Geometria Computacional

Retas: definição

Prof. Edson Alves

Faculdade UnB Gama

Definição de reta

Definição

- Reta também é um termo primitivo da Geometria

Definição

- Reta também é um termo primitivo da Geometria
- No primeiro livro dos elementos, Euclides define reta como "*a line is breadthless length*", que numa tradução livre diz que "linha é comprimento sem largura"

Definição

- Reta também é um termo primitivo da Geometria
- No primeiro livro dos elementos, Euclides define reta como "*a line is breadthless length*", que numa tradução livre diz que "linha é comprimento sem largura"
- As linhas são elementos unidimensionais

Definição

- Reta também é um termo primitivo da Geometria
- No primeiro livro dos elementos, Euclides define reta como "*a line is breadthless length*", que numa tradução livre diz que "linha é comprimento sem largura"
- As linhas são elementos unidimensionais
- As retas podem ser representados através ou de sua equação geral, ou de sua equação reduzida

Definição

- Reta também é um termo primitivo da Geometria
- No primeiro livro dos elementos, Euclides define reta como "*a line is breadthless length*", que numa tradução livre diz que "linha é comprimento sem largura"
- As linhas são elementos unidimensionais
- As retas podem ser representados através ou de sua equação geral, ou de sua equação reduzida
- A equação reduzida de uma reta é a mais conhecida e utilizada nos cursos de ensino médio

Definição

- Reta também é um termo primitivo da Geometria
- No primeiro livro dos elementos, Euclides define reta como "*a line is breadthless length*", que numa tradução livre diz que "linha é comprimento sem largura"
- As linhas são elementos unidimensionais
- As retas podem ser representados através ou de sua equação geral, ou de sua equação reduzida
- A equação reduzida de uma reta é a mais conhecida e utilizada nos cursos de ensino médio
    1. tem a vantagem de facilitar comparações entre retas e identificar paralelismo

Definição

- Reta também é um termo primitivo da Geometria
- No primeiro livro dos elementos, Euclides define reta como "*a line is breadthless length*", que numa tradução livre diz que "linha é comprimento sem largura"
- As linhas são elementos unidimensionais
- As retas podem ser representados através ou de sua equação geral, ou de sua equação reduzida
- A equação reduzida de uma reta é a mais conhecida e utilizada nos cursos de ensino médio
    1. tem a vantagem de facilitar comparações entre retas e identificar paralelismo
    2. não é capaz de representar retas verticais

Definição

- Reta também é um termo primitivo da Geometria
- No primeiro livro dos elementos, Euclides define reta como "*a line is breadthless length*", que numa tradução livre diz que "linha é comprimento sem largura"
- As linhas são elementos unidimensionais
- As retas podem ser representados através ou de sua equação geral, ou de sua equação reduzida
- A equação reduzida de uma reta é a mais conhecida e utilizada nos cursos de ensino médio
    1. tem a vantagem de facilitar comparações entre retas e identificar paralelismo
    2. não é capaz de representar retas verticais
- A equação geral, como o próprio nome diz, pode representar qualquer reta do plano

Equação reduzida da reta

- A equação reduzida da reta é dada por

$$y = mx + b,$$

onde m é o coeficiente angular da reta e b é o coeficiente linear da reta

Equação reduzida da reta

- A equação reduzida da reta é dada por

$$y = mx + b,$$

  onde m é o coeficiente angular da reta e b é o coeficiente linear da reta
- O primeiro coeficiente representa a taxa de variação da reta: o quanto y varia para cada unidade de variação de x no sentido positivo do eixo horizontal

Equação reduzida da reta

- A equação reduzida da reta é dada por

$$y = mx + b,$$

  onde m é o coeficiente angular da reta e b é o coeficiente linear da reta
- O primeiro coeficiente representa a taxa de variação da reta: o quanto y varia para cada unidade de variação de x no sentido positivo do eixo horizontal
- O coeficiente linear b é o valor no qual a reta intercepta o eixo y

