Union-Find Disjoint Sets

Definição e Implementação

Prof. Edson Alves - UnB/FGA

2020

Sumário

Definição

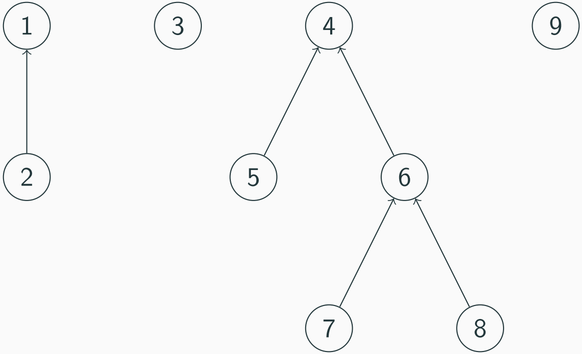
Definição

Union-find disjoint set (UFDS) é uma estrutura de dados que mantém uma coleção de conjuntos $\{S_1, S_2, \ldots, S_N\}$ disjuntos, isto é, $S_i \cap S_j = \emptyset$ se $i \neq j$. Há duas operações básicas, com complexidade $O(\log N)$: a **união** (`union_set(A, B)`) de dois conjuntos disjuntos e a identificação do **representante** da união de conjuntos que o conjunto `S` pertence (`find_set(S)`).

Características da UFDS

- A UFDS foi proposta em 1971 por J. D. Hopcroft e J. D. Ullman
- Ela é composta por uma floresta de árvores
- Cada árvore representa uma união de subconjuntos
- A raiz de cada árvore é o representante da união
- Cada nó da árvore representa um dos conjuntos que compõem a união
- Dois conjuntos que pertencem a árvores distintas são disjuntos
- Duas árvores podem ser unidas tornado a raiz de uma delas filha da raiz da outra
- Se a árvore com o menor número de elementos for incorporada na de maior número de elementos, a união terá complexidade $O(\log N)$

Visualização de uma UFDS



Implementação

Construtor da UFDS

- Considere que cada um dos N conjuntos a serem representados na UFDS sejam identificados pelos inteiros de 1 a N
- A UFDS tem dois vetores membros: $size$ e ps
- $size[i]$ corresponde ao número de nós da árvore que tem i como raiz
- $ps[i]$ é o pai de i na árvore que ele está contido
- Como inicialmente todos os conjuntos são disjuntos, temos $size[i] = 1$ e $ps[i] = i$, para $i = 1, 2, \ldots, N$
- Observe que, ao contrário da convenção das árvores em computação, o pai da raiz é ele próprio, o que simplifica a implementação

Implementação do construtor da UFDS

```
#ifndef UNION_FIND_H
#define UNION_FIND_H

#include <vector>
#include <numeric>

class UFDS
{
private:
    std::vector<int> size, ps;

public:
    UFDS(int N) : size(N + 1, 1), ps(N + 1)
    {
        // ps = {0, 1, 2, 3, ..., N}
        std::iota(ps.begin(), ps.end(), 0);
    }

```

Identificação dos representantes

- O método `find_set(x)` retorna o representante (raiz) da árvore onde x se encontra
- Para isso, basta seguir a cadeia de pais, até localizar um nó cujo pai é ele mesmo
- Se a união for baseada no tamanho das árvores, o tamanho de cada árvore tende a $O(\log N)$, de modo que este método também tem complexidade $O(\log N)$
- O método `same_set(x, y)` retorna verdadeiro se x e y pertencem a mesma árvore, ou falso, caso contrário
- A implementação é simples: basta confrontar os representantes de cada conjunto

Implementação da identificação de representantes

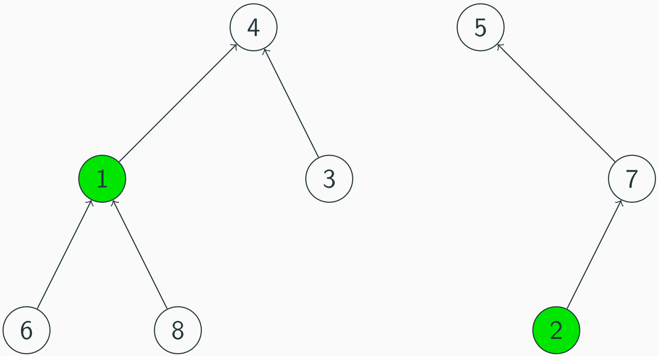
```cpp
    int find_set(int x) const
    {
        return x == ps[x] ? x : find_set(ps[x]);
    }

    bool same_set(int x, int y)
    {
        return find_set(x) == find_set(y);
    }

