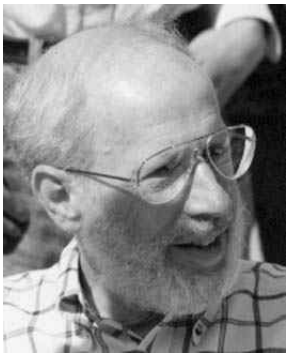
Grafos

Algoritmo de Kruskal

Prof. Edson Alves

Faculdade UnB Gama

Proponente



Joseph Bernard Kruskal, Jr.

(1962)

Características do algoritmo de Kruskal

Características do algoritmo de Kruskal

- O algoritmo de Kruskal encontra uma MST usando uma abordagem gulosa

Características do algoritmo de Kruskal

- O algoritmo de Kruskal encontra uma MST usando uma abordagem gulosa
- As arestas são ordenadas, ascendentemente, por peso

Características do algoritmo de Kruskal

- O algoritmo de Kruskal encontra uma MST usando uma abordagem gulosa
- As arestas são ordenadas, ascendentemente, por peso
- Inicialmente os vértices formam uma floresta de vértices isolados

Características do algoritmo de Kruskal

- O algoritmo de Kruskal encontra uma MST usando uma abordagem gulosa
- As arestas são ordenadas, ascendentemente, por peso
- Inicialmente os vértices formam uma floresta de vértices isolados
- Na ordem estipulada, cada aresta que una dois componentes conectados fará parte da MST e unirá estes componentes distintos

Características do algoritmo de Kruskal

- ⋆ O algoritmo de Kruskal encontra uma MST usando uma abordagem gulosa
- ⋆ As arestas são ordenadas, ascendentemente, por peso
- ⋆ Inicialmente os vértices formam uma floresta de vértices isolados
- ⋆ Na ordem estipulada, cada aresta que una dois componentes conectados fará parte da MST e unirá estes componentes distintos
- ⋆ **Complexidade:** $O(E \log V)$

Pseudocódigo

Pseudocódigo

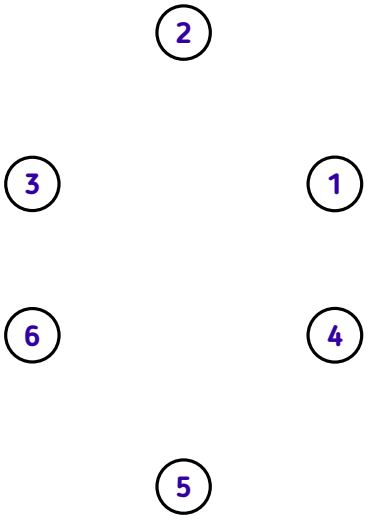
Entrada: um grafo ponderado $G(V, E)$
Saída: uma MST de G

1. Faça $M = \emptyset$ e seja $F(V, \emptyset)$ uma floresta de vértices isolados

2. Ordene E ascendentemente, por peso

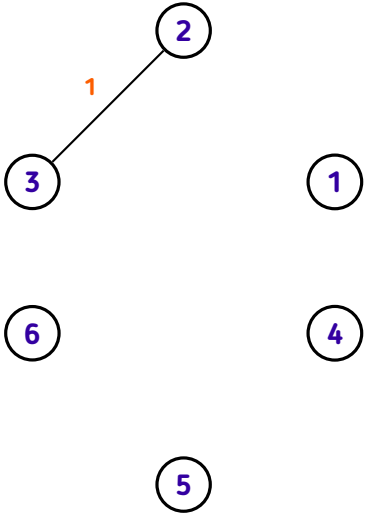
3. Para cada $(u, v, w) \in E$, se u e v estão em componentes distintos de F:
   (a) Una estes componentes em F
   (b) Inclua (u, v, w) no conjunto M