Equação reduzida da reta

- A equação reduzida da reta é dada por

$$y = mx + b,$$

  onde m é o coeficiente angular da reta e b é o coeficiente linear da reta

- O primeiro coeficiente representa a taxa de variação da reta: o quanto y varia para cada unidade de variação de x no sentido positivo do eixo horizontal
- O coeficiente linear b é o valor no qual a reta intercepta o eixo y

```
template<typename T>
struct Line {
    T m, b;
};
```

Equação reduzida a partir de dois pontos dados

- Dados dois pontos $P = (x_p, y_p)$ e $Q = (x_q, y_q)$ tais que $x_p \neq x_q$, a inclinação da reta é dada por
$$m = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p}$$

Equação reduzida a partir de dois pontos dados

- Dados dois pontos $P = (x_p, y_p)$ e $Q = (x_q, y_q)$ tais que $x_p \neq x_q$, a inclinação da reta é dada por

$$m = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p}$$

- Deste modo, a equação reduzida da reta será dada por

$$y = m(x - x_p) + y_p = mx + (y_p - mx_p)$$

Equação reduzida a partir de dois pontos dados

- Dados dois pontos $P = (x_p, y_p)$ e $Q = (x_q, y_q)$ tais que $x_p \neq x_q$, a inclinação da reta é dada por
$$m = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p}$$

- Deste modo, a equação reduzida da reta será dada por
$$y = m(x - x_p) + y_p = mx + (y_p - mx_p)$$

- Se $x_p = x_q$, a reta é vertical

Equação reduzida a partir de dois pontos dados

- Dados dois pontos $P = (x_p, y_p)$ e $Q = (x_q, y_q)$ tais que $x_p \neq x_q$, a inclinação da reta é dada por

$$m = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p}$$

- Deste modo, a equação reduzida da reta será dada por

$$y = m(x - x_p) + y_p = mx + (y_p - mx_p)$$

- Se $x_p = x_q$, a reta é vertical
- Retas verticais podem ser identificadas por meio de uma variável booleana que indica se a reta é vertical ou não

Equação reduzida a partir de dois pontos dados

- Dados dois pontos $P = (x_p, y_p)$ e $Q = (x_q, y_q)$ tais que $x_p \neq x_q$, a inclinação da reta é dada por

$$m = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p}$$

- Deste modo, a equação reduzida da reta será dada por

$$y = m(x - x_p) + y_p = mx + (y_p - mx_p)$$

- Se $x_p = x_q$, a reta é vertical
- Retas verticais podem ser identificadas por meio de uma variável booleana que indica se a reta é vertical ou não
- Neste caso, o coeficiente b indicará o ponto onde a reta intercepta o eixo horizontal

Implementação da reta através da equação reduzida

```cpp
template<typename T>
struct Line {
    bool vertical;
    T m, b;

    Line(const Point<T>& P, const Point<T>& Q) : vertical(false)
    {
        if (equals(P.x, Q.x))
        {
            vertical = true;
            b = P.x;
        } else
        {
            m = (Q.y - P.y)/(Q.x - P.x)
            b = P.y - m * P.x
        }
    }
};
```

Equação geral da reta

- A equação geral da reta é dada por

$$ax + by + c = 0$$

Equação geral da reta

- A equação geral da reta é dada por

$$ax + by + c = 0$$

- Como dito, a equação geral pode representar retas verticais ($b = 0$)

Equação geral da reta

- A equação geral da reta é dada por

$$ax + by + c = 0$$

- Como dito, a equação geral pode representar retas verticais ($b = 0$)
- Nos demais casos, é possível obter a equação reduzida a partir da equação geral

Equação geral da reta

- A equação geral da reta é dada por

$$ax + by + c = 0$$

- Como dito, a equação geral pode representar retas verticais ($b = 0$)
- Nos demais casos, é possível obter a equação reduzida a partir da equação geral

```cpp
template<typename T>
struct Line {
    T a, b, c;
};
```

Equação geral da reta a partir de dois pontos

- Dados dois pontos distintos $P = (x_p, y_p)$ e $Q = (x_q, y_q)$, é possível obter os coeficientes da equação geral da seguinte maneira:

Equação geral da reta a partir de dois pontos

- Dados dois pontos distintos $P = (x_p, y_p)$ e $Q = (x_q, y_q)$, é possível obter os coeficientes da equação geral da seguinte maneira:
    1. Use a equação reduzida da reta

Equação geral da reta a partir de dois pontos

- Dados dois pontos distintos $P = (x_p, y_p)$ e $Q = (x_q, y_q)$, é possível obter os coeficientes da equação geral da seguinte maneira:
    1. Use a equação reduzida da reta
    2. Elimine o denominador multiplicando ambos lados da igualdade por $(x_q - x_p)$

Equação geral da reta a partir de dois pontos

- Dados dois pontos distintos $P = (x_p, y_p)$ e $Q = (x_q, y_q)$, é possível obter os coeficientes da equação geral da seguinte maneira:
    1. Use a equação reduzida da reta
    2. Elimine o denominador multiplicando ambos lados da igualdade por $(x_q - x_p)$
    3. Reagrupe os termos colocando x e y em evidência e isolando o termo constante

Equação geral da reta a partir de dois pontos

- Dados dois pontos distintos $P = (x_p, y_p)$ e $Q = (x_q, y_q)$, é possível obter os coeficientes da equação geral da seguinte maneira:
  1. Use a equação reduzida da reta
  2. Elimine o denominador multiplicando ambos lados da igualdade por $(x_q - x_p)$
  3. Reagrupe os termos colocando x e y em evidência e isolando o termo constante
- Este processo pode ser simplificado através do uso de Álgebra Linear: se três pontos $P = (x_p, y_p), Q = (x_q, y_q)$ e $R = (x, y)$ são colineares (isto é, pertencem a uma mesma reta), então

$$\det \begin{bmatrix} x_p & y_p & 1 \\ x_q & y_q & 1 \\ x & y & 1 \end{bmatrix} = 0$$

Equação geral da reta a partir de dois pontos

- Dados dois pontos distintos $P = (x_p, y_p)$ e $Q = (x_q, y_q)$, é possível obter os coeficientes da equação geral da seguinte maneira:
  1. Use a equação reduzida da reta
  2. Elimine o denominador multiplicando ambos lados da igualdade por $(x_q - x_p)$
  3. Reagrupe os termos colocando x e y em evidência e isolando o termo constante
- Este processo pode ser simplificado através do uso de Álgebra Linear: se três pontos $P = (x_p, y_p), Q = (x_q, y_q)$ e $R = (x, y)$ são colineares (isto é, pertencem a uma mesma reta), então

$$\det \begin{bmatrix} x_p & y_p & 1 \\ x_q & y_q & 1 \\ x & y & 1 \end{bmatrix} = 0$$

- A soluçaõ da equação acima é

$$a = y_p - y_q, b = x_q - x_p, c = x_p y_q - x_q y_p$$

Implementação da reta através da equação geral

```
template<typename T>
struct Line {
    T a, b, c;

    Line(const Point<T>& P, const Point<T>& Q)
        : a(P.y - Q.y), b (Q.x - P.x), c(P.x * Q.y - Q.x * P.y)
    {
    }
};
```

Observações sobre a equação geral da reta

- Um mesma reta pode ter infinitas equações gerais associadas: basta multiplicar toda a equação por um número real diferente de zero

Observações sobre a equação geral da reta

- Um mesma reta pode ter infinitas equações gerais associadas: basta multiplicar toda a equação por um número real diferente de zero
- Para normalizar a representação, associando uma única equação a cada reta, é necessário dividir toda a equação pelo coeficiente a (ou por b, caso a seja igual a zero)

Observações sobre a equação geral da reta

- Um mesma reta pode ter infinitas equações gerais associadas: basta multiplicar toda a equação por um número real diferente de zero
- Para normalizar a representação, associando uma única equação a cada reta, é necessário dividir toda a equação pelo coeficiente a (ou por b, caso a seja igual a zero)
- Esta estratégia permite a simplificação de algoritmos de comparação entre retas

