

# Pilhas e Filas

## Pilhas

---

Prof. Edson Alves - UnB/FGA

2020

1. Definição
2. Implementação
3. Aplicações de Pilhas

# Definição

---

# Definição de pilha

- Uma pilha é um tipo de dados abstrato cuja interface define que o último elemento inserido na pilha é o primeiro a ser removido
- Esta estratégia de inserção e remoção é denominada LIFO – *Last In, First Out*
- De acordo com sua interface, uma pilha não permite acesso aleatório aos seus elementos (apenas o elemento do topo da pilha pode ser acessado)
- As operações de inserção e remoção devem ter complexidade  $O(1)$

## Interface de uma pilha

Método	Complexidade	Descrição
clear(P)	$O(N)$	Esvazia a pilha P, removendo todos os seus elementos
empty(P)	$O(1)$	Verifica se a pilha P está vazia ou não
push(P, x)	$O(1)$	Insere o elemento x no topo da pilha P
pop(P)	$O(1)$	Remove o elemento que está no topo da pilha P
top(P)	$O(1)$	Retorna o elemento que está no topo da pilha P
size(P)	$O(1)$	Retorna o número de elementos armazenados na pilha P

# Exemplo dos métodos da interface de uma pilha

**Método**

**Retorno**

empty(P)

**Pilha**

---

## Exemplo dos métodos da interface de uma pilha

**Método**

**Retorno**

empty(P)

True

**Pilha**

---

## Exemplo dos métodos da interface de uma pilha

**Método**

**Retorno**

push(P, 12)

**Pilha**

---



# Exemplo dos métodos da interface de uma pilha

**Método**

**Retorno**

push(P, 12)

**Pilha**



# Exemplo dos métodos da interface de uma pilha

**Método**

**Retorno**

push(P, -3)

**Pilha**



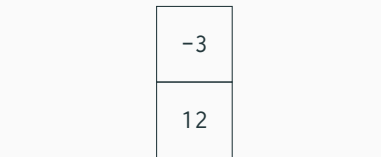
# Exemplo dos métodos da interface de uma pilha

**Método**

**Retorno**

push(P, -3)

**Pilha**



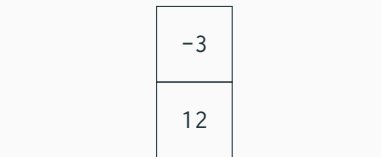
# Exemplo dos métodos da interface de uma pilha

**Método**

**Retorno**

pop(P)

**Pilha**



# Exemplo dos métodos da interface de uma pilha

**Método**

**Retorno**

pop(P)

**Pilha**



# Exemplo dos métodos da interface de uma pilha

**Método**

**Retorno**

push(P, 5)

**Pilha**



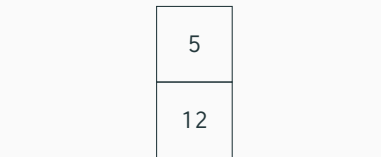
# Exemplo dos métodos da interface de uma pilha

**Método**

**Retorno**

push(P, 5)

**Pilha**



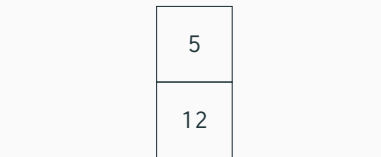
# Exemplo dos métodos da interface de uma pilha

**Método**

**Retorno**

push(P, 47)

**Pilha**





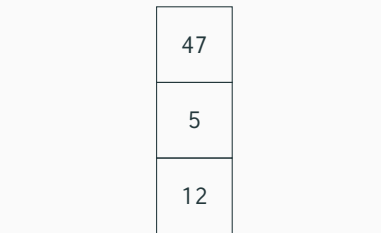
# Exemplo dos métodos da interface de uma pilha

**Método**

**Retorno**

push(P, 47)

**Pilha**



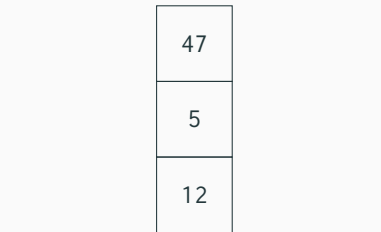
# Exemplo dos métodos da interface de uma pilha

**Método**

**Retorno**

top(P)

**Pilha**



# Exemplo dos métodos da interface de uma pilha

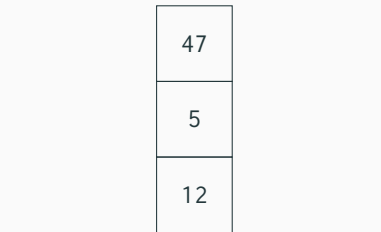
**Método**

**Retorno**

top(P)

