Matemática

Princípio da Inclusão/Exclusão

Prof. Edson Alves

Faculdade UnB Gama

Princípio da Inclusão/Exclusão

Cardinalidade da união de dois conjuntos

- Sejam A e B dois conjuntos com interseção $A \cap B$ não-vazia. Quantos são os elementos do conjunto união $A \cup B$?
- A princípio a expressão $|A \cup B| = |A| + |B|$ pode parecer correta, mas há um problema
- Quando somamos todos os elementos do conjunto A, somamos também os elementos da interseção $A \cup B$; ao somarmos os elementos de B, os elementos da interseção são novamente somados, de modo que a expressão proposta conta elementos duplicados
- Esta contagem pode ser corrigida descontado uma vez cada elemento dobrado
- Assim
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$
- A expressão acima é o Princípio da Inclusão/Exclusão para dois conjuntos.

Cardinalidade da união de três conjuntos

- Para o caso de 3 conjuntos, devemos atentar as possíveis interseções entre os conjuntos e os efeitos colaterais da soma e subtração de cada uma
- Na soma

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C|$$

  as interseções $A \cap B$, $A \cap C$ e $B \cap C$ são contadas duas vezes, e a interseção $A \cap B \cap C$ três vezes
- Ao remover as duplicatas, ficamos com

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|$$

- As duplicatas foram removidas, mas a interseção $A \cap B \cap C$ foi removida completamente (três vezes), de modo que não está mais sendo contada
- A última correção necessária, portanto, é incluir a interseção ausente:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

- Este é o Princípio da Inclusão/Exclusão para três conjuntos

Princípio da Inclusão/Exclusão

Definição

Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_N$ conjuntos finitos. Então

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_N| = \sum_{i} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^N |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_N|$$

- O Princípio da Inclusão/Exclusão é a generalização do Princípio Aditivo, para os casos onde 2 ou mais conjuntos tem interseção não-vazia
- Observe que o número de elementos dos próprios conjuntos, e de suas interseções em quantidade par, são somados ao total
- Já as interseções em quantidade ímpar são subtraídas da contagem

Aplicações do Princípio da Inclusão/Exclusão

Permutações caóticas

Definição

Uma permutação de N elementos é dita caótica se nenhum dos N elementos ocupa, na permutação, a mesma posição que ocupava na posicionamento original, isto é, o elemento i não ocupa a i-ésima posição.

Contando permutações caóticas

Podemos contar o total de permutações caóticas $D(N)$ (D de *derangement*, em inglês) da seguinte forma: seja A_k o conjunto das permutações nas quais o elemento k ocupa a k-ésima posição. Assim

$$D(N) = P(N) - \sum_i |A_i| + \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| - \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + ... + (-1)^N |A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_N|$$

onde $P(N)$ é o total de permutações de N elementos.

Observe que $|A_i| = (N-1)!$ (pois o elemento i está fixo), $|A_i \cap A_j| = (N-2)!$ (dois elementos fixos), e assim por diante. Logo

$$D(N) = N! - \binom{N}{1}(N-1)! + \binom{N}{2}(N-2)! - ... + (-1)^N \binom{N}{N}$$

o que nos dá

$$D(N) = N!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... + (-1)^N \frac{1}{N!}\right)$$

Referências

1. **CppReference**. Common mathematical functions. Acesso em 05/01/2021.
2. **Wikipédia**. Logarithm. Acesso em 05/01/2021.