Observações sobre a equação geral da reta

- Um mesma reta pode ter infinitas equações gerais associadas: basta multiplicar toda a equação por um número real diferente de zero
- Para normalizar a representação, associando uma única equação a cada reta, é necessário dividir toda a equação pelo coeficiente a (ou por b, caso a seja igual a zero)
- Esta estratégia permite a simplificação de algoritmos de comparação entre retas
- Por outro lado, não uniformizar a representação permite manter os coeficientes inteiros, caso as coordenadas dos pontos sejam inteiras

Observações sobre a equação geral da reta

- Um mesma reta pode ter infinitas equações gerais associadas: basta multiplicar toda a equação por um número real diferente de zero
- Para normalizar a representação, associando uma única equação a cada reta, é necessário dividir toda a equação pelo coeficiente a (ou por b, caso a seja igual a zero)
- Esta estratégia permite a simplificação de algoritmos de comparação entre retas
- Por outro lado, não uniformizar a representação permite manter os coeficientes inteiros, caso as coordenadas dos pontos sejam inteiras
- Importante notar que, em ambas representações, pode acontecer da reta resultante ser degenerada

Observações sobre a equação geral da reta

- Um mesma reta pode ter infinitas equações gerais associadas: basta multiplicar toda a equação por um número real diferente de zero
- Para normalizar a representação, associando uma única equação a cada reta, é necessário dividir toda a equação pelo coeficiente a (ou por b, caso a seja igual a zero)
- Esta estratégia permite a simplificação de algoritmos de comparação entre retas
- Por outro lado, não uniformizar a representação permite manter os coeficientes inteiros, caso as coordenadas dos pontos sejam inteiras
- Importante notar que, em ambas representações, pode acontecer da reta resultante ser degenerada
- Isto ocorre quando os pontos P e Q são idênticos: neste caso, a reta se reduz a um único ponto

Observações sobre a equação geral da reta

- Um mesma reta pode ter infinitas equações gerais associadas: basta multiplicar toda a equação por um número real diferente de zero
- Para normalizar a representação, associando uma única equação a cada reta, é necessário dividir toda a equação pelo coeficiente a (ou por b, caso a seja igual a zero)
- Esta estratégia permite a simplificação de algoritmos de comparação entre retas
- Por outro lado, não uniformizar a representação permite manter os coeficientes inteiros, caso as coordenadas dos pontos sejam inteiras
- Importante notar que, em ambas representações, pode acontecer da reta resultante ser degenerada
- Isto ocorre quando os pontos P e Q são idênticos: neste caso, a reta se reduz a um único ponto
- O tratamento deste caso especial nos demais algoritmos aumenta o tamanho e a sofisticação dos códigos

Observações sobre a equação geral da reta

- Um mesma reta pode ter infinitas equações gerais associadas: basta multiplicar toda a equação por um número real diferente de zero
- Para normalizar a representação, associando uma única equação a cada reta, é necessário dividir toda a equação pelo coeficiente a (ou por b, caso a seja igual a zero)
- Esta estratégia permite a simplificação de algoritmos de comparação entre retas
- Por outro lado, não uniformizar a representação permite manter os coeficientes inteiros, caso as coordenadas dos pontos sejam inteiras
- Importante notar que, em ambas representações, pode acontecer da reta resultante ser degenerada
- Isto ocorre quando os pontos P e Q são idênticos: neste caso, a reta se reduz a um único ponto
- O tratamento deste caso especial nos demais algoritmos aumenta o tamanho e a sofisticação dos códigos
- Porém o não tratamento de casos especiais pode levar ao WA

Relação entre ponto e reta

- Seja r uma reta com equação geral $ax + by + c = 0$ e $P = (x_p, y_p)$ um ponto qualquer

Relação entre ponto e reta

- Seja r uma reta com equação geral $ax + by + c = 0$ e $P = (x_p, y_p)$ um ponto qualquer
- $P \in r$ se, e somente se, $ax_p + by_p + c = 0$

