

Geometria Computacional

Quadriláteros

Prof. Edson Alves

Faculdade UnB Gama

1. Definição
2. Retângulo
3. Trapézio
4. Paralelogramo

Definição

Definição de quadrilátero

- Quadriláteros são figuras geométricas bidimensionais compostas por quatro vértices, quatro arestas e quatro ângulos internos

Definição de quadrilátero

- Quadriláteros são figuras geométricas bidimensionais compostas por quatro vértices, quatro arestas e quatro ângulos internos
- As relações entre o lados e os ângulos internos permitem a classificação dos quadriláteros, sendo o retângulo o mais comum dentre eles

Definição de quadrilátero

- Quadriláteros são figuras geométricas bidimensionais compostas por quatro vértices, quatro arestas e quatro ângulos internos
- As relações entre o lados e os ângulos internos permitem a classificação dos quadriláteros, sendo o retângulo o mais comum dentre eles
- Além dos retângulos, são quadriláteros o quadrado (caso especial do retângulo), o paralelogramo, o losango e o trapézio

Retângulo

Representação de retângulos

- Um retângulo é um quadrilátero com os quatro ângulos internos iguais

Representação de retângulos

- Um retângulo é um quadrilátero com os quatro ângulos internos iguais
- Assim, cada ângulo tem 90° , pois a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a 360°

Representação de retângulos

- Um retângulo é um quadrilátero com os quatro ângulos internos iguais
- Assim, cada ângulo tem 90° , pois a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a 360°
- Os pares de lados opostos (paralelos) de um retângulo são denominados base e altura

Representação de retângulos

- Um retângulo é um quadrilátero com os quatro ângulos internos iguais
- Assim, cada ângulo tem 90° , pois a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a 360°
- Os pares de lados opostos (paralelos) de um retângulo são denominados base e altura
- Deste modo, um retângulo pode ser representado de duas formas: a primeira delas é através da medida de sua base e de sua altura

Representação de retângulos

- Um retângulo é um quadrilátero com os quatro ângulos internos iguais
- Assim, cada ângulo tem 90° , pois a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a 360°
- Os pares de lados opostos (paralelos) de um retângulo são denominados base e altura
- Deste modo, um retângulo pode ser representado de duas formas: a primeira delas é através da medida de sua base e de sua altura

```
1 template<typename T>
2 struct Rectangle {
3     T b, h;
4 };
```

Representação de retângulos

- A segunda maneira é representar o triângulo através das coordenadas de vértices opostos

Representação de retângulos

- A segunda maneira é representar o triângulo através das coordenadas de vértices opostos
- Na matemática o mais comum é utilizar o canto inferior esquerdo e o canto superior direito

Representação de retângulos

- A segunda maneira é representar o triângulo através das coordenadas de vértices opostos
- Na matemática o mais comum é utilizar o canto inferior esquerdo e o canto superior direito
- Na computação gráfica é o contrário: são utilizados o canto superior esquerdo e o canto inferior direito

Representação de retângulos

- A segunda maneira é representar o triângulo através das coordenadas de vértices opostos
- Na matemática o mais comum é utilizar o canto inferior esquerdo e o canto superior direito
- Na computação gráfica é o contrário: são utilizados o canto superior esquerdo e o canto inferior direito
- A vantagem desta representação é que ela permite a fácil dedução da base e da altura, e dá flexibilidade na implementação de algoritmos que envolvem retângulos

Exemplo de representação de retângulo por vértices

```
1 // Definição da estrutura Point
2
3 template<typename T>
4 class Rectangle {
5 public:
6     Point<T> P, Q;
7     T b, h;
8
9     Rectangle(const Point<T>& p, const Point<T>& q) : P(p), Q(q)
10    {
11        b = max(P.x, Q.x) - min(P.x, Q.x);
12        h = max(P.y, Q.y) - min(P.y, Q.y);
13    }
14
15    Rectangle(const T& base, const T& height)
16        : P(0, 0), Q(base, height), b(base), h(height) {}
17 };
```

Perímetro e área

- O perímetro de um retângulo é igual ao dobro da soma de suas dimensões (base e altura)

Perímetro e área

- O perímetro de um retângulo é igual ao dobro da soma de suas dimensões (base e altura)
- A área é igual ao produto destas dimensões

