CSES 1202

Investigation

Prof. Edson Alves

Faculdade UnB Gama

You are going to travel from Syrjälä to Lehmälä by plane. You would like to find answers to the following questions:

- *what is the minimum price of such a route?*
- *how many minimum-price routes are there? (modulo $10^9 + 7$)*
- *what is the minimum number of flights in a minimum-price route?*
- *what is the maximum number of flights in a minimum-price route?*

Você irá viajar de Syrjälä para Lehmälä de avião. Você gostaria de encontrar respostas para as seguintes questões:

- qual é o preço mínimo de tal rota?
- existem quantas rotas de preço mínimo? (módulo $10^9 + 7$)
- qual é o número mínimo de vôos em uma rota de preço mínimo?
- qual é o número máximo de vôos em uma rota de preço mínimo?

Input

The first input line contains two integers n and m: the number of cities and the number of flights. The cities are numbered $1, 2, \ldots, n$. City 1 is Syrjälä, and city n is Lehmälä.

After this, there are m lines describing the flights. Each line has three integers $a, b,$ and c: there is a flight from city a to city b with price c. All flights are one-way flights.

You may assume that there is a route from Syrjälä to Lehmälä.

Entrada

A primeira linha da entrada contém dois inteiros n e m: o número de cidades e o número de vôos. As cidades são numeradas $1, 2, \ldots, n$. A cidade 1 é Syrjälä e a cidade n é Lehmälä.

Após isto, há m linhas descrevendo os vôos. Cada linha tem três inteiros $a, b,$ e c: há um vôo da cidade a para a cidade b com preço c. Todos vôos são dados em sentido único.

Você pode assumir que existe uma rota de Syrjälä para Lehmälä.

Output

Print four integers according to the problem statement.

Constraints

- $1 \leq n \leq 10^5$
- $1 \leq m \leq 2 \times 10^5$
- $1 \leq a, b \leq n$
- $1 \leq c \leq 10^9$

Saída

Imprima quatro inteiros, de acordo com o texto do problema.

Restrições

- $1 \leq n \leq 10^5$
- $1 \leq m \leq 2 \times 10^5$
- $1 \leq a, b \leq n$
- $1 \leq c \leq 10^9$