Relação entre ponto e reta

- Seja r uma reta com equação geral $ax + by + c = 0$ e $P = (x_p, y_p)$ um ponto qualquer
- $P \in r$ se, e somente se, $ax_p + by_p + c = 0$
- Esta relação pode ser verificada diretamente a partir da equação geral da reta, ou através do determinante apresentado anteriormente, conhecidos dois pontos Q e R da reta

Relação entre ponto e reta

- Seja r uma reta com equação geral $ax + by + c = 0$ e $P = (x_p, y_p)$ um ponto qualquer
- $P \in r$ se, e somente se, $ax_p + by_p + c = 0$
- Esta relação pode ser verificada diretamente a partir da equação geral da reta, ou através do determinante apresentado anteriormente, conhecidos dois pontos Q e R da reta

```
template<typename T>
struct Line {
    // Membros e construtor

    bool contains(const Point<T>& P) const
    {
        return equals(a*P.x + b*P.y + c, 0);
    }
};
```

Segmentos de reta

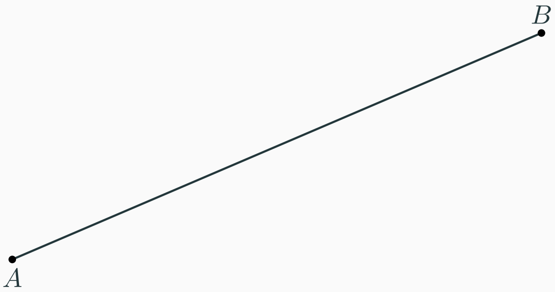
- Sejam A e B dois pontos pertencentes à reta r. O segmento de reta AB é o conjunto de pontos de r que estão entre os pontos A e B

Segmentos de reta

- Sejam A e B dois pontos pertencentes à reta r. O segmento de reta AB é o conjunto de pontos de r que estão entre os pontos A e B
- O comprimento de um segmento de reta é a distância entre os pontos A e B

Segmentos de reta

- Sejam A e B dois pontos pertencentes à reta r. O segmento de reta AB é o conjunto de pontos de r que estão entre os pontos A e B
- O comprimento de um segmento de reta é a distância entre os pontos A e B



Distância entre dois pontos

- A definição de distância depende da norma utilizada

Distância entre dois pontos

- A definição de distância depende da norma utilizada
- A distância euclidiana entre dois pontos $A = (x_a, y_a)$ e $B = (x_b, y_b)$ é dada por

$$d(A, B) = \sqrt{(x_a - y_a)^2 + (x_b - y_b)^2}$$

Distância entre dois pontos

- A definição de distância depende da norma utilizada
- A distância euclidiana entre dois pontos $A = (x_a, y_a)$ e $B = (x_b, y_b)$ é dada por

$$d(A, B) = \sqrt{(x_a - y_a)^2 + (x_b - y_b)^2}$$

- A distância do motorista de táxi é dada por

$$d(A, B) = |x_a - x_b| + |y_a - y_b|$$

Distância entre dois pontos

- A definição de distância depende da norma utilizada
- A distância euclidiana entre dois pontos $A = (x_a, y_a)$ e $B = (x_b, y_b)$ é dada por

$$d(A, B) = \sqrt{(x_a - y_a)^2 + (x_b - y_b)^2}$$

- A distância do motorista de táxi é dada por

$$d(A, B) = |x_a - x_b| + |y_a - y_b|$$

- Segundo a norma do máximo, a distância entre A e B é dada por

$$d(A, B) = \max\{|x_a - x_b|, |y_a - y_b|\}$$

Observações sobre distância entre dois pontos

- Embora a distância euclidiana seja a mais comum, a raiz quadrada que aparece na sua definição leva a resultados em ponto flutuante

Observações sobre distância entre dois pontos

- Embora a distância euclidiana seja a mais comum, a raiz quadrada que aparece na sua definição leva a resultados em ponto flutuante
- Por este motivo, em geral é implementada a função que computa o quadrado da distância, o que elimina a raiz quadrada e permite a aritmética com números inteiros

