Cálculo da área por base e altura

```cpp
// Definição das estruturas Point e Line

template<typename T>
struct Triangle {
    Point<T> A, B, C;

    double area() const
    {
        Line<T> r(A, B);

        auto b = dist(A, B);
        auto h = r.distance(C);

        return (b * h)/2;
    }
};
```

Fórmula de Heron

- A segunda maneira de se obter a área de um triângulo é utilizar a fórmula de Heron:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

  onde A é a área do triângulo de lados a, b, c e s é o semiperímetro, isto é, a metade do perímetro:

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

Fórmula de Heron

- A segunda maneira de se obter a área de um triângulo é utilizar a fórmula de Heron:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

  onde A é a área do triângulo de lados a, b, c e s é o semiperímetro, isto é, a metade do perímetro:

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

- Esta abordagem é a mais apropriada na representação do triângulo pela medida de seus lados

Fórmula de Heron

- A segunda maneira de se obter a área de um triângulo é utilizar a fórmula de Heron:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

  onde A é a área do triângulo de lados a, b, c e s é o semiperímetro, isto é, a metade do perímetro:

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

- Esta abordagem é a mais apropriada na representação do triângulo pela medida de seus lados
- Observe que, caso exista a possibilidade de *overflow* no produto dos quatro termos que estão dentro da raiz, deve-se tirar a raiz de cada fator antes de prosseguir com o produto

Cálculo da área usando a fórmula de Heron

```cpp
// Definição da estrutura Point

template<typename T>
struct Triangle {
    Point<T> A, B, C;

    double area() const
    {
        auto a = dist(A, B);
        auto b = dist(B, C);
        auto c = dist(C, A);

        auto s = (a + b + c)/2

        return sqrt(s)*sqrt(s - a)*sqrt(s - b)*sqrt(s - c);
    }
};
```

Variantes da fórmula de Heron

- Existem variantes da fórmula de Heron que permitem o cálculo da área do triângulo em termos de outras medidas, como as medianas, as alturas ou os ângulos internos

Variantes da fórmula de Heron

- Existem variantes da fórmula de Heron que permitem o cálculo da área do triângulo em termos de outras medidas, como as medianas, as alturas ou os ângulos internos
- Se m_a, m_b, m_c são as medidas das medianas, então

$$A = \frac{4}{3}\sqrt{\sigma(\sigma - m_a)(\sigma - m_b)(\sigma - m_c)}, \quad \sigma = \frac{m_a + m_b + m_c}{2}$$

Variantes da fórmula de Heron

- Existem variantes da fórmula de Heron que permitem o cálculo da área do triângulo em termos de outras medidas, como as medianas, as alturas ou os ângulos internos
- Se m_a, m_b, m_c são as medidas das medianas, então

$$A = \frac{4}{3}\sqrt{\sigma(\sigma - m_a)(\sigma - m_b)(\sigma - m_c)}, \ \ \sigma = \frac{m_a + m_b + m_c}{2}$$

- Se h_a, h_b, h_c são medidas as alturas, então

$$\frac{1}{A} = 4\sqrt{H\left(H - \frac{1}{h_a}\right)\left(H - \frac{1}{h_b}\right)\left(H - \frac{1}{h_c}\right)}$$

com

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)$$

Variantes da fórmula de Heron

- Por fim, sendo usando a notação de lados e ângulos já estabelecida, é possível computar a área, conhecidos os três ângulos e apenas um dos três lados:

$$A = D^2\sqrt{S(S-\sin\alpha)(S-\sin\beta)(S-\sin\gamma)},$$

onde

$$S = \frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{2}$$

e

$$D = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Cálculo da área por coordenadas dos vértices

- A terceira maneira é computar a área a partir das coordenadas dos vértices

Cálculo da área por coordenadas dos vértices

- A terceira maneira é computar a área a partir das coordenadas dos vértices
- Se os vértices de um triângulo são $P = (x_1, y_1), Q = (x_2, y_2), R = (x_3, y_3)$, a área A do triângulo é dada por

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Cálculo da área por coordenadas dos vértices

- A terceira maneira é computar a área a partir das coordenadas dos vértices
- Se os vértices de um triângulo são $P = (x_1, y_1), Q = (x_2, y_2), R = (x_3, y_3)$, a área A do triângulo é dada por

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

- Esta área é sinalizada: logo deve se considerar o valor absoluto desta expressão

Cálculo da área por coordenadas dos vértices

- A terceira maneira é computar a área a partir das coordenadas dos vértices
- Se os vértices de um triângulo são $P = (x_1, y_1), Q = (x_2, y_2), R = (x_3, y_3)$, a área A do triângulo é dada por

