Matemática

Teoria dos Conjuntos

Prof. Edson Alves
Faculdade UnB Gama

Axioma Fundamental

- O principal axioma da Teoria dos Conjuntos, que relaciona os termos primitivos **elemento** e **conjunto** diz que a afirmação "*Um elemento pertence a um conjunto*" é uma proposição
- A simplicidade aparente deste axioma esconde dois importante fatos
  1. a pertinência estabelece a relação entre elementos e conjuntos: dado um elemento qualquer e um conjunto qualquer, este elemento pertence (ou não) ao conjunto
  2. a Teoria dos Conjuntos fica edificada sobre a Lógica, uma vez que o que vale para proposições valerá para este axioma também

Notação

- Em geral, elementos são representados por letras minúsculas ou símbolos (por exemplo, a, b, x, π, . . .)
- Os conjuntos são representados, em geral, por letras maiúsculas, possivelmente cursivas ou estilizadas (por exemplo, A, B, $\mathbb{N}$, $\mathcal{F}$, . . .)
- A notação $x \in A$ indica que o elemento x pertence ao conjunto A
- Caso x não pertença ao conjunto A, a notação é $x \notin A$

Subconjuntos

- Um conjunto B é **subconjunto** do conjunto A se, para qualquer elemento $b \in B$, vale que $b \in A$
- A notação para subconjuntos é $B \subset A$, a qual também pode ser lida como "B está contido em A"
- Dizer que "o elemento x está contido no conjunto A" ou que "o conjunto A pertence ao conjunto B" não só é impreciso como é logicamente falso
- A relação de pertinência se dá entre conjuntos e elementos (a relação de subconjunto, associada ao termo "contido", se dá entre conjuntos; elementos se relacionam entre si por relação de igualdade)

O Conjunto Vazio

- O axioma fundamental permite definir precisamente um conjunto especial, denominado **conjunto vazio**
- $\emptyset$ é o conjunto vazio se, para qualquer elemento x, $x \notin \emptyset$
- Veja que esta definição não é baseada na ideia de cardinalidade (número de elementos de um conjunto)
- Ainda assim, ela permite provar fatos importantes, como o fato de que o conjunto vazio é único ou que qualquer conjunto contém o conjunto vazio

Caracterização de Conjuntos

Duas possíveis formas de se caracterizar um conjunto são:

1. a enumeração de todos os seus elementos
2. descrição das propriedades comuns a todos os elementos do conjunto

Formalmente, se $P(x)$ é uma sentença aberta em x (isto é, uma sentença tal que, uma vez atribuí um valor específico para a variável x, tal sentença se torna uma proposição), então $\{x \in X \mid P(x)$ é verdadeira$\}$ é um conjunto, onde X é o conjunto de todos os possíveis valores de x.

Exemplos de conjuntos

- Conjunto de constantes notáveis

$$C = \{e, \pi, 0, -1\}$$

- Conjunto dos números ímpares

$$I = \{2x + 1 \mid x \in \mathbb{Z}\}$$

- Conjunto dos números primos

$$P = \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ é primo}\}$$

Operações em Conjuntos

Dados dois conjuntos A e B, é possível definir três novos conjuntos:

1. conjunto **união** $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
2. conjunto **interseção** $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
3. conjunto **diferença** $A - B = \{x \in A \mid x \notin B\}$

Operações em Conjuntos

Observe que as três operações em conjuntos são definidos em termos dos conectivos lógicos fundamentais:

- disjunção, na união;
- conjunção, na interseção; e
- negação na diferença.

Esta relação permite a verificação das propriedades destes operadores e a relação entre eles (como o equivalente das Leis de Morgan para união e interseção).

Conjuntos em C e C++

- Há três maneiras de se representar conjuntos em C e C++: as classes `set`, `multiset` e `bitset`, e o tipo primitivo `int`, sendo que a última representação também é válida em C
- A biblioteca padrão do C++ traz a implementação da classe `set` (`#include <set>`), que abstrai a ideia de conjuntos
- Esta classe provê operações elementares (como inserção e remoção de elementos, através dos métodos `insert()` e `erase()`, ou relações de pertinência, com o método `count()`)

