Paradigmas de Resolução de Problemas

Algoritmos Gulosos: *Two pointers*

Prof. Edson Alves – UnB/FGA

Sumário

Two pointers

Definição

- *Two pointers* é uma técnica de gulosa aplicada em problemas que usam vetores
- Nela são utilizados dois ponteiros unidirecionais L e R
- Assim, a cada iteração do algoritmo, estes ponteiros só podem avançar na direção pré-definida, sem recuar
- Isto faz com que cada ponteiro observe cada elemento do vetor uma única vez
- Para tal, é preciso considerar quais valores ainda podem fazer parte da solução, e quais podem, e devem, ser descartados
- Desde modo, esta é uma técnica gulosa, uma vez que, fixado um dos ponteiros, o segundo se move o máximo possível, e em seguida os ponteiros são reposicionados para as melhores posições possíveis

Implementação

- Em geral, o ponteiro L (*left*) aponta para o início do vetor e é incrementado a cada passo do algoritmo
- O ponteiro R (*right*) geralmente parte de L (ou $L + 1$) e avança enquanto o intervalo $[L, R)$ constituir uma subsolução válida do problema
- Em alguns problemas, o ponteiro L pode saltar diretamente para R, caso R não possa mais avançar
- Também há problemas onde R inicia no último elemento do vetor, e caminha em direção ao início do mesmo
- Na maioria dos casos, o uso desta técnica leva a algoritmos $O(N)$, onde N é o tamanho do vetor

Exemplos de aplicação de *two pointers*

Maior substring em ordem lexicográfica

- Seja S uma string com N caracteres
- O problema consiste em determinar o tamanho M da maior substring b de S tal que os caracteres de b estão em ordem lexicográfica
- Em outras palavras, o problema é determinar a maior substring $b = b[1..M]$ de S tal que $b_{i-1} \leq b_i, \forall i \in [2, M]$
- A string S tem $O(N^2)$ substrings, e a verificação se uma substring está em ordem lexicográfica ou não é feita em $O(N)$
- Assim um algoritmo de busca completa tem complexidade $O(N^3)$

Maior substring em ordem lexicográfica

- Porém, é possível utilizar a técnica *two pointers* neste problema
- Inicie L no primeiro caractere de S
- Para cada valor de L, faça $R = L + 1$
- A substring $S[L..(R-1)]$ tem, inicialmente, um único caractere, de modo que está em ordem lexicográfica
- Enquanto $R \leq N$ e $S[R-1] \leq S[R]$, incremente R
- Ao final do processo, a substring $S[L..(R-1)]$ terá $R - L$ caracteres e estará em ordem lexicográfica
- Atualize L para R e prossiga enquanto $L \leq N$
- Como tanto L quanto R observam cada caractere de S uma única vez, esta solução tem complexidade $O(N)$ e memória $O(1)$

Tamanho da maior substring ordenada

```cpp
#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;

auto max_ordered_substring(const string& s)
{
    auto N = s.size(), L = 0ul, ans = 0ul;

    while (L < N) {
        auto R = L + 1;

        while (R < N and s[R - 1] <= s[R])
            ++R;

        ans = max(ans, R - L);
        L = R;
    }

    return ans;
}
```

Tamanho da maior substring ordenada

```cpp
int main()
{
    string s1 { "abcde" }, s2 { "cba" }, s3 { "teste" };

    cout << max_ordered_substring(s1) << '\n';
    cout << max_ordered_substring(s2) << '\n';
    cout << max_ordered_substring(s3) << '\n';

    return 0;
}
```

Maior subvetor com, no máximo, K números ímpares

- Seja $\vec{v}$ um vetor com N números inteiros
- O problema consiste em terminar o maior subvetor $\vec{x} = \vec{v}[i..j]$ de $\vec{v}$ que contenha, no máximo, K números ímpares
- Novamente, $\vec{v}$ em $O(N^2)$ subvetores, de modo que uma solução de busca completa que verifique cada um deles terá complexidade $O(N^3)$
- A ideia central da solução usando *two pointers* é identificar intervalos $[L, R)$ tais que os subvetores $\vec{v}[L..(R-1)]$ tenham, no máximo, K números ímpares
- Observe que $|\vec{v}[L..(R-1)| = R - L$
- O ponteiro L observará, um a um, os elementos de $\vec{v}$, do primeiro para o último
- O ponteiro R iniciará apontando para o primeiro elemento

