Grafos

Árvores: Diâmetro

Prof. Edson Alves

Faculdade UnB Gama

Definição de diâmetro

Definição de diâmetro

Seja $G(V, E)$ um grafo. O diâmetro de G é igual ao maior dentre todos os tamanhos dos caminhos entre os pares de vértices $u, v \in V$.

Características do diâmetro

Características do diâmetro

- **O caminho cujo tamanho determina o diâmetro não é, necessariamente, único**

Características do diâmetro

- ⋆ **O caminho cujo tamanho determina o diâmetro não é, necessariamente, único**

- ⋆ **Computar todos os tamanho com Floyd-Warshall em $O(V^3)$ e determinar o maior dentre eles em $O(V^2)$ determina o diâmetro corretamente**

Características do diâmetro

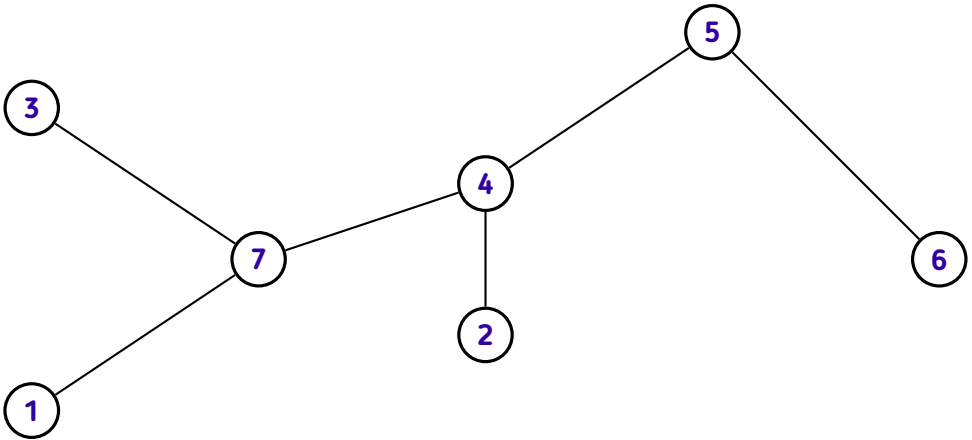
- ⋆ O caminho cujo tamanho determina o diâmetro não é, necessariamente, único

- ⋆ Computar todos os tamanho com Floyd-Warshall em $O(V^3)$ e determinar o maior dentre eles em $O(V^2)$ determina o diâmetro corretamente

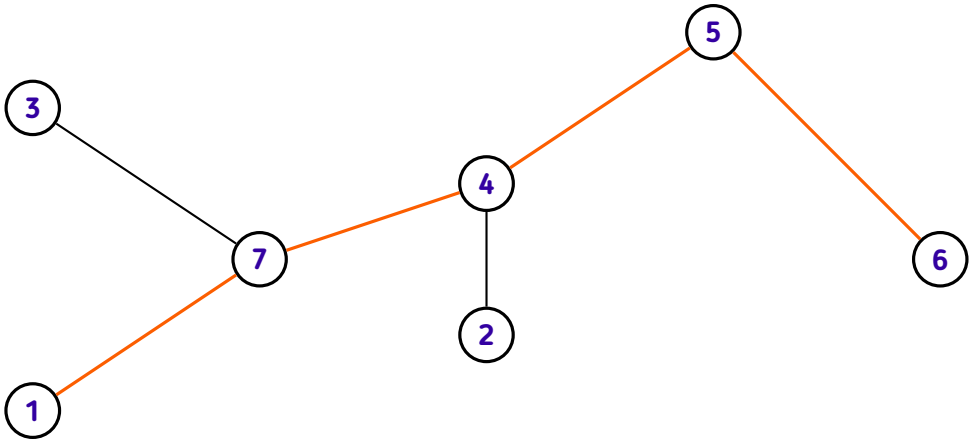
- ⋆ Porém, é possível determinar o diâmetro usando programação dinâmica ou duas BFS

Características do diâmetro

- ⋆ O caminho cujo tamanho determina o diâmetro não é, necessariamente, único
- ⋆ Computar todos os tamanho com Floyd-Warshall em $O(V^3)$ e determinar o maior dentre eles em $O(V^2)$ determina o diâmetro corretamente
- ⋆ Porém, é possível determinar o diâmetro usando programação dinâmica ou duas BFS
- ⋆ Em ambos casos, a complexidade é $O(V)$


5
3
4
7
6
2
1

Diâmetro: 4



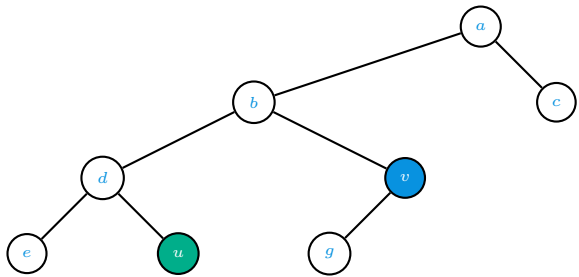
Definição de pico de um caminho

Definição de pico de um caminho

Seja T uma árvore enraizada e considere dois vértices u e v de T. O pico do caminho de u a v é o nó que ocupa o nível baixo em T.

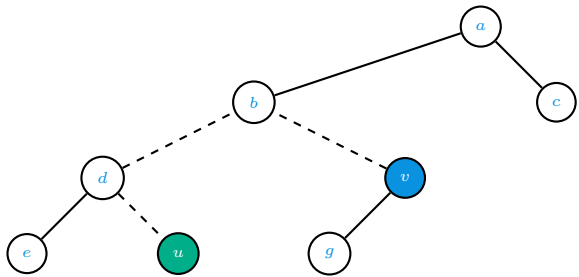
Definição de pico de um caminho

Seja T uma árvore enraizada e considere dois vértices u e v de T. O pico do caminho de u a v é o nó que ocupa o nível baixo em T.



