Geometria Computacional

Polígonos: Treliças

Prof. Edson Alves

2019

Faculdade UnB Gama

Sumário

Definição

Definição de treliça

- Um polígono simples cujos vértices tem coordenadas inteiras em um plano bidimensional é denominado treliça (*lattice*)
- As treliças são mais adequadas para se trabalhar na prática, pois permite que alguns algoritmos possam trabalhar exclusivamente com números inteiros, evitando erros de precisão
- Em computação gráfica é possível relacionar seus vértices diretamente com os *pixels* da tela
- Outra vantagem das treliças é que elas podem ser armazenadas em arquivos ou transmitidas via rede com maior simplicidade e utilizando menos espaço, por não necessitar de informações após o ponto decimal

Teorema de Pick

Motivação

- O Teorema de Pick relaciona a área de uma treliça com o número pontos com coordenadas inteiras que estão na borda com o número de pontos com coordenadas inteiras que estão estritamente no interior do polígono
- Georg Alexander Pick foi um matemático austríaco, que descobriu e provou esta relação em 1899
- Se estas quantias forem conhecidas, é possível computar a área do polígono em $O(1)$, mesmo sem conhecer seus vértices
- Conhecidos os vértices, é possível também computar o número de pontos com coordenadas inteiras no interior do polígono em $O(N)$

Teorema de Pick

Teorema de Pick

Seja P uma treliça com área A. Seja I e B o número de pontos com coordenadas inteiras no interior e na borda de P, respectivamente. Então

$$A = I + \frac{B}{2} - 1$$

Demonstração do Teorema de Pick

Demonstração: Considere que todas as figuras geométricas citadas nesta prova tenham vértices com coordenadas inteiras.

A prova do Teorema de Pick é feita em várias etapas:

(1) mostrar que a fórmula é válida para quadrados unitários

(2) mostrar que a fórmula vale para qualquer retângulo cujos lados são paralelos aos eixos ordenados

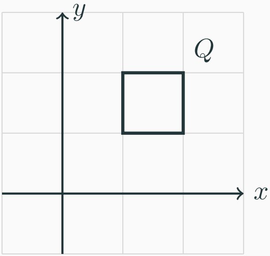
(3) mostrar que a fórmula vale para triângulos retângulos

(4) mostrar que a fórmula vale para triângulos arbitrários

(5) mostrar que a fórmula vale para é um polígono simples

Demonstração da parte (1)

(1) Seja Q um quadrado unitário.



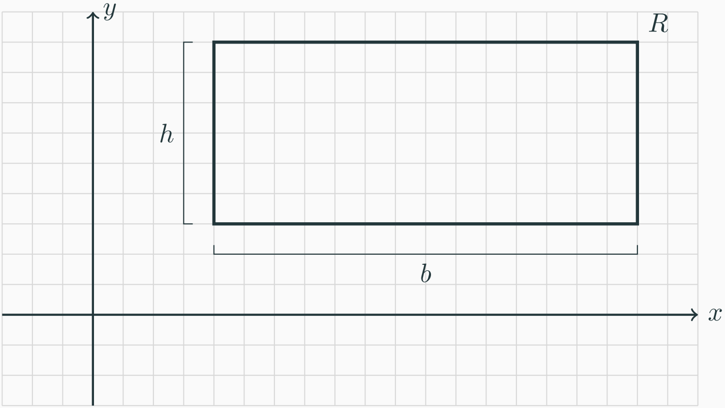
Sabemos que $A = 1$. Temos $I = 0$ e $B = 4$, de modo que

$$I + \frac{B}{2} - 1 = 0 + 2 - 1 = 1 = A$$

Logo o resultado é válido para quadrados unitários.

Demonstração da parte (2)

(2) Seja R um retângulo cujos lados são paralelos com os eixos x e y e medem b e h unidades, respectivamente.