Exemplo de entrada e saída

Exemplo de entrada e saída

```
4 5
```

Exemplo de entrada e saída

```
4 5
```

 # de cidades

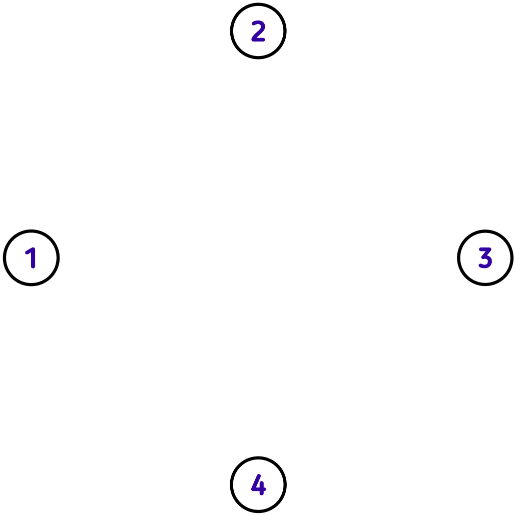
Exemplo de entrada e saída

```
4 5
```

de vôos

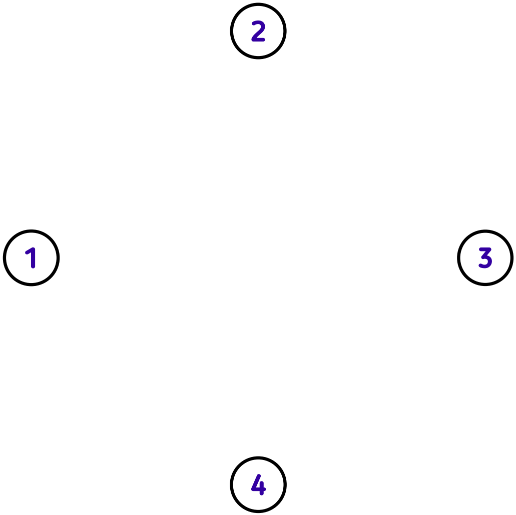
Exemplo de entrada e saída

```
4 5
```



Exemplo de entrada e saída

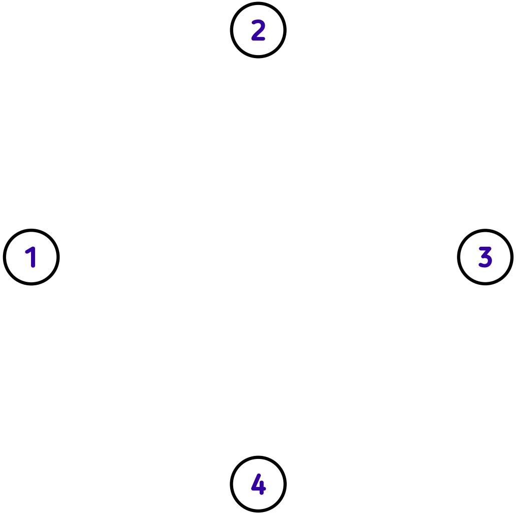
```
4 5
1 4 5
```



Exemplo de entrada e saída

```
4 5
1 4 5
```

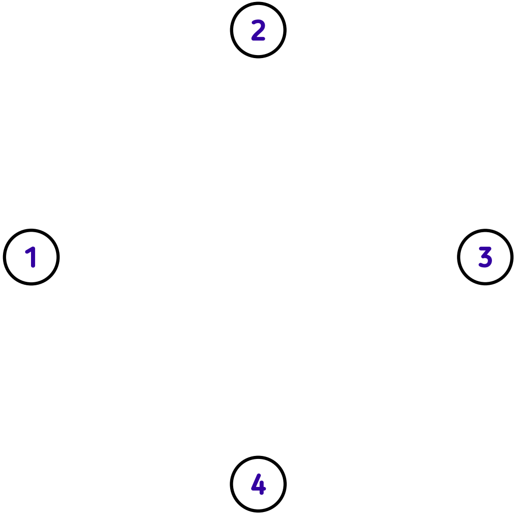