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

- Esta área é sinalizada: logo deve se considerar o valor absoluto desta expressão
- Observe que não é necessário implementar uma estrutura que represente matrizes e a operação de determinante

Cálculo da área por coordenadas dos vértices

- A terceira maneira é computar a área a partir das coordenadas dos vértices
- Se os vértices de um triângulo são $P = (x_1, y_1), Q = (x_2, y_2), R = (x_3, y_3)$, a área A do triângulo é dada por

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

- Esta área é sinalizada: logo deve se considerar o valor absoluto desta expressão
- Observe que não é necessário implementar uma estrutura que represente matrizes e a operação de determinante
- A expansão da expressão acima leva a três termos positivos e a três termos negativos

Cálculo da área por determinante

```
// Definição da estrutura Point

template<typename T>
struct Triangle {
    Point<T> A, B, C;

    double area() const
    {
        double det = (A.x*B.y + A.y*C.x + B.x*C.y) - (C.x*B.y + C.y*A.x + B.x*A.y);

        return 0.5 * fabs(det);
    }
};
```

Lugares Geométricos

Baricentro

- Um triângulo possui quatro lugares geométricos notáveis

Baricentro

- Um triângulo possui quatro lugares geométricos notáveis
- O primeiro deles é o baricentro (centróide ou centro de massa), que é o ponto de interseção entre as três medianas (segmentos de reta que unem um vértice ao ponto médio do lado oposto)

Baricentro

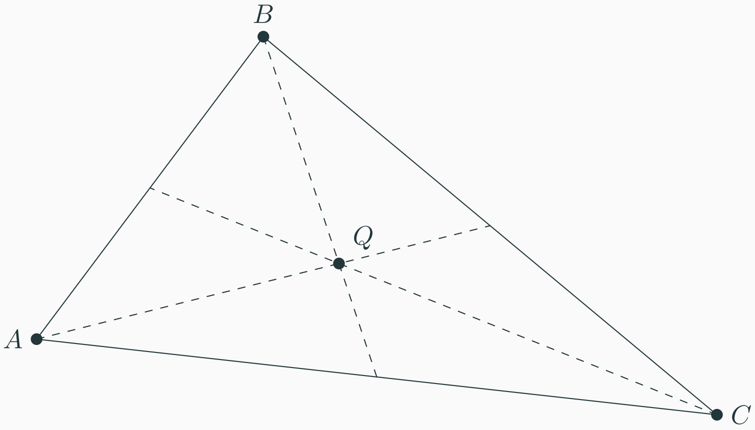
- Um triângulo possui quatro lugares geométricos notáveis
- O primeiro deles é o baricentro (centróide ou centro de massa), que é o ponto de interseção entre as três medianas (segmentos de reta que unem um vértice ao ponto médio do lado oposto)
- O baricentro divide uma mediana na proporção de 2:1, isto é, ele está a um terço de distância do lado oposto

Baricentro

- Um triângulo possui quatro lugares geométricos notáveis
- O primeiro deles é o baricentro (centróide ou centro de massa), que é o ponto de interseção entre as três medianas (segmentos de reta que unem um vértice ao ponto médio do lado oposto)
- O baricentro divide uma mediana na proporção de 2:1, isto é, ele está a um terço de distância do lado oposto
- As coordenadas do baricentro Q podem ser computadas diretamente a partir das coordenadas dos vértices: serão a média aritmética entre as mesmas

$$Q = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$

Visualização do baricentro



Implementação da identificação do baricentro

```cpp
// Definição da estrutura Point

template<typename T>
struct Triangle {
    Point<T> A, B, C;

    Point<T> barycenter() const
    {
        auto x = (A.x + B.x + C.x) / 3.0;
        auto y = (A.y + B.y + C.y) / 3.0;

        return Point<T> { x, y };
    }
};
```

Ortocentro

- O ortocentro de um triângulo é o ponto de encontro de suas três alturas

Ortocentro

- O ortocentro de um triângulo é o ponto de encontro de suas três alturas
- O ortocentro pode mesmo estar fora do triângulo, no caso de um obtusângulo

Ortocentro

- O ortocentro de um triângulo é o ponto de encontro de suas três alturas
- O ortocentro pode mesmo estar fora do triângulo, no caso de um obtusângulo
- No caso de um triângulo retângulo, o ortocentro sempre coincide com o vértice oposto à hipotenusa

Ortocentro

- O ortocentro de um triângulo é o ponto de encontro de suas três alturas
- O ortocentro pode mesmo estar fora do triângulo, no caso de um obtusângulo
- No caso de um triângulo retângulo, o ortocentro sempre coincide com o vértice oposto à hipotenusa
- Para obter as coordenadas do ortocentro, é preciso determinar, inicialmente, as retas r e s que contém os segmentos AB e AC, respectivamente