4. Retorne M



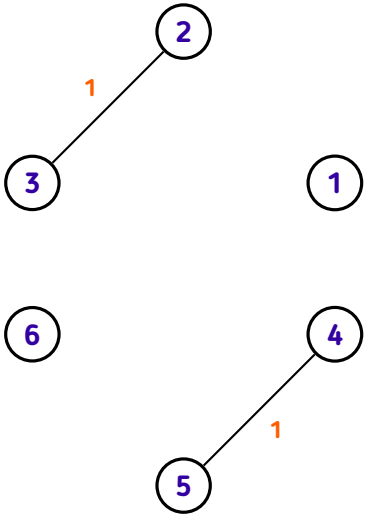
E

1 2 3
1 4 5
2 4 1
2 1 5
3 3 4
4 2 1
5 3 1
7 3 6
8 6 5



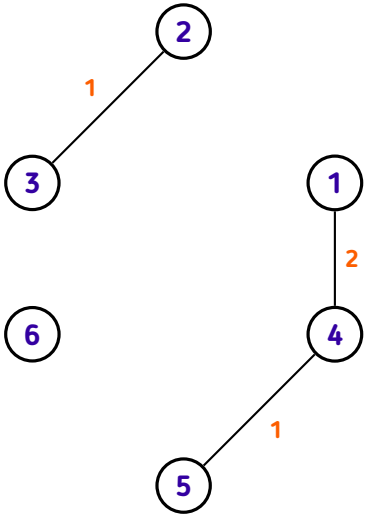
E

1 2 3 ✔
1 4 5
2 4 1
2 1 5
3 3 4
4 2 1
5 3 1
7 3 6
8 6 5



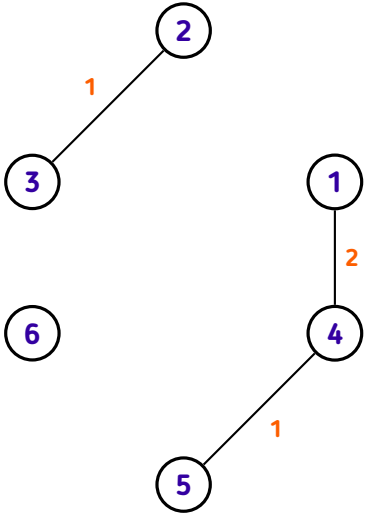
E

1 2 3 ✔
1 4 5 ✔
2 4 1
2 1 5
3 3 4
4 2 1
5 3 1
7 3 6
8 6 5



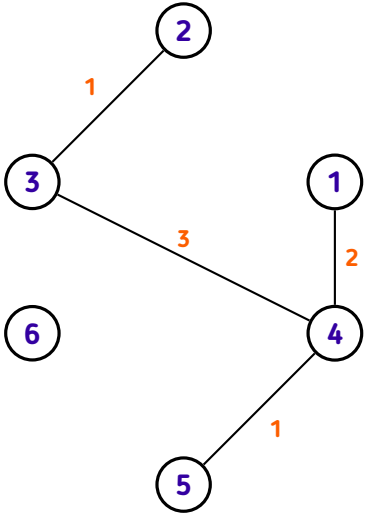
E

1 2 3 ✔
1 4 5 ✔
2 4 1 ✔
2 1 5
3 3 4
4 2 1
5 3 1
7 3 6
8 6 5



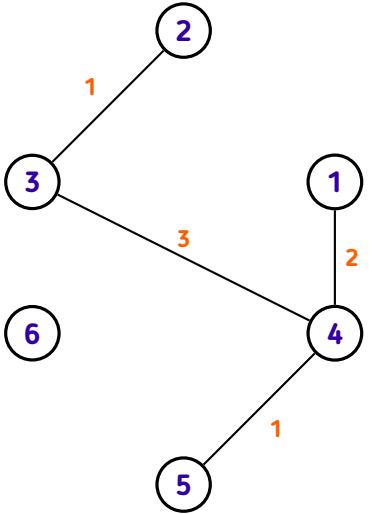
E

1 2 3 ✔
1 4 5 ✔
2 4 1 ✔
2 1 5 ✖
3 3 4
4 2 1
5 3 1
7 3 6
8 6 5



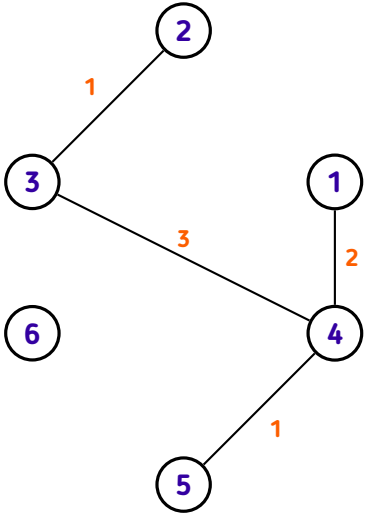
E

1 2 3 ✔
1 4 5 ✔
2 4 1 ✔
2 1 5 ✘
3 3 4 ✔
4 2 1
5 3 1
7 3 6
8 6 5



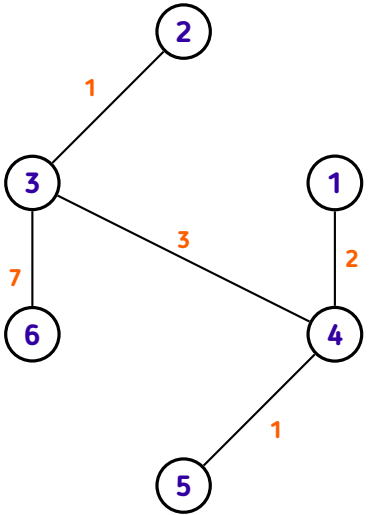
E

1 2 3 ✔
1 4 5 ✔
2 4 1 ✔
2 1 5 ✘
3 3 4 ✔
4 2 1 ✘
5 3 1
7 3 6
8 6 5



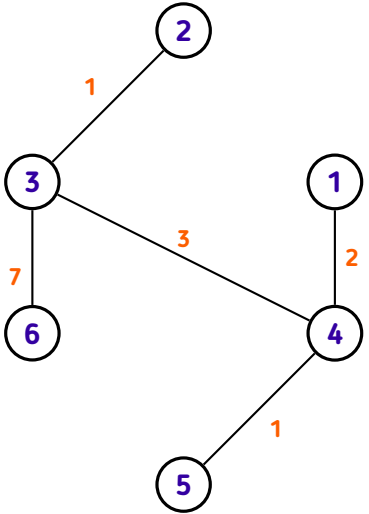
E

1 2 3 ✔
1 4 5 ✔
2 4 1 ✔
2 1 5 ✘
3 3 4 ✔
4 2 1 ✘
5 3 1 ✘
7 3 6
8 6 5



E

1 2 3 ✔
1 4 5 ✔
2 4 1 ✔
2 1 5 ✘
3 3 4 ✔
4 2 1 ✘
5 3 1 ✘
7 3 6 ✔
8 6 5



E

1 2 3 ✔
1 4 5 ✔
2 4 1 ✔
2 1 5 ✘
3 3 4 ✔
4 2 1 ✘
5 3 1 ✘
7 3 6 ✔
8 6 5 ✘

Identificação e união dos componentes conectados

Identificação e união dos componentes conectados

- **A complexidade do algoritmo de Kruskal depende da identificação e união eficiente dos componentes conectados**

Identificação e união dos componentes conectados

- **A complexidade do algoritmo de Kruskal depende da identificação e união eficiente dos componentes conectados**

- **A *union-find disjoint sets* (UFDS) (também conhecida como *disjoint set union* – DSU) é uma estrutura de dados que atende a esta demanda**

Identificação e união dos componentes conectados

⋆ **A complexidade do algoritmo de Kruskal depende da identificação e união eficiente dos componentes conectados**

⋆ **A *union-find disjoint sets* (UFDS) (também conhecida como *disjoint set union* – DSU) é uma estrutura de dados que atende a esta demanda**