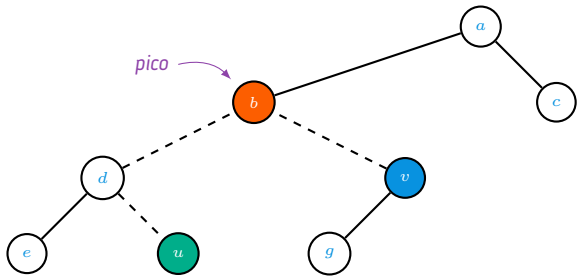
Definição de pico de um caminho

Seja T uma árvore enraizada e considere dois vértices u e v de T. O pico do caminho de u a v é o nó que ocupa o nível baixo em T.



Definição de pico de um caminho

Seja T uma árvore enraizada e considere dois vértices u e v de T. O pico do caminho de u a v é o nó que ocupa o nível baixo em T.



Diâmetro de uma árvore com programação dinâmica

Diâmetro de uma árvore com programação dinâmica

$\mathsf{maxLength}[u]$

Diâmetro de uma árvore com programação dinâmica

Tamanho do maior caminho que tem pico igual a u

maxLength$[u]$

Diâmetro de uma árvore com programação dinâmica

$$\text{maxLength}[u] = \begin{cases} 0, & \text{se } u \text{ não tem filhos} \end{cases}$$

Diâmetro de uma árvore com programação dinâmica

$$\text{maxLength}[u] = \begin{cases} 0, & \text{se } u \text{ não tem filhos} \\ 1 + \text{toLeaf}[v], & \text{se } u \text{ tem apenas um filho } v, \end{cases}$$

Diâmetro de uma árvore com programação dinâmica

$$\text{maxLength}[u] = \begin{cases} 0, & \text{se } u \text{ não tem filhos} \\ 1 + \text{toLeaf}[v], & \text{se } u \text{ tem apenas um filho } v, \\ 2 + \text{toLeaf}[v] + \text{toLeaf}[w], & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

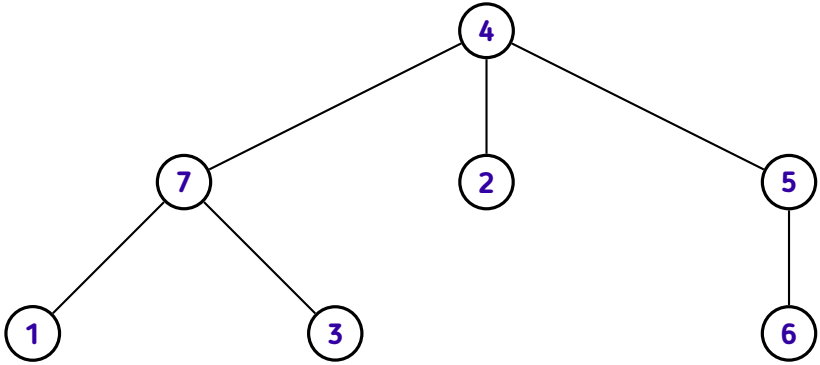
onde v e w são dois filhos distintos de u com os dois maiores valores de toLeaf

Diâmetro de uma árvore com programação dinâmica

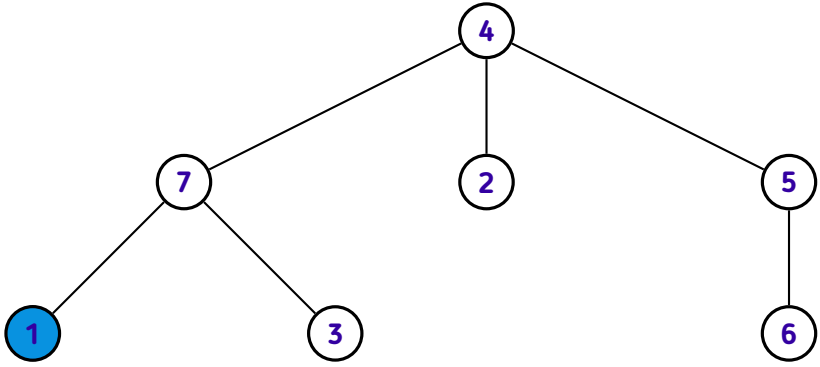
$$\text{diameter}(G) = \max_{u \in V} \{\ \text{maxLength}[u]\ \}$$

$$\text{maxLength}[u] = \begin{cases} 0, & \text{se } u \text{ não tem filhos} \\ 1 + \text{toLeaf}[v], & \text{se } u \text{ tem apenas um filho } v, \\ 2 + \text{toLeaf}[v] + \text{toLeaf}[w], & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

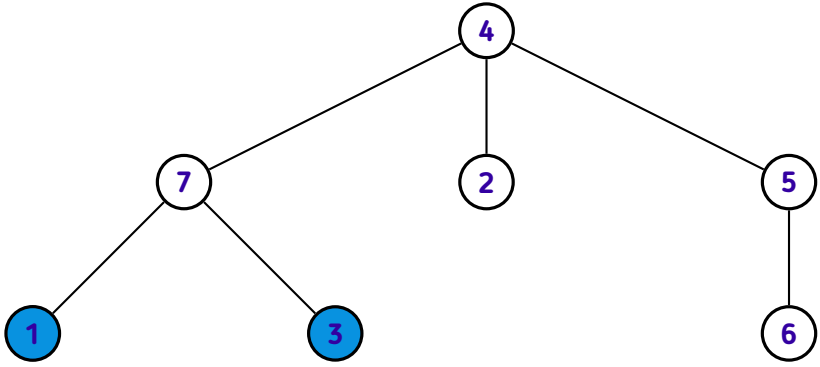
onde v e w são dois filhos distintos de u com os dois maiores valores de toLeaf