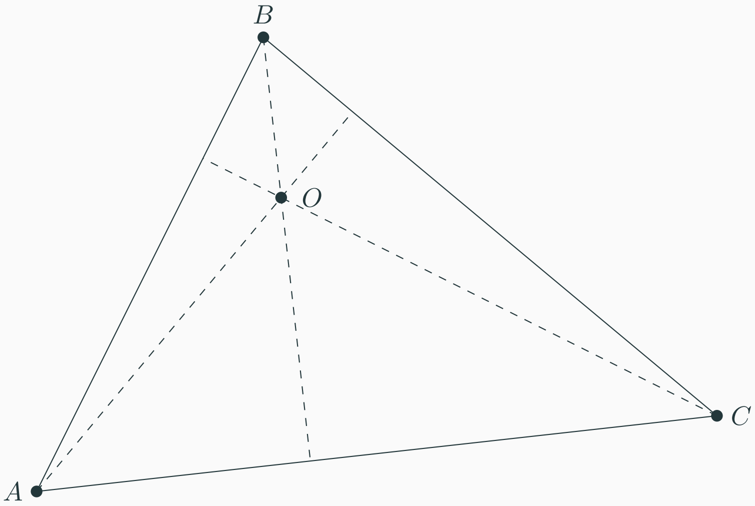
Ortocentro

- O ortocentro de um triângulo é o ponto de encontro de suas três alturas
- O ortocentro pode mesmo estar fora do triângulo, no caso de um obtusângulo
- No caso de um triângulo retângulo, o ortocentro sempre coincide com o vértice oposto à hipotenusa
- Para obter as coordenadas do ortocentro, é preciso determinar, inicialmente, as retas r e s que contém os segmentos AB e AC, respectivamente
- Em seguida, é preciso determinar as retas u e v perpendiculares a r e s que passam por C e B, respectivamente

Ortocentro

- O ortocentro de um triângulo é o ponto de encontro de suas três alturas
- O ortocentro pode mesmo estar fora do triângulo, no caso de um obtusângulo
- No caso de um triângulo retângulo, o ortocentro sempre coincide com o vértice oposto à hipotenusa
- Para obter as coordenadas do ortocentro, é preciso determinar, inicialmente, as retas r e s que contém os segmentos AB e AC, respectivamente
- Em seguida, é preciso determinar as retas u e v perpendiculares a r e s que passam por C e B, respectivamente
- O ortocentro O será a interseção entre u e v

Visualização do ortocentro



Implementação da identificação do ortocentro

```
template<typename T>
struct Triangle {
    Point<T> A, B, C;

    Point<T> orthocenter() const
    {
        Line<T> r(A, B), s(A, C);

        Line<T> u { r.b, -r.a, -(C.x*r.b - C.y*r.a) };
        Line<T> v { s.b, -s.a, -(B.x*s.b - B.y*s.a) };

        auto det = u.a * v.b - u.b * v.a;
        auto x = (-u.c * v.b + v.c * u.b) / det;
        auto y = (-v.c * u.a + u.c * v.a) / det;

        return { x, y };
    }
};

```

Incentro

- O incentro de um triângulo é o ponto de encontro de suas bissetrizes (retas que dividem um ângulo interno na metade)

Incentro

- O incentro de um triângulo é o ponto de encontro de suas bissetrizes (retas que dividem um ângulo interno na metade)
- Além de ser sempre um ponto interior do triângulo, o incentro é o centro do círculo inscrito no triângulo, isto é, o maior círculo que cabe dentro do triângulo e que toca todos os seus três lados

Incentro

- O incentro de um triângulo é o ponto de encontro de suas bissetrizes (retas que dividem um ângulo interno na metade)
- Além de ser sempre um ponto interior do triângulo, o incentro é o centro do círculo inscrito no triângulo, isto é, o maior círculo que cabe dentro do triângulo e que toca todos os seus três lados
- Os lados do círculo são tangentes ao círculo inscrito