⋆ **A operação** `same_set(`u`, `v`)` **retorna verdadeiro se ambos** u **e** v **pertencem ao mesmo componente conectado, em** $O(\log V)$

Identificação e união dos componentes conectados

⋆ **A complexidade do algoritmo de Kruskal depende da identificação e união eficiente dos componentes conectados**

⋆ **A *union-find disjoint sets* (UFDS) (também conhecida como *disjoint set union* – DSU) é uma estrutura de dados que atende a esta demanda**

⋆ **A operação** `same_set(`u`, `v`)` **retorna verdadeiro se ambos** u **e** v **pertencem ao mesmo componente conectado, em** $O(\log V)$

⋆ **A operação** `union_set(`u`, `v`)` **une os componentes distintos onde estão localizados** u **e** v**, também em** $O(\log V)$

```cpp
int kruskal(int N, vector<edge>& es)
{
    sort(es.begin(), es.end());

    int cost = 0;
    UnionFind ufds(N);

    for (auto [w, u, v] : es)
    {
        if (not ufds.same_set(u, v))
        {
            cost += w;
            ufds.union_set(u, v);
        }
    }

    return cost;
}
```

Aplicação: Floresta mínima geradora

Aplicação: Floresta mínima geradora

- ⋆ **Uma floresta mínima geradora F_k pode ser identificada por meio de uma modificação simples no algoritmo de Kruskal**

Aplicação: Floresta mínima geradora

- ⋆ Uma floresta mínima geradora F_k pode ser identificada por meio de uma modificação simples no algoritmo de Kruskal

- ⋆ Inicialmente, a floresta de vértices isolados contém V componentes

Aplicação: Floresta mínima geradora

- Uma floresta mínima geradora F_k pode ser identificada por meio de uma modificação simples no algoritmo de Kruskal
- Inicialmente, a floresta de vértices isolados contém V componentes
- A cada união de componentes, o total é reduzido em uma unidade

Aplicação: Floresta mínima geradora

⋆ Uma floresta mínima geradora F_k pode ser identificada por meio de uma modificação simples no algoritmo de Kruskal

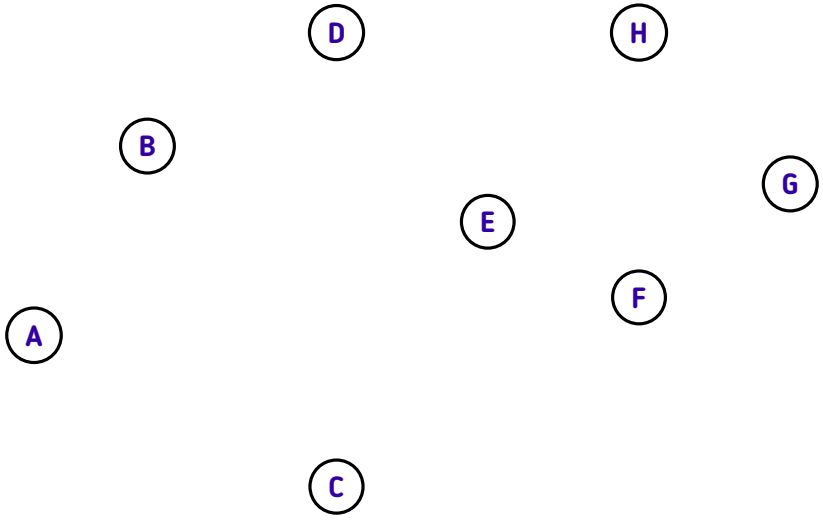
⋆ Inicialmente, a floresta de vértices isolados contém V componentes