Maior subvetor com, no máximo, K números ímpares

- Um contador c, inicialmente igual a zero, manterá o registro do número de elementos ímpares dentre os elementos de $\vec{v}$ cujos índices estão no intervalo $[L, R)$
- Para cada valor de L, o ponteiro R apontará para L ou manterá o seu valor, o que estiver mais distante do início do vetor
- Enquanto R apontar para um elemento par, ou apontar para um ímpar com o contador $c < K$, o contador é atualizado com o valor de $\vec{v}[R]$ e R é incrementado
- Ao final deste processo, a resposta é atualizada em relação ao tamanho do subvetor válido $(R - L)$
- Por fim, o contador é ajustado, caso o valor de $\vec{v}[L]$ tenha sido considerado, e L é incrementado
- A complexidade da solução é $O(N)$

Visualização do algoritmo do maior subvetor com, no máximo, $K = 1$ números ímpares

$ans = 0$

$c = 0$

1	2	3	4	5

Visualização do algoritmo do maior subvetor com, no máximo, $K = 1$ números ímpares

$ans = 0$

$c = 1$

L

$\downarrow$

1	2	3	4	5

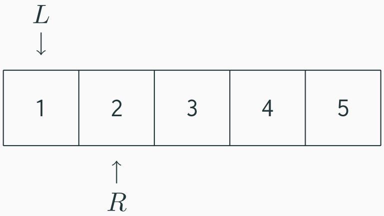
$\uparrow$

R

Visualização do algoritmo do maior subvetor com, no máximo, $K = 1$ números ímpares

$ans = 0$

$c = 1$



Visualização do algoritmo do maior subvetor com, no máximo, $K = 1$ números ímpares

$ans = 0$

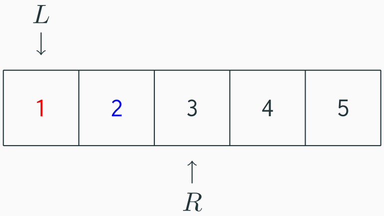
$c = 1$

$$\begin{array}{ccccc} L & & & & \\ \downarrow & & & & \\ \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{4} & \boxed{5} \\ & & \uparrow & & \\ & & R & & \end{array}$$

Visualização do algoritmo do maior subvetor com, no máximo, $K = 1$ números ímpares

$ans = 2$

$c = 1$



Visualização do algoritmo do maior subvetor com, no máximo, $K = 1$ números ímpares

$ans = 2$

$c = 0$

L

$\downarrow$

1	2	3	4	5

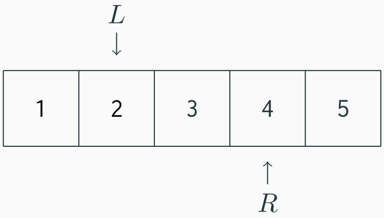
$\uparrow$

R

Visualização do algoritmo do maior subvetor com, no máximo, $K = 1$ números ímpares

$ans = 2$

$c = 1$



Visualização do algoritmo do maior subvetor com, no máximo, $K = 1$ números ímpares

$ans = 2$

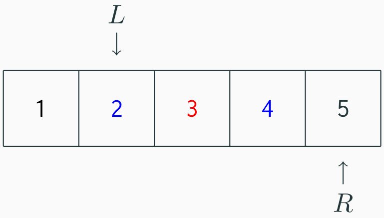
$c = 1$

	L			
	$\downarrow$			
1	2	3	4	5
				$\uparrow$
				R

Visualização do algoritmo do maior subvetor com, no máximo, $K = 1$ números ímpares