```

União de conjunto disjuntos

- O método `union_set(x, y)` une as árvores onde x e y estão localizados
- Se x e y já estão na mesma árvore, nada deve ser feito
- Caso contrário considere, sem perda de generalidade, que a árvore que contém x tem o mesmo número ou mais nós do que a árvore que contém y
- Neste caso, a raiz da árvore de x passa ser o pai da raiz da árvore de y
- Como ambas raízes devem ser localizadas previamente, a complexidade deste método também é $O(\log N)$

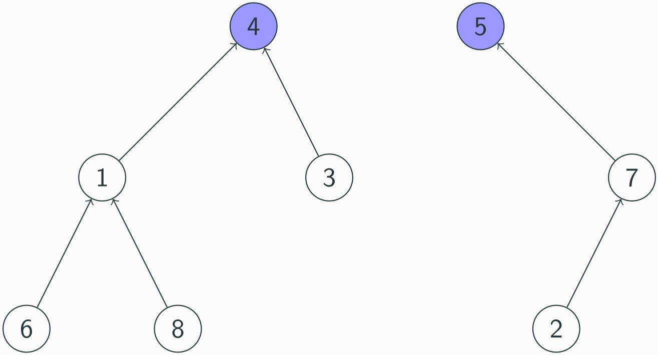
Visualização da união de árvores

`union_set(1, 2)`



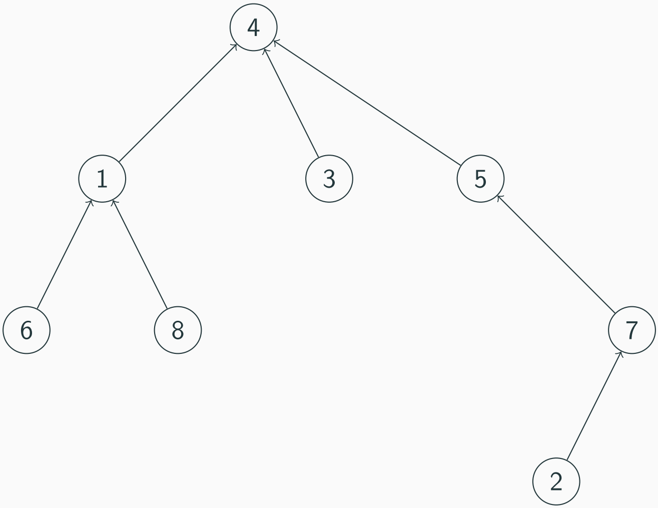
Visualização da união de árvores

`union_set(1, 2)`



Visualização da união de árvores

`union_set(1, 2)`



Implementação da união de conjuntos disjuntos

```
    void union_set(int x, int y)
    {
        if (same_set(x, x))
            return;

        int p = find_set(x);
        int q = find_set(y);

        if (size[p] < size[q])
            std::swap(p, q);

        ps[q] = p;
        size[p] += size[q];
    }
};

#endif
```

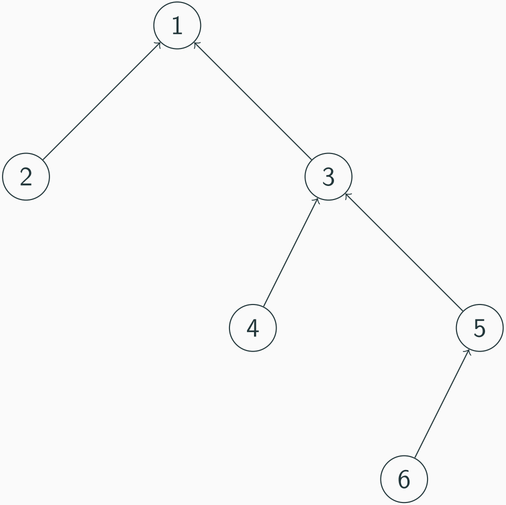
Otimizações e Aplicações

Compressão de caminho

- O método `find_set(x)` pode ser modificado para que, ao percorrer o caminho de x até a raiz, os nós intermediários passem a ter a raiz da árvore como pai
- Esta técnica é conhecida como compressão de caminho
- A medida que o método for invocado para diferentes valores de x, as árvores tendem a ter apenas dois níveis
- Usada em conjunto com a união por tamanho (ou por ranqueamento), a complexidade amortizada de ambas operações (união e identificação de representante) passa a ser $O(\alpha(n))$, onde $\alpha(n)$ é a função inversa de Ackermann
- Para qualquer n representável no universo físico, $\alpha(n) < 5$, de modo que as operações tem, na essência, complexidade constante