⋆ A cada união de componentes, o total é reduzido em uma unidade

⋆ Quando a contagem de componentes for igual a k, o algoritmo deve ser encerrado

$k = 4$

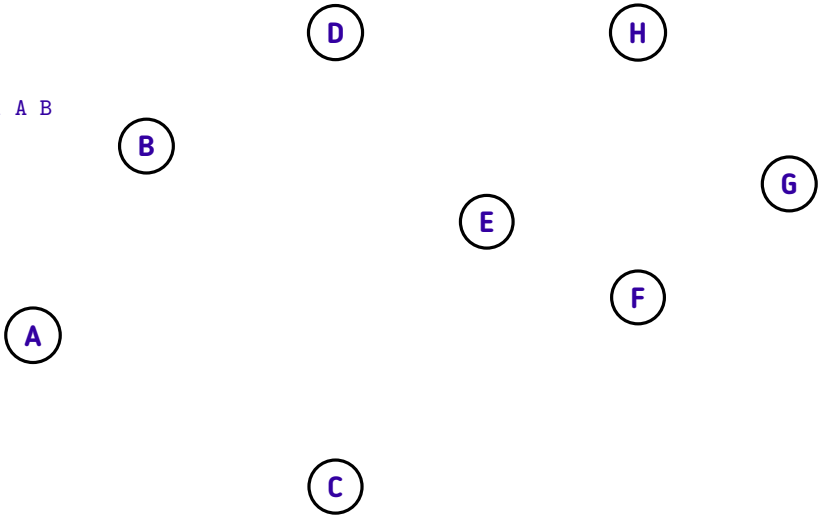
componentes: 8



$k = 4$

componentes: 8

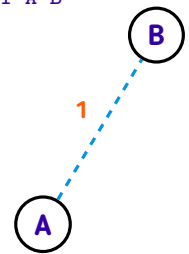
próxima aresta: `1 A B`

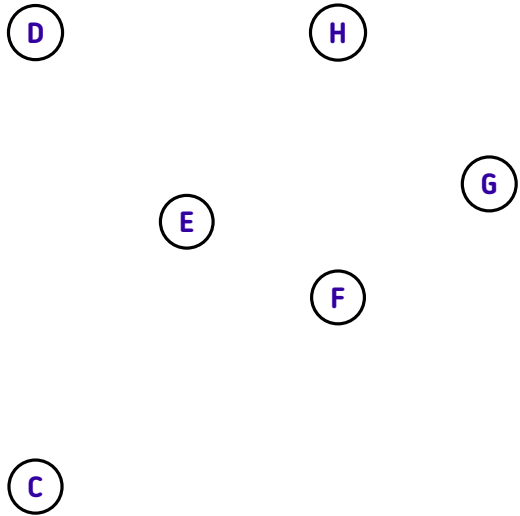


$k = 4$

componentes: 7

próxima aresta: `1 A B`

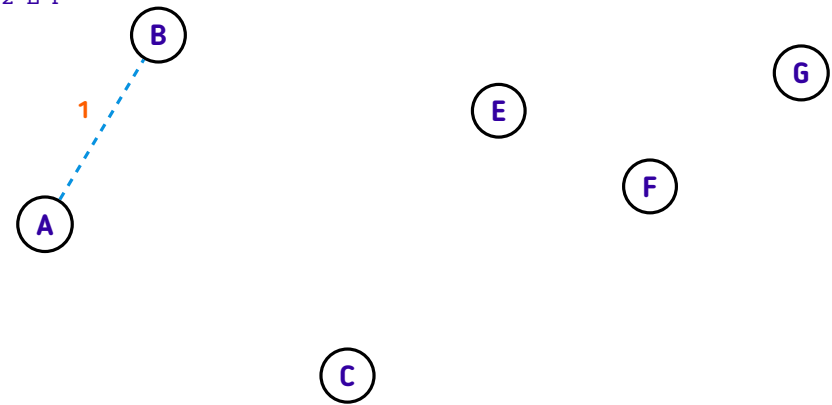




$k = 4$

componentes: 7

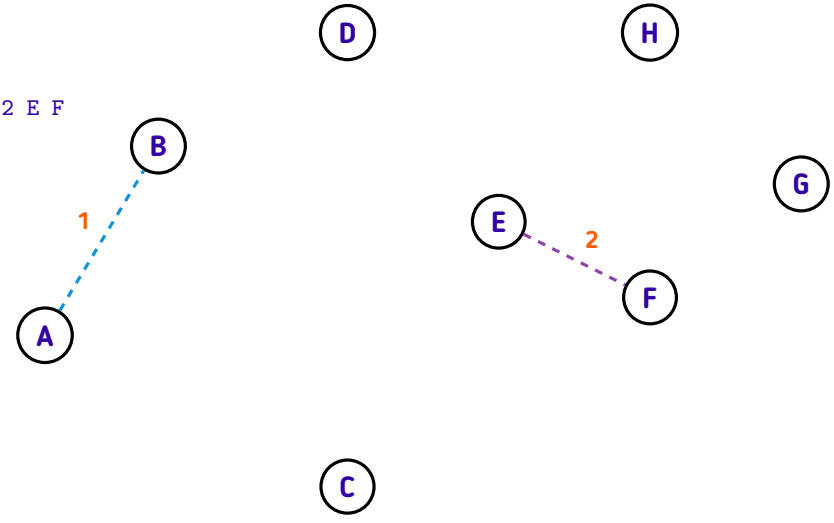
próxima aresta: `2 E F`



$k = 4$

componentes: 6

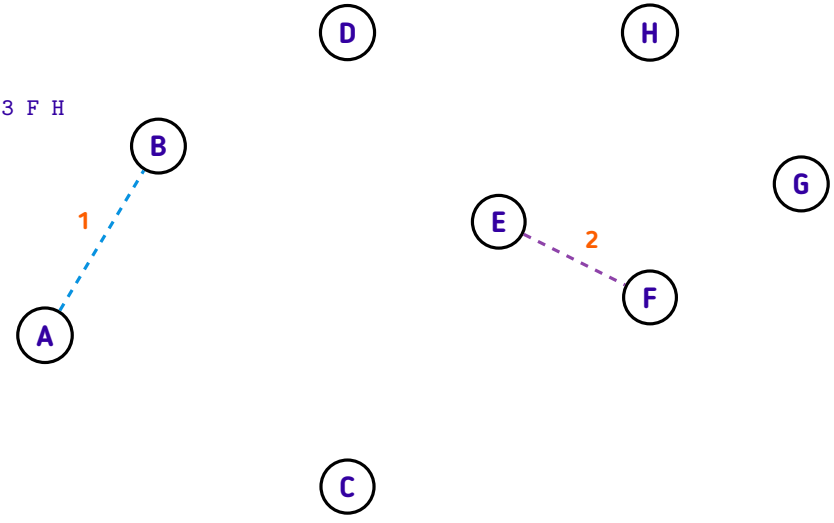
próxima aresta: `2 E F`



