Union-Find Disjoint Sets

Definição e Implementação

Prof. Edson Alves - UnB/FGA 2020

Sumário

- 1. Definição
- 2. Implementação
- 3. Otimizações e Aplicações

Definição

UFDS

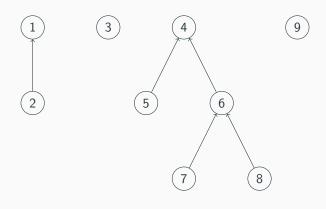
Definição

Union-find disjoint set (UFDS) é uma estrutura de dados que mantém uma coleção de conjuntos $\{S_1, S_2, \dots, S_N\}$ disjuntos, isto é, $S_i \cap S_j = \emptyset$ se $i \neq j$. Há duas operações básicas, com complexidade $O(\log N)$: a **união** (union_set(A, B)) de dois conjuntos disjuntos e a identificação do **representante** da união de conjuntos que o conjunto S pertence (find_set(S)).

Características da UFDS

- A UFDS foi proposta em 1971 por J. D. Hopcroft e J. D. Ullman
- Ela é composta por uma floresta de árvores
- Cada árvore representa uma união de subconjuntos
- A raiz de cada árvore é o representante da união
- Cada nó da árvore representa um dos conjuntos que compõem a união
- Dois conjuntos que pertencem a árvores distintas são disjuntos
- Duas árvores podem ser unidas tornando a raiz de uma delas filha da raiz da outra
- \bullet Se a árvore com o menor número de elementos for incorporada na de maior número de elementos, a união terá complexidade $O(\log N)$

Visualização de uma UFDS



Implementação

Construtor da UFDS

- \bullet Considere que cada um dos N conjuntos a serem representados na UFDS sejam identificados pelos inteiros de 1 a N
- ullet A UFDS tem dois vetores membros: size e ps
- ullet size[i] corresponde ao número de nós da árvore que tem i como raiz
- ps[i] é o pai de i na árvore que ele está contido
- Como inicialmente todos os conjuntos são disjuntos, temos size[i]=1 e ps[i]=i, para $i=1,2,\ldots,N$
- Observe que, ao contrário da convenção das árvores em computação, o pai da raiz é ele próprio, o que simplifica a implementação

Implementação do construtor da UFDS

```
1 #ifndef UNION_FIND_H
2 #define UNION FIND H
4 #include <vector>
5 #include <numeric>
6
7 class UFDS
8 {
9 private:
     std::vector<int> size, ps;
12 public:
      UFDS(int N) : size(N + 1, 1), ps(N + 1)
      {
14
          // ps = \{0, 1, 2, 3, ..., N\}
15
          std::iota(ps.begin(), ps.end(), 0);
16
18
```

Identificação dos representantes

- O método find_set(x) retorna o representante (raiz) da árvore onde x se encontra
- Para isso, basta seguir a cadeia de pais, até localizar um nó cujo pai é ele mesmo
- Se a união for baseada no tamanho das árvores, o tamanho de cada árvore tende a $O(\log N)$, de modo que este método também tem complexidade $O(\log N)$
- O método same_set(x, y) retorna verdadeiro se x e y pertencem a mesma árvore, ou falso, caso contrário
- A implementação é simples: basta confrontar os representantes de cada conjunto

Implementação da identificação de representantes

```
int find_set(int x) const

{
    return x == ps[x] ? x : find_set(ps[x]);

    }

bool same_set(int x, int y)

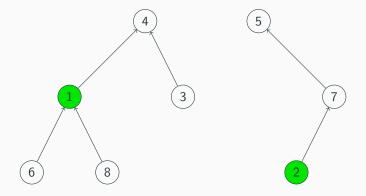
{
    return find_set(x) == find_set(y);
}
```

União de conjunto disjuntos

- O método union_set(x, y) une as árvores onde x e y estão localizados
- ullet Se x e y já estão na mesma árvore, nada deve ser feito
- ullet Caso contrário considere, sem perda de generalidade, que a árvore que contém x tem o mesmo número ou mais nós do que a árvore que contém y
- ullet Neste caso, a raiz da árvore de x passa ser o pai da raiz da árvore de y
- \bullet Como ambas raízes devem ser localizadas previamente, a complexidade deste método também é $O(\log N)$