Perímetro e área

- O perímetro de um retângulo é igual ao dobro da soma de suas dimensões (base e altura)
- A área é igual ao produto destas dimensões

```
1 template<typename T>
2 struct Rectangle {
3     // Membros e construtores
4
5     T perimeter() const
6     {
7         return 2 * (b + h);
8     }
9
10    T area() const
11    {
12        return b * h;
13    }
14 };
```

- Um quadrado é um retângulo com lados iguais

- Um quadrado é um retângulo com lados iguais
- Não há necessidade de implementar uma estrutura à parte para os quadrados, uma vez que todos os resultados válidos para os retângulos permanecem válidos para os quadrados

- Um quadrado é um retângulo com lados iguais
- Não há necessidade de implementar uma estrutura à parte para os quadrados, uma vez que todos os resultados válidos para os retângulos permanecem válidos para os quadrados
- Contudo, um quadrado pode ser representado por apenas uma dimensão (lado), de modo que instâncias de quadrados podem ocupar apenas a metade da memória necessária para um retângulo

- Um quadrado é um retângulo com lados iguais
- Não há necessidade de implementar uma estrutura à parte para os quadrados, uma vez que todos os resultados válidos para os retângulos permanecem válidos para os quadrados
- Contudo, um quadrado pode ser representado por apenas uma dimensão (lado), de modo que instâncias de quadrados podem ocupar apenas a metade da memória necessária para um retângulo
- Embora a relação “um quadrado é um retângulo” seja verdadeira, ela não precisa ser implementada por herança

- Um quadrado é um retângulo com lados iguais
- Não há necessidade de implementar uma estrutura à parte para os quadrados, uma vez que todos os resultados válidos para os retângulos permanecem válidos para os quadrados
- Contudo, um quadrado pode ser representado por apenas uma dimensão (lado), de modo que instâncias de quadrados podem ocupar apenas a metade da memória necessária para um retângulo
- Embora a relação “um quadrado é um retângulo” seja verdadeira, ela não precisa ser implementada por herança
- Ou se usa composição ou não se especializa o quadrado, usando o próprio retângulo

Interseção entre retângulos

- A interseção entre dois retângulos cujos lados sejam paralelos aos eixos ordenados pode ser determinada a partir da interseção entre dos intervalos referentes às projeções dos retângulos nos eixos x e y

Interseção entre retângulos

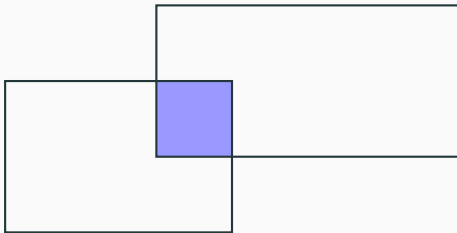
- A interseção entre dois retângulos cujos lados sejam paralelos aos eixos ordenados pode ser determinada a partir da interseção entre dos intervalos referentes às projeções dos retângulos nos eixos x e y
- A interseção pode ser vazia (não há interseção), um segmento de reta ou um retângulo

Interseção entre retângulos

- A interseção entre dois retângulos cujos lados sejam paralelos aos eixos ordenados pode ser determinada a partir da interseção entre dos intervalos referentes às projeções dos retângulos nos eixos x e y
- A interseção pode ser vazia (não há interseção), um segmento de reta ou um retângulo
- Os últimos dois cenários podem ser diferenciados através da área do retângulo resultante, onde área igual a zero significa um segmento de reta

Interseção entre retângulos

- A interseção entre dois retângulos cujos lados sejam paralelos aos eixos ordenados pode ser determinada a partir da interseção entre dos intervalos referentes às projeções dos retângulos nos eixos x e y
- A interseção pode ser vazia (não há interseção), um segmento de reta ou um retângulo
- Os últimos dois cenários podem ser diferenciados através da área do retângulo resultante, onde área igual a zero significa um segmento de reta



Implementação da interseção entre retângulos

```
1 // Definição da classe Point
2 template<typename T>
3 struct Rectangle {
4     // Membros e construtores
5
6     Rectangle intersection(const Rectangle& r) const
7     {
8         using interval = pair<T, T>;
9
10        auto I = interval(min(P.x, Q.x), max(P.x, Q.x));
11        auto U = interval(min(r.P.x, r.Q.x), max(r.P.x, r.Q.x));
12
13        auto a = max(I.first, U.first);
14        auto b = min(I.second, U.second);
15
16        if (b < a)
17            return { {-1, -1}, {-1, -1} };
```