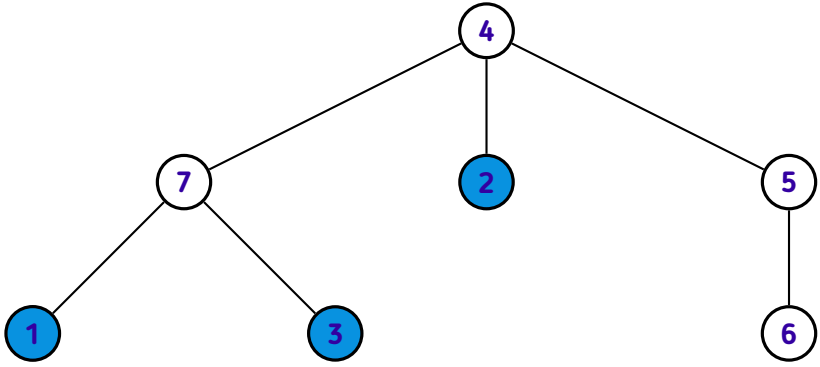
	1	2	3	4	5	6	7
toLeaf$[u]$ =	-	-	-	-	-	-	-
maxLength$[u]$ =	-	-	-	-	-	-	-



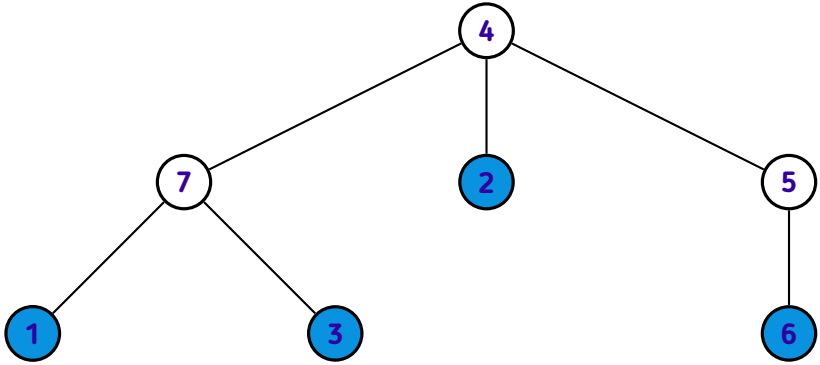
	1	2	3	4	5	6	7
toLeaf$[u]$ =	0	-	-	-	-	-	-
maxLength$[u]$ =	0	-	-	-	-	-	-



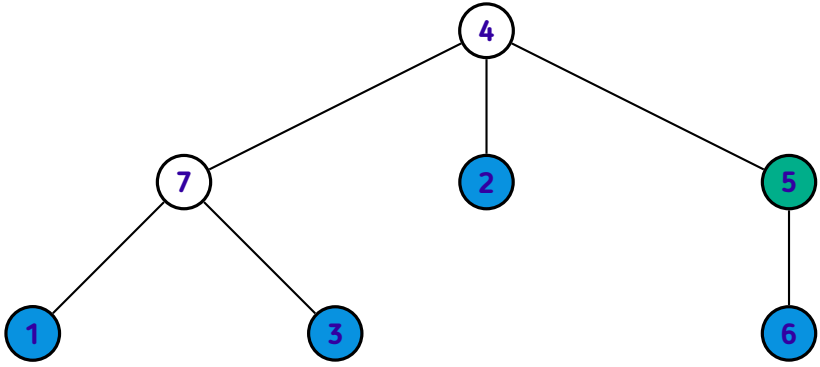
	1	2	3	4	5	6	7
toLeaf$[u]$ =	0	-	0	-	-	-	-
maxLength$[u]$ =	0	-	0	-	-	-	-



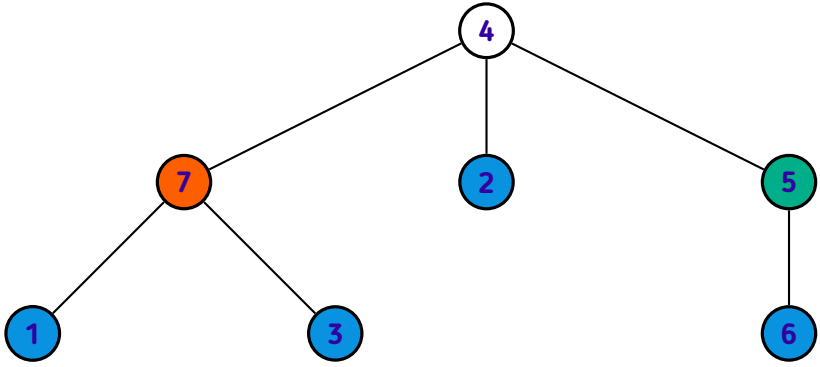
	1	2	3	4	5	6	7
toLeaf$[u]$ =	0	**0**	0	-	-	-	-
maxLength$[u]$ =	0	**0**	0	-	-	-	-



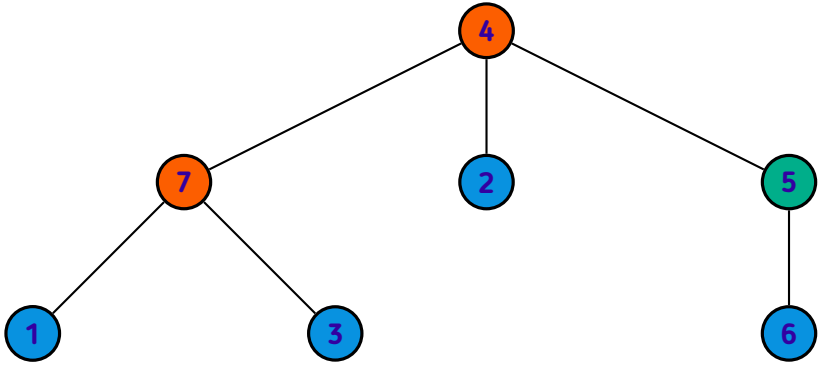
	1	2	3	4	5	6	7
toLeaf$[u]$ =	0	0	0	-	-	0	-
maxLength$[u]$ =	0	0	0	-	-	0	-



