Geometria Computacional

Polígonos

Prof. Edson Alves

2019

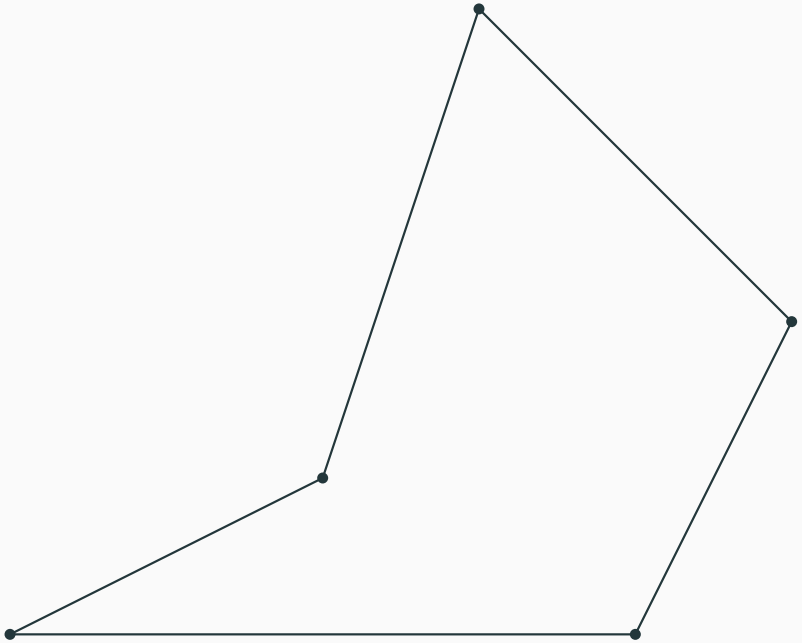
Faculdade UnB Gama

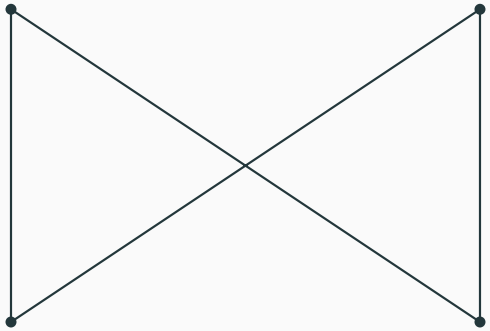
Sumário

Definição

Definição de polígono

- Polígonos são figuras planas delimitadas por caminhos fechados (o vértice de partida é o vértice de chegada), compostos por segmentos de retas que une vértices consecutivos
- Os segmentos que unem os vértices são denominados arestas
- Embora alguns polígonos especiais (triângulos, quadriláteros) possam ter tratamento especial, os algoritmos de polígonos podem ser aplicados igualmente a estes entes geométricos





Representação de polígonos

- A representação mais comum de um polígono é a listagem de seus vértices, sendo que as arestas ficam subentendidas (há sempre uma aresta unindo dois vértice consecutivos)
- Para facilitar a implementação de algumas rotinas, pode ser conveniente inserir, ao final da lista, o ponto de partida
- É preciso tomar cuidado: ao fazer isso, o número de vértices do polígono passa a ser o número de elementos da lista subtraído de uma unidade

```
template<typename T>
using Polygon = vector<Point<T>>;
```

- Esta implementação é a mais compacta possível, mas requer atenção a questão do número de vértices, conforme já comentado
- Uma implementação mais extensa evita os problemas já mencionados

Exemplo de implementação de um polígono em C++

```cpp
#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;

template<typename T>
struct Point { T x, y; };

template<typename T>
class Polygon {
private:
    vector<Point<T>> vs;
    int n;

public:
    // O parâmetro deve conter os n vértices do polígono
    Polygon(const vector<Point<T>>& ps) : vs(ps), n(vs.size())
    {
        vs.push_back(vs.front());
    }