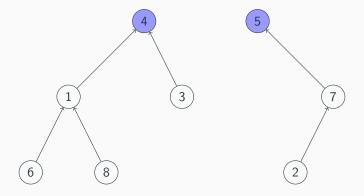
Visualização da união de árvores





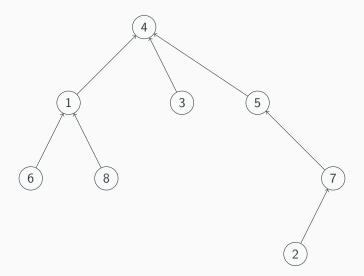
Visualização da união de árvores

union_set(1, 2)



Visualização da união de árvores

union_set(1, 2)



Implementação da união de conjuntos disjuntos

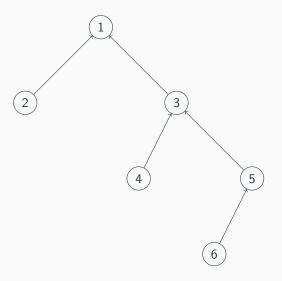
```
void union_set(int x, int y)
29
30
           if (same_set(x, y))
                return;
32
           int p = find_set(x);
34
           int q = find_set(y);
35
36
           if (size[p] < size[q])</pre>
37
                std::swap(p, q);
38
39
           ps[q] = p;
40
           size[p] += size[q];
41
42
43 };
44
45 #endif
```

Otimizações e Aplicações

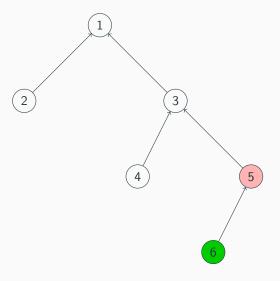
Compressão de caminho

- O método find_set(x) pode ser modificado para que, ao percorrer o caminho de x até a raiz, os nós intermediários passem a ter a raiz da árvore como pai
- Esta técnica é conhecida como compressão de caminho
- A medida que o método for invocado para diferentes valores de x, as árvores tendem a ter apenas dois níveis
- Usada em conjunto com a união por tamanho (ou por ranqueamento), a complexidade amortizada de ambas operações (união e identificação de representante) passa a ser $O(\alpha(n))$, onde $\alpha(n)$ é a função inversa de Ackermann
- Para qualquer n representável no universo físico, $\alpha(n) < 5$, de modo que as operações tem, na essência, complexidade constante

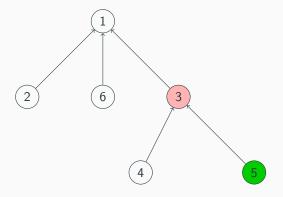
find_set(6)



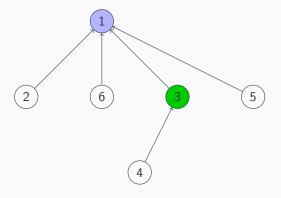
 $find_set(6)$



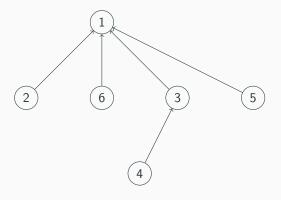
find_set(6)



 $find_set(6)$



 $find_set(6) = 1$



Implementação da compressão de caminho

```
void find_set(int x)
{
    return x == ps[x] ? x : (ps[x] = find_set(ps[x]));
}
```

Aplicações

- A UFDS pode ser aplicada em vários contextos
- Uma aplicação comum é na implementação do algoritmo de Kruskall para determinar a árvore mínima geradora (MST) de um grafo
- De modo geral, ela pode ser usada para identificar os componentes conectados de um grafo não-direcionado
- ullet Por fim, seja R uma relação de equivalência
- Se $(a,b) \in R$ (isto é, a está relacionado a b), então same_set(a, b) retorna verdadeiro

Referências

- 1. HALIM, Felix; HALIM, Steve. Competitive Programming 3, 2010.
- 2. **LAAKSONEN**, Antti. *Competitive Programmer's Handbook*, 2018.
- 3. **SEDGEWICK**, Robert. *Algorithms, 4th Edition*, 976 pgs, Addison-Wesley Professional, 2011.
- 4. **SKIENA**, Steven S.; **REVILLA**, Miguel A. *Programming Challenges*, 2003.
- 5. Wikipédia. Disjoint-set data structure, acesso em 05/03/2020.