Matemática

Exponenciação

Prof. Edson Alves
Faculdade UnB Gama

Exponenciação nos naturais

Sejam a, n dois números naturais. A exponenciação a^n (lê-se "a elevado a n") é definida pela relação de recorrência, onde

- $a^1 = a$, e
- $a^n = a \times a^{n-1}$,

onde a é denominada **base** e n é denominado **expoente**.

Em termos mais simples, a exponenciação nos naturais é uma multiplicação repetida: basta multiplicar a por ele mesmo n vezes.

Propriedades da exponenciação

- Como a multiplicação nos naturais é associativa, vale que

$$a^{n+m} = a^n \times a^m$$

- Também são decorrentes da multiplicação nos naturais as propriedades

$$(a^n)^m = a^{nm}$$

e

$$(ab)^n = a^n \times b^n$$

Expoente zero

- Na exponenciação nos naturais é definido que, para qualquer a natural, $a^0 = 1$
- De fato, esta definição é consistente com a exponenciação nos inteiros e nos demais conjuntos numéricos, como se verá a seguir
- 0^0 é uma indeterminação (para qualquer natural n, $0^n = 0$)
- A exponenciação nos naturais é ensinada no ensino fundamental e médio, e serve para observar e aprender as propriedades fundamentais da exponenciação
- Porém é útil, na prática, conhecer as definições de exponenciação para outros conjuntos numéricos

Expoentes inteiros

Sejam a, n dois números inteiros, com $a > 0$. Vale que

- $a^1 = a$, e
- $a^{n-1} = a^n / a$

Partindo do caso base, segue que

- $a^0 = a^1 / a = 1$
- $a^{-1} = a^0 / a = 1/a$
- $a^{-n} = (a^{-1})^n = 1/a^n$

Expoentes inteiros

- As propriedades da exponenciação nos naturais permanecem todas verdadeiras para a exponenciação nos inteiros
- A reescrita da relação de recorrência permite expoentes negativos
- Esta recorrência justifica a notação a^{-1} para o inverso multiplicativo de a, uma vez que

$$a^{-1} \times a = \left(\frac{1}{a}\right) \times a = 1$$

Raízes n-ésimas

- Sejam a, n dois números inteiros, com $a > 0$. Qual seria o significado de $a^{1/n}$?
- Segundo as propriedades já descritas, seria um número x tal que $x^n = a$
- Cada solução desta equação recebe o nome de **raiz n-ésima de a**

Exponenciação nos racionais

Sejam n, m números inteiros com m diferente de zero e a um número racional positivo. Então

$$a^{n/m} = (a^{1/m})^n$$

Bases negativas

- A definição de exponenciação nos racionais pode ser estendida para bases negativas, desde que o **radical** (o fator $1/m$ do expoente) seja ímpar
- Isto porque não há soluções para $x^n = -1$ quando n e par
- Por exemplo, $x^3 = -1$ tem solução nos racionais, mas $x^2 = -1$ não
- Bases negativas, em geral, podem violar propriedades da exponenciação
- Por exemplo, calcule $((-2)^{3/4})^{4/3}$ usando e não usando as propriedades e veja o resultado!
- Tais exemplos justificam a restrição comum de bases positivas

Exponenciação rápida

- A implementação direta da definição de exponenciação nos naturais leva a uma rotina com complexidade $O(n)$
- Contudo, é possível implementar um algoritmo $O(\log n)$ para computar a^n, por meio da divisão e conquista, denominado **exponenciação rápida**
- Para tal, basta observar que, se n é par, então

$$a^n = a^{n/2} \times a^{n/2}$$

Exponenciação rápida

- Se n é impar, vale que

$$a^n = a \times a^{\lfloor n/2 \rfloor} \times a^{\lfloor n/2 \rfloor}$$

```
long long fast_exp(long long a, int n)
{
    if (n == 1)
        return a;

    auto x = fast_exp(a, n / 2);

    return x * x * (n % 2 ? a : 1);
}
```

Exponenciação em C/C++

- A biblioteca `math.h` de C ou a biblioteca `cmath` de C++ implementam funções relacionadas a exponenciação
- A função `pow(a, n)` computa o valor de a^n
- A função `exp(x)` computa o valor de e^x
- A função `sqrt(x)` computa a raiz quadrada de x
- A função `cbrt(x)` computa a raiz cúbica de x
- Todas essas funções recebem e retornam variáveis do tipo `double`

Problemas

- AtCoder
  - ABC 097B - Exponential
- Codeforces
  - 284A - Cows and Primitive Roots
- OJ
  - 107 - The Cat in The Hat
  - 11556 - Best Compression Ever

Referências

CppReference. Common mathematical functions. Acesso em 05/01/2021.

Wikipédia. Exponentiation. Acesso em 22 de agosto de 2017.

Wikipédia. Exponentiation by squaring. Acesso em 04/01/2021.