Matemática

Exponenciacação

Prof. Edson Alves
Faculdade UnB Gama

Exponenciação nos naturais

Sejam a, n dois números naturais. A exponenciação a^n (lê-se "a elevado a n") é definida pela relação de recorrência, onde

- $a^1 = a$, e
- $a^n = a \times a^{n-1}$,

onde a é denominada **base** e n é denominado **expoente**.

Em termos mais simples, a exponenciação nos naturais é uma multiplicação repetida: basta multiplicar a por ele mesmo n vezes.

Propriedades da exponenciação

- Como a multiplicação nos naturais é associativa, vale que

$$a^{n+m} = a^n \times a^m$$

- Também são decorrentes da multiplicação nos naturais as propriedades

$$(a^n)^m = a^{nm}$$

e

$$(ab)^n = a^n \times b^n$$

Expoente zero

- Na exponenciação nos naturais é definido que, para qualquer a natural, $a^0 = 1$
- De fato, esta definição é consistem com a exponenciação nos inteiros e nos demais conjuntos numéricos, como se verá a seguir
- 0^0 é uma indeterminação (para qualquer natural $n, 0^n = 0$)
- A exponenciação nos naturais é ensinada no ensino fundamental e médio, e serve para observar e aprender as propriedades fundamentais da exponenciação
- Porém é útil, na prática, conhecer as definições de exponenciação para outros conjuntos numéricos

Expoentes inteiros

Sejam a, n dois números inteiros, com $a > 0$. Vale que

- $a^1 = a$, e
- $a^{n-1} = a^n / a$

Partindo do caso base, segue que

- $a^0 = a^1 / a = 1$
- $a^{-1} = a^0 / a = 1/a$
- $a^{-n} = (a^{-1})^n = 1/a^n$

Expoentes inteiros

- As propriedades da exponenciação nos naturais permanecem todas verdadeiras para a exponenciação nos inteiros
- A reescrita da relação de recorrência permite expoentes negativos
- Esta recorrência justifica a notação a^{-1} para o inverso multiplicativo de a, uma vez que

$$a^{-1} \times a = \left(\frac{1}{a}\right) \times a = 1$$

Raizes n-ésimas

- Sejam a, n dois números inteiros, com $a > 0$. Qual seria o significado de $a^{1/n}$?
- Segundo as propriedades já descritas, seria um número x tal que $x^n = a$
- Cada solução desta equação recebe o nome de **raiz n-ésima de a**

Exponenciação nos racionais

Sejam n, m números inteiros com m diferente de zero e a um número racional positivo. Então

$$a^{n/m} = (a^{1/m})^n$$

Bases negativas

- A definição de exponenciação nos racionais pode ser estendida para bases negativas, desde que o **radical** (o fator $1/m$ do expoente) seja ímpar
- Isto porque não há soluções para $x^n = 1$ quando n e par
- Por exemplo, $x^3 = -1$ tem solução nos racionais, mas $x^2 = -1$ não
- Bases negativas, em geral, podem violar propriedades da exponenciação
- Por exemplo, calcule $((-2)^{3/4})^{4/3}$ usando e não usando as propriedades e veja o resultado!
- Tais exemplos justificam a restrição comum de bases positivas

Referências

Wikipédia. Exponentiation. Acesso em 22 de agosto de 2017.