```

Polígonos côncavos e convexos

- Um polígono é dito convexo se, para quaisquer dois pontos P e Q localizados no interior do polígono, o segmento de reta PQ não intercepta nenhuma das arestas do polígono
- Caso contrário, o polígono é dito côncavo
- É possível determinar se um polígono é ou não convexo sem recorrer à busca completa isto é, testar todos os possíveis pares de pontos interiores ao polígono
- A orientação D entre pontos e reta pode ser utilizada para tal fim
- Basta checar se, para quaisquer três pontos consecutivos do polígono, eles tem a mesma orientação: ou sempre a esquerda, ou sempre à direita

Implementação da rotina de verificação de convexidade

```
21 private:
22     T D(const Point<T>& P, const Point<T>& Q, const Point<T>& R) const
23     {
24         return (P.x * Q.y + P.y * R.x + Q.x * R.y) -
25             (R.x * Q.y + R.y * P.x + Q.x * P.y);
26     }
27
28 public:
29     bool convex() const {
30         // Um polígono deve ter, no minimo, 3 vértices
31         if (n < 3) return false;
32
33         int P = 0, N = 0, Z = 0;
34
35         for (int i = 0; i < n; ++i) {
36             auto d = D(vs[i], vs[(i + 1) % n], vs[(i + 2) % n]);
37             d ? (d > 0 ? ++P : ++N) : ++Z;
38         }
39
40         return not ((P and N) or (P == 0 and N == 0));
41     }
```

Algoritmos envolvendo polígonos

Perímetro

- O perímetro de um polígono consiste na medida de seu contorno, isto é, a soma dos comprimentos de suas aresta
- Ele pode ser calculado diretamente a partir da representação do polígono por meio de seus vértices

```
43 private:
44     double distance(const Point<T>&P, const Point<T>& Q)
45     {
46         return hypot(P.x - Q.x, P.y - Q.y);
47     }
48 
49     double perimeter() const
50     {
51         auto p = 0.0;
52 
53         for (int i = 0; i < n; ++i)
54             p += distance(vs[i], vs[i + 1]);
55 
56         return p;
57     }
```

Área

- A área delimitada por um polígono pode ser também determinada diretamente a partir de seus vértices
- Ela corresponde à metade do valor absoluto do "determinante" abaixo (as aspas significam que a notação remete a um determinante, mas não é um determinante de fato, uma vez que a matriz não é quadrada)

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \dots & \dots \\ x_{n-1} & y_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} |x_0 y_1 + x_1 y_2 + \ldots + x_{n-1} y_0 - x_1 y_0 - x_2 y_1 - \ldots - x_0 y_{n-1}|$$

Implementação da área do polígono

```
58
59      double area() const
60      {
61          auto a = 0.0;
62
63          for (int i = 0; i < n; ++i)
64          {
65              a += vs[i].x * vs[i + 1].y;
66              a -= vs[i + 1].x * vs[i].y;
67          }
68
69          return 0.5 * fabs(a);
70      }
71
```

Área de polígonos regulares

- Um polígono é dito regular se todos os seus lados tenham a mesma medida
- A área também pode ser computada através do conhecimento do número de lados n e um dos três valores abaixo:
  1. o comprimento de um dos lados (s)
  2. a apótema, ou raio do círculo inscrito (r)
  3. o raio do círculo circunscrito (R)
- As expressões abaixo relacionam a área do polígono regular com as medidas supracitadas:

$$A = \frac{1}{2}nrs = \frac{1}{4}ns^2 \cot\frac{\pi}{n} = nr^2 \tan\frac{\pi}{n} = \frac{1}{2}nR^2 \sin\frac{2\pi}{n}$$

Relação entre pontos e polígonos

- Para se verificar se um ponto P está localizado, ou não, no interior de um polígono, basta computar a soma dos ângulos formados por P e cada par de vértices do polígono
- Esta soma deve adicionar o ângulo se o ponto está na mesma orientação do polígono, e subtrair em caso contrário
- Se o total for igual a 2π, o ponto está no interior do polígono
- Esta verificação vale tanto para polígonos convexos quanto côncavos