$k = 4$

componentes: 6

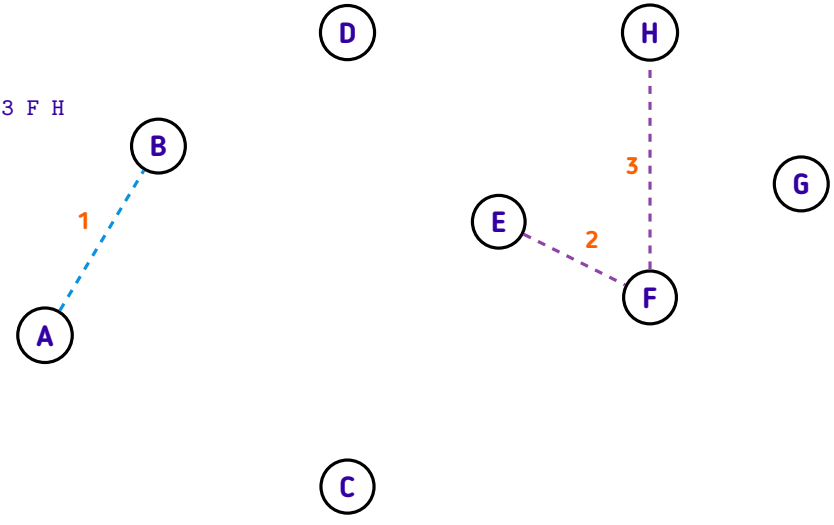
próxima aresta: `3 F H`



$k = 4$

componentes: 5

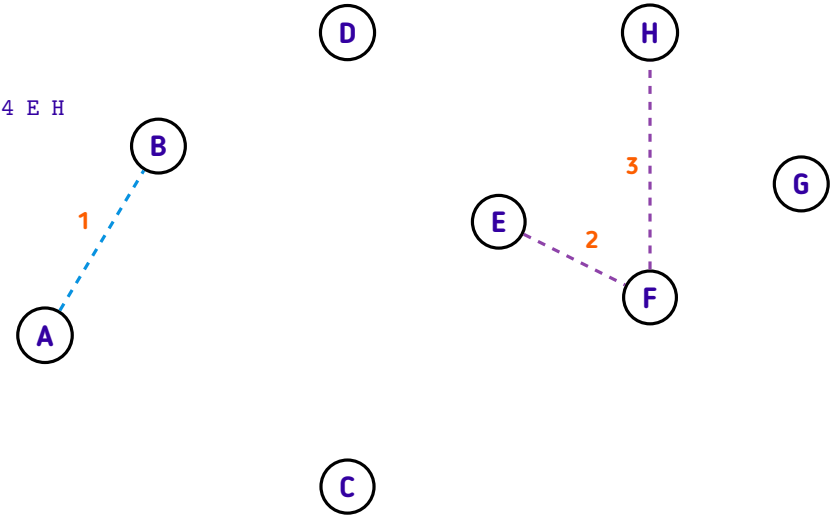
próxima aresta: `3 F H`



$k = 4$

componentes: 5

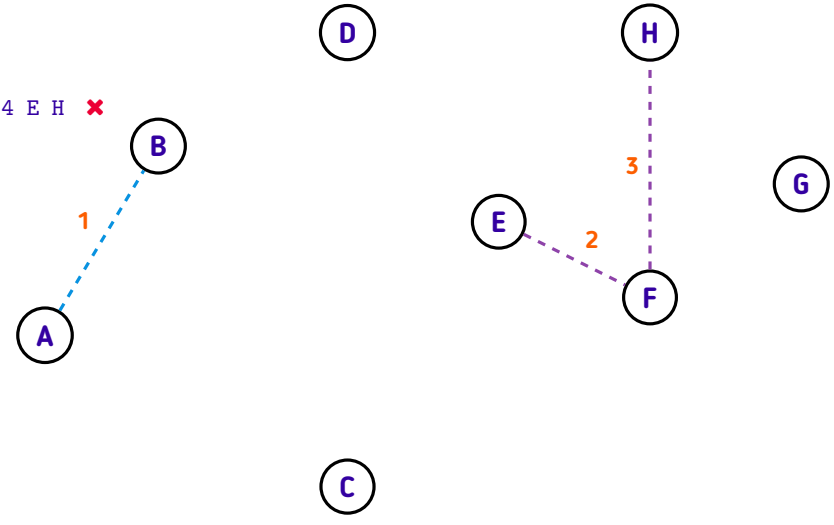
próxima aresta: `4 E H`



$k = 4$

componentes: 5

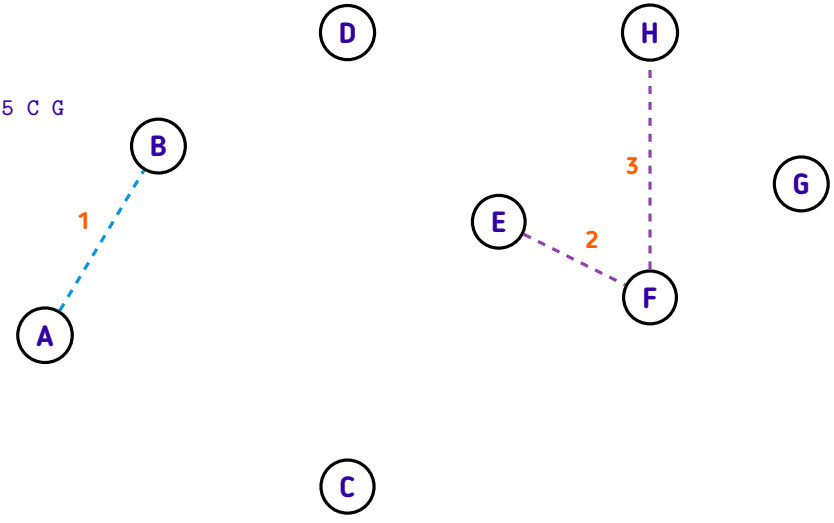
próxima aresta: `4 E H` ✖



$k = 4$

componentes: 5

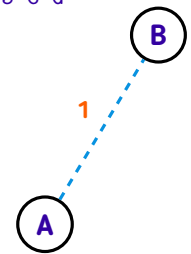
próxima aresta: `5 C G`

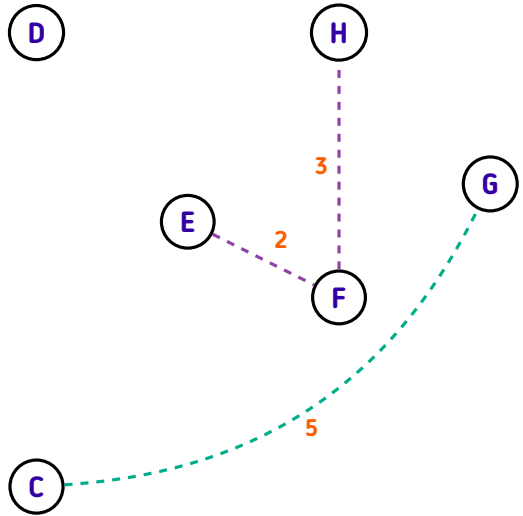


$k = 4$

componentes: 4

próxima aresta: `5 C G`





```cpp
int msf(int k, int N, vector<edge>& es)
{
    sort(es.begin(), es.end());

    int cost = 0, cc = N;
    UnionFind ufds(N);

    for (auto [w, u, v] : es)
    {
        if (not ufds.same_set(u, v)) {
            cost += w;
            ufds.union_set(u, v);

            if (--cc == k)
                return cost;
        }
    }

    return cost;
}
```

Aplicação: Segunda melhor MST

Aplicação: Segunda melhor MST

- Algumas aplicações demandam a identificação da segunda melhor MST

Aplicação: Segunda melhor MST

- Algumas aplicações demandam a identificação da segunda melhor MST

- Esta segunda melhor MST pode ser identificada por meio de uma nova modificação no algoritmo de Kruskal

