Análise Combinatória

Números de Fibonacci e de Catalan

Prof. Edson Alves

Faculdade UnB Gama

Sumário

Números de Fibonacci

Definição dos números de Fibonacci

O n-ésimo número de Fibonacci $F(n)$ é definido pela recorrência

$$\begin{aligned} F(0) &= 0 \\ F(1) &= 1 \\ F(n) &= F(n-1) + F(n-2), \qquad n \geq 2 \end{aligned}$$

Os primeiros termos da sequência de Fibonacci são:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, \ldots$$

Limites práticos dos números de Fibonacci

- Os números de Fibonacci crescem rapidamente, de modo que o número de termos que podem ser computados em tipos inteiros de C/C++ é bastante restrito
- Para variáveis de 32-*bits* é possível calcular o valor exato de $F(n)$ para $n \leq 46$ (a saber, $F(46) = 1836311903$)
- Para variáveis de 64-*bits*, os valores serão exatos para $n \leq 92$ (observe que $F(92) = 7540113804746346429$)
- Para valores de n superiores a 92, é necessário ou trabalhar com aritmética estendida ou com aritmética modular

Implementação recursiva dos números de Fibonacci

```
long long recursive_fibonacci(long long n)
{
    if (n == 0 or n == 1)
        return n;

    return recursive_fibonacci(n - 1) + recursive_fibonacci(n - 2);
}
```

- A implementação acima tem como vantagem a simplicidade, uma vez que corresponde à definição apresentada
- Contudo a complexidade assintótica é $O(2^n)$

Implementação iterativa em Python

```python
def iterative_fibonacci(n):
    if n < 2:
        return n

    a = 0
    b = 1

    for _ in range(n):
        a, b = b, a + b

    return a
```

- Esta versão tem complexidade $O(n)$
- A linguagem Python implementa nativamente com aritmética estendida, de modo que esta função pode computar $F(n)$ para $n > 92$

Implementação usando programação dinâmica

```python
fib = [0, 1]

def fibonacci(n):
    if n < len(fib) + 1:
        return fib[n]

    next = len(fib)

    while next <= n:
        fib.append(fib[next - 1] + fib[next - 2])
        next += 1

    return fib[n]
```

- Os números de Fibonacci podem ser definidos por meio de um sistema de equações de diferenças lineares
- Seja $u(n)$ um vetor cujas duas componentes são os números de Fibonacci $F(n+1)$ e $F(n)$
- Assim, vale que

$$u(n+1) = Au(n),$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Equações de diferenças lineares

- Observe que $u(1) = Au(0), u(2) = Au(1) = A^2u(0)$, etc, e assim por diante
- De fato,

$$u(n) = A^n u(0)$$

- Usando exponenciação rápida para computar A^n, é possível determinar $F(n)$ em $O(\log n)$
- Veja que $F(n)$ ocupará as posições da diagonal secundária de A^n

Cálculo de $F(n)$ em $O(\log n)$

```
class Matrix {
    long long _a, _b, _c, _d;

public:
    Matrix(long long a = 1, long long b = 0, long long c = 0, long long d = 1)
        : _a(a), _b(b), _c(c), _d(d) {}

    Matrix operator*(const Matrix& m) const {
        auto a = _a * m._a + _b * m._c;
        auto b = _a * m._b + _b * m._d;
        auto c = _c * m._a + _d * m._c;
        auto d = _c * m._b + _d * m._d;
        return Matrix(a, b, c, d);
    }

    long long b() const { return _b; }
};
```

Cálculo de $F(n)$ em $O(\log n)$

```cpp
long long fast_fibonacci(long long n)
{
    Matrix res, A(1, 1, 1, 0);

    while (n)
    {
        if (n & 1)
            res = res * A;

        A = A * A;
        n >>= 1;
    }

    return res.b();
}
```

Propriedades da sequência de Fibonacci

- A sequência de Fibonacci tem várias propriedades interessantes
- A razão entre dois termos consecutivos da série tende à razão áurea, isto é,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(n+1)}{F(n)} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

- A soma dos n primeiros termos da sequência pode ser computada por meio de uma soma telescópica e é igual a

$$\sum_{i=1}^{n} F(i) = F(n+2) - 1$$

Propriedades da sequência de Fibonacci

- A soma dos quadrados dos n primeiros termos da sequência é igual a

$$\sum_{i=1}^{n} F(i)^2 = F(n)F(n+1)$$

- Para qualquer $m > 1$ fixo, a sequência dos restos $r(n,m)$ é cíclica, onde

$$r(n,m) = F(n) \bmod m$$

- O período de $r(n,m)$ é denominado Período de Pisano $\pi(m)$

Período de Pisano

- Alguns valores comuns:
  - $\pi(2) = 3$
  - $\pi(10) = 60$
  - $\pi(100) = 300$
  - $\pi(10^k) = 15 \times 10^{k-1}, k \geq 3$
- Exceto para o caso $m = 2$, o período de Pisano é sempre par

Números de Catalan

Definição dos números de Catalan

Os números de Catalan são definidos pela da recorrência

$$C(n+1) = \sum_{i=0}^{n} C(i)C(n-i), \qquad n \geq 0,$$

e pelo caso base $C(0) = 1$.