	1	2	3	4	5	6	7
toLeaf$[u]$ =	0	0	0	-	1	0	-
maxLength$[u]$ =	0	0	0	-	1	0	-



	1	2	3	4	5	6	7
toLeaf$[u]$ =	0	0	0	-	1	0	1
maxLength$[u]$ =	0	0	0	-	1	0	2



	1	2	3	4	5	6	7
toLeaf$[u]$ =	0	0	0	**2**	1	0	1
maxLength$[u]$ =	0	0	0	**4**	1	0	2

```
int diameter(int root, int N)
{
    dfs(root, 0);

    int d = 0;

    for (int u = 1; u <= N; ++u)
        d = max(d, max_length[u]);

    return d;
}
```

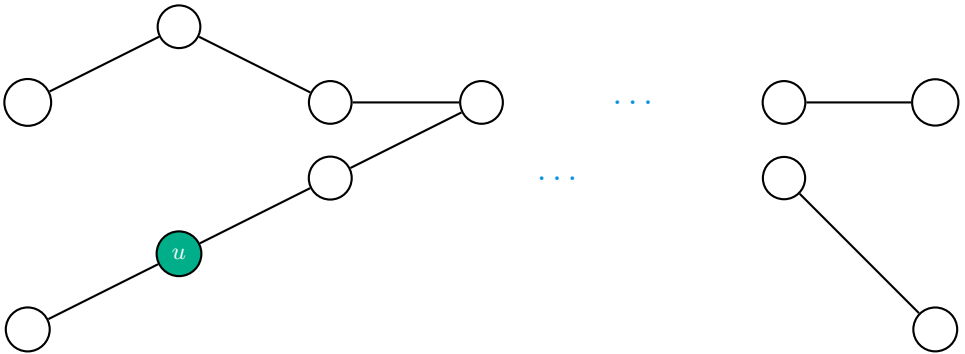
```cpp
void dfs(int u, int p)
{
    vector<int> ds;

    for (auto v : adj[u])
    {
        if (v == p)
            continue;

        dfs(v, u);
        ds.push_back(to_leaf[v]);
    }

    sort(ds.begin(), ds.end());

    to_leaf[u] = ds.empty() ? 0 : ds.back() + 1;
```

```
    auto N = ds.size();

    switch (N) {
    case 0:
        max_length[u] = 0;
        break;

    case 1:
        max_length[u] = ds.back() + 1;
        break;

    default:
        max_length[u] = ds[N - 1] + ds[N - 2] + 2;
    }
}
```