Implementação da relação entre pontos e polígonos

```
72 private:
73     // Ângulo APB, em radianos
74     double angle(const Point<T>& P, const Point<T>& A, const Point<T>& B)
75     {
76         auto ux = P.x - A.x;
77         auto uy = P.y - A.y;
78 
79         auto vx = P.x - B.x;
80         auto vy = P.y - B.y;
81 
82         auto num = ux * vx + uy * vy;
83         auto den = hypot(ux, uy) * hypot(vx, vy);
84 
85         // Caso especial: se den == 0, algum dos vetores é degenerado: os
86         // dois pontos são iguais. Neste caso, o ângulo não está definido
87 
88         return acos(num / den);
89     }
90 
```

Implementação da relação entre pontos e polígonos

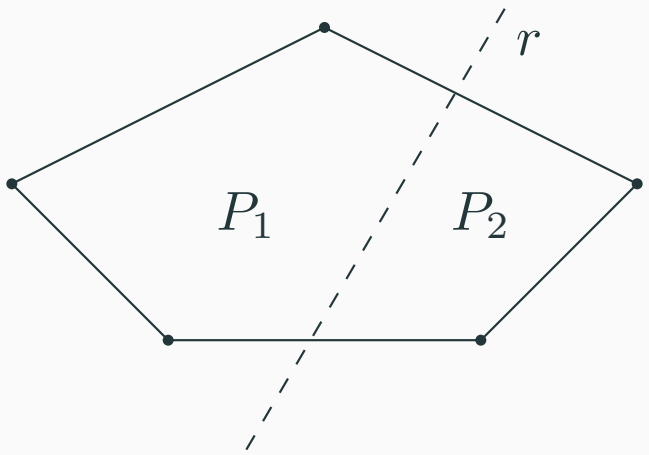
```
91      bool equals(double x, double y)
92      {
93          static const double EPS { 1e-9 };
94
95          return fabs(x - y) < EPS;
96      }
97
98  public:
99      bool contains(const Point<T>& P) const
100     {
101         if (n < 3)
102             return false;
103
104         auto sum = 0.0;
105
106         for (int i = 0; i < n; ++i)
107         {
108             auto d = D(P, vs[i], vs[i + 1]);
109
110             // Pontos sobre as arestas ou vértices são considerados
111             // interiores
```

Implementação da relação entre pontos e polígonos

```
112             if (equals(d, 0))
113                 return true;
114
115             auto a = angle(P, vs[i], vs[i + 1]);
116
117             sum += d > 0 ? a : -a;
118         }
119
120         static const double PI = acos(-1.0);
121
122         return equals(fabs(sum), 2*PI);
123     }
124
```

Relação entre polígonos e retas

- Considere uma reta r, que passa pelos pontos A e B, e um polígono convexo P, com n vértices
- A reta r secciona o polígono em duas regiões, esquerda e direita, que podem ser ou uma vazias e outra contendo P integralmente, ou serem compostas de dois polígonos convexos P_1 e P_2, resultantes do corte de P por r
- A rotina `cut_polygon()`, apresentada a seguir e adaptada de Competitive Programming 3, retorna a região a esquerda do corte, considerando que P está descrito no sentido anti-horário



Implementação da relação entre pontos e retas

```
125 private:
126     // Interseção entre a reta AB e o segmento de reta PQ
127     Point<T> intersection(const Point<T>& P, const Point<T>& Q,
128                           const Point<T>& A, const Point<T>& B)
129     {
130         auto a = B.y - A.y;
131         auto b = A.x - B.x;
132         auto c = B.x * A.y - A.x * B.y;
133         auto u = fabs(a * P.x + b * P.y + c);
134         auto v = fabs(a * Q.x + b * Q.y + c);
135 
136         // Média ponderada pelas distâncias de P e Q até a reta AB
137         return {(P.x * v + Q.x * u)/(u + v), (P.y * v + Q.y * u)/(u + v)};
138     }
139 
140 public:
141     // Corta o polígono com a reta r que passa por A e B
142     Polygon cut_polygon(const Point<T>& A, const Point<T>& B) const
143     {
144         vector<Point<T>> points;
145         const double EPS { 1e-9 };
```