a



Exemplo de entrada e saída

```
4 5
1 4 5
```

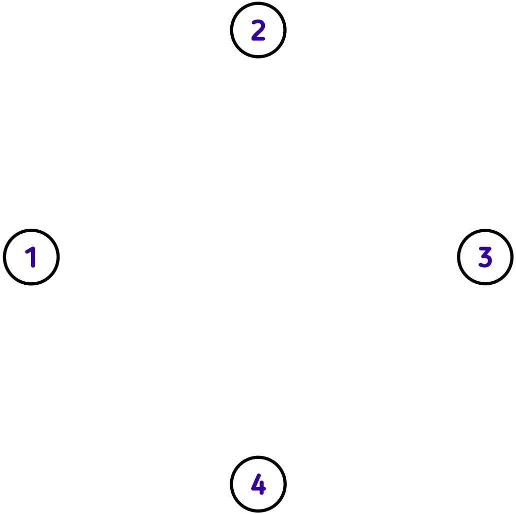
b



Exemplo de entrada e saída

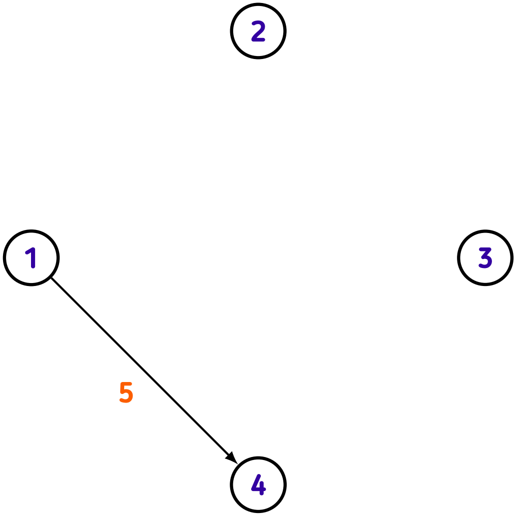
```
4 5
1 4 5
```

c



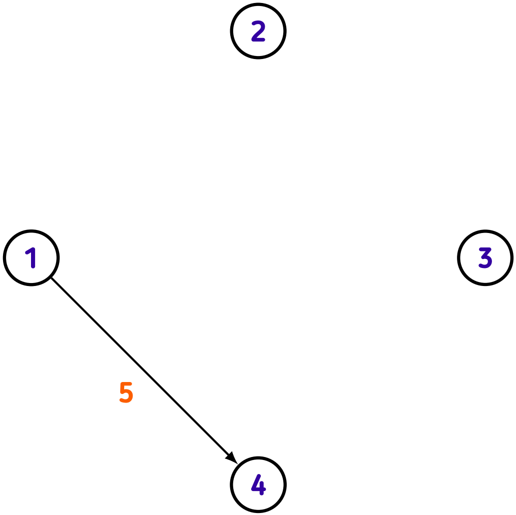
Exemplo de entrada e saída

```
4 5
1 4 5
```



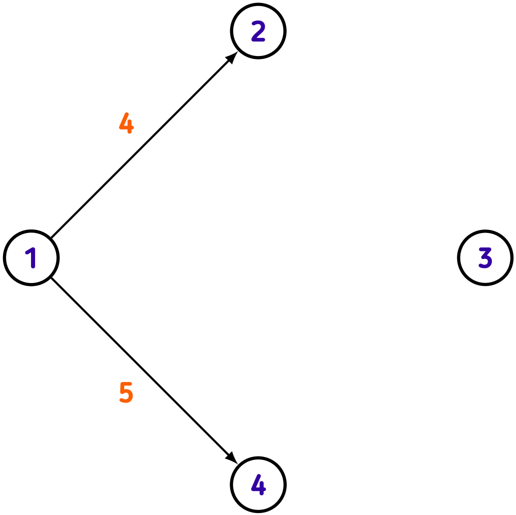
Exemplo de entrada e saída

```
4 5
1 4 5
1 2 4
```



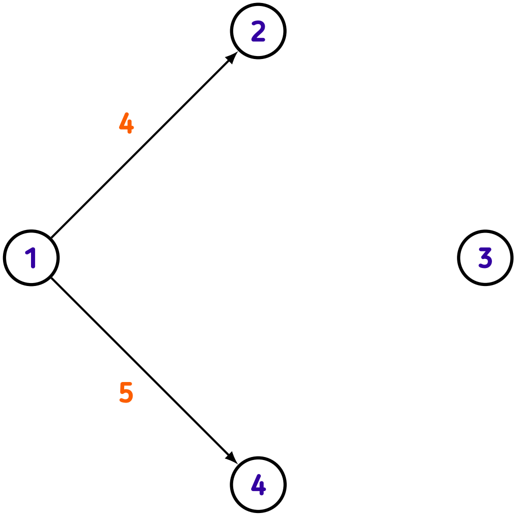
Exemplo de entrada e saída

```
4 5
1 4 5
1 2 4
```