Aplicação: Segunda melhor MST

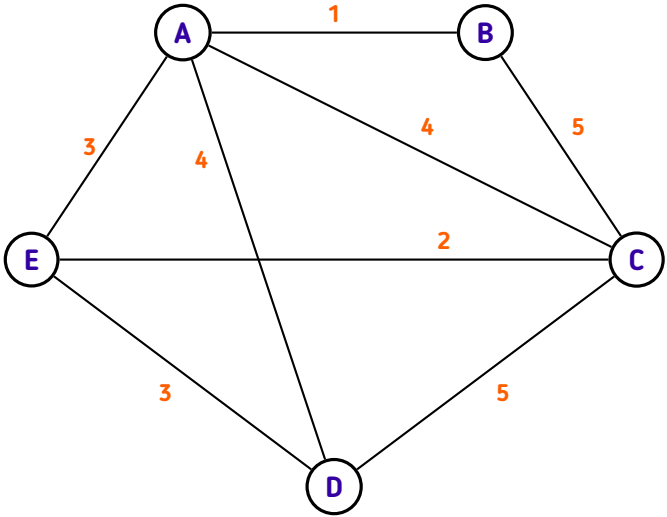
- Algumas aplicações demandam a identificação da segunda melhor MST
- Esta segunda melhor MST pode ser identificada por meio de uma nova modificação no algoritmo de Kruskal
- Primeiramente, deve ser identificada a MST

Aplicação: Segunda melhor MST

- Algumas aplicações demandam a identificação da segunda melhor MST
- Esta segunda melhor MST pode ser identificada por meio de uma nova modificação no algoritmo de Kruskal
- Primeiramente, deve ser identificada a MST
- Em seguida, cada uma das arestas da MST deve ser excluída e o algoritmo deve identificar a MST formada pelas arestas restantes

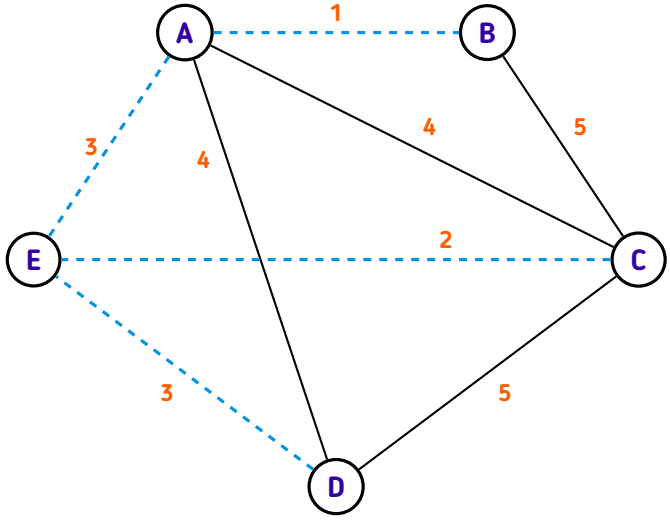
Aplicação: Segunda melhor MST

- ⋆ **Algumas aplicações demandam a identificação da segunda melhor MST**
- ⋆ **Esta segunda melhor MST pode ser identificada por meio de uma nova modificação no algoritmo de Kruskal**
- ⋆ **Primeiramente, deve ser identificada a MST**
- ⋆ **Em seguida, cada uma das arestas da MST deve ser excluída e o algoritmo deve identificar a MST formada pelas arestas restantes**
- ⋆ **Complexidade:** $O(VE)$


