Strings

Tries – Definição e Construção

Prof. Edson Alves - UnB/FGA

2019

Sumário

1. Definição
2. Construção *naive* $O(N^2)$ da *trie*
3. Construção *online* da *trie*

Definição

Árvores de sufixos

- Árvores de sufixos são estruturas de dados que representam o conjunto $B(s)$ de todas as substrings de uma string s dada
- A relação de pertinência ($r \in B(s)$?) é o mais básico problema associado a esta estrutura
- Uma "boa" árvore de sufixos tem três características fundamentais:
  1. pode ser construída com tamanho linear
  2. pode ser construída em tempo linear
  3. pode responder questão de pertinência em complexidade linear em relação ao tamanho de s

Conceitos elementares

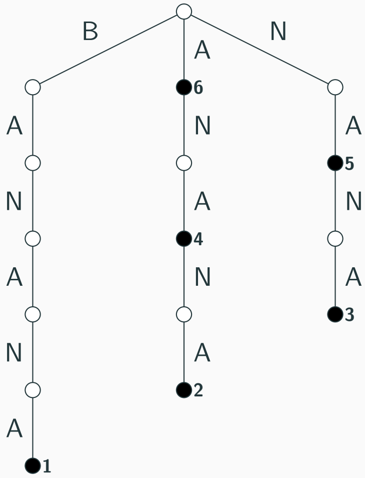
- Seja G um grafo acíclico direcionado, com raiz, cujas arestas recebem, como rótulos, caracateres ou palavras de um alfabeto A de tamanho constante
- Seja $label(e)$ o rótulo da aresta e
- O rótulo de um caminho p é a concatenação dos rótulos de todas as arestas do caminho
- Tal grafo representa um conjunto de strings, que são definidas pelos rótulos de todos os caminhos possíveis em G
- Seja

$$\mathcal{L}(G) = \{label(p) \mid p \text{ é caminho em } G \text{ com início na raiz}\}$$

- G representa todas as substrings de s se $\mathcal{L}(G) = B(s)$
- Um nó n cujo caminho da raiz até n tem como rótulo um sufixo de s é denominado nó essencial

- Uma *trie* de substrings de s, ou simplesmente *trie*, é o grafo G que representa todas as substrings de s, cujos rótulos consistem apenas de um único caractere
- O nome foi cunhado em 1961 por Edward Fredkin, a partir da sílaba central da palavra *retrieval*
- A pronúncia é idêntica a palavra *tree*, mas a grafia é diferente para diferenciar esta estrutura das árvores em geral
- A próxima figura ilustra a *trie* da palavra "BANANA"
- Os nós pretos são nós essenciais
- Os números ao lado dos nós essenciais são os índices do caractere inicial do sufixo

Visualização da ***trie*** **da palavra** ‘BANANA’



Construção *naive* $O(N^2)$ **da** *trie*

Construção *naive* da *trie*

- Seja s uma string de tamanho N
- Cada nó da *trie* de s pode ter até $|A|$ filhos, onde A é o alfabeto
- Assim, cada nó pode ser implementado como um vetor de pares ou como um mapa, onde o par (c, n), indicando que há uma aresta de rótulo c que aponta para o nó n
- A raiz da árvore será o nó identificado por $n = 0$
- Para cada caractere c do sufixo sufixo $s[i..N]$, e iniciando na raiz, verifica-se se existe a aresta (c, n)
- Em caso, afirmativo, segue-se esta aresta e se processa o caractere que sucede c
- Caso não exista, cria-se um novo nó m, adiciona-se ao nó atual a aresta (c, m), e segue o processamento para m e para o próximo caractere
- Esta construção tem complexidade $O(N^2)$
- A memória necessária também é $O(N^2)$

Implementação *naive* da *trie*

```
#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;
using Node = map<char, int>;
using Trie = vector<Node>;

Trie build_naive(const string& s)
{
    int root = 0, next = 0;

    Trie trie(1);       // Instancia o nó raiz vazio

    for (int i = s.size() - 1; i >= 0; --i)
    {
        string suffix = s.substr(i);
        int v = root;

        for (auto c : suffix)
        {
            auto it = trie[v].find(c);