Os primeiros números de Catalan são

$$1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, \ldots$$

Cálculo

- A soma que define a recorrência tem uma fórmula fechada, de modo que

$$C(n) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

- Outra recorrência, com o mesmo caso base da recorrência original, decorre desta forma fechada:

$$C(n+1) = \frac{2(2n+1)}{n+2}C(n)$$

Implementação dos números de Catalan em $O(n)$

```
// Com variáveis do tipo `long long` é possível computar até
// o 33º número de Catalan sem overflow.
long long catalan(int n)
{
    if (n == 0)
        return 1;

    if (C[n] != -1)
        return C[n];

    C[n] = (2*(2*n - 1)*catalan(n - 1))/(n + 1);

    return C[n];
}
```

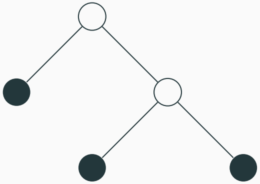
Aplicação: sequências válidas de pares de parêntesis

- A primeira aplicação notável dos números de Catalan $C(n)$ é a contagem do número de sequências corretas formadas por $2n$ pares de parêntesis
- Para $n = 0$ há uma única sequência: a sequência vazia
- Para $n = 1$ também existe uma única sequência: `()`
- Para $n = 2$ há duas sequências possíveis: `()()`, `(())`
- Para $n = 3$ há $C(3) = 5$ sequências:

`()()()`, `(())()`, `()(())`, `((()))`, `(()())`

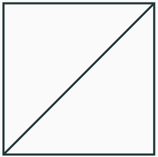
Aplicação: contagem de árvores binárias completas

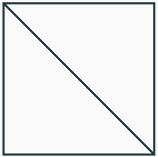
- A segunda aplicação notável é a contagem de árvores binárias completas, isto é, cada nó tem ou dois filhos ou nenhum
- Há $C(n)$ árvores binárias completas com $n + 1$ folhas
- Para $n = 3$ são $C(2) = 2$ árvores:



Aplicação: triangularização de um polígono convexo

- Uma terceira aplicação seria a contagem de triangularizações de um polígono convexo de $n+2$ lados
- Exsitem $C(n)$ triangularizações possíveis
- Por exemplo, para um quadrado $(n=2)$ são duas triangularizações distintas:





Problemas propostos

1. OJ 763 – Fibinary Numbers
2. OJ 948 – Fibonaccimal Base
3. OJ 10303 – How Many Trees?
4. OJ 10312 – Expression Bracketing
5. OJ 10689 – Yet another Number Sequence

Referências

1. **HALIM**, Felix; **HALIM**, Steve. *Competitive Programming 3*, 2010.
2. Wolfram Math World. Pisano Period. Acesso em 28/09/2017.
3. Wikipédia. Catalan Numbers. Acesso em 05/10/2017.
4. Wikipédia. Pisano Period. Acesso em 28/09/2017.
5. Wikipédia. Sequência de Fibonacci. Acesso em 28/09/2017.

Soluções dos problemas propostos

OJ 763 – Fibinary Numbers

Versão resumida do problema: determine a representação em base de Fibonacci da soma dos números a e b dados em base de Fibonacci.

Restrição: a, b tem, no máximo, 100 dígitos em base de Fibonacci

Solução em $O(N)$

- Primeiramente é preciso observar que não é possível somar diretamente os números em base de Fibonacci
- Por exemplo, em base de Fibonacci o número 5 é representado por `1000` e a soma $5 + 5 = 10$ teria representação `10010`
- Veja que ao somar os dois dígitos 1 correspondentes, o dígito que o ocupa a segunda posição da representação, o qual já teria sido processado, foi modificado
- Assim, a solução consiste em converter a e b para a base decimal, obter a soma $c = a + b$ e converter c para a base de Fibonacci
- Se $N = \max\{|a|, |b|\}$, então esta solução tem complexidade $O(N)$

Solução em $O(N)$

```python
import sys


fibs = [1, 2]

while len(fibs) <= 101:
    fibs.append(fibs[-1] + fibs[-2])


def to_decimal(n):

    ys = list(map(lambda x: int(x), n))[::-1]

    return sum(map(lambda x, y: x*y, fibs, ys))


```

Solução em $O(N)$

```python
def to_fibinary(n):

    if n == 0:
        return '0\n'

    res = []

    for fib in fibs[::-1]:
        if fib <= n:
            n -= fib
            res.append('1')
        else:
            res.append('0')

    return ''.join(res).lstrip('0') + '\n'


```

Solução em $O(N)$

```python
def fibinary_sum(p):

    a, b = p
    n = to_decimal(a) + to_decimal(b)
    return to_fibinary(n)


def solve(xs):

    return map(lambda p: fibinary_sum(p), xs)


if __name__ == '__main__':

    xs = [x.strip() for x in sys.stdin.readlines() if x.strip()]
    xs = list(zip(xs[::2], xs[1::2]))
    print('\n'.join(solve(xs)), end='')
```

OJ 10303 – How Many Trees?

Versão resumida do problema: compute o número de árvores binárias de busca distintas que podem ser formadas a partir de um conjunto de N elementos distintos

Restrição: $1 \leq N \leq 1.000$

Solução em $O(N)$

- Este é o tipo de problema que fica simplificado se o competidor conhecer os números de Catalan
- Os três exemplos dados correspondem as valores $N = 1, 2, 3$ e as respostas correspondentes são os três primeiros números de Catalan
- É possível resolver manualmente ainda o caso $N = 4$, e a resposta associada, 14, confirma a suspeita da contagem corresponder aos números de Catalan
- Como o N-ésimo número de Catalan pode ser computado diretamenta a partir de N por meio do cálculo de dois fatoriais, a complexidade da solução é $O(N)$ para cada caso de teste

Solução em $O(N)$

```
import sys
import math


def catalan(n):
    return str(math.factorial(2*n)//((n + 1)*math.factorial(n)**2))

def solve(ns):
    return map(catalan, ns)

if __name__ == '__main__':
    xs = sys.stdin.readlines()
    ns = map(int, xs)
    ans = solve(ns)

    print('\n'.join(ans))
```