Implementação da relação entre pontos e retas

```
147         for (int i = 0; i < n; ++i)
148         {
149             auto d1 = D(A, B, vs[i]);
150             auto d2 = D(A, B, vs[i + 1]);
151 
152             // Vértice à esquerda da reta
153             if (d1 > -EPS)
154                 points.push_back(vs[i]);
155 
156             // A aresta cruza a reta
157             if (d1 * d2 < -EPS)
158                 points.push_back(intersection(vs[i], vs[i + 1], A, B));
159         }
160 
161         return Polygon(points);
162     }
163 
```

Círculo circunscrito

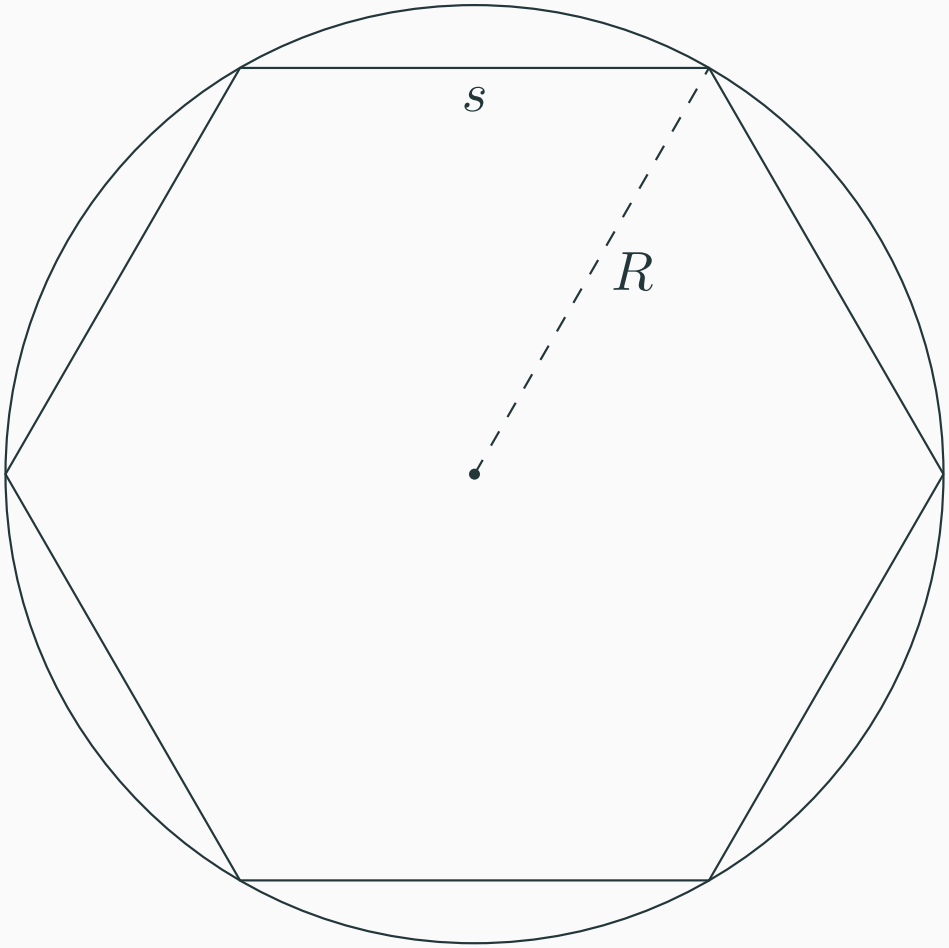
- Um polígono regular (medidas dos lados iguais) de n lados possui um círculo circunscrito (cujos vértices pertencem ao círculo) e um círculo inscrito (cujos lados são tangentes ao círculo)
- O raio R do círculo circunscrito é igual ao raio do polígono: a distância entre o seu centro e um de seus vértices
- Se s é a medida do lado do polígono, então

$$\sin \frac{\pi}{n} = \frac{(s/2)}{R},$$

isto é,

$$R = \frac{s}{2} \csc \frac{\pi}{n}$$

Visualização do círculo circunscrito



Implementação do cálculo do raio R do círculo circunscrito

```
164     double circumradius() const
165     {
166         auto s = distance(vs[0], vs[1]);
167         const double PI { acos(-1.0) };
168 
169         return (s/2.0)*(1.0/sin(PI/n));
170     }
171 
```