Conjuntos em C e C++

- Na classe `set` os elementos são únicos e armazenados ordenadamente (uma travessia padrão é feita do menor para o maior elemento)
- A classe `multiset` permite a repetição de um mesmo elemento, porém o processo de remoção deve ser feito de forma mais cuidadosa
- As operações de união, interseção e diferença de conjuntos podem ser feitas em qualquer contêiner ordenado, através das funções `set_union()`, `set_intersection()` e `set_difference()`, disponíveis na biblioteca de algoritmos (`#include <algorithm>`)

```cpp
#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;

int main()
{
    vector<int> A { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 };        // Conjunto A
    vector<int> B { 2, 3, 5, 7, 11, 13 };                   // Conjunto B
    vector<int> C;

    set_union(A.begin(), A.end(), B.begin(), B.end(), back_inserter(C));

    cout << "union = ";
    for (size_t i = 0; i < C.size(); ++i)
        cout << C[i] << (i + 1 == C.size() ? '\n' : ' ');   // C = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13 }

    C.clear();
    set_intersection(A.begin(), A.end(), B.begin(), B.end(), back_inserter(C));

    cout << "intersection = ";
    for (size_t i = 0; i < C.size(); ++i)
        cout << C[i] << (i + 1 == C.size() ? '\n' : ' ');   // C = { 2, 3, 5, 7 }

    C.clear();
    set_difference(A.begin(), A.end(), B.begin(), B.end(), back_inserter(C));

    cout << "difference = ";
    for (size_t i = 0; i < C.size(); ++i)
        cout << C[i] << (i + 1 == C.size() ? '\n' : ' ');   // C = { 1, 4, 6, 8, 9, 10 }

    return 0;
}
```

Conjuntos e inteiros

- O tipo de dados primitivo `int` (ou sua variante `long long`, com maior capacidade de armazenamento) também pode ser usado para uma interpretação mais compacta e eficiente de conjuntos
- Em geral o tipo `int` tem 32 *bits* de tamanho
- É possível associar cada elemento do conjunto universo (que contém todos os elementos possíveis, numa quantidade menor ou igual a 32) a cada *bit*, de modo que, se o *bit* está ligado, o elemento pertence ao conjunto; e se desligado, não pertence

Conjuntos e inteiros

- A principal restrição desta representação é o número de elementos do conjunto universo (limitado pelo número de *bits* do tipo escolhido)
- Contudo esta representação tem várias vantagens, dentre elas:
  1. ocupa pouco espaço em memória (4 *bytes* a cada 32 elementos);
  2. permite responder relações de pertinência em complexidade $O(1)$;
  3. permite operações de união, interseção e diferença também em $O(1)$.

Conjuntos e inteiros

- A última vantagem listada se dá por conta da definição de tais operações em termos dos conectivos lógicos
- Lembre que as linguagens C e C++ disponibilizarem tais conectivos tanto em relação à variáveis booelanas quanto em versões *bit* a *bit*
- A seguir o exemplo anterior é reescrito em termos desta nova representação
- No código, considere o conjunto universo $U = \{1, 2, 3, \ldots, 32\}$

```cpp
#include <iostream>

using namespace std;

int main()
{
    int A = 2046;                   // A = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 }
    int B = 10412;                  // B = { 2, 3, 5, 7, 11, 13 }
    int C = A | B;                  // C = 12286

    cout << "union = ";
    for (int x = 0; x < 32; ++x)
        if (C & (1 << x))
            cout << x << " ";
    cout << endl;                   // C = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13 }

    C = A & B;                      // C = 172

    cout << "intersection = ";
    for (int x = 0; x < 32; ++x)
        if (C & (1 << x))
            cout << x << " ";
    cout << endl;                   // C = { 2, 3, 5, 7 }

    C = A & ~B;                     // C = 1874

    cout << "difference = ";
    for (int x = 0; x < 32; ++x)
        if (C & (1 << x))
            cout << x << " ";
    cout << endl;                   // C = { 1, 4, 6, 8, 9, 10 }

    return 0;
}
```

Classe `bitset`

- Para conjuntos universos com mais de 32 elementos (ou 64, no caso de variáveis `long long`), as alternativas são o uso de um vetor de inteiros, ou da classe `bitset` (`#include <bitset>`)
- Esta classe pode armazenar uma quantidade arbitrária de *bits* (que deve ser conhecida em tempo de compilação)
- Ela traz em sua interface as operações básicas dos conjuntos e suporte para os operadores lógicos *bit* a *bit*

```cpp
#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;

int main()
{
    bitset<35> A(2046), B(10412);

    cout << A.to_string() << '\n';
    cout << B.to_string() << '\n';

    auto C = A | B;
    cout << "union = " << C.to_string() << '\n';

    C = A ^ B;
    cout << "interseção = " << C.to_string() << '\n';

    C = A & ~B;
    cout << "diferença = " << C.to_string() << '\n';

    return 0;
}
```

Problemas

1. AtCoder
    1. ABC 128E - Roadwork
2. Codeforces
    1. 228A - Is your horseshoe on the other hoof?
    2. 236A - Boy or Girl
3. OJ
    1. 501 - Black Box
    2. 11849 - CD

Referências

1. CppReference. std::bitset, acesso em 31/12/2020.
2. CppReference. std::multiset, acesso em 31/12/2020.
3. CppReference. std::set, acesso em 31/12/2020.
4. **HALE**, Margie. *Essentials of Mathematics: Introduction to Theory, Proof, and the Professional Culture*. Mathematical Association of America, 2003.