Uso de BFS para o cálculo do diâmetro

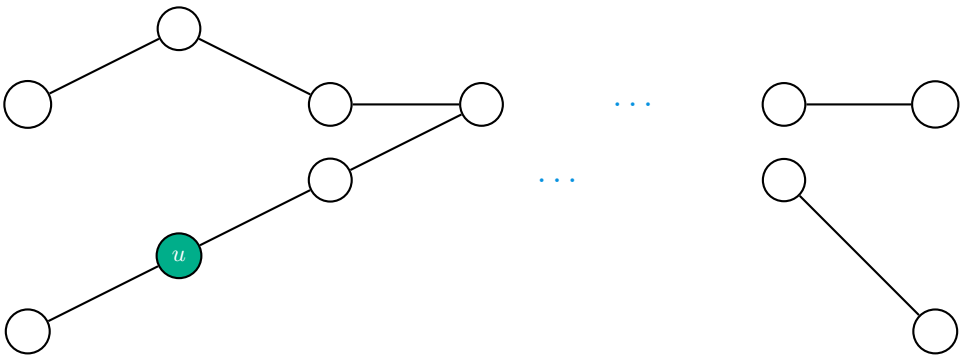
Uso de BFS para o cálculo do diâmetro

A BFS permite computar as distância, em arestas, de qualquer vértice a u



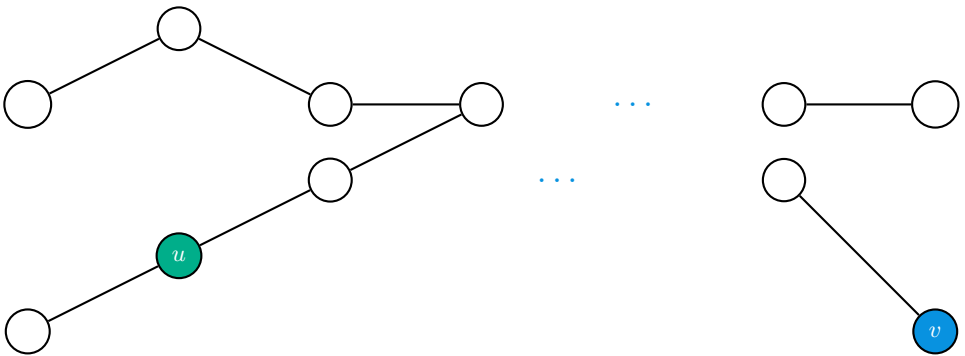
Uso de BFS para o cálculo do diâmetro

Seja v o vértice mais distante de u e D o diâmetro da árvore T



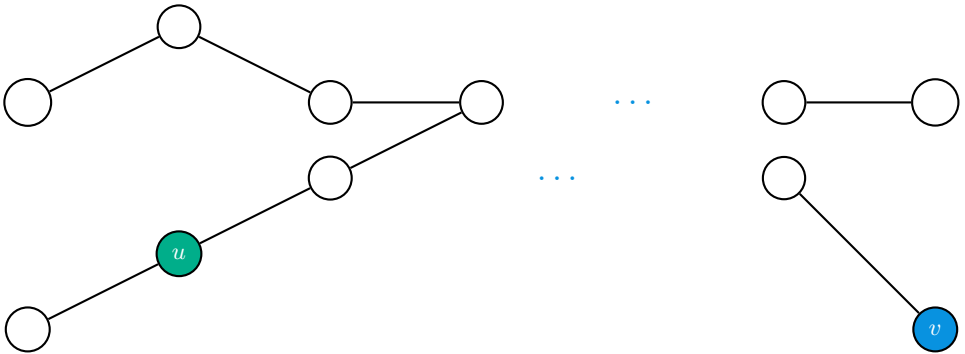
Uso de BFS para o cálculo do diâmetro

Seja v o vértice mais distante de u e D o diâmetro da árvore T



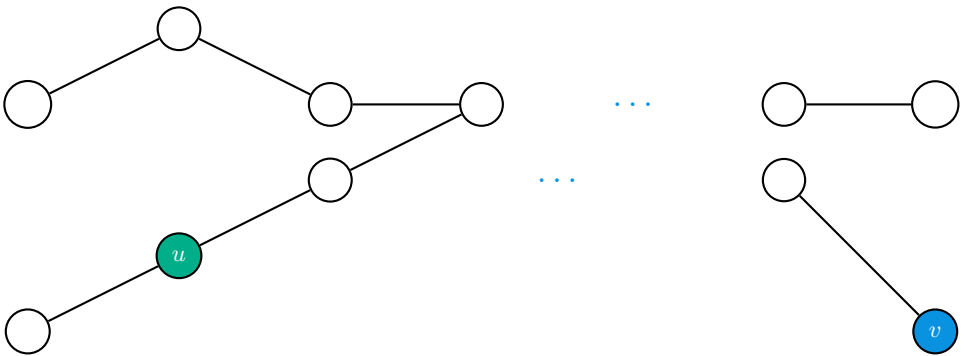
Uso de BFS para o cálculo do diâmetro

Fato #1: Ao menos um nó do caminho de u a v faz parte de um caminho cujo comprimento é D



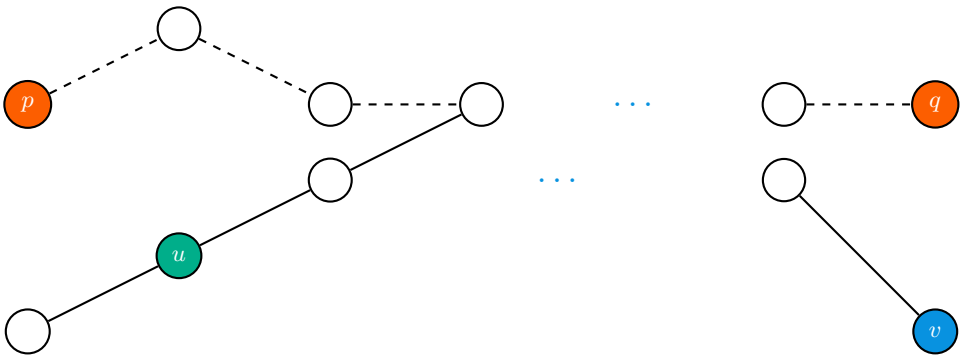
Uso de BFS para o cálculo do diâmetro

Prova: **Suponha que nenhum vértice do caminho de u a v faça parte de um caminho cujo comprimento é D**



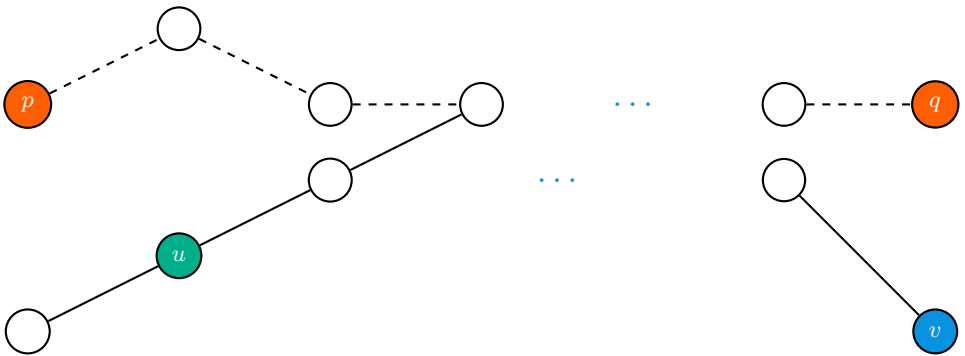
Uso de BFS para o cálculo do diâmetro

Assuma que $\mathsf{dist}(p, q) = D$



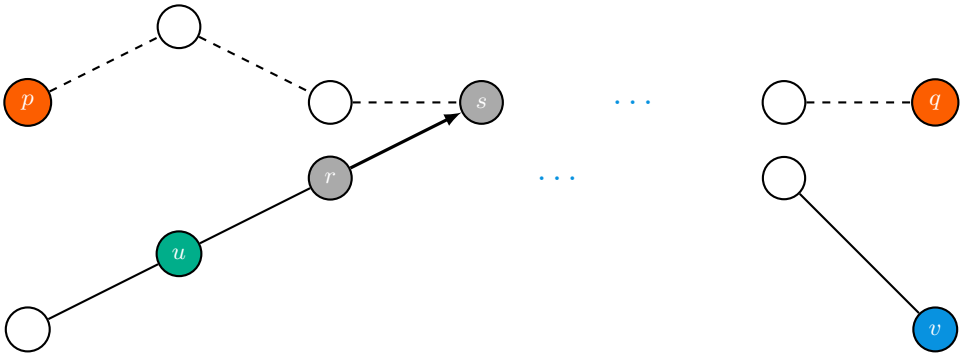
Uso de BFS para o cálculo do diâmetro

Sendo T conectada, existe ao menos um caminho de r no caminho de u a v para um s no caminho de p a q



Uso de BFS para o cálculo do diâmetro

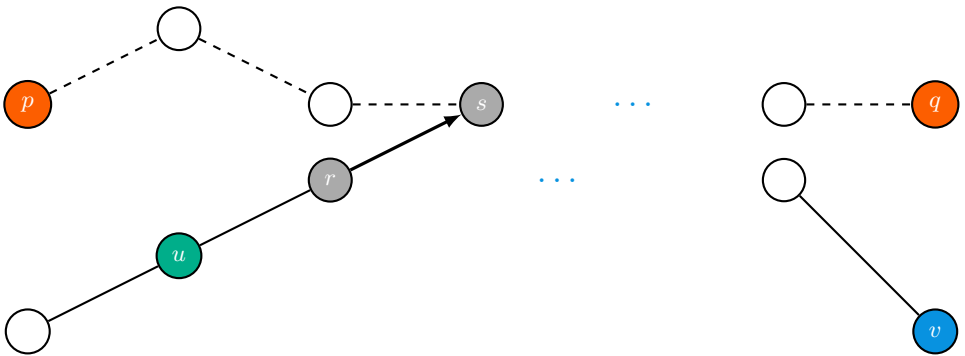
Sendo T conectada, existe ao menos um caminho de r no caminho de u a v para um s no caminho de p a q