```

Implementação *naive* da *trie*

```
            if (it != trie[v].end())
            {
                v = it->second;
            } else
            {
                trie.push_back({ });
                trie[v][c] = ++next;
                v = next;
            }
        }
    }

    return trie;
}
```

Busca de substring em um *trie*

- A *trie* da string s pode ser utilizada para identificar se uma string p é ou não substring de s
- O algoritmo é semelhante à busca binária, e tem complexidade $O(m)$, onde $m = |p|$
- Por exemplo, se $s =$ `"BANANA"` e $p =$ `"NAN"`, partindo da raiz, tem-se `"N"` na aresta à direita, `"A"` na única aresta e `"N"` na aresta seguinte: logo p é substring de s
- Como o nó de chegada é branco, p não é sufixo de s
- Para $p =$ `"NAS"`, o último caractere (`"S"`) não seria encontrado
- O mesmo vale para $p =$ `"MAS"`, porém a falha acontece logo no primeiro caractere
- Para $p =$ `"NANAN"` a busca se encerraria ao atingir um nó nulo

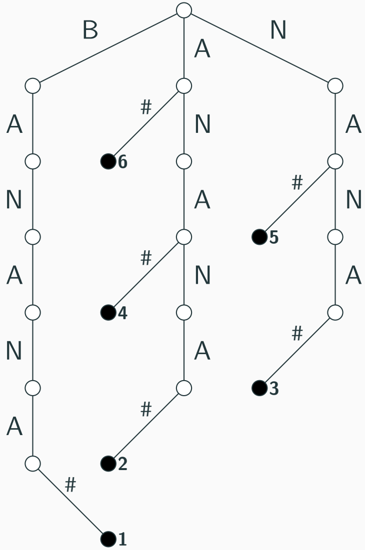
Implementação da busca em $O(m)$ em uma *trie*

```
bool search(const Trie& trie, const string& s)
{
    int v = 0;

    for (auto c : s)
    {
        auto it = trie[v].find(c);

        if (it == trie[v].end())
            return false;

        v = it->second;
    }

    return true;
}
```

Trie com marcadores

- A construção proposta para a *trie* permite ao algoritmo de busca descrito apenas determinar se a substring p ocorre ou não em s
- Se for preciso determinar a posição (ou posições) desta ocorrência, é preciso modificar a construção da *trie*, de modo que seja possível discriminar os nós essenciais dos demais
- Uma maneira de fazê-lo é adicionar um caractere terminador (em geral, o caractere '#'), que não pertença a string original
- A este caractere estará associado o índice i da string tal que o sufixo terminado no marcador é igual a $S[i..N]$
- Importante notar que o segundo elemento do par terá dois significados distintos: ou será um ponteiro para o próximo nó, ou o índice do sufixo caso o rótulo da aresta seja o terminador
- É preciso atentar a esta diferença na implementação das rotinas de construção e busca

Visualização da *trie* da palavra 'BANANA' com terminador



Construção da *trie* com marcador

```
Trie build_naive_with_marker(const string& s)
{
    int root = 0, next = 0;

    Trie trie(1);       // Instancia o nó raiz vazio

    for (int i = s.size() - 1; i >= 0; --i)
    {
        string suffix = s.substr(i) + '#';
        int v = root;

        for (auto c : suffix)
        {
            if (c == '#')
            {
                trie[v][c] = i;
                break;
            }

            auto it = trie[v].find(c);

```

Construção da *trie* com marcador

```
            if (it != trie[v].end())
            {
                v = it->second;
            } else
            {
                trie.push_back({ });
                trie[v][c] = ++next;
                v = next;
            }
        }
    }

    return trie;
}
```

Identificação das ocorrências de uma substring em uma *trie* com marcadores

```
vector<int> find(const Trie& trie, const string& s)
{
    vector<int> is;
    int v = 0;

    for (auto c : s)
    {
        auto it = trie[v].find(c);

        if (it == trie[v].end())
            return is;

        v = it->second;
    }

    queue<int> q;
    q.push(v);