Incentro

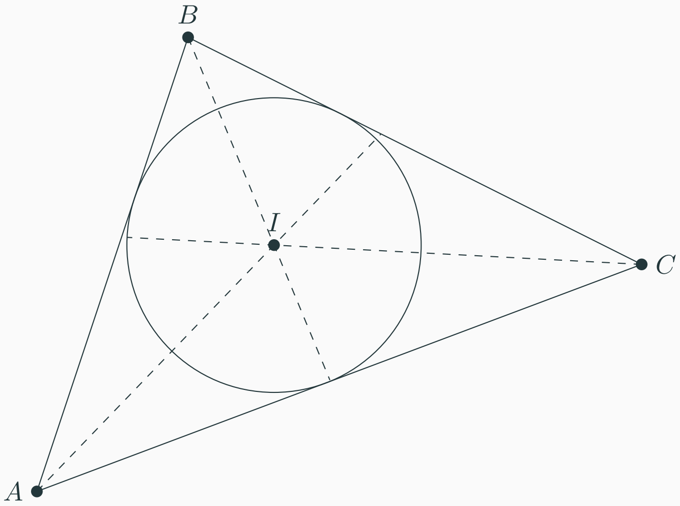
- O incentro de um triângulo é o ponto de encontro de suas bissetrizes (retas que dividem um ângulo interno na metade)
- Além de ser sempre um ponto interior do triângulo, o incentro é o centro do círculo inscrito no triângulo, isto é, o maior círculo que cabe dentro do triângulo e que toca todos os seus três lados
- Os lados do círculo são tangentes ao círculo inscrito
- O raio r do círculo inscrito é dado pela razão entre o dobro da área A e o perímetro P

Incentro

- O incentro de um triângulo é o ponto de encontro de suas bissetrizes (retas que dividem um ângulo interno na metade)
- Além de ser sempre um ponto interior do triângulo, o incentro é o centro do círculo inscrito no triângulo, isto é, o maior círculo que cabe dentro do triângulo e que toca todos os seus três lados
- Os lados do círculo são tangentes ao círculo inscrito
- O raio r do círculo inscrito é dado pela razão entre o dobro da área A e o perímetro P
- As coordenadas do centro I do círculo inscrito são obtidas pela média ponderada das coordenadas x e y pelos comprimentos dos lados opostos:

$$r = \frac{2A}{P}, I_x = \frac{aA_x + bB_x + cC_x}{P}, I_y = \frac{aA_y + bB_y + cC_y}{P}$$

Visualização do incentro e o círculo inscrito



Implementação do centro e do raio do círculo inscrito

```cpp
template<typename T>
struct Triangle {
    Point<T> A, B, C;

    double inradius() const
    {
        return (2 * area()) / perimeter();
    }

    Point<double> incenter() const
    {
        auto a = dist(B, C), b = dist(A, C), c = dist(A, B);
        auto P = perimeter();
        auto x = (a*A.x + b*B.x + c*C.x)/P;
        auto y = (a*A.y + b*B.y + c*C.y)/P;

        return { x, y };
    }
};
```

Circuncentro

- O circuncentro é o ponto de encontro entre as retas bisectoras perpendiculares (isto é, retas perpendiculares aos lados do triângulo que os interceptam nos pontos médios)

Circuncentro

- O circuncentro é o ponto de encontro entre as retas bisectoras perpendiculares (isto é, retas perpendiculares aos lados do triângulo que os interceptam nos pontos médios)
- O circuncentro é o centro do círculo circunscrito do triângulo, isto é, o círculo que passa pelos três vértices do triângulo

Circuncentro

- O circuncentro é o ponto de encontro entre as retas bisectoras perpendiculares (isto é, retas perpendiculares aos lados do triângulo que os interceptam nos pontos médios)
- O circuncentro é o centro do círculo circunscrito do triângulo, isto é, o círculo que passa pelos três vértices do triângulo
- O circuncentro, assim como o ortocentro, pode estar localizado do lado externo do triângulo

Circuncentro

- O circuncentro é o ponto de encontro entre as retas bisectoras perpendiculares (isto é, retas perpendiculares aos lados do triângulo que os interceptam nos pontos médios)
- O circuncentro é o centro do círculo circunscrito do triângulo, isto é, o círculo que passa pelos três vértices do triângulo
- O circuncentro, assim como o ortocentro, pode estar localizado do lado externo do triângulo
- Um caso especial interessante é o do triângulo retângulo, onde o circuncentro se localiza no ponto médio da hipotenusa

Circuncentro

- O circuncentro é o ponto de encontro entre as retas bisectoras perpendiculares (isto é, retas perpendiculares aos lados do triângulo que os interceptam nos pontos médios)
- O circuncentro é o centro do círculo circunscrito do triângulo, isto é, o círculo que passa pelos três vértices do triângulo
- O circuncentro, assim como o ortocentro, pode estar localizado do lado externo do triângulo
- Um caso especial interessante é o do triângulo retângulo, onde o circuncentro se localiza no ponto médio da hipotenusa
- O raio R do circuncentro é dado pela razão entre o produto das medidas de seus lados a, b, c e o quádruplo de sua área A, isto é

$$R = \frac{abc}{4A}$$

Circuncentro

- Seja $|P|$ o tamanho do vetor posição de P, isto é

$$|P| = \sqrt{P_x^2 + P_y^2}$$

Circuncentro

- Seja $|P|$ o tamanho do vetor posição de P, isto é
$$|P| = \sqrt{P_x^2 + P_y^2}$$