Demonstração da parte (2)

Na borda do retângulo há $B = 2(b+1) + 2(h+1) - 4$ pontos com coordenadas inteiras, sendo que o termo -4 compensa o fato dos vértices estarem sendo contabilizados duas vezes no termo $2(b+1) + 2(h+1)$.

No interior do retângulo há $I = (b-1)(h-1)$ pontos com coordenadas inteiras.

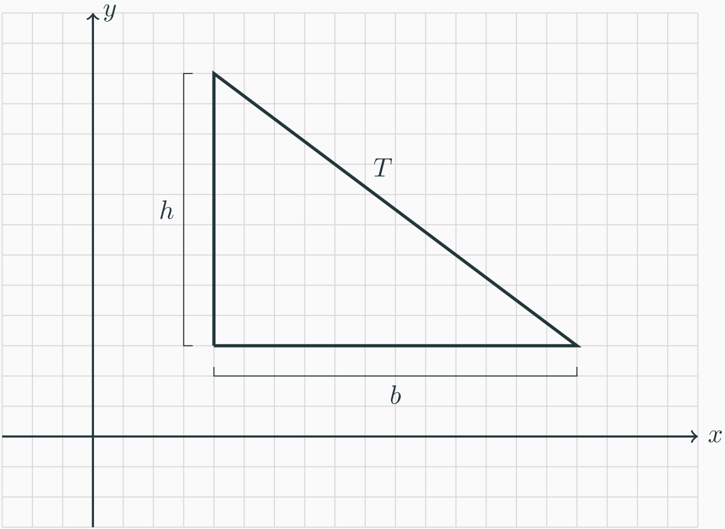
Sabendo que a área de um retângulo com base b e altura h é $A = bh$, segue que

$$\begin{aligned} I + \frac{B}{2} - 1 &= (b-1)(h-1) + \frac{2(b+1) + 2(h+1) - 4}{2} - 1 \\ &= (bh - b - h + 1) - (b + 1 + h + 1 - 2) - 1 \\ &= bh = A \end{aligned}$$

Portanto o resultado vale para um retângulo cujos lados estão alinhados com os eixos ordenados.

Demonstração da parte (3)

(3) Seja T um triângulo retângulo.



Demonstração da parte (3)

No base do triângulo há $b+1$ pontos com coordenadas inteiras; já na altura são $h+1$ pontos.

Seja $d=(b,h)$ o maior divisor comum entre b e h. A reta que passa pela hipotenusa tem inclinação $m=h'/b'$, onde $b=db', h=dh'$. Isto significa que, para cada unidade no sentido x positivo, a altura y varia m unidades.

Assim, a equação da reta é dada por $y=m(x-x_0)+y_0$, onde x_0 e y_0 tem coordenadas inteiras. Assim, os valores de x serão inteiros quando $(x-x_0)$ assumir valores múltiplos de b'.

Como o segmento começa com $y=y_0$ e termina com $y=y_1$ inteiro, com $y_1-y_0=h$. Em y_0 temos $x=x_0$, ou seja, $(x-x_0)=0=0\cdot b'$. Em y_1 temos

$$y_1=y_0+h=m(x-x_0)+y_0=\frac{h'}{b'}(x-x_0)+y_0$$

Demonstração da parte (3)

Assim,

$$\frac{h'}{b'}(x - x_0) = h$$
$$(x - x_0) = h\frac{b'}{h'} = b' \cdot d,$$

de modo que y será inteiros em $d + 1$ múltiplos de b', a saber: $0, 1, \ldots, d$.

Levando em consideração que os vértices são contados duas vezes cada, o número de pontos B com coordenadas inteiras na borda de T é igual a

$$B = (b + 1) + (h + 1) + (d + 1) - 3 = b + h + d$$

O número de pontos com coordenadas inteiras I no interior de T é igual a metade do número de pontos no interior do retângulo com base b e altura h, exceto os pontos sobre a diagonal e que são interiores, isto é, $(d + 1) - 2 = d - 1$.