```

Identificação das ocorrências de uma substring em uma *trie* com marcadores

```
    while (not q.empty())
    {
        auto u = q.front();
        q.pop();

        for (auto [c, v] : trie[u])
        {
            if (c == '#')
                is.push_back(v);
            else
                q.push(v);
        }
    }

    return is;
}
```

Número de substrings distintas

- Outra informação que pode ser obtida a partir da *trie* é o número de substring distintas de s
- Se s tem n caracteres, ela terá $n(n+1)/2$ substrings não vazias, não necessariamente distintas
- Estas substrings correspondem a todos os pares de índices (i, j), com $i \leq j$, onde $i, j = 1, 2, \ldots, n$
- Em uma *trie*, qualquer nó, exceto a raiz, representa uma substring distinta, formada pela concatenação dos rótulos do caminho da raiz até o nó em questão

Contagem de substrings distintas em uma *trie*

```
size_t unique_substrings(const Trie& trie)
{
    size_t count = 0;
    queue<int> q;
    q.push(0);

    while (not q.empty()) // BFS para contabilizar o número de nós
    {
        auto u = q.front();
        q.pop();

        for (auto [c, v] : trie[u]) {
            if (c != '#') {
                ++count;
                q.push(v);
            }
        }
    }

    return count;
}
```

Considerações sobre a construção *naive* da *trie*

- Embora as buscas apresentadas satisfaçam o terceiro critério para uma boa árvore de sufixo, os outros dois critérios não são satisfeitos
- Se a string s inicial tem N caracteres, a construção e o espaço em memória são $O(N^2)$.
- É possível melhorar a complexidade da construção da *trie*, por meio de um algoritmo *online*
- O espaço em memória, contudo, permanecerá $O(N^2)$, por conta da representação de cada caractere por meio de uma aresta
- Assim, a redução de memória só é possível por meio de uma mudança na representação dos caracteres e dos sufixos, o que leva a uma outra estrutura, a *suffix trie*

Construção *online* da *trie*

Algoritmo *online* para construção de uma *trie*

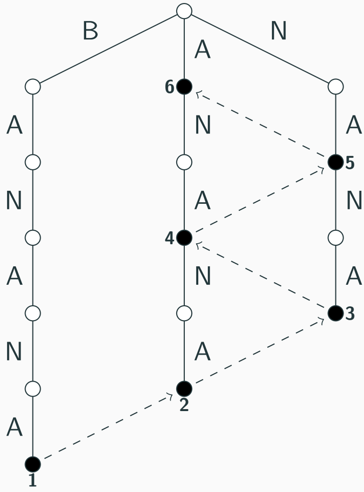
- A construção pode ser melhorada por meio de um algoritmo *online*
- A ideia principal é, ao invés de construir toda a *trie* de s de uma só vez, construí-la a partir da *trie* de $s[1..(N-1)]$
- Seja T_j a *trie* do prefixo $s[1..j]$ de s
- A principal observação a ser feita é que T_j pode ser construída a partir da inserção do caractere $s[j]$ em T_{j-1}, nas arestas dos novos nós a serem adicionados aos nós essenciais de T_{j-1}, quando for o caso
- Isto acontecerá quando o nó essencial não tem um filho ligado a ele por meio de uma aresta cujo rótulo é $s[j]$
- O ponto principal, portanto, se torna determinar a sequência dos nós essenciais $v_k, v_{k-1}, \ldots, v_2, v_1, v_0$, onde v_i corresponde ao prefixo $s[1..i]$ de T_k
- Esta tarefa pode ser feita por meio do uso de *links* de sufixos

Links de sufixos

- Seja u um nó de T_k
- Defina o *link* de sufixo $suf(u) = v$, onde v é um nó cujo caminho $p(v)$ da raiz até v é igual ao caminho de $[2..p(u)]$, isto é, o caminho $p(u)$ sem o seu primeiro caractere
- Por definição, se a raiz de T_k corresponde ao vértice v_0, então $suf(v_0) = v_0$
- Contudo, interpretar $suf(v_0)$ como **`nullptr`** pode ser mais interessante na implementação do algoritmo
- Esta definição leva a igualdade

$$(v_k, v_{k-1}, \ldots, v_0) = (v_k, suf(v_k), suf^2(v_k), \ldots, suf^{k-1}(v_k))$$