Círculo inscrito

- O raio r do círculo inscrito pode ser determinado a partir da medida s de um dos lados do polígono regular, através da relação

$$\tan \frac{\pi}{n} = \frac{(s/2)}{r},$$

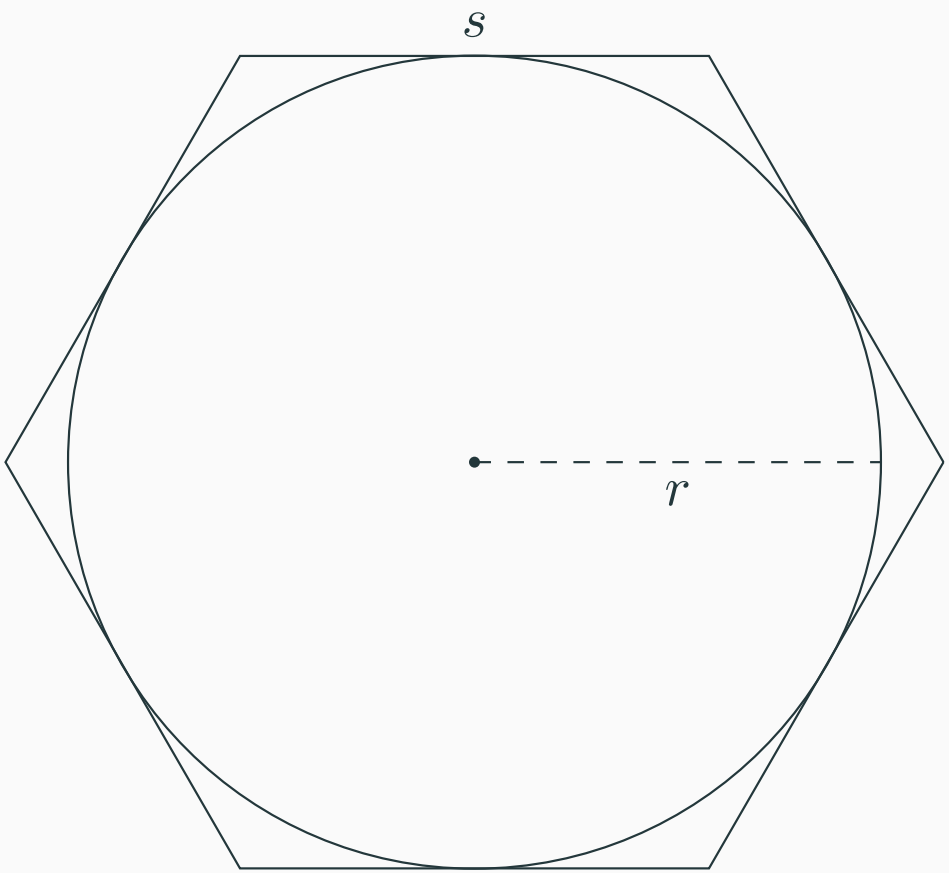
isto é,

$$r = \frac{s}{2} \cot \frac{\pi}{n}$$

- O raio r também é denominado apótema do polígono regular
- Os raios R e r se relacionam de modo que

$$r = R \cos \frac{\pi}{n}$$

Visualização do círculo inscrito



Implementação do cálculo do raio r do círculo inscrito

```
172     double apothem() const
173     {
174         auto s = distance(vs[0], vs[1]);
175         const double PI { acos(-1.0) };
176 
177         return (s/2.0)*(1.0/tan(PI/n));
178     }
```

Referências

1. **HALIM**, Felix; **HALIM**, Steve. *Competitive Programming 3*, 2010.
2. Math Open Reference. Incircle of a Polygon, acesso em 18/08/2016.
3. Mathwords. Area of a Regular Polygon, acesso em 20/09/2016.
4. Wikipédia. Regular Polygon, acesso em 18/08/2016.