Uso de BFS para o cálculo do diâmetro

Como v é vértice mais distante de u, vale que

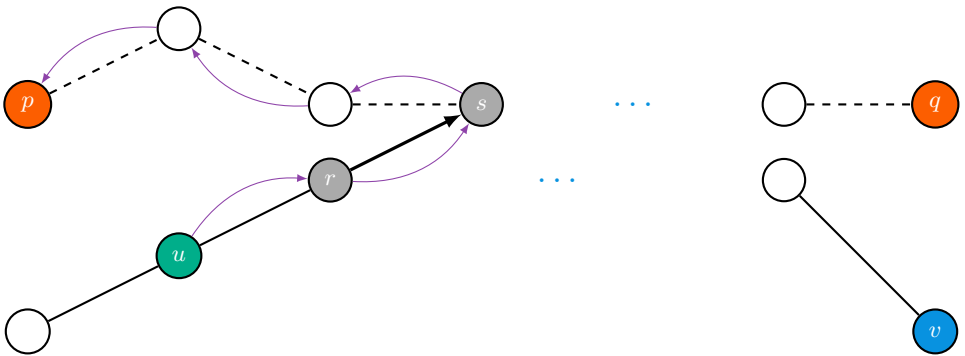
$$\text{dist}(u, r) + \text{dist}(r, s) + \text{dist}(s, p) \leq \text{dist}(u, v)$$



Uso de BFS para o cálculo do diâmetro

Como v é vértice mais distante de u, vale que

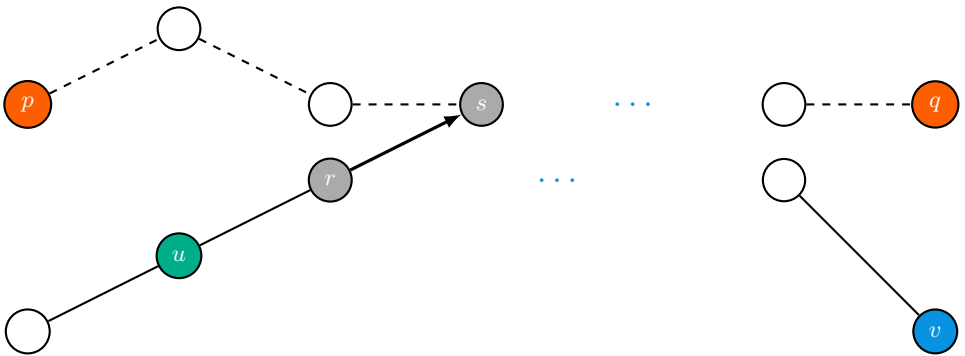
$$\text{dist}(u, r) + \text{dist}(r, s) + \text{dist}(s, p) \leq \text{dist}(u, v)$$



Uso de BFS para o cálculo do diâmetro

e também que

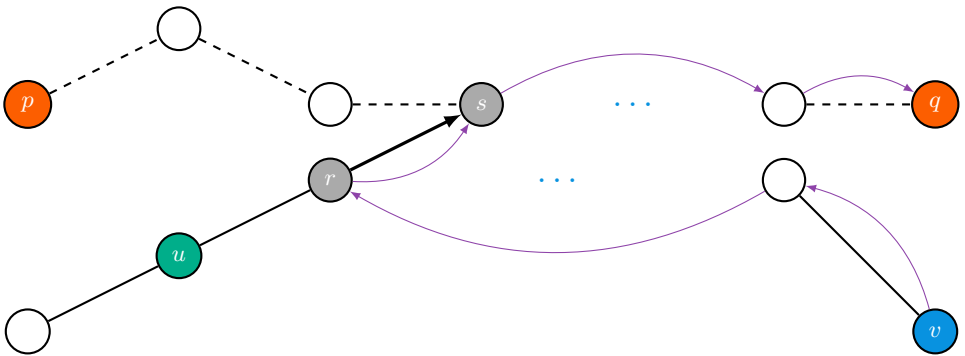
$$\text{dist}(v, r) + \text{dist}(r, s) + \text{dist}(s, q) \leq \text{dist}(u, v)$$



Uso de BFS para o cálculo do diâmetro

e também que

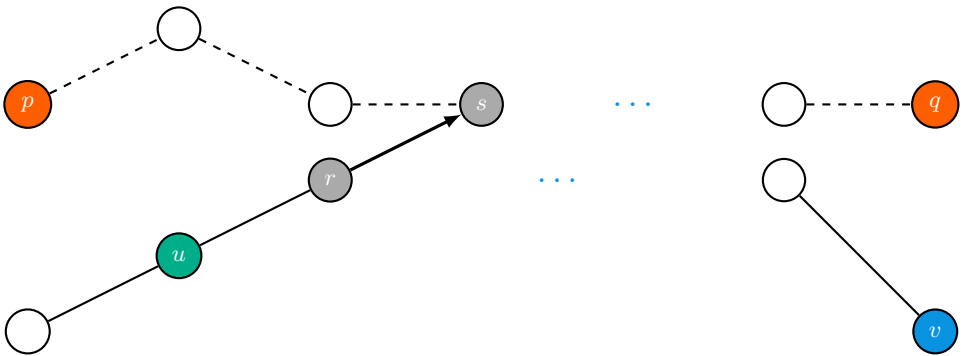
$$\text{dist}(v, r) + \text{dist}(r, s) + \text{dist}(s, q) \leq \text{dist}(u, v)$$



