Paradigmas de Resolução de Problemas

Dividir e Conquistar – Definição

Prof. Edson Alves - UnB/FGA

2019

Sumário

Dividir e Conquistar

Definição

- Dividir e conquistar (ou divisão e conquista) é um paradigma de solução de problemas que divide o problema em subproblemas menores sucessivas vezes até que o problema possa ser (trivialmente) resolvido
- Em seguida, ele combina as soluções dos subproblemas na solução do problema original
- Sistematicamente, são três etapas:
    1. dividir o problema em subproblemas menores (divisão);
    2. resolver os subproblemas recursivamente, se ainda forem grande o suficiente, ou diretamente, pequenos o bastante (conquista);
    3. combinar as soluções dos subproblemas para formar a solução do problema que foi dividido (fusão).

Complexidade de soluções baseadas em divisão e conquista

- Dada a natureza do paradigma, algoritmos baseados em divisão e conquista são implementados por meio de recursão
- Esta característica facilita a implementação e deixa evidente as etapas do paradigma
- Contudo, a complexidade assintótica do algoritmo pode não ser óbvia
- Para computar a complexidade o primeiro passo é escrever a relação de recorrência que associa o número de operações $T(n)$ necessárias para a resolução do problema com o número de operações necessárias para a solução dos subproblemas
- Uma vez estabelecida a recorrência, deve-se utilizar, se possível, o Teorema Mestre

Teorema Mestre

Sejam $a \geq 1$ e $b > 1$ constantes, $f(n)$ uma função tais que

$$T(n) = aT\left(\lfloor n/b \rfloor\right) + f(n)$$

Se

1. $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ para alguma constante $\varepsilon > 0$, então $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
2. $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ então $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$
3. $f(n) = O(n^{\log_b a + \varepsilon})$ para alguma constante $\varepsilon > 0$, e se $af(n/b) \leq cf(n)$ para alguma constante $c > 1$ e n grande o suficiente, então $T(n) = \Theta(f(n))$

Variáveis do Teorema Mestre

- Considere a relação de recorrência citada no Teorema Mestre:

$$T(n) = aT\left(\lfloor n/b \rfloor\right) + f(n),$$

- $T(n)$ é o número de operações para resolver um problema cuja entrada tem tamanho n
- a é o número de subproblemas após a divisão
- $\lfloor n/b \rfloor$ é o tamanho de cada subproblema
- Observe que cada subproblema deve ter o mesmo tamanho, e este tamanho deve ser um número inteiro
- $f(n)$ é o número de operações necessárias para combinar as soluções dos subproblemas para formar a solução do problema

Interpretação do Teorema Mestre

- O Teorema compara a função que representa o custo da etapa de fusão ($f(n)$) com a função $g(n) = n^{\log_a b}$, onde o número de subproblemas é $O(g(n))$
- No primeiro caso, o número de subproblemas é maior do que o custo da fusão, e domina a complexidade
- No terceiro caso, o custo da fusão é maior do que solução dos subproblemas, e domina a complexidade
- No segundo, ambas são equivalentes, de modo que o custo de fusão é multiplicado por um fator logarítmico, pois

$$\Theta(n^{\log_b a} \log n) = \Theta(f(n) \log n)$$

- Note que o Teorema Mestre não cobre todos os cenários possíveis

Exemplos práticos de divisão e conquista

Referências

1. **CORMEN**, Thomas H.; **LEISERSON**, Charles E.; **RIVEST**, Ronald; **STEIN**, Clifford. *Introduction to Algorithms*, 3rd Edition, MIT Press, 2009.
2. **LAARKSONEN**, Antti. *Competitive Programmer's Handbook*, 2017.
3. **HALIM**, Steve; **HALIM**, Felix. *Competitive Programming 3*, Lulu, 2013.