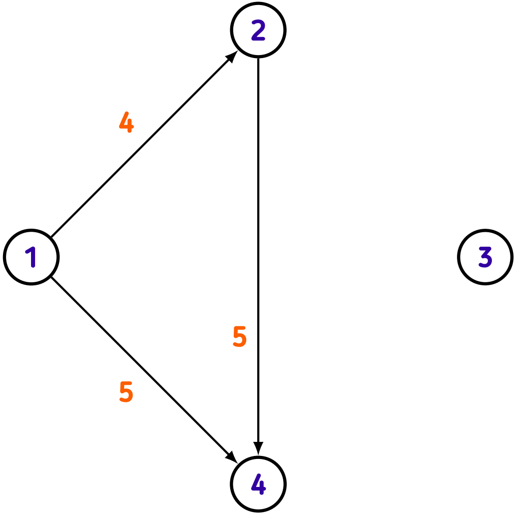
Exemplo de entrada e saída

```
4 5
1 4 5
1 2 4
2 4 5
```



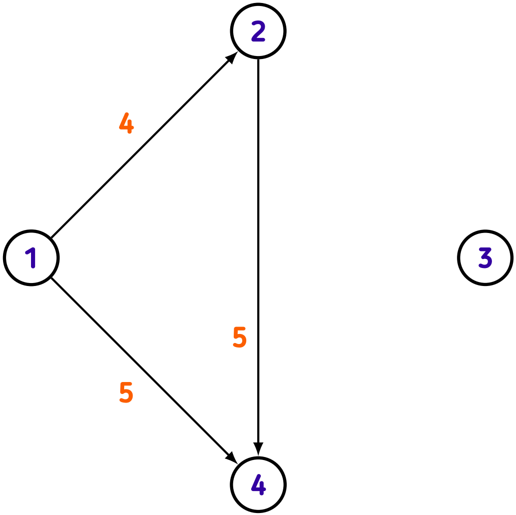
Exemplo de entrada e saída

```
4 5
1 4 5
1 2 4
2 4 5
```



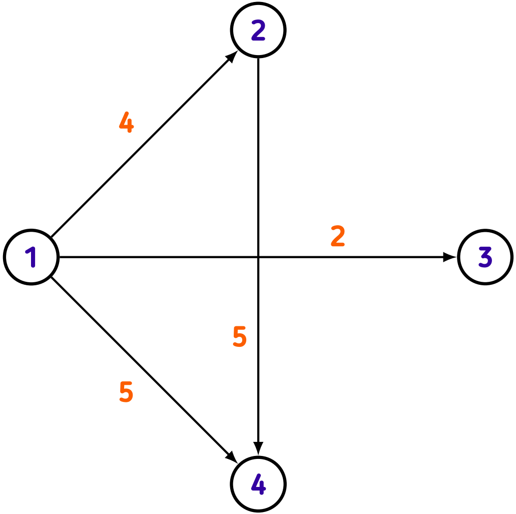
Exemplo de entrada e saída

```
4 5
1 4 5
1 2 4
2 4 5
1 3 2
```



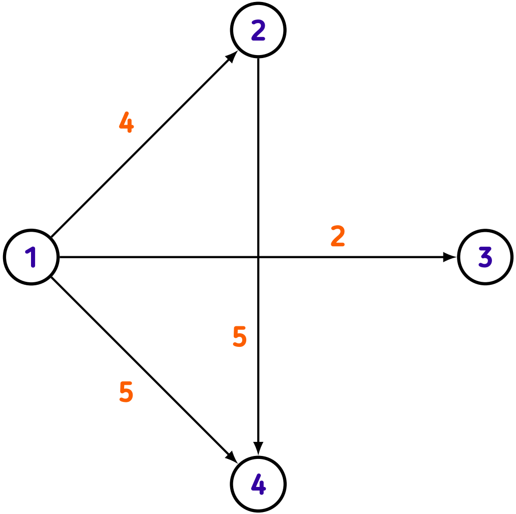
Exemplo de entrada e saída

```
4 5
1 4 5
1 2 4
2 4 5
1 3 2
```