Demonstração da parte (3)

Logo,

$$I = \frac{(b-1)(h-1)-(d-1)}{2} = \frac{bd-b-h-d+2}{2}$$

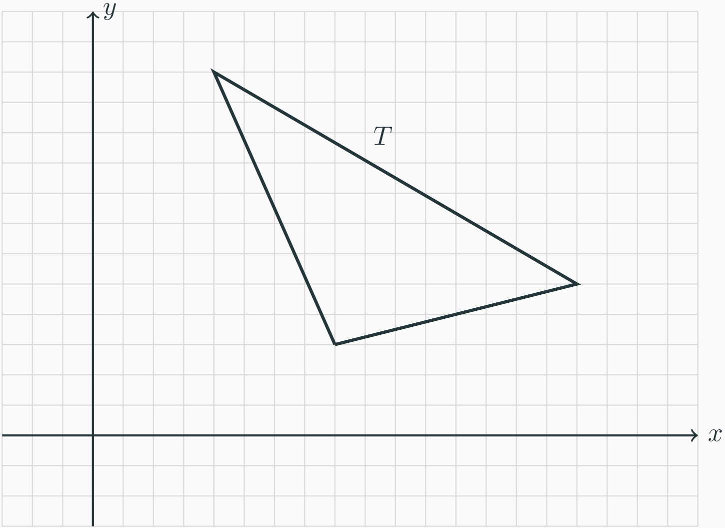
Sabendo que a área de um triângulo retângulo com base b e altura h é dada por $A = bh/2$, segue que

$$\begin{aligned} I + \frac{B}{2} - 1 &= \frac{bd-b-h-d+2}{2} + \frac{b+d+h}{2} - 1 \\ &= \frac{bh}{2} + \frac{2}{2} - 1 = \frac{bh}{2} = A, \end{aligned}$$

portanto o resultado vale para T.

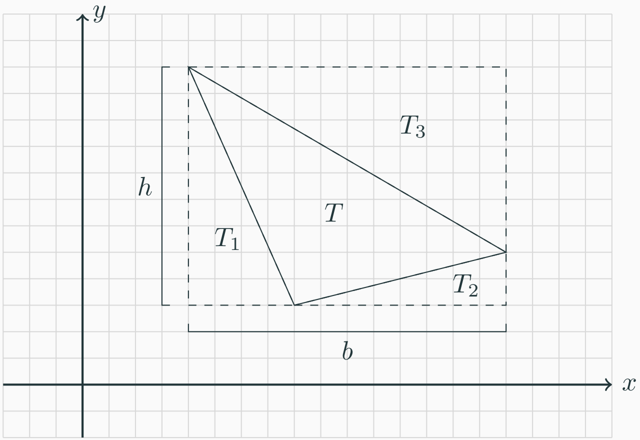
Demonstração da parte (4)

(4) Seja T um triângulo qualquer.



Demonstração da parte (4)

Seja $x_{min}, y_{min}, x_{max}, y_{max}$ os valores mínimos e máximos das coordenadas dos vértices. É possível construir um retângulo com base $b = x_{max} - x_{min}$ e altura $h = y_{max} - y_{min}$ através da união de T com três triângulos retângulos T_1, T_2 e T_3



Demonstração da parte (4)

O número de pontos com coordenadas inteiras no interior do retângulo R é igual a

$$I_R = I_{T_1} + I_{T_2} + I_{T_3} + I_T + (B_T - 3),$$

onde B_T é o número de pontos com coordenadas inteiras na borda de T

Por outro lado,

$$B_R = B_{T_1} + B_{T_2} + B_{T_3} - B_T$$

Como o resultado vale para retângulos e triângulos retângulos, e observando que

$$A_T = A_R - (A_{T_1} + A_{T_2} + A_{T_3}),$$

Demonstração da parte (4)