Observações sobre distância entre dois pontos

- Embora a distância euclidiana seja a mais comum, a raiz quadrada que aparece na sua definição leva a resultados em ponto flutuante
- Por este motivo, em geral é implementada a função que computa o quadrado da distância, o que elimina a raiz quadrada e permite a aritmética com números inteiros
- O quadrado da distância pode ser usado para comparar os pontos por distância, pois ela preserva esta relação

Observações sobre distância entre dois pontos

- Embora a distância euclidiana seja a mais comum, a raiz quadrada que aparece na sua definição leva a resultados em ponto flutuante
- Por este motivo, em geral é implementada a função que computa o quadrado da distância, o que elimina a raiz quadrada e permite a aritmética com números inteiros
- O quadrado da distância pode ser usado para comparar os pontos por distância, pois ela preserva esta relação
- A distância do motorista de táxi considera que os movimentos no plano só podem ser feitos na horizontal e vertical

Observações sobre distância entre dois pontos

- Embora a distância euclidiana seja a mais comum, a raiz quadrada que aparece na sua definição leva a resultados em ponto flutuante
- Por este motivo, em geral é implementada a função que computa o quadrado da distância, o que elimina a raiz quadrada e permite a aritmética com números inteiros
- O quadrado da distância pode ser usado para comparar os pontos por distância, pois ela preserva esta relação
- A distância do motorista de táxi considera que os movimentos no plano só podem ser feitos na horizontal e vertical
- Um exemplo prático da norma do máximo acontece no tabuleiro do xadrez: ela define o raio de ação do rei (todas as casas que estão a uma unidade de distância dele)

Exemplo de implementação das distâncias

```
#include <bits/stdc++.h>

template<typename T>
struct Point {
    T x = 0, y = 0;
};

template<typename T>
T absolute_value(T x)
{
    if constexpr (std::is_floating_point_v<T>)
        return fabs(x);
    else
        return llabs(static_cast<long long>(x));
}

```

Exemplo de implementação das distâncias

```
template<typename T>
double dist(const Point<T>& P, const Point<T>& Q) {
    return hypot(static_cast<double>(P.x - Q.x), static_cast<double>(P.y - Q.y));
}

template<typename T>
T dist2(const Point<T>& P, const Point<T>& Q) {
    return (P.x - Q.x)*(P.x - Q.x) + (P.y - Q.y)*(P.y - Q.y);
}

template<typename T>
T taxicab(const Point<T>& P, const Point<T>& Q) {
    return absolute_value(P.x - Q.x) + absolute_value(P.y - Q.y);
}

template<typename T>
T max_norm(const Point<T>& P, const Point<T>& Q) {
    return std::max(absolute_value(P.x - Q.x), absolute_value(P.y - Q.y));
}
```

Exemplo de implementação das distâncias

```cpp
int main()
{
    Point<int> P, Q { 2, 3 };

    std::cout << "Euclidiana: " << dist(P, Q) << '\n';
    std::cout << "Quadrado: " << dist2(P, Q) << '\n';
    std::cout << "Motorista de táxi: " << taxicab(P, Q) << '\n';
    std::cout << "Norma do máximo: " << max_norm(P, Q) << '\n';

    return 0;
}
```

Referências

1. **HALIM**, Felix; **HALIM**, Steve. *Competitive Programming 3*, 2010.
2. **LAAKSONEN**, Antti. *Competitive Programmer's Handbook*, 2018.
3. **De BERG**, Mark; **CHEONG**, Otfried. *Computational Geometry: Algorithms and Applications*, 2008.
4. David E. Joyce. *Euclid's Elements*. Acesso em 15/02/2019[1]
5. Wikipédia. *Geometria Euclidiana*. Acesso em 15/02/2019[2].

[1] https://mathcs.clarku.edu/ djoyce/elements/bookI/defI2.html
[2] https://pt.wikipedia.org/wiki/Geometria_euclidiana