Matemática

Funções Geradoras

Prof. Edson Alves

Faculdade UnB Gama

Funções Geradoras

Motivação

Carlos quer comprar 6 camisetas de um mesmo modelo e há 3 opções de cores a disposição: amarelo, branco, e celeste. De quantas maneiras ele pode adquirir as 6 camisetas, se ele deseja comprar ao menos uma de cada cor, e no máximo 3 brancas, 2 amarelas e 2 celestes?

Sejam x_a, x_b e x_c as quantidades de camisetas de cada cor que serão adquiridas. O problema se trata de encontrar todas as soluções da equação

$$x_a + x_b + x_c = 6$$

com $1 \leq x_a \leq 3, 1 \leq x_b, x_c \leq 2$.

Observe que, se tivéssemos apenas as restrições inferiores, o problema seria o problema das soluções de equações lineares com coeficientes unitários, com $x_i > 0$, já apresentado anteriormente, cuja solução é $\binom{6-1}{3-1} = \binom{5}{2} = 10$. Como tratar, porém, as restrições do lado direito das desigualdades que envolvem as variáveis x_i?

Solução usando o Princípio da Inclusão/Exclusão

Defina os conjuntos

$$A = \{ \text{ solução de } x_a + x_b + x_c = 6 \text{ com } x_a > 3 \}$$
$$B = \{ \text{ solução de } x_a + x_b + x_c = 6 \text{ com } x_b > 2 \}$$
$$C = \{ \text{ solução de } x_a + x_b + x_c = 6 \text{ com } x_c > 2 \}$$

O número de soluções S do problema com as restrições apresentadas seria igual a

$$S = \binom{5}{2} - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|$$

Resolvendo cada problema usando mudança de variáveis teríamos

$$S = 10 - 1 - 3 - 3 + 0 + 0 + 0 - 0 = 3$$

A título de curiosidade, as soluções seriam

$$x_a = 2, x_b = 2, x_c = 2$$
$$x_a = 3, x_b = 1, x_c = 2$$
$$x_a = 3, x_b = 2, x_c = 1$$

Solução utilizando multiplicação polinomial

Esta abordagem, porém, é demasiadamente trabalhosa, uma vez que passamos de um problema para 8 deles, antes de se determinar a solução. E o número de problemas sobe exponencialmente a medida que o número de variáveis aumenta.

Uma abordagem diferente seria usar polinômios para representar as possíveis escolhas para cada variável. Para as camisetas amarelas, usaríamos o polinômio

$$ax + a^2x^2 + a^3x^3$$

onde o grau do termo x ou da constante a indicam o número de camisetas amarelas. Para as demais cores teríamos

$$bx + b^2x^2$$

e

$$cx + c^2x^2$$

Solução utilizando multiplicação polinomial

O produto deste polinômios seria, de acordo com a propriedade distributiva,

$$\begin{aligned}(ax + a^2x^2 + a^3x^3)(bx + b^2x^2)(cx + c^2x^2) &= (abc)x^3 + (abc^2 + ab^2c + a^2bc)x^4 \\ &+ (ab^2c^2 + a^2bc^2 + a^2b^2c + a^3bc)x^5 \\ &+ (a^2b^2c^2 + a^3bc^2 + a^3b^2c)x^6 + (a^3b^2c^2)x^7\end{aligned}$$

Veja que o coeficiente do termo x^6 nos fornece justamente as três soluções desejadas, onde os expoentes das constantes a, b, c indicam o número de itens da referida cor que foram escolhidos. Veja que se fizéssemos $a = b = c = 1$, teríamos

$$(x + x^2 + x^3)(x + x^2)(x + x^2) = x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 3x^6 + x^7$$

O coeficiente de x^5 agora informa a quantidade de maneiras, mas não discrimina as maneiras em si. De fato, os coeficientes de cada um dos termos do polinômio são as soluções do problema para 3, 4, 5, 6 e 7 camisas no total. O problema não tem solução para 2 ou menos ou 8 ou mais camisas. Por conta desta propriedade, o polinômio $x + 3x^4 + 4x^5 + 3x^6 + x^7$ é chamado função geradora $f(x)$ do problema.

