Geometria Computacional

Objetos Tridimensionais

Prof. Edson Alves

2019

Faculdade UnB Gama

Sumário

Esfera

Definição de esfera

- A esfera é o conjunto de pontos do espaço tridimensional que são equidistantes de um ponto fixo
- Este ponto fixo é denominado centro C da esfera
- A distância de um ponto da esfera a C é denominada raio r
- A esfera por ser representa, em coordenadas cartesianas, pela equação abaixo, onde (x_0, y_0) são as coordenadas do centro e r é o raio

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

- Pode ser útil, porém, utilizar a representação da esfera em coordenadas esféricas, onde r é o raio, θ um ângulo que varia de 0 a 2π e φ é um ângulo que varia de 0 a π:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + r\cos\theta\sin\varphi \\ y &= y_0 + r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= z_0 + r\cos\varphi \end{aligned}$$

Área e Volume

- A área da superfície da esfera é dada por $A = 4\pi r^2$, onde r é o raio da esfera
- O seu volume é igual a
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$
- Estas expressões podem ser verificadas através das integrais de área e volume em coordenadas esféricas, cujo jacobiano é dado por $r^2 \sin(\varphi)$:
$$A = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} r^2 \sin(\varphi)\ d\theta d\varphi$$
e
$$V = \int_0^{R} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} r^2 \sin(\varphi)\ d\theta d\varphi dR$$

Implementação do cálculo da área e do volume da esfera

```cpp
// Definição da constante PI
template<typename T>
struct Point3D {
    T x, y, z;
};

template<typename T>
struct Sphere {
    Point3D<T> C;
    T r;

    double area() const
    {
        return 4.0*PI*r*r;
    }

    double volume() const
    {
        return 4.0*PI*r*r*r/3.0;
    }
};
```

Cubo

Definição de cubo

- Um cubo é uma região do espaço delimitada por 6 quadrados idênticos, unidos por meio de suas arestas
- O cubo é um dos cinco poliedros regulares
- Os demais são o tetraedro, o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro, que também são denominados Sólidos de Platão
- O cubo possui 12 arestas, 6 faces e 8 vértices, o que pode ser confirmado pela Equação de Euler

$$V + F - A = 2.$$

- A menos de sua posição no espaço, um cubo pode ser unicamente determinado pela medida L do lado do quadrado que compõe suas faces
- A medida da diagonal facial, isto é, a diagonal que une dos vértices opostos de uma mesma face, é igual a $L\sqrt{2}$
- A medida da diagonal espacial, isto é, a diagonal que une dois vértices opostos, atravessando o cubo por seu interior, é dada por $L\sqrt{3}$

Exemplo de implementação do cubo

```
template<typename T>
struct Cube {
    T L;

    double face_diagonal() const
    {
        return L*sqrt(2.0);
    }

    double space_diagonal() const
    {
        return L*sqrt(3.0);
    }
};
```

Área e volume

- A área da superfície do cubo (a soma das áreas de suas faces) é igual a
$$A = 6L^2,$$
uma vez que esta área é composta pela soma das áreas de seis quadrados idênticos
- O volume é dado por
$$V = L^3$$
- Sendo uma expressão cúbica, é preciso tomar cuidado com possíveis *overflows* no cálculo do volume

Implementação do cálculo da área e do volume

```cpp
template<typename T>
struct Cube {
    // Membros e construtor

    double area() const
    {
        return 6.0*L*L;
    }

    double volume() const
    {
        return L*L*L;
    }
};
```

Relação entre cubo e esfera

- O cubo tem três esferas associadas
- A esfera circunscrita, cujo raio é igual a $L(\sqrt{3}/2)$, passa pelos 8 vértices do cubo
- A esfera inscrita é tangente às 6 faces do cubo
- O raio da esfera inscrita é igual a $L/2$
- A esfera tangente às arestas do cubo tem raio igual a $L/\sqrt{2}$

Paralelepípedos

Definição e área

- Um paralelepípedo é uma figura geométrica formada por seis paralelogramos
- Em geral, um paralelepípedo é representado por três vetores linearmente independentes $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$
- Caso estes vetores sejam linearmente dependentes, o paralelepípedo resultante é degenerado, tendo volume igual a zero
- A área é dada pelas somas das áreas de suas faces
- A face delimitada pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tem área dada por

$$A = |\vec{u} \times \vec{v}|$$

- O mesmo vale para as outras faces, usando-se os vetores apropriados

Volume

- O volume é igual ao módulo do produto misto

$$V = |(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}|,$$

onde $x \cdot y$ é o produto interno entre os vetores x e y

- Na prática, o produto misto é equivalente ao determinante

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \det \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{bmatrix}$$

- Se conhecidos apenas os comprimentos a, b, c das arestas e os ângulos internos α, β, γ formados entre elas, é possível computar o volume do paralelogramo através da expressão:

$$V = abc\sqrt{1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma}$$

Implementação do cálculo da área e do volume

```
// Definição da estrutura Vector3D

template<typename T>
struct Parallelepiped {
    Vector3D<T> u, v, w;

    double volume() const
    {
        return fabs(u.x*v.y*w.z + u.y*v.z*w.x + u.z*v.x*w.y
                - (u.x*v.z*.wy + u.y*v.x*w.z + u.z*v.y*w.x);
    }

    double volume2() const
    {
        double a = u.lenght();
        double b = v.length();
        double c = w.length();

        double m = angle(u, v);
        double n = angle(u, w);
        double p = angle(v, w);
```