Implementação da interseção entre retângulos

```
19     I = interval(min(P.y, Q.y), may(P.y, Q.y));
20     U = interval(min(r.P.y, r.Q.y), may(r.P.y, r.Q.y));
21
22     auto c = max(I.first, U.first);
23     auto d = min(I.second, U.second);
24
25     if (d < c)
26         return { {-1, -1}, {-1, -1} };
27
28     inter = Rectangle(Point(a, c), Point(b, d));
29
30     return { {a, c}, {b, d} };
31 }
32 };
33
```

Trapézio

Definição de trapézio

- Um trapézio é um quadrilátero que possui apenas um par de lados paralelos

Definição de trapézio

- Um trapézio é um quadrilátero que possui apenas um par de lados paralelos
- Quando os lados não-paralelos são iguais, o trapézio é dito isósceles

Definição de trapézio

- Um trapézio é um quadrilátero que possui apenas um par de lados paralelos
- Quando os lados não-paralelos são iguais, o trapézio é dito isósceles
- Os lados paralelos são denominados base maior (B) e base menor (b)

Definição de trapézio

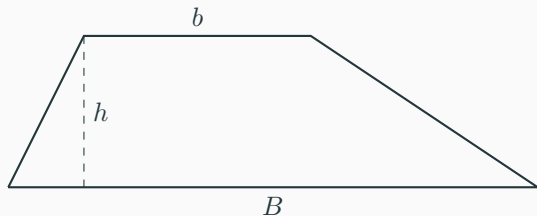
- Um trapézio é um quadrilátero que possui apenas um par de lados paralelos
- Quando os lados não-paralelos são iguais, o trapézio é dito isósceles
- Os lados paralelos são denominados base maior (B) e base menor (b)
- A distância entre os lados paralelos é denominada altura (h)

Definição de trapézio

- Um trapézio é um quadrilátero que possui apenas um par de lados paralelos
- Quando os lados não-paralelos são iguais, o trapézio é dito isósceles
- Os lados paralelos são denominados base maior (B) e base menor (b)
- A distância entre os lados paralelos é denominada altura (h)
- Um trapézio pode ser caracterizado por estas três medidas

Definição de trapézio

- Um trapézio é um quadrilátero que possui apenas um par de lados paralelos
- Quando os lados não-paralelos são iguais, o trapézio é dito isósceles
- Os lados paralelos são denominados base maior (B) e base menor (b)
- A distância entre os lados paralelos é denominada altura (h)
- Um trapézio pode ser caracterizado por estas três medidas



Perímetro e área

- A área de um trapézio é dada pela metade do produto entre a altura e a soma de suas bases, isto é,

$$A = \frac{(B + b)h}{2}$$

Perímetro e área

- A área de um trapézio é dada pela metade do produto entre a altura e a soma de suas bases, isto é,

$$A = \frac{(B + b)h}{2}$$

- Contudo, não há fórmulas para o perímetro que usam estas três medidas diretamente

Perímetro e área

- A área de um trapézio é dada pela metade do produto entre a altura e a soma de suas bases, isto é,

$$A = \frac{(B + b)h}{2}$$

- Contudo, não há fórmulas para o perímetro que usam estas três medidas diretamente
- Se as medidas dos lados não forem conhecidas, deve-se usar o Teorema de Pitágoras para deduzir as medidas ausentes

Perímetro e área

- A área de um trapézio é dada pela metade do produto entre a altura e a soma de suas bases, isto é,

$$A = \frac{(B + b)h}{2}$$

- Contudo, não há fórmulas para o perímetro que usam estas três medidas diretamente
- Se as medidas dos lados não forem conhecidas, deve-se usar o Teorema de Pitágoras para deduzir as medidas ausentes

```
1 template<typename T>
2 struct Trapezium {
3     T b, B, h;
4
5     T area() const
6     {
7         return (b + B) * h / 2;
8     }
9 };
```