Visualização dos *links* de sufixos da *trie* da palavra 'BANANA'



Construção *online* da *trie*

A construção *online* de T_k a partir de T_{k-1} pode ser feita por meio dos seguintes passos:

1. identifique os nós essenciais $v_{k-1}, v_{k-2}, \ldots, v_1, v_0$ de T_{k-1}, em ordem decrescente em relação ao tamanho do sufixo relacionado
2. escolha os nós v_i consecutivos até que se atinja um nó v_t tal que exista um filho de v_t unido por uma aresta cujo rótulo é $s[k]$
3. para cada um dos nós escolhidos, crie novos nós filhos ligados por arestas cujos rótulos sejam $s[k]$
4. atualize os *links* de sufixos para os novos nós recém-criados

Visualização da construção *online* da *trie*

$k = 0$

i	v_i	$suf[v_i]$
0	0	-1

Visualização da construção *online* da *trie*

$k = 1$

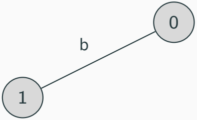
$c =$ 'b'

i	v_i	$suf[v_i]$
0	0	-1

Visualização da construção *online* da *trie*

$k = 1$

$c =$ 'b'

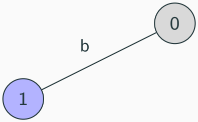


i	v_i	$suf[v_i]$
0	0	-1
1	1	0

Visualização da construção *online* da *trie*

$k = 2$

$c =$ 'a'



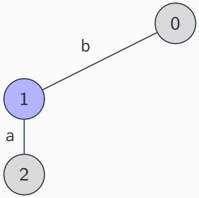
i	v_i	$suf[v_i]$
0	0	-1
1	1	0

Visualização da construção *online* da *trie*

$k = 2$

$c =$ 'a'

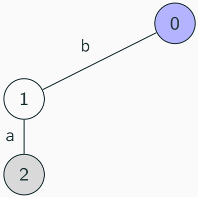
i	v_i	$suf[v_i]$
0	0	-1
1	1	0
2	2	0



Visualização da construção *online* da *trie*

$k = 2$
$c =$ 'a'

i	v_i	$suf[v_i]$
0	0	-1
1	1	0
2	2	0

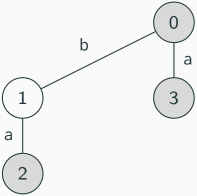


Visualização da construção *online* da *trie*

$k = 2$

$c =$ 'a'

i	v_i	$suf[v_i]$
0	0	-1
1	3	0
2	2	3

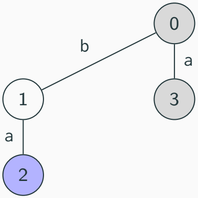


Visualização da construção *online* da *trie*

$k = 3$

$c =$ 'n'

i	v_i	$suf[v_i]$
0	0	-1
1	3	0
2	2	3

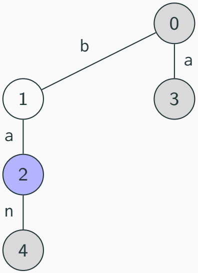


Visualização da construção *online* da *trie*

$k = 3$

$c =$ 'n'

i	v_i	$suf[v_i]$
0	0	-1
1	3	0
2	2	3
3	4	0

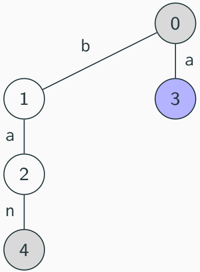


Visualização da construção *online* da *trie*

$k = 3$

$c =$ 'n'

i	v_i	$suf[v_i]$
0	0	-1
1	3	0
2	2	3
3	4	0

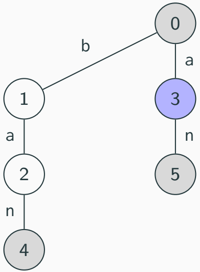


Visualização da construção *online* da *trie*

$k = 3$

$c =$ 'n'