A
B
C
D
E
1
3
4
4
5
2
3
5

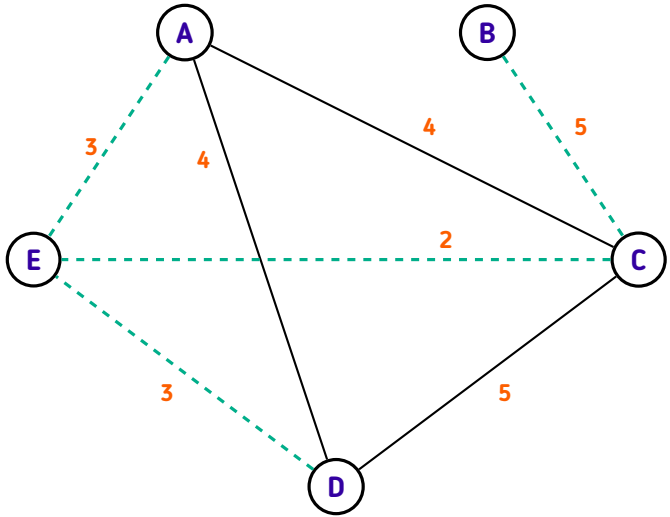
MST

$c(\textbf{MST}) = 9$



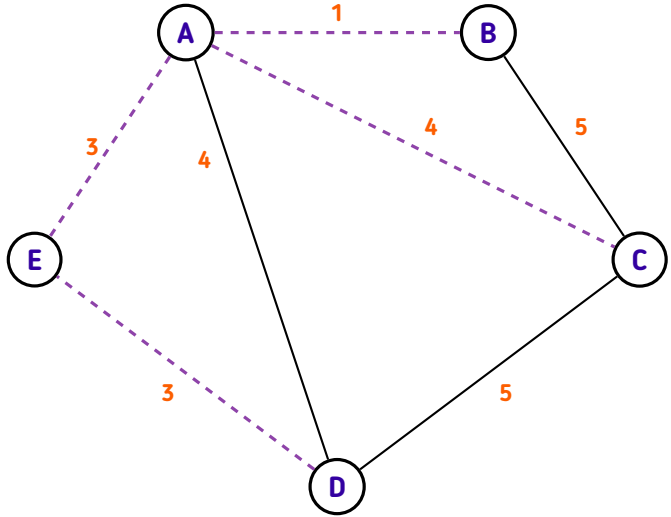
Árvore geradora T_1

$c(T_1) = 13$



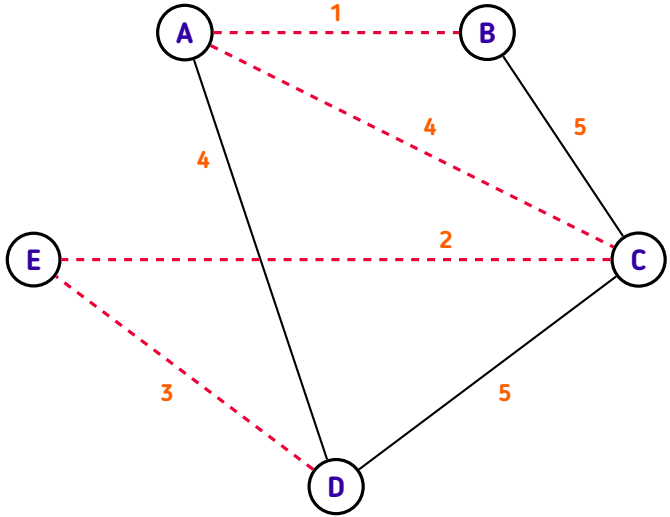
Árvore geradora T_2

$c(T_2) = 11$



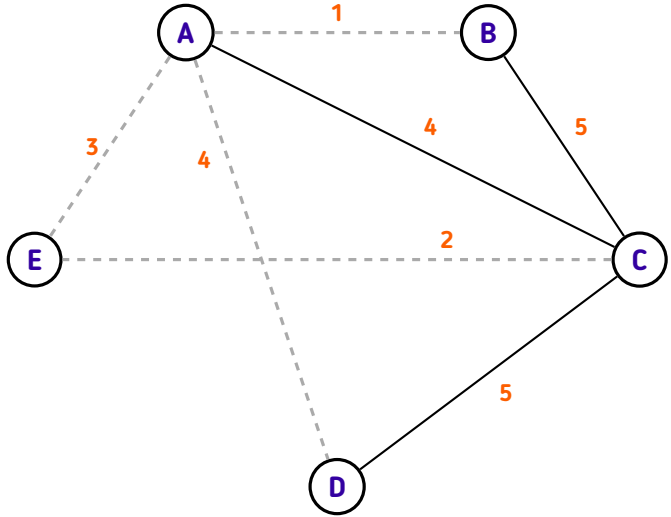
Árvore geradora T_3

$c(T_3) = 10$



Árvore geradora T_4

$c(T_4) = 10$



```
};

pair<int, unordered_set<int>>
kruskal(int N, vector<edge>& es, int blocked = -1)
{
    unordered_set<int> mst;
    UnionFind ufds(N);
    int cost = 0;

    for (int i = 0; i < (int) es.size(); ++i)
    {
        auto [w, u, v] = es[i];

        if (i != blocked and not ufds.same_set(u, v)) {
            cost += w;
            ufds.union_set(u, v);
            mst.insert(i);
        }
    }
```

```
}

int second_best(int N, vector<edge>& es)
{
    sort(es.begin(), es.end());

    auto [_, mst] = kruskal(N, es);
    int best = oo;

    for (auto blocked : mst)
    {
        auto [cost, __] = kruskal(N, es, blocked);
        best = min(best, cost);
    }
```

Problemas sugeridos

1. **Codechef CHEFELEC – Chefland and Electricity**
2. **OJ 10369 – Artic Network**
3. **OJ 10600 – ACM Contest and Blackout**
4. **SPOJ EC_MODE – Modems**

Referências

1. **CP-Algorithm.** ***Minimum spanning tree – Kruskal's algorithm*****, acesso em 24/08/2021.**

2. **HALIM**, **Felix**; **HALIM**, **Steve**. ***Competitive Programming 3*****, 2010.**

3. **LAAKSONEN**, **Antti**. ***Competitive Programmer's Handbook*****, 2018.**

4. **Wikipédia**. ***Joseph Kruskal*****, acesso em 24/08/2021.**

5. **Wikipédia**. ***Kruskal's algorithm*****, acesso em 24/08/2021.**