$ans = 3$

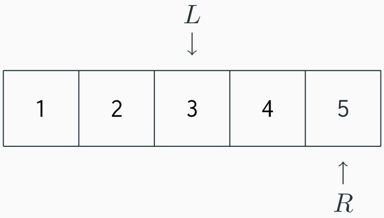
$c = 1$



Visualização do algoritmo do maior subvetor com, no máximo, $K = 1$ números ímpares

$ans = 3$

$c = 1$



Visualização do algoritmo do maior subvetor com, no máximo, $K = 1$ números ímpares

$ans = 3$

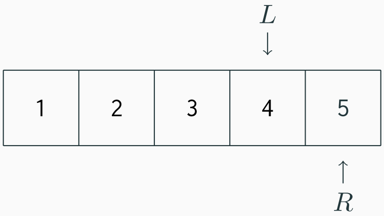
$c = 1$

		$L \downarrow$		
1	2	3	4	5
				$\uparrow R$

Visualização do algoritmo do maior subvetor com, no máximo, $K = 1$ números ímpares

$ans = 3$

$c = 0$



Visualização do algoritmo do maior subvetor com, no máximo, $K = 1$ números ímpares

$ans = 3$

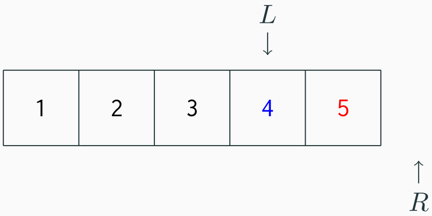
$c = 1$

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & L & \\
 & & & \downarrow & \\
\hline
\multicolumn{1}{|c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{2} & \multicolumn{1}{c|}{3} & \multicolumn{1}{c|}{4} & \multicolumn{1}{c|}{5} \\
\hline
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
\\ \\ \\ \uparrow \\ R
\end{array}
$$

Visualização do algoritmo do maior subvetor com, no máximo, $K = 1$ números ímpares

$ans = 3$

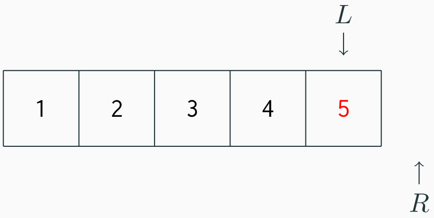
$c = 1$



Visualização do algoritmo do maior subvetor com, no máximo, $K = 1$ números ímpares

$ans = 3$

$c = 1$



Implementação do maior subvetor com, no máximo, K ímpares

```cpp
#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;

size_t max_subarray(const vector<int>& xs, size_t K) {
    auto N = xs.size(), L = 0ul, R = 0ul, odds = 0ul, ans = 0ul;

    while (L < N) {
        R = max(L, R);

        while (R < N and (xs[R] % 2 == 0 or odds < K))
            odds += (xs[R++] % 2);

        ans = max(ans, R - L);
        odds = max(odds - (xs[L] % 2), 0ul);
        ++L;
    }

    return ans;
}
```

Implementação do maior subvetor com, no máximo, K ímpares

```cpp
int main()
{
    vector<int> xs { 1, 3, 5, 4, 5 }, ys { 1, 3, 5 };

    cout << max_subarray(xs, 1) << '\n';
    cout << max_subarray(xs, 2) << '\n';
    cout << max_subarray(xs, 3) << '\n';
    cout << max_subarray(ys, 0) << '\n';

    return 0;
}
```

Menor elemento em um subvetor de tamanho K

- Quando o intervalo delimitador por $[L, R)$ tem um tamanho K fixo, a técnica dos dois ponteiros também é conhecida como *sliding window*
- Seja $\vec{v}$ um veto com N inteiros
- O problema de se determinar o menor elemento de cada um dos $N - K + 1$ subintervalos de tamanho K pode ser resolvido com dois ponteiros e duas pilhas P_{in} e P_{out}
- As pilhas armazenarão pares de valores (x, m), onde x é o elemento do vetor a ser inserido, e m é o menor dentre os valores contidos na pilha e o próprio x