i	v_i	$suf[v_i]$
0	0	-1
1	3	0
2	5	3
3	4	5

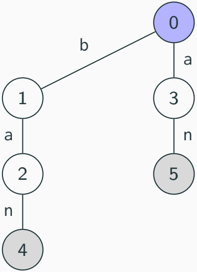


Visualização da construção *online* da *trie*

$k = 3$

$c =$ 'n'

i	v_i	$suf[v_i]$
0	0	-1
1	3	0
2	5	3
3	4	5

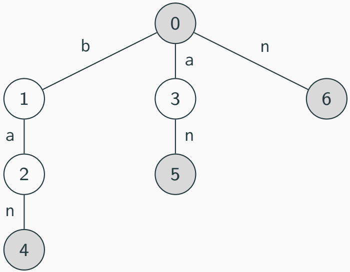


Visualização da construção *online* da *trie*

$k = 3$

$c =$ 'n'

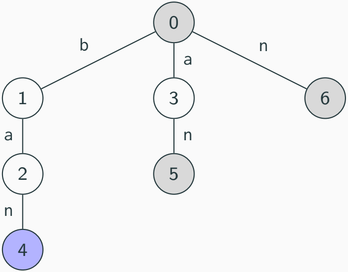
i	v_i	$suf[v_i]$
0	0	-1
1	6	0
2	5	6
3	4	5



$k = 4$

$c =$ 'a'

i	v_i	$suf[v_i]$
0	0	-1
1	6	0
2	5	6
3	4	5

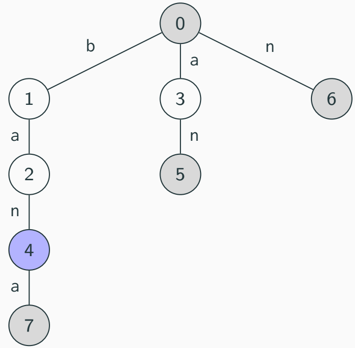


Visualização da construção *online* da *trie*

$k = 4$

$c =$ 'a'

i	v_i	$suf[v_i]$
0	0	-1
1	6	0
2	5	6
3	4	5
4	7	0

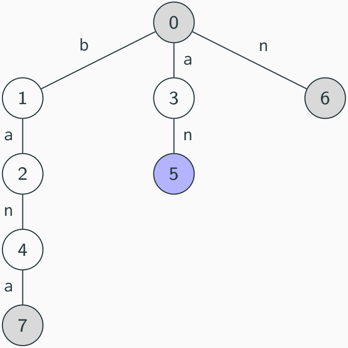


Visualização da construção *online* da *trie*

$k = 4$

$c =$ 'a'

i	v_i	$suf[v_i]$
0	0	-1
1	6	0
2	5	6
3	4	5
4	7	0

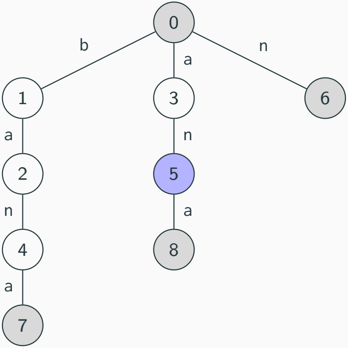


Visualização da construção *online* da *trie*

$k = 4$

$c =$ 'a'

i	v_i	$suf[v_i]$
0	0	-1
1	6	0
2	5	6
3	8	5
4	7	8



Referências

1. CP Algorithms. Suffix Tree. Ukkonen's Algorithm, acesso em 02/10/2019.
2. **CROCHEMORE**, Maxime; **RYTTER**, Wojciech. *Jewels of Stringology: Text Algorithms*, WSPC, 2002.
3. **ROY, TUSHAR**. Trie, acesso em 02/10/2019.
4. **HALIM**, Steve; **HALIM**, Felix. *Competitive Programming 3*, Lulu, 2013.
5. Wikipédia. Trie, acesso em 02/10/2019.