47

**Pilha**



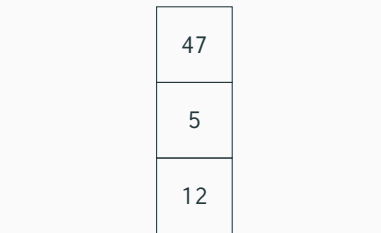
# Exemplo dos métodos da interface de uma pilha

**Método**

**Retorno**

`size(P)`

**Pilha**



## Exemplo dos métodos da interface de uma pilha

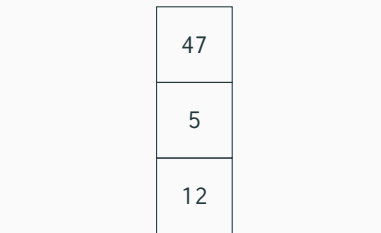
**Método**

**Retorno**

size(P)

3

**Pilha**



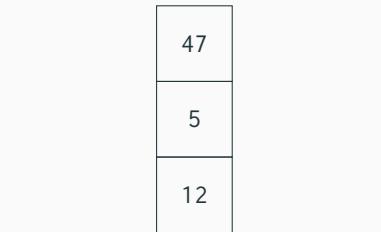
# Exemplo dos métodos da interface de uma pilha

**Método**

**Retorno**

clear(P)

**Pilha**



## Exemplo dos métodos da interface de uma pilha

**Método**

**Retorno**

clear(P)

**Pilha**

---

# Implementação

---



# Implementação de uma pilha

- Como uma pilha é um tipo de dados abstrato, ela não impõe nenhuma restrição quanto à sua implementação
- É possível implementar uma pilha por composição, usando listas encadeadas ou vetores
- A estratégia LIFO pode ser implementada fazendo-se a inserção e a remoção em uma mesma ponta da lista, de modo que uma lista simplesmente encadeada é suficiente
- Basta utilizar as operações `push_front()` e `pop_front()`, respectivamente, uma vez que ambas tem complexidade  $O(1)$
- Utilizar vetores reduz a quantidade de memória necessária, porém as operações passam a ter complexidade  $O(1)$  amortizada, devido às ocasionais realocações do vetor para ampliar sua capacidade máxima
- Se há uma estimativa do número máximo de elementos na pilha, estas realocações podem ser evitadas (ou minimizadas), resultando em uma implementação bastante eficiente

# Implementação de uma pilha em C++

```
4 #include <array>
5
6 template<typename T, size_t N>
7 class Stack {
8 public:
9     Stack() : pos(0) {}
10
11     void clear() { pos = 0; }
12     bool empty() const { return pos == 0; }
13     size_t size() const { return pos; }
14
15     void push(const T& x) { elems[pos++] = x; }
16     void pop() { pos--; }
17     const T& top() const { return elems[pos - 1]; }
18
19 private:
20     std::array<T, N> elems;
21     size_t pos;
22 };
```

# Implementação de uma pilha em C++

```
1 #include <iostream>
2 #include "stack.h"
3
4 using namespace std;
5
6 int main()
7 {
8     Stack<float, 10> s;
9
10    cout << "Empty? " << s.empty() << '\n';
11
12    s.push(1.8);
13    s.push(-0.7);
14    s.push(2.5);
15
16    cout << "Top = " << s.top() << '\n';
17
18    s.pop();
19
20    cout << "Size = " << s.size() << '\n';
21    cout << "Top = " << s.top() << '\n';
```

# Implementação de uma pilha em C++

```
22
23     cout << "Empty? " << s.empty() << '\n';
24
25     s.clear();
26     cout << "Empty? " << s.empty() << '\n';
27
28     // Segmentation Fault: a pilha comporta, no máximo, 10 elementos
29     for (int i = 0; i < 20; ++i)
30         s.push(i*0.5);
31
32     return 0;
33 }
```

- A biblioteca padrão de templates (STL) do C++ provê o contêiner `stack`, que implementa uma pilha
- Tanto o tipo de dado a ser armazenado quando o contêiner que será usado na composição são parametrizáveis
- Por padrão, o contêiner utilizado é um deque (*double-ended queue*), mas os contêineres `vector` e `list` são igualmente válidos
- A interface é idêntica à apresentada anteriormente, com a adição apenas do método `swap()`, que troca os elementos de duas pilhas em  $O(1)$ , e não possui o método `clear()`

# Exemplo de uso da classe stack da STL

```
1 #include <iostream>
2 #include <stack>
3 #include <vector>
4
5 using namespace std;
6
7 int main()
8 {
9     stack<int, vector<int>>> s, t;
10
11     cout << "Empty? " << s.empty() << '\n';
12
13     for (int i = 1; i <= 10; ++i)
14         s.push(2*i);
15
16     s.pop();
17
```