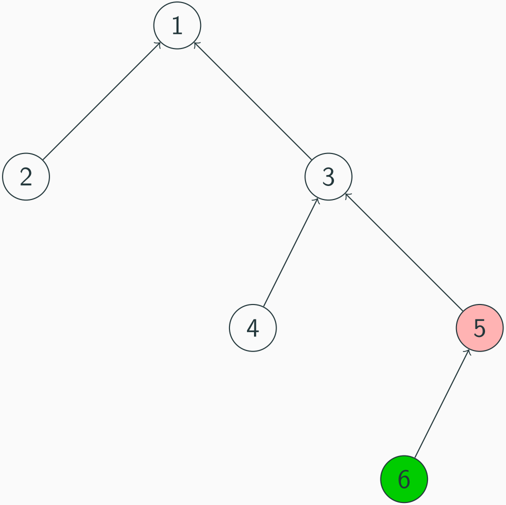
Visualização da compressão de caminho

`find_set(6)`



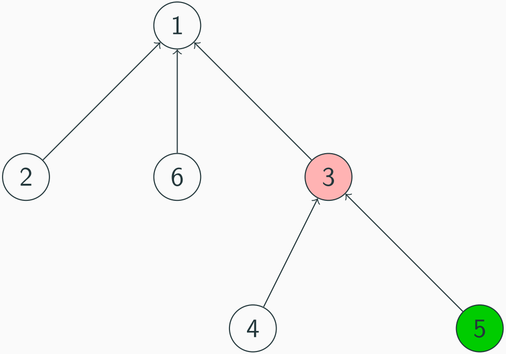
Visualização da compressão de caminho

`find_set(6)`



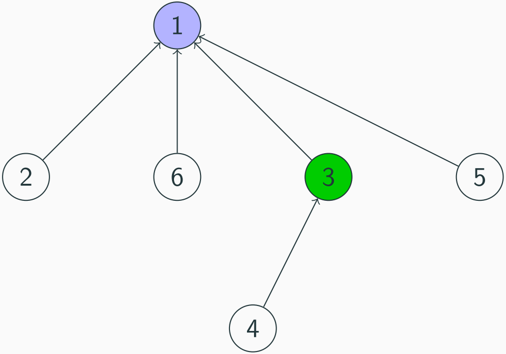
Visualização da compressão de caminho

`find_set(6)`



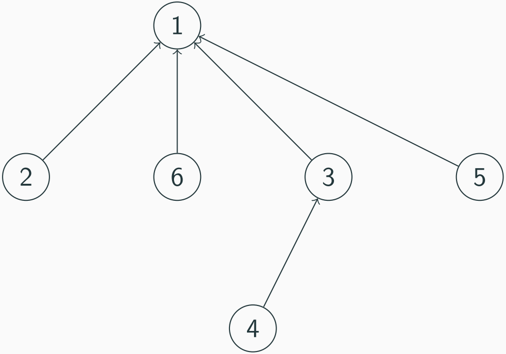
Visualização da compressão de caminho

`find_set(6)`



Visualização da compressão de caminho

`find_set(6) = 1`



Implementação da compressão de caminho

```
void find_set(int x)
{
    return x == ps[x] ? x : (ps[x] = find_set(ps[x]));
}
```

Aplicações

- A UFDS pode ser aplicada em vários contextos
- Uma aplicação comum é na implementação do algoritmo de Kruskall para determinar a árvore mínima geradora (MST) de um grafo
- De modo geral, ela pode ser usada para identificar os componentes conectados de um grafof não-direcionado
- Por fim, seja R uma relação de equivalência
- Se $(a, b) \in R$ (isto é, a está relacionado a b), então `same_set(a, b)` retorna verdadeiro

Referências

1. **HALIM**, Felix; **HALIM**, Steve. *Competitive Programming 3*, 2010.
2. **LAAKSONEN**, Antti. *Competitive Programmer's Handbook*, 2018.
3. **SEDGEWICK**, Robert. *Algorithms, 4th Edition*, 976 pgs, Addison-Wesley Professional, 2011.
4. **SKIENA**, Steven S.; **REVILLA**, Miguel A. *Programming Challenges*, 2003.
5. Wikipédia. Disjoint-set data structure, acesso em 05/03/2020.