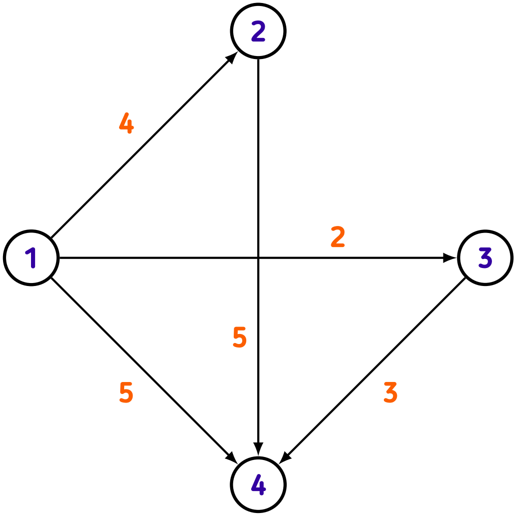
Exemplo de entrada e saída

```
4 5
1 4 5
1 2 4
2 4 5
1 3 2
3 4 3
```



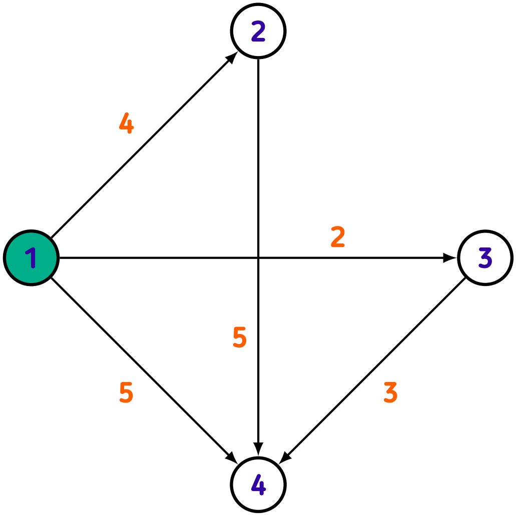
Exemplo de entrada e saída

```
4 5
1 4 5
1 2 4
2 4 5
1 3 2
3 4 3
```



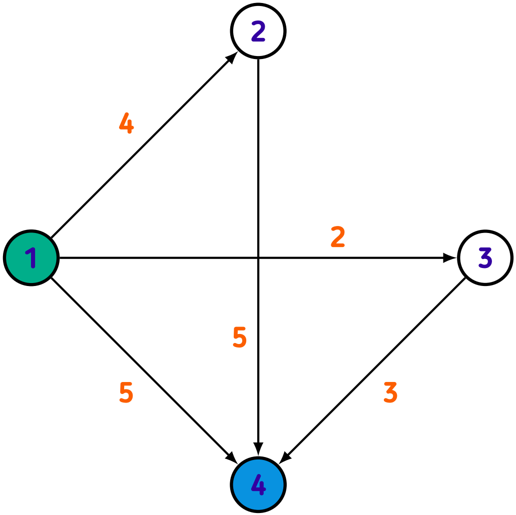
Exemplo de entrada e saída

```
4 5
1 4 5
1 2 4
2 4 5
1 3 2
3 4 3
```



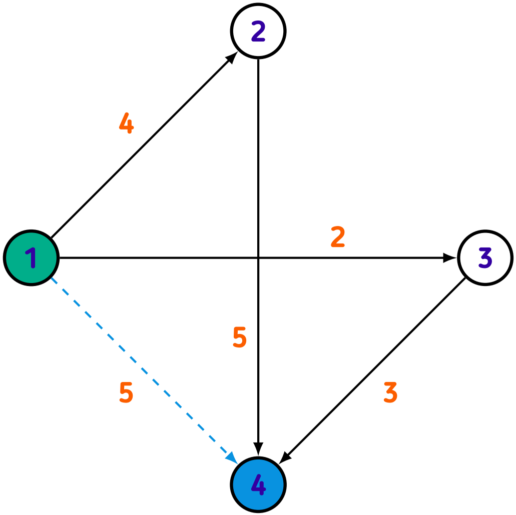
Exemplo de entrada e saída

```
4 5
1 4 5
1 2 4
2 4 5
1 3 2
3 4 3
```



