OJ 10209

Is This Integration?

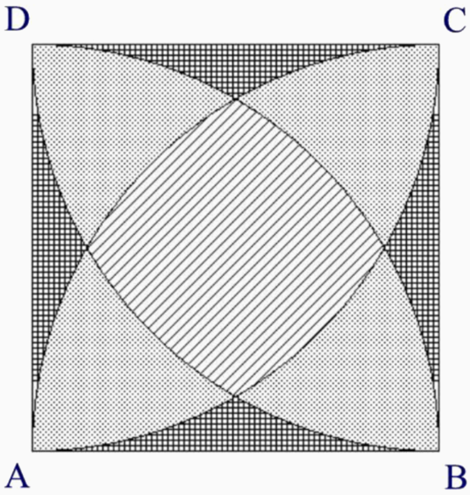
Prof. Edson Alves

Faculdade UnB Gama

OJ 10209 – Is This Integration?

Problema

In the image below you can see a square $ABCD$, where $AB = BC = CD = DA = a$. Four arcs are drawn taking the four vertexes A, B, C, D as centers and a as the radius. The arc that is drawn taking A as center, starts at neighboring vertex B and ends at neighboring vertex D. All other arcs are drawn in a similar fashion. Regions of three different shapes are created in this fashion. You will have to determine the total area these different shaped regions.



Input

The input file contains a floating-point number $a (0 \leq a \leq 10000)$ in each line which indicates the length of one side of the square. Input is terminated by end of file.

Output

For each line of input, output in a single line the total area of the three types of region (filled with different patterns in the image above).

These three numbers will of course be floating point numbers with three digits after the decimal point. First number will denote the area of the striped region, the second number will denote the total area of the dotted regions and the third number will denote the area of the rest of the regions.

Exemplo de entradas e saídas

Sample Input

```
0.1
0.2
0.3
```

Sample Output

```
0.003 0.005 0.002
0.013 0.020 0.007
0.028 0.046 0.016
```

Solução

- Observe, inicialmente, que a área tracejada é composta por um quadrado cujo lado é o comprimento da corda c gerada por um ângulo igual a um terço de $\pi/2$, somado a quatro segmentos g

Solução

- Observe, inicialmente, que a área tracejada é composta por um quadrado cujo lado é o comprimento da corda c gerada por um ângulo igual a um terço de $\pi/2$, somado a quatro segmentos g
- Assim, $A_T = c^2 - 4g$, onde

$$
\begin{aligned}
c &= 2a\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\
s &= \frac{a+a+c}{2} \\
T &= \sqrt{(s-a)(s-a)(s-c)} \\
S &= \frac{\pi a^2}{12} \\
g &= S - T
\end{aligned}
$$

Solução

- Observe, inicialmente, que a área tracejada é composta por um quadrado cujo lado é o comprimento da corda c gerada por um ângulo igual a um terço de $\pi/2$, somado a quatro segmentos g
- Assim, $A_T = c^2 - 4g$, onde

$$
\begin{aligned}
c &= 2a\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\\
s &= \frac{a+a+c}{2}\\
T &= \sqrt{(s-a)(s-a)(s-c)}\\
S &= \frac{\pi a^2}{12}\\
g &= S - T
\end{aligned}
$$

- Já a área pontilhada é a metade do que resta quando subtraída, da área de um semi-círculo de raio a, a área de um quadrado de lado a e a área tracejada

Solução

- Portanto,

$$A_P = \frac{\pi a^2}{2} - a^2 - A_T$$

Solução

- Portanto,

$$A_P = \frac{\pi a^2}{2} - a^2 - A_T$$

- Por fim, a área restante A_R é o que sobra da diferença entre a área de um quadrado de lado a e as duas áreas já computadas

Solução

- Portanto,

$$A_P = \frac{\pi a^2}{2} - a^2 - A_T$$

- Por fim, a área restante A_R é o que sobra da diferença entre a área de um quadrado de lado a e as duas áreas já computadas
- Logo,

$$A_R = a^2 - A_T - A_P$$

Solução

- Portanto,

$$A_P = \frac{\pi a^2}{2} - a^2 - A_T$$

- Por fim, a área restante A_R é o que sobra da diferença entre a área de um quadrado de lado a e as duas áreas já computadas
- Logo,

$$A_R = a^2 - A_T - A_P$$

- As expressões apresentadas permitem a implementação de uma solução $O(T)$, onde T é o número de casos de teste

Solução AC com complexidade $O(T)$

```cpp
#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;

const double PI { acos(-1.0) };

struct Circle
{
    double r;

    double arc(double theta) const
    {
        return theta * r;
    }

    double chord(double a) const
    {
        return 2 * r * sin(a/2);
    }
```

Solução AC com complexidade $O(T)$

```cpp
    double sector(double theta) const
    {
        return (theta * r * r)/2;
    }

    double segment(double a) const
    {
        auto c = chord(a);
        auto s = (r + r + c)/2.0;
        auto T = sqrt(s*(s - r)*(s - r)*(s - c));

        return sector(a) - T;
    }
};
```

Solução AC com complexidade $O(T)$

```
int main()
{
    double a;

    while (scanf("%lf", &a) == 1)
    {
        Circle circle { a };

        double c = circle.chord(PI/6);
        double g = circle.segment(PI/6);

        double stripped = c * c + 4*g;
        double dotted = 4*(-stripped + (PI/2.0 - 1.0)*a*a)/2.0;
        double rest = a*a - stripped - dotted;

        printf("%.3f %.3f %.3f\n", stripped, dotted, rest);
    }

    return 0;
}
```