

# Geometria Computacional

Círculos – Algoritmos: problemas resolvidos

---

Prof. Edson Alves

2018

Faculdade UnB Gama

1. Codeforces Beta Round #2 – Problem C: Commentator Problem

# **Codeforces Beta Round #2 – Problem C: Commentator Problem**

---

# Problema

The Olympic Games in Bercouver are in full swing now. Here everyone has their own objectives: sportsmen compete for medals, and sport commentators compete for more convenient positions to give a running commentary. Today the main sport events take place at three round stadiums, and the commentator's objective is to choose the best point of observation, that is to say the point from where all the three stadiums can be observed. As all the sport competitions are of the same importance, the stadiums should be observed at the same angle. If the number of points meeting the conditions is more than one, the point with the maximum angle of observation is preferred.

Would you, please, help the famous Berland commentator G. Berniev to find the best point of observation. It should be noted, that the stadiums do not hide each other, the commentator can easily see one stadium through the other.

## Input

The input data consists of three lines, each of them describes the position of one stadium. The lines have the format  $x, y, r$ , where  $(x, y)$  are the coordinates of the stadium's center ( $-10^3 \leq x, y \leq 10^3$ ), and  $r$  ( $1 \leq r \leq 10^3$ ) is its radius. All the numbers in the input data are integer, stadiums do not have common points, and their centers are not on the same line.

## Output

Print the coordinates of the required point with five digits after the decimal point. If there is no answer meeting the conditions, the program shouldn't print anything. The output data should be left blank.

# Exemplo de entradas e saídas

## Sample Input

0 0 10

60 0 10

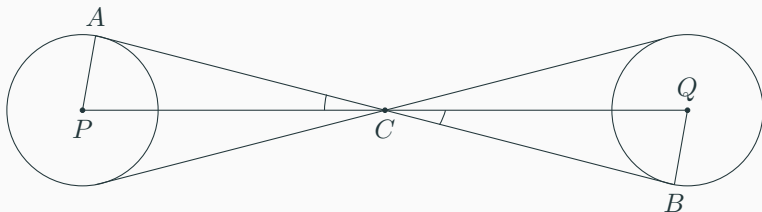
30 30 10

## Sample Output

30.00000 0.00000

# Solução

- Uma estratégia útil para solucionar um problema sofisticado é trabalhar com casos mais simples, que permitam a identificação de relações e propriedades das variáveis do problema
- Considere o caso de apenas dois estádios circulares com centros  $P$  e  $Q$ , e que ambos tenham o mesmo raio  $r$



## Solução

- Os segmentos  $AP$  e  $BQ$  tem comprimento  $r$
- Os triângulos  $PAC$  e  $QBC$  são retângulos e congruentes
- Logo, a distância do ponto ideal  $C$  aos centros  $P$  e  $Q$  deve ser a mesma
- O conjunto de pontos que satisfaz a condição  $d(P, C) = d(Q, C)$  é a mediatriz do segmento  $PQ$
- O parâmetros da mediatriz são dados por

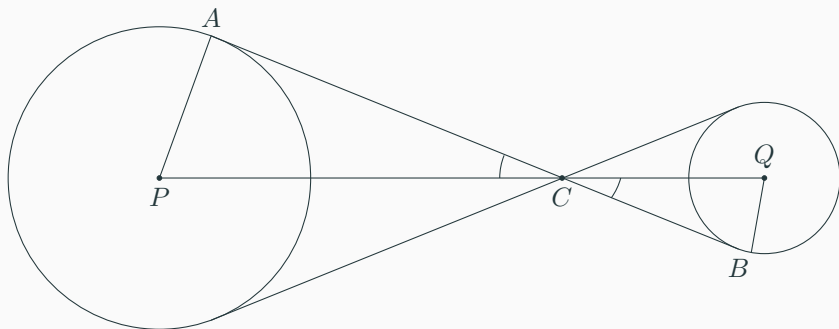
$$\begin{aligned}0 &= d^2(P, C) - d^2(Q, C) \\&= (x - x_P)^2 + (y - y_P)^2 - (x - x_Q)^2 - (y - y_Q)^2 \\&= -2(x_P - x_Q)x - 2(y_P - y_Q)y + (x_P^2 + y_P^2 - x_Q^2 - y_Q^2)\end{aligned}$$

- Se os raios dos três estádios são idênticos, a solução será a interseção de duas das mediatrizes, se existir



## Solução

- Considere agora o caso onde os raios  $r_P$  e  $r_Q$  são distintos



## Solução

- Neste caso, os triângulos  $PAC$  e  $QBC$  são semelhantes, mas não congruentes
- Da congruência segue que

$$\frac{d(P, C)}{r_P} = \frac{d(Q, C)}{r_Q}$$

- Daí

$$\begin{aligned} 0 &= r_Q^2 d^2(P, C) - r_P^2 d^2(Q, C) \\ &= r_Q^2 [(x - x_P)^2 + (y - y_P)^2] - r_P^2 [(x - x_Q)^2 + (y - y_Q)^2] \\ &= [(r_Q^2 - r_P^2)x^2 - 2x(r_Q^2 x_P - r_P^2 x_Q)] \\ &\quad + [(r_Q^2 - r_P^2)y^2 - 2y(r_Q^2 y_P - r_P^2 y_Q)] + [x_P^2 + y_P^2 - x_Q^2 - y_Q^2] \end{aligned}$$

## Solução

- Seja

$$x_0 = \frac{r_Q^2 x_P - r_P^2 x_Q}{r_Q^2 - r_P^2} \quad \text{e} \quad y_0 = \frac{r_Q^2 y_P - r_P^2 y_Q}{r_Q^2 - r_P^2}$$

- Completando o quadrado em  $x$  e em  $y$  segue que

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2,$$

onde

$$R = \frac{r_Q^2(x_P^2 + y_P^2) - r_P^2(x_Q^2 + y_Q^2)}{r_Q^2 - r_P^2} - x_0^2 - y_0^2$$

- Neste caso, a solução será, dentre as duas possíveis interseções entre os círculos correspondentes à dois pares de estádios com raios distintos, a que produz o maior ângulo
- Este ângulo  $\alpha$  é dado por

$$\alpha = 2 \arcsin \left( \frac{r_P}{d(P, C)} \right)$$

## Solução AC com complexidade $O(n \log n)$

1. Codeforces Beta Round #2 – Problem C: Commentator Problem