Matemática

Sequências e Séries

Prof. Edson Alves
Faculdade UnB Gama

Definição de sequência e subsequência

Uma sequência a_n é uma função cujo domínio é um subconjunto A dos números naturais.

Uma subsequência b_n de $a_n : A \to X$ é uma sequência $b_n : B \subset A \to X$ tal que $b_i = a_i$ para todos $i \in B$.

Monotonicidade

Uma sequência a_n é monotamente crescente, ou não-decrescente, se $a_{i+1} \geq a_i$ para todos $i \in A$.

Uma sequência a_n é monotamente decrescente, ou não-crescente, se $a_{i+1} \leq a_i$ para todos $i \in A$.

Sequência aritmética

Uma sequência (ou progressão) aritmética é uma sequência cuja diferença entre dois termos consecutivos é constante. Esta diferença recebe o nome de **razão** da progressão aritmética.

Termo geral da progressão aritmética

O k-ésimo termo de uma progressão aritmética a_n de razão r é dado por

$$a_k = a_1 + (k-1)r,$$

onde a_1 é o primeiro termo da sequência.

De modo geral,

$$a_k = a_m + (k-m)r,$$

onde a_m é o m-ésimo elemento.

Sequência geométrica

Uma sequência (ou progressão) geométrica é uma sequência cuja quociente entre dois termos consecutivos é constante. Este quociente recebe o nome de **razão** da progressão geométrica.

Termo geral da progressão geométrica

O k-ésimo termo da progressão geométrica a_n de razão q é dado por

$$a_k = a_1 q^{k-1},$$

onde a_1 é o primeiro termo da progressão.

Séries

O k-ésimo termo da série S_n é determinado pela soma dos primeiros k termos de uma sequência a_n, isto é

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$$

Série da progressão aritmética

O k-ésimo termo da série definida pela progressão aritmética a_n de razão r é dado por

$$S_k = \frac{k(a_1 + a_k)}{2}$$

Esta expressão pode ser deduzida através da soma das expressões

$$\begin{aligned} S_k &= a_1 + (a_1 + r) + (a_1 + 2r) + \ldots + (a_1 + (k-1)r) \\ S_k &= (a_k - (k-1)r) + (a_k - (k-2)r) + \ldots + (a_k - r) + a_k \end{aligned}$$

Série da progressão geométrica

O k-ésimo termo da série definida pela progressão geométrica a_n de razão q é dado por

$$S_k = \frac{a_1(1-q^k)}{1-q}$$

Esta expressão pode ser deduzida através da diferença das expressões

$$\begin{aligned} S_k &= a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{k-1} \\ qS_k &= a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \ldots + a_1 q^k \end{aligned}$$

Soma da progressão geométrica infinita

Se a_n é uma progressão geométrica de razão $|q| < 1$, então a série S_n converge para o limite S quando n tende ao infinito:

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{a_1}{1 - q}$$

Séries notáveis

Soma dos n primeiros naturais:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Soma dos quadrados dos n primeiros naturais:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Séries notáveis

Soma dos cubos dos n primeiros naturais:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Soma dos n primeiros ímpares:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} 2i - 1 = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$$

Série de Newton

A série de Newton é formada pelos termos da equação de diferenças finitas de Newton. Ela consiste em uma versão discreta da série de Taylor:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k[f](a)}{k!}(x-a)_k,$$

onde

$$\Delta^k[f](a) = \Delta(\Delta^{k-1}[f](a)), \quad \Delta^1[f](a) = \Delta[f](a) = f(a+1) - f(a)$$

e

$$x_k = x(x-1)(x-2)\ldots(x-k+1)$$

Representação de sequências arbitrárias por meio de polinômios

A série de Newton pode ser utilizada para obter um polinômio $p(x)$ que gera uma sequência finita a_n qualquer. Por exemplo, seja $a_n = 3, 7, 13, 21, 31$. O quadro abaixo computa as diferenças finitas para esta sequência.

x	$f = \Delta^0$	Δ^1	Δ^2	Δ^3
1	*3*			
2	7	*4*		
3	13	6	*2*	
4	21	8	2	*0*
5	31	10	2	0

Exemplo de representação de sequências arbitrárias por meio de polinômios

Conforme pode ser observado, $\Delta^k = 0$ para todo $k > 2$. Isto significa que a sequência a_n pode ser representada por um polinômio de grau 2. Este polinômio pode ser obtido por meio da substituição dos termos Δ da fórmula apresentada (em itálico na tabela):

$$\begin{aligned} f(x) &= \Delta^0 \cdot 1 + \Delta^1 \cdot \frac{(x-1)_1}{1!} + \Delta^2 \cdot \frac{(x-1)_2}{2!} \\ &= 3 \cdot 1 + 4(x-1) + 2 \cdot \frac{(x-1)(x-2)}{2} \\ &= x^2 + x + 1 \end{aligned}$$

Problemas

- Codeforces
  1. 51D - Geometrical Problem
  2. 255C - Almost Arithmetic Progression
  3. 382C - Arithmetic Progression
  4. 567C - Geometric Progression
  5. 789B - Masha and Geometric Depression

Referências

1. Byju's Classes. Sequence And Series. Acesso em 03/02/2021.
2. Wikipédia. Arithmetic progression. Acesso em 03/02/2021.
3. Wikipédia. Finite Difference. Acesso em 03/02/2021.
4. Wikipédia. Geometric progression. Acesso em 03/02/2021.
5. Wikipédia. Sequence. Acesso eme 03/02/2021.