Uso de BFS para o cálculo do diâmetro

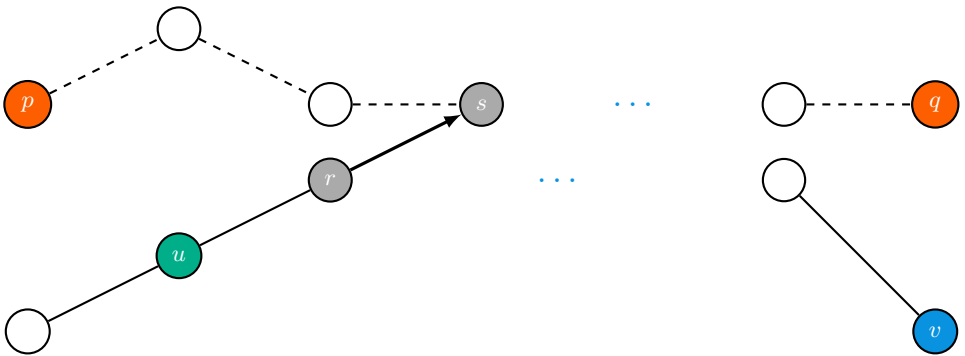
Somando ambas desigualdades, temos que

$$D + 2 \times \mathsf{dist}(r, s) \leq \mathsf{dist}(u, v)$$



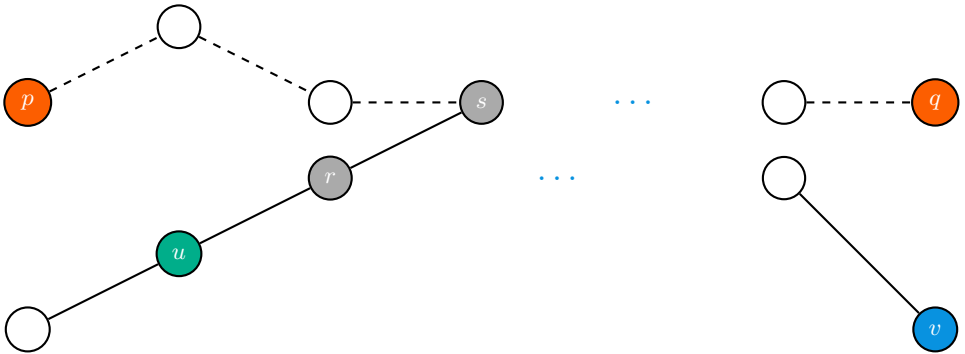
Uso de BFS para o cálculo do diâmetro

Como $\text{dist}(r, s) > 0$**, teríamos** $\text{dist}(u, v) > D$**, uma contradição!**



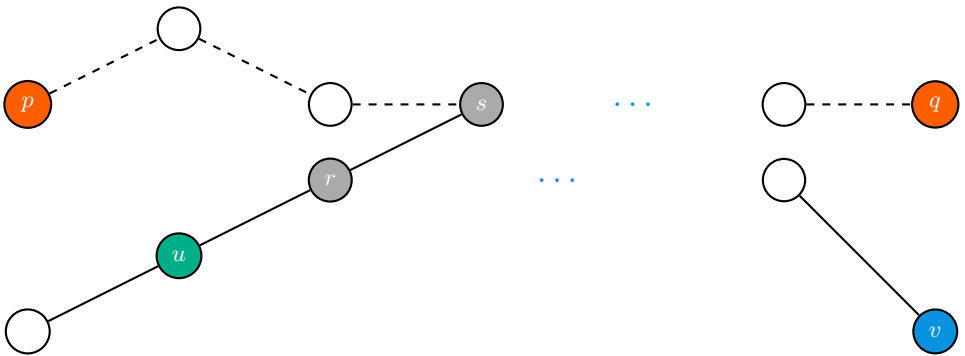
Uso de BFS para o cálculo do diâmetro

Fato #2: v é um dos extremos de um caminho cujo tamanho é D



Uso de BFS para o cálculo do diâmetro

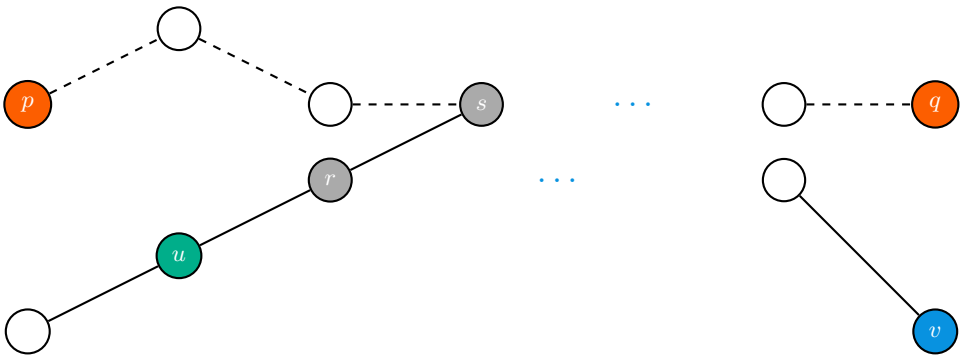
Prova: Seja s um nó do caminho de u a v pelo qual passa o caminho de p a q cujo tamanho é D



Uso de BFS para o cálculo do diâmetro

Se v não é extremo de um caminho cujo tamanho é D, então

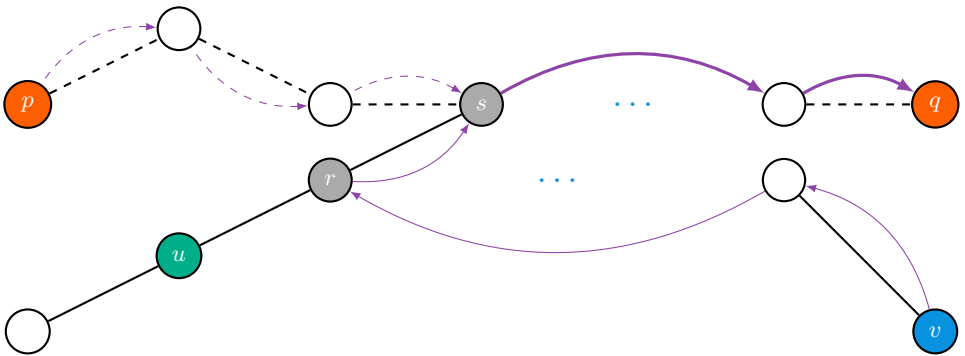
$$\text{dist}(v, n) < D, \ \forall n \in V$$