segue que

$$
\begin{aligned}
A_T &= \left(I_R - \frac{B_R}{2} - 1\right) - \left[(I_{T_1} + I_{T_2} + I_{T_3}) + \left(\frac{B_{T_1} + B_{T_2} + B_{T_3}}{2}\right) - 3\right] \\
&= (I_R - I_{T_1} + I_{T_2} + I_{T_3}) + \left(\frac{B_R - B_{T_1} - B_{T_2} - B_{T_3}}{2}\right) + 2 \\
&= (I_T + B_T - 3) - \left(\frac{B_T}{2}\right) + 2 \\
&= I_T + \frac{B_T}{2} - 1,
\end{aligned}
$$

logo o teorema é verdadeiro para um triângulo T qualquer.

Demonstração da parte (5)

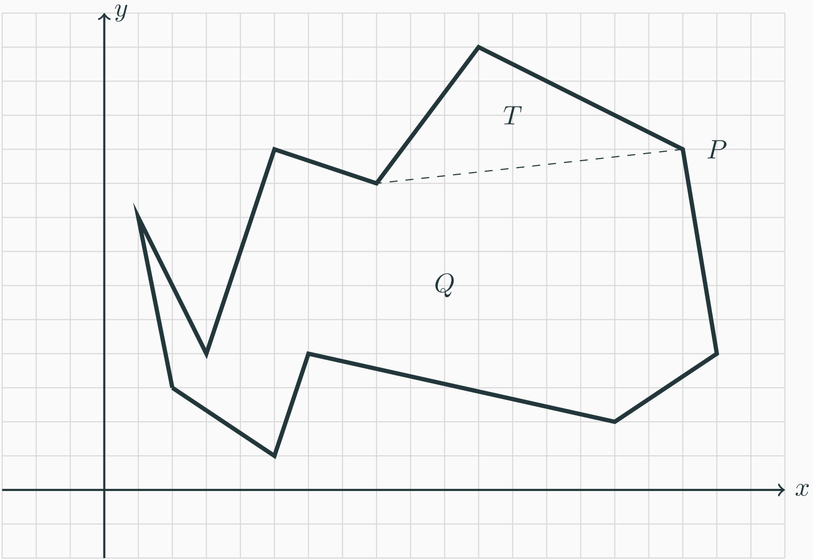
(5) A última parte é demonstrada por indução.

Seja P um polígono simples. O caso base ocorre para um triângulo, e o resultado é verdadeiro para qualquer triângulo T, conforme já demonstrado.

Suponha que o resultado seja verdadeiro para qualquer polígono simples como $m \geq 3$ lados. Seja P um polígono simples com $m+1$ lados. Como P é simples, ele pode ser decomposto na forma $P = T \cup Q$, onde T é um triângulo e Q um polígono simples com m lados, ambos compartilhando uma aresta em comum. Considere que o número de pontos com coordenadas inteiras na aresta comum de T e Q seja igual a k.

Desde modo, $I_P = I_T + I_Q + k$ e $B_P = B_T + B_Q - 2k$. Veja a figura a seguir.

Demonstração da parte (5)



Demonstração da parte (5)

Assim,

$$
\begin{aligned}
A_P &= A_T + A_Q \\
&= \left(I_T + \frac{B_T}{2} - 1\right) + \left(I_Q + \frac{B_Q}{2} - 1\right) \\
&= (I_T + I_Q + k) + \left(\frac{B_T + B_Q}{2} - k\right) - 1 \\
&= I_P + \left(\frac{B_T + B_Q - 2k}{2}\right) - 1 \\
&= I_P + \left(\frac{B_P}{2}\right) - 1,
\end{aligned}
$$

Portanto o resultado é válido para qualquer polígono simples.

$\square$

Referências

1. CP-Algorithms. Lattice points inside non-lattice polygon, acesso em 06/07/2019.
2. CP-Algoritms. Pick's Theorem, acesso em 06/07/2019.
3. Wikipedia. Pick's Theorem, acesso em 06/07/2019.