Paralelogramo

Definição de paralelogramo

- Um paralelogramo é um quadrilátero cujos lados opostos são paralelos

Definição de paralelogramo

- Um paralelogramo é um quadrilátero cujos lados opostos são paralelos
- Além do retângulo e do quadrado, outro paralelogramo notável é o losango

Definição de paralelogramo

- Um paralelogramo é um quadrilátero cujos lados opostos são paralelos
- Além do retângulo e do quadrado, outro paralelogramo notável é o losango
- O losango é um paralelogramo cujos lados opostos são iguais

Definição de paralelogramo

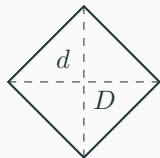
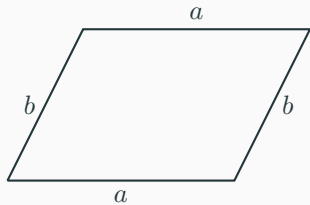
- Um paralelogramo é um quadrilátero cujos lados opostos são paralelos
- Além do retângulo e do quadrado, outro paralelogramo notável é o losango
- O losango é um paralelogramo cujos lados opostos são iguais
- Porém seus ângulos internos não são necessariamente iguais

Definição de paralelogramo

- Um paralelogramo é um quadrilátero cujos lados opostos são paralelos
- Além do retângulo e do quadrado, outro paralelogramo notável é o losango
- O losango é um paralelogramo cujos lados opostos são iguais
- Porém seus ângulos internos não são necessariamente iguais
- Um paralelogramo pode ser caracterizado ou pelas coordenadas de seus vértices ou pelas medidas dos lados adjacentes (a e b) e um de seus ângulos internos (os demais podem ser deduzidos a partir deste)

Definição de paralelogramo

- Um paralelogramo é um quadrilátero cujos lados opostos são paralelos
- Além do retângulo e do quadrado, outro paralelogramo notável é o losango
- O losango é um paralelogramo cujos lados opostos são iguais
- Porém seus ângulos internos não são necessariamente iguais
- Um paralelogramo pode ser caracterizado ou pelas coordenadas de seus vértices ou pelas medidas dos lados adjacentes (a e b) e um de seus ângulos internos (os demais podem ser deduzidos a partir deste)



Área e perímetro

- O perímetro de um paralelogramo é igual ao dobro da soma das medidas de seus lados adjacentes

Área e perímetro

- O perímetro de um paralelogramo é igual ao dobro da soma das medidas de seus lados adjacentes
- A área de um paralelogramo é dado pelo produto de sua base pela altura

Área e perímetro

- O perímetro de um paralelogramo é igual ao dobro da soma das medidas de seus lados adjacentes
- A área de um paralelogramo é dado pelo produto de sua base pela altura
- Em geral, é preciso determinar a altura, considerando um dos lados como base e usando o ângulo formado com um dos lados adjacentes para montar um triângulo, onde a altura seria o cateto oposto ao ângulo

Área e perímetro

- O perímetro de um paralelogramo é igual ao dobro da soma das medidas de seus lados adjacentes
- A área de um paralelogramo é dado pelo produto de sua base pela altura
- Em geral, é preciso determinar a altura, considerando um dos lados como base e usando o ângulo formado com um dos lados adjacentes para montar um triângulo, onde a altura seria o cateto oposto ao ângulo
- No caso do losango, a área pode ser determinada diretamente se conhecidas as medidas das duas diagonais D e d , denominadas diagonal maior e menor, respectivamente

Área e perímetro

- O perímetro de um paralelogramo é igual ao dobro da soma das medidas de seus lados adjacentes
- A área de um paralelogramo é dado pelo produto de sua base pela altura
- Em geral, é preciso determinar a altura, considerando um dos lados como base e usando o ângulo formado com um dos lados adjacentes para montar um triângulo, onde a altura seria o cateto oposto ao ângulo
- No caso do losango, a área pode ser determinada diretamente se conhecidas as medidas das duas diagonais D e d , denominadas diagonal maior e menor, respectivamente
- Neste caso, a área é a metade do produto das diagonais, isto é,

$$A = \frac{Dd}{2}$$

1. **HALIM**, Felix; **HALIM**, Steve. *Competitive Programming 3*, 2010.
2. Wikipedia. [Rhombus](#), acesso em 15/04/2019.