Uso de BFS para o cálculo do diâmetro

Em particular,

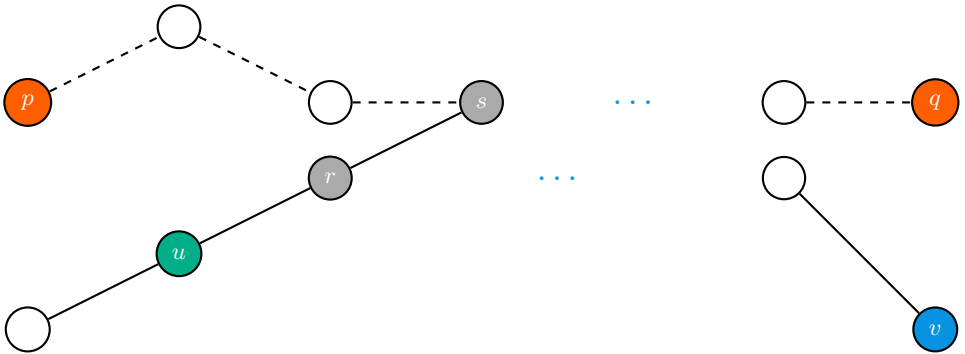
$$\text{dist}(v, s) + \text{dist}(s, q) = \text{dist}(v, q) < \text{dist}(p, q) = \text{dist}(p, s) + \text{dist}(s, q)$$



Uso de BFS para o cálculo do diâmetro

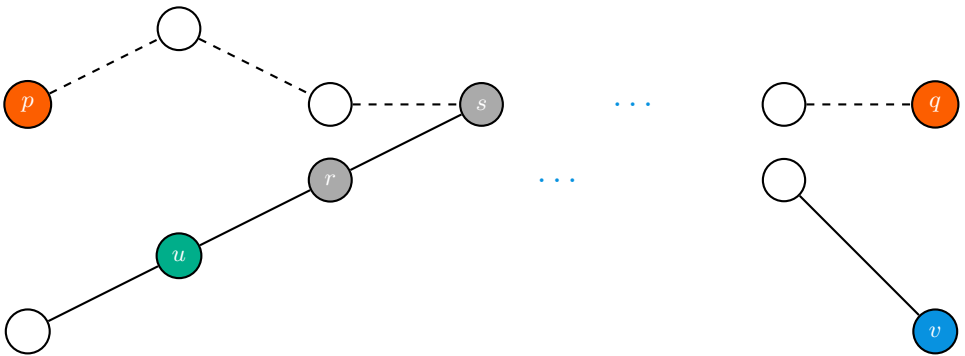
Deste modo, $\mathsf{dist}(s,p) > \mathsf{dist}(s,v)$**, o que leva a**

$$\mathsf{dist}(u,v) = \mathsf{dist}(u,s) + \mathsf{dist}(s,v) < \mathsf{dist}(u,s) + \mathsf{dist}(s,p) = \mathsf{dist}(u,p)$$



Uso de BFS para o cálculo do diâmetro

Logo p estaria mais distante de u do que v, que é o vértice mais distante de u, outra contradição!



Pseudocódigo

Pseudocódigo

Entrada: uma árvore $T(V, E)$
Saída: o diâmetro D da árvore

Pseudocódigo

Entrada: uma árvore $T(V, E)$
Saída: o diâmetro D da árvore

1. Escolha um vértice $u \in V$ qualquer

Pseudocódigo

Entrada: uma árvore $T(V, E)$
Saída: o diâmetro D da árvore

1. Escolha um vértice $u \in V$ qualquer

2. Seja v o vértice mais distante de u, identificado por meio de uma BFS

Pseudocódigo

Entrada: uma árvore $T(V, E)$
Saída: o diâmetro D da árvore

1. Escolha um vértice $u \in V$ qualquer
2. Seja v o vértice mais distante de u, identificado por meio de uma BFS
3. Seja w o vértice mais distante de v, identificado por meio de uma BFS

Pseudocódigo

Entrada: uma árvore $T(V, E)$
Saída: o diâmetro D da árvore

1. Escolha um vértice $u \in V$ qualquer
2. Seja v o vértice mais distante de u, identificado por meio de uma BFS
3. Seja w o vértice mais distante de v, identificado por meio de uma BFS
4. Retorne $D = \mathsf{dist}(v, w)$

```cpp
pair<int, int> bfs(int s, int N)
{
    vector<int> dist(N + 1, oo); dist[s] = 0;
    queue<int> q; q.push(s);
    int last = s;

    while (not q.empty()) {
        auto u = q.front(); q.pop();
        last = u;

        for (auto v : adj[u]) {
            if (dist[v] == oo) {
                dist[v] = dist[u] + 1;
                q.push(v);
            }
        }
   }

    return { last, dist[last] };
}
```

```
int diameter(int N)
{
    auto [v, _] = bfs(1, N);
    auto [w, D] = bfs(v, N);

    return D;
}
```

Problemas sugeridos

1. **AIZU Online Judge GRL 5A – Diameter of a Tree**
2. **Codechef DTREE – Diameter of Tree**
3. **DM::OJ – Tree Tasks**
4. **OJ 10308 – Roads in the North**

Referências

1. **DROZDEK**, **Adam**. ***Algoritmos e Estruturas de Dados em C++*, 2002.**
2. **HALIM**, **Felix**; **HALIM**, **Steve**. ***Competitive Programming 3*, 2010.**
3. **LAAKSONEN**, **Antti**. ***Competitive Programmer's Handbook*, 2018.**
4. **SKIENA**, **Steven**; **REVILLA**, **Miguel**. ***Programming Challenges*, 2003.**
5. **Wikipédia. *Tree (graph theory)*, acesso em 06/08/2021.**