Série de potências

Definição

Uma série de potências $S(x)$ é definida por uma sequência de coeficientes (a_i) de modo que

$$S(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

Este definição permite observar que qualquer polinômio $p(x)$ é uma série de potência.

Definição

Considere um problema de combinatório $P(i)$ que dependa de um parâmetro i. Se a série de potências $S(x)$ é tal que a sequência de seus coeficientes (a_i) são as soluções do problema para o valor i, dizemos que $S(x)$ é a função geradora $f(x)$ do problema $P(i)$.

Exemplos de funções geradoras

- Por exemplo, considere o problema de se escolher i elementos distintos dentre n elementos, todos distintos. A função geradora deste problema é a função

$$f(x) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^n$$

- Na prática, desejamos encontrar para $f(x)$ a expressão o mais sucinta possível. Das propriedades dos números binomiais temos que

$$f(x) = (1+x)^n$$

- Uma função geradora fundamental é a função associada a sequência de uns $(1, 1, 1, ...)$:

$$g(x) = 1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x}$$

- A soma infinita é igual a $1/(1-x)$ nos casos em que $|x| < 1$. Porém, no estudo de funções geradoras, não se atribui valores à variável x, de modo que não há preocupação com questões de convergência. Tais séries são denominadas séries formais.

Soluções das Equações Lineares com Coeficientes Constantes: Uma Nova Perspectiva

Função geradora da solução

Voltemos ao problema de se contar o número de soluções distintas da equação

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_r = n$$

com $x_i \geq 0$. Associaremos o polinômio

$$1 + x + x^2 + \ldots$$

a cada variável x_i, o qual representa todos os valores possíveis para cada variável. A função geradora será dada pelo produto destes polinômio, isto é,

$$f(x) = (1 + x + x^2 + \ldots)(1 + x + x^2 + \ldots)\ldots(1 + x + x^2 + \ldots) = (1 + x + x^2 + \ldots)^r$$

Usando a soma da PG infinita temos que

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^r} = (1-x)^{-r}$$

Coeficiente binomial generalizado

Para se determinar o coeficiente do termo xn de $f(x)$, podemos usar a série de Taylor com de $(1-x)^u$, com $a=0$, para um u real. Isto nos leva ao coeficiente binomial generalizado:

$$\binom{u}{k} = \frac{u(u-1)(u-2)\ldots(u-k+1)}{k!}$$

onde k é um inteiro não-negativo e u um número real. Por exemplo

$$\binom{\frac{1}{2}}{4} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)\left(\frac{-5}{2}\right)}{4!} = -\frac{15}{384}$$

Equilavências entre coeficientes binomiais

Assim, o termo x_n de $f(x)$ terá coeficiente igual a

$$
\begin{aligned}
(-1)^n \binom{-r}{n} &= (-1)^n \frac{(-r)(-r-1)(-r-2)\dots(-r-n+1)}{n!} \\
&= (-1)^n \left[\frac{(-1)^n r(r+1)(r+2)\dots(r+n-1)}{n!}\right] \\
&= [1 \times 2 \times \dots \times (r-1)] \times \frac{r(r+1)(r+2)\dots(r+n-1)}{(n!(r-1)!} \\
&= \frac{(n+r-1)!}{[n!(r-1)!} \\
&= \binom{n+r-1}{r-1}
\end{aligned}
$$

a qual é a solução encontrada anteriormente. A igualdade acima é verdadeira sempre que r for um inteiro positivo.

Referências

1. **SANTOS**, José Plínio O., **MELLO**, Margarida P., **MURARI**, Idani T. Introdução à Análise Combinatória, Editora Ciência Moderna, 2007.