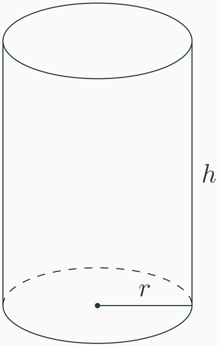
Implementação do cálculo da área e do volume

```
        return a*b*c*sqrt(1 + 2*cos(m)*cos(n)*cos(p) - cos(m)*cos(m)
            - cos(n)*cos(n) - cos(p)*cos(p));
    }

    double volume3() const
    {
        return fabs(dot_product(u, cross_product(v, w)));
    }

    double area() const
    {
        double uv = cross_product(u, v).length();
        double uw = cross_product(u, w).length();
        double vw = cross_product(v, w).length();

        return 2*(uv + uw + vw);
    }
};
```

Cilindro

Definição

- O cilindro é uma figura geométrica formada pelos pontos equidistantes de um eixo (segmento de reta) dado
- Esta distância fixa recebe o nome de raio r.
- Em geral, um cilindro é representado pelo raio e pela distância entre as duas faces circulares opostas, denominada altura h.



Área e volume

- A área lateral do cilindro é dada por

$$A = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r),$$

isto é, sua área lateral (um retângulo de base $2\pi r$, que é a circunferência do círculo, e altura h) e o dobro da área da base (πr^2)
- O volume, por sua vez, pode ser computado de duas formas
- Uma delas é a integral de área usando coordenadas cilíndricas

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ z &= z, \end{aligned}$$

onde $0 \leq \theta \leq 2\pi$
- Outra é calcular a superfície de revolução de um segmento vertical de comprimento h no ponto $x = r$ torno do eixo y
- Em ambos casos, $V = \pi r^2 h$, que é igual a área da base vezes a altura

Implementação de um cilindro

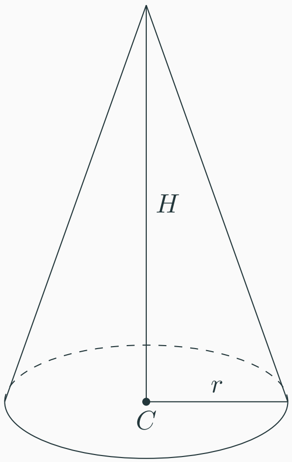
```cpp
// Definição da constante PI
template<typename T>
struct Cylinder {
    T r, h;

    double area() const
    {
        return 2*PI*r*(r + h);
    }

    double volume() const
    {
        return PI*r*r*h;
    }
};
```

Cone

Definição

- Um cone é uma figura geométrica formada pela união de todas as retas (ou segmentos de retas) que unem uma base plana (uma região fechada) a um ponto externo ao plano da base, denominado vértice ou *apex*
- O mais comum dentre os cones é o cone circular reto
- No cone circular reto base é um círculo e o vértice está localizado na reta perpendicular ao plano onde se encontra o círculo e que passa pelo centro do mesmo
- Tal cone pode ser determinado pelo círculo da base (centro e raio) e pela distância do vértice ao plano, denominada H
- Se a localização exata do cone não for necessária, bastam apenas a distância H e o raio r do círculo

Visualização do cone circular reto



Área e volume

- A área da superfície do cone circular reto é a soma da área da base mais a área lateral, isto é,

$$A = \pi r^2 + \pi r\sqrt{r^2 + H^2}$$

- O valor $L = \sqrt{r^2 + H^2}$ surge do triângulo retângulo formado pelo vértice, pelo centro e por um ponto do círculo
- Se o cone for cortado num segmento de reta que une o círculo ao vértice e aberto, ele resultará em um setor do círculo de raio L, cujo arco é $2\pi r$, o que resulta em uma área lateral de $\pi r L$
- O volume do cone circular reto pode ser computado através da integral de revolução em torno do eixo-x, com $0 \leq x \leq H$ e $f(x) = rx/H$, o que resulta em

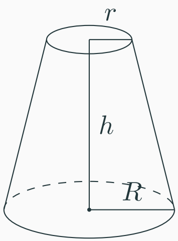
$$V = \int_0^H \pi f^2(x)dx = \frac{1}{3}\pi r^2 H$$

Tronco do cone

- O tronco de um cone é obtido através da seção de um cone por um plano paralelo à base
- Se R é o raio da base do cone, r o raio do círculo resultante da seção e h a altura do tronco, o volume do tronco é dado por

$$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2),$$

- Este volume corresponde à diferença do volume do cone maior pelo volume do cone menor, obtido após à seção



Implementação de um cone

```
template<typename T>
struct Cone {
    T r, H;

    double volume() const
    {
        return PI*r*r*H/3.0;
    }

    double area() const
    {
        return PI*r*r + PI*r*sqrt(r*r + H*H);
    }

    // Volume do tronco do cone
    double frustum(double rm, double h) const
    {
        return PI*h*(r*r + r*rm + rm*rm)/3.0;
    }
};
```

Referências

1. **HALIM**, Felix; **HALIM**, Steve. *Competitive Programming 3*, 2010.
2. The University of Georgia. Volume of a Frustum of a Right Circular Cone, acesso em 17/05/2019.
3. Wikipedia. Cylinder (geometry), acesso em 17/05/2019.
4. Wikipedia. Parallelepiped, acesso em 17/05/2019.
5. Wolfram MathWorld. Spherical Coordinates, acesso em 18/04/2019.