Menor elemento em um subvetor de tamanho K

- Observe que m será igual ao próprio x, caso a pilha esteja vazia
- Nos demais casos, $m = \min\{x, M\}$, onde M é o segundo elemento do par que está no topo da pilha
- Inicialmente, insera os primeiros K elementos de $\vec{v}$ na pilha P_{in}
- O segundo elemento do par do topo de P_{in} será a resposta para o primeiro intervalo
- Faça $L = 0$ e $R = K$
- Caso a pilha P_{out} esteja vazia mova, um a um, os elementos de P_{in} para P_{out}, atualizando corretamente os valores de m

Menor elemento em um subvetor de tamanho K

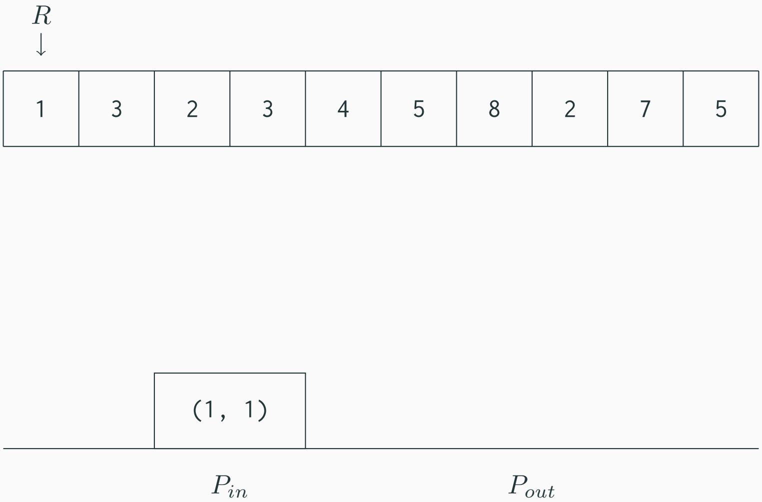
- Exclua o elemento do topo de P_{out}: isto removerá o elemento $\vec{v}[L]$ das pilhas
- Em seguida, incremente L
- Agora, insira $\vec{v}[R]$ na pilha P_{in} e incremente R
- Após estes ajustes, as pilhas conterão os elementos do intervalo de tamanho K adjacente ao anterior (isto é, a janela se moveu de $[L, R)$ para $[L+1, R+1)$)
- A resposta para L será o menor entre os valores m dos topos das pilhas
- Como cada ponteiros observa cada elemento de $\vec{v}$ no máximo uma vez, e cada elemento passa por, no máximo, duas pilhas, a complexidade do algoritmo é $O(N)$