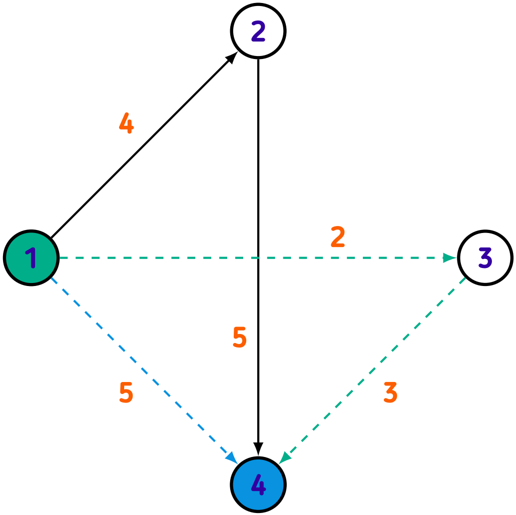
Exemplo de entrada e saída

```
4 5
1 4 5
1 2 4
2 4 5
1 3 2
3 4 3
```



Exemplo de entrada e saída

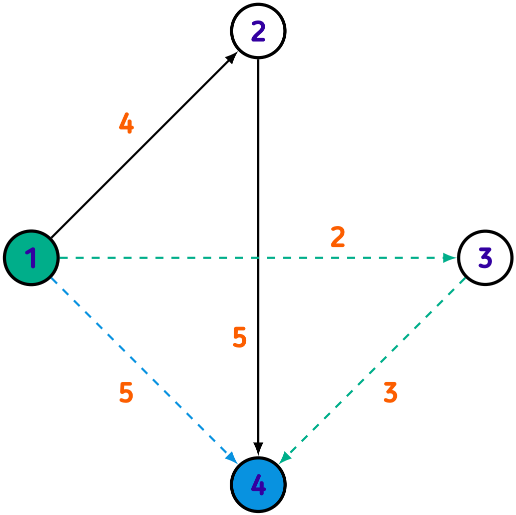
```
4 5
1 4 5
1 2 4
2 4 5
1 3 2
3 4 3
```



Exemplo de entrada e saída

```
4 5
1 4 5
1 2 4
2 4 5
1 3 2
3 4 3
```

```
5 2 1 2
```



Solução

Solução

- Os quatro subproblemas apresentados podem ser divididos em dois grupos: o problema de distância mínima e os outros três

Solução

- Os quatro subproblemas apresentados podem ser divididos em dois grupos: o problema de distância mínima e os outros três

- O algoritmo de Dijkstra resolve o problema das distâncias mínimas

Solução

- $\star$ Os quatro subproblemas apresentados podem ser divididos em dois grupos: o problema de distância mínima e os outros três

- $\star$ O algoritmo de Dijkstra resolve o problema das distâncias mínimas

- $\star$ Além disso, ele gera dois subprodutos úteis para os demais problemas: uma ordenação de vértices O e um subgrafo $G'(V, E')$ de $G(V, E)$

Solução

- $\star$ Os quatro subproblemas apresentados podem ser divididos em dois grupos: o problema de distância mínima e os outros três

- $\star$ O algoritmo de Dijkstra resolve o problema das distâncias mínimas

- $\star$ Além disso, ele gera dois subprodutos úteis para os demais problemas: uma ordenação de vértices O e um subgrafo $G'(V, E')$ de $G(V, E)$

- $\star$ A aresta $(v, u) \in E'$ se $(u, v) \in E$ finaliza um caminho mínimo de 1 a v

Solução

- A partir de G' os três outros subproblemas podem ser resolvidos por DP

Solução

- **A partir de G' os três outros subproblemas podem ser resolvidos por DP**

- **Os casos base são:** $\text{minPaths}[1] = 1$ **e** $\text{minEdges}[1] = \text{maxEdges}[1] = 0$