- As coordenadas do circuncentro são dadas por
$$S_x = \frac{1}{2d}\begin{vmatrix} |A|^2 & A_y & 1 \\ |B|^2 & B_y & 1 \\ |C|^2 & C_y & 1 \end{vmatrix}, S_y = \frac{1}{2d}\begin{vmatrix} A_x & |A|^2 & 1 \\ B_x & |B|^2 & 1 \\ C_x & |C|^2 & 1 \end{vmatrix}$$
onde
$$d = \begin{vmatrix} A_x & A_y & 1 \\ B_x & B_y & 1 \\ C_x & C_y & 1 \end{vmatrix}$$

Circuncentro

- Seja $|P|$ o tamanho do vetor posição de P, isto é

$$|P| = \sqrt{P_x^2 + P_y^2}$$

- As coordenadas do circuncentro são dadas por

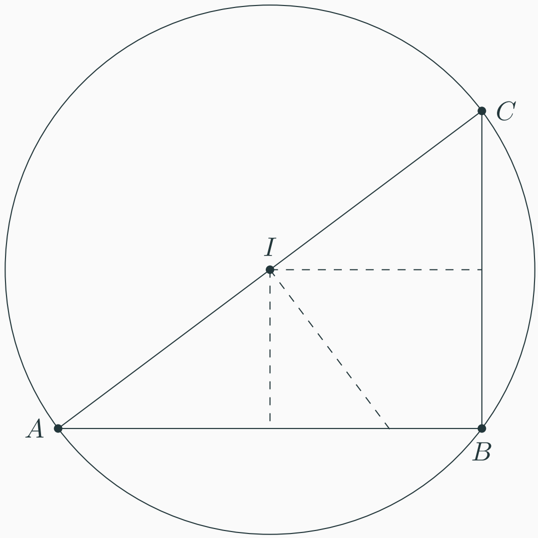
$$S_x = \frac{1}{2d}\begin{vmatrix} |A|^2 & A_y & 1 \\ |B|^2 & B_y & 1 \\ |C|^2 & C_y & 1 \end{vmatrix}, S_y = \frac{1}{2d}\begin{vmatrix} A_x & |A|^2 & 1 \\ B_x & |B|^2 & 1 \\ C_x & |C|^2 & 1 \end{vmatrix}$$

  onde

$$d = \begin{vmatrix} A_x & A_y & 1 \\ B_x & B_y & 1 \\ C_x & C_y & 1 \end{vmatrix}$$

- A reta de Euler é uma reta especial associada ao triângulo, que passa pelo baricentro, ortocentro e circuncentro, que estão sempre alinhados

Visualização do circuncentro e o círculo circunscrito



Implementação do centro e raio do círculo circunscrito

```cpp
// Definição da estrutura Point e da função de distância
// entre pontos dist()

template<typename T>
struct Triangle {
    Point<T> A, B, C;

    // Definição do método area()

    double circumradius() const
    {
        auto a = dist(B, C);
        auto b = dist(A, C);
        auto c = dist(A, B);

        return (a * b * c)/(4 * area());
    }

```

Implementação do centro e raio do círculo circunscrito

```
    Point<T> circumcenter() const
    {
        auto D = 2*(A.x*(B.y - C.y) + B.x*(C.y - A.y) + C.x*(A.y - B.y));

        auto A2 = A.x*A.x + A.y*A.y;
        auto B2 = B.x*B.x + B.y*B.y;
        auto C2 = C.x*C.x + C.y*C.y;

        auto x = (A2*(B.y - C.y) + B2*(C.y - A.y) + C2*(A.y - B.y))/D;
        auto y = (A2*(C.x - B.x) + B2*(A.x - C.x) + C2*(B.x - A.x))/D;

        return { x, y };
    }
};
```

Referências

1. **HALIM**, Felix; **HALIM**, Steve. *Competitive Programming 3*, 2010.
2. Math Open Reference. Orthocenter of a Triangle, acesso em 27/07/2016.
3. Math Open Reference. Incenter of a Triangle, acesso em 27/07/2016.
4. Wikipedia. Circumscribed Circle, acesso em 27/07/2016.
5. Wikipedia. Heron's Formula, acesso em 22/09/2016.