## Exemplo de uso da classe stack da STL

```
18  cout << "Top = " << s.top() << '\n';
19  cout << "Size = " << s.size() << '\n';
20
21  s.swap(t);
22
23  cout << "Size = " << s.size() << '\n';
24  cout << "T size = " << t.size() << '\n';
25  cout << "T empty? " << t.empty() << '\n';
26
27  return 0;
28 }
```

# **Aplicações de Pilhas**

---



# Identificação de delimitadores

- Delimitadores são caracteres de marcação que delimitam um conjunto de informações, e devem ter um símbolo (ou conjunto de símbolos) que determine o início e o fim do conjunto
- Em C++, os caracteres `()`, `[]`, `{}`, `/* */` são delimitadores
- As pilhas podem ser utilizadas para verificar se, em uma determinada expressão, os delimitadores foram abertos e fechados corretamente
- Por exemplo, as expressões `(( ))`, `[ ( ) ]`, `( [ ] )` são válidas
- Já as expressões `[ )`, `) (`, `( ) ]`, `[ [ ] ]` são inválidas
- O algoritmo é simples: cada símbolo que abre um conjunto é colocado no topo da pilha
- A cada símbolo que fecha o topo da pilha é observado: se contiver o símbolo que abre correspondente, ele é removido e o algoritmo continua; caso contrário, a expressão é inválida
- Ao final do algoritmo a expressão será válida se a pilha estiver vazia

# Exemplo de identificação de delimitadores

```
1 #include <iostream>
2 #include <stack>
3 #include <map>
4
5 using namespace std;
6
7 bool is_valid(const string& expression)
8 {
9     static map<char, char> open { {'}', '('}, {'}', '['}, {'}', '{'}, {'}', '}', {'}', '}', };
10    stack<char> s;
11
12    for (const auto& c : expression)
13    {
14        switch (c) {
15            case '(':
16            case '[':
17            case '{':
18                s.push(c);
19                break;
20
```

## Exemplo de identificação de delimitadores

```
21     case ')':
22     case ']':
23     case '}':
24         if (s.empty() || s.top() != open[c])
25             return false;
26
27         s.pop();
28     }
29 }
30
31 return s.empty();
32 }
33
34 int main()
35 {
36     string expression;
37     getline(cin, expression);
38     cout << (is_valid(expression) ? "Ok" : "Invalid") << '\n';
39
40     return 0;
41 }
```

# Soma de grandes números

- As pilhas também podem ser utilizadas para somar números com um grande número de dígitos
- Os tipos primitivos integrais do C/C++ tem restrições de tamanho (em *bytes*) e podem levar a erros de *overflow* caso o resultado seja demasiadamente grande
- Com pilhas é possível somar números de qualquer magnitude
- A ideia é armazenar os números como pilhas de dígitos, de modo que as unidades fiquem nos topos das pilhas
- Daí é só colocar os resultados das somas dos topos em uma terceira pilha, tomando cuidado com o vai um (*carry*), quando for o caso

## Exemplo de adição de grandes números

```
1 #include <bits/stdc++.h>
2
3 using namespace std;
4
5 string add(const string& a, const string& b)
6 {
7     stack<int> x, y, z;
8
9     for (const auto& c : a)
10         x.push(c - '0');
11
12     for (const auto& c : b)
13         y.push(c - '0');
14
15     auto N = max(a.size(), b.size()), carry = 0ul;
16
17     while (N--)
18     {
19         auto c = x.empty() ? 0 : x.top();
20         auto d = y.empty() ? 0 : y.top();
21         auto res = c + d + carry;
```

## Exemplo de adição de grandes números

```
23     z.push(res % 10);
24     carry = res / 10;
25
26     if (not x.empty()) x.pop();
27     if (not y.empty()) y.pop();
28 }
29
30 if (carry)
31     z.push(carry);
32
33 ostreamstream oss;
34
35 while (!z.empty())
36 {
37     oss << z.top();
38     z.pop();
39 }
40
41 return oss.str();
42 }
43
```

## Exemplo de adição de grandes números

```
44 int main()
45 {
46     string a, b;
47
48     cin >> a >> b;
49     cout << a << " + " << b << " = " << add(a, b) << '\n';
50
51     return 0;
52 }
```

1. **DROZDEK**, Adam. *Algoritmos e Estruturas de Dados em C++*, 2002.
2. **KERNIGHAN**, Bryan; **RITCHIE**, Dennis. *The C Programming Language*, 1978.
3. **STROUSTROUP**, Bjarne. *The C++ Programming Language*, 2013.
4. C++ Reference<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup><https://en.cppreference.com/w/>