Solução

- $\star$ **A partir de** G' **os três outros subproblemas podem ser resolvidos por DP**
- $\star$ **Os casos base são:** $\text{minPaths}[1] = 1$ **e** $\text{minEdges}[1] = \text{maxEdges}[1] = 0$
- $\star$ **As transições são dadas por:**

Solução

- ⋆ **A partir de G' os três outros subproblemas podem ser resolvidos por DP**
- ⋆ **Os casos base são:** $\text{minPaths}[1] = 1$ **e** $\text{minEdges}[1] = \text{maxEdges}[1] = 0$
- ⋆ **As transições são dadas por:**

$$\text{minPaths}[u] = \sum_{(v,u)\in E'} \text{minPaths}[v]$$

Solução

- $\star$ **A partir de G' os três outros subproblemas podem ser resolvidos por DP**

- $\star$ **Os casos base são:** $\text{minPaths}[1] = 1$ **e** $\text{minEdges}[1] = \text{maxEdges}[1] = 0$

- $\star$ **As transições são dadas por:**

$$\text{minPaths}[u] = \sum_{(v,u) \in E'} \text{minPaths}[v]$$

$$\text{minEdges}[u] = \min_{(v,u) \in E'} \{\ \text{minEdges}[\text{u}], \text{minEdges}[v] + 1\ \}$$

Solução

- ⋆ **A partir de G' os três outros subproblemas podem ser resolvidos por DP**
- ⋆ **Os casos base são:** $\text{minPaths}[1] = 1$ **e** $\text{minEdges}[1] = \text{maxEdges}[1] = 0$
- ⋆ **As transições são dadas por:**

$$\text{minPaths}[u] = \sum_{(v,u)\in E'} \text{minPaths}[v]$$

$$\text{minEdges}[u] = \min_{(v,u)\in E'} \{ \text{ minEdges}[\text{u}], \text{minEdges}[v] + 1 \ \}$$

$$\text{maxEdges}[u] = \max_{(v,u)\in E'} \{ \text{ maxEdges}[\text{u}], \text{maxEdges}[v] + 1 \ \}$$

```
vector<ll> solve(int N)
{
    auto [dist, order] = dijkstra(1, N);
    auto [ps, ms, Ms] = min_paths(1, N, order);

    return { dist[N], ps[N], ms[N], Ms[N] };
}
```

```
pair<vector<ll>, vector<ll>> dijkstra(int s, int N)
{
    vector<ll> dist(N + 1, oo), order;
    dist[s] = 0;

    processed.reset();

    priority_queue<ii, vector<ii>, greater<ii>> pq;
    pq.emplace(0, s);

    while (not pq.empty())
    {
        auto [d, u] = pq.top();
        pq.pop();

        if (processed[u])
            continue;

        order.emplace_back(u);
        processed[u] = true;
```

```
        for (auto [v, w] : adj[u])
        {
            if (dist[v] > d + w)
            {
                dist[v] = d + w;
                pq.emplace(dist[v], v);
                in[v].clear();
                in[v].push_back(u);
            } else if (dist[v] == d + w)
            {
                in[v].push_back(u);
            }
        }
    }

    return { dist, order };
}
```

```
tuple<vector<ll>, vector<ll>, vector<ll>>
min_paths(int s, int N, const vector<ll>& order)
{
    vector<ll> ps(N + 1, 0), ms(N + 1, oo), Ms(N + 1, 0);

    ps[s] = 1;
    ms[s] = 0;

    for (auto x : order)
        for (auto v : in[x])
        {
            ps[x] = (ps[x] + ps[v]) % MOD;
            ms[x] = min(ms[x], 1 + ms[v]);
            Ms[x] = max(Ms[x], 1 + Ms[v]);
        }

    return { ps, ms, Ms };
}
```