Visualização do menor elemento em cada um dos subvetores de tamanho $K = 3$

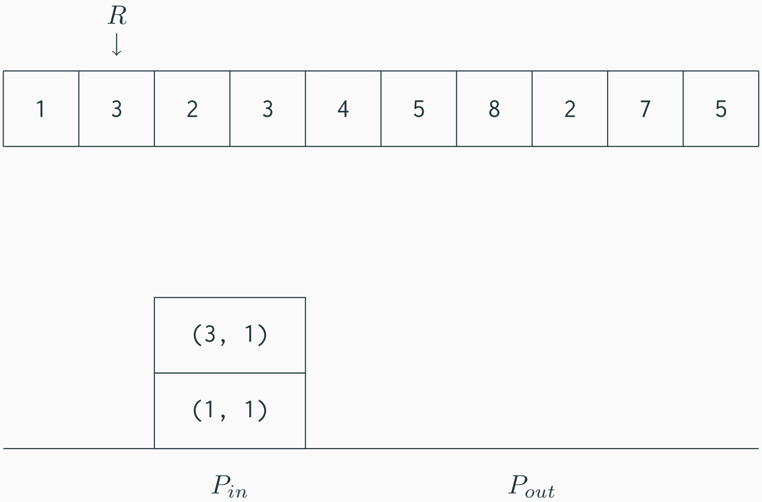
1	3	2	3	4	5	8	2	7	5

P_{in} P_{out}

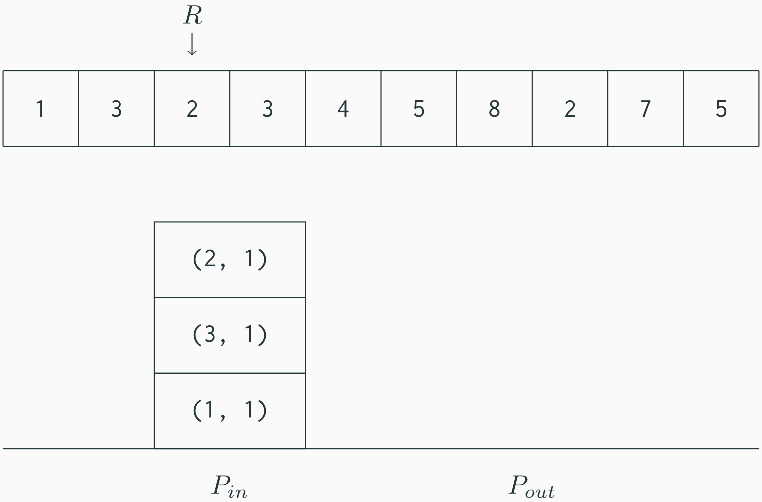
Visualização do menor elemento em cada um dos subvetores de tamanho $K = 3$



Visualização do menor elemento em cada um dos subvetores de tamanho $K = 3$



Visualização do menor elemento em cada um dos subvetores de tamanho $K = 3$



Visualização do menor elemento em cada um dos subvetores de tamanho $K = 3$

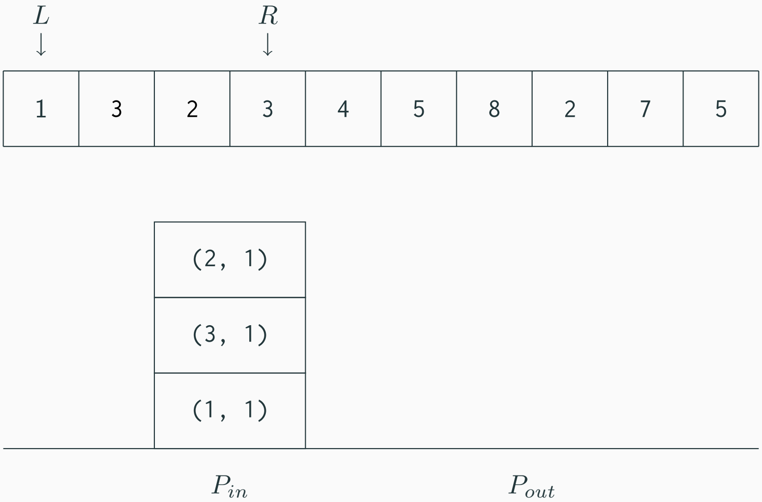
$$R \downarrow$$

1	3	2	3	4	5	8	2	7	5

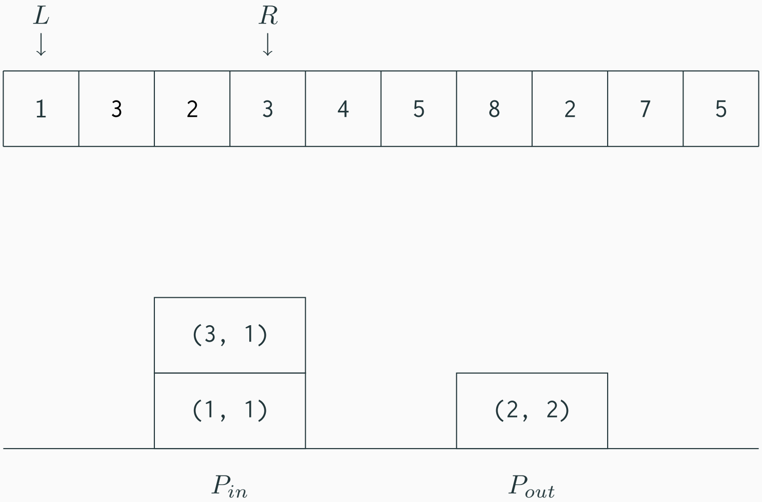
(2, **1**)
(3, 1)
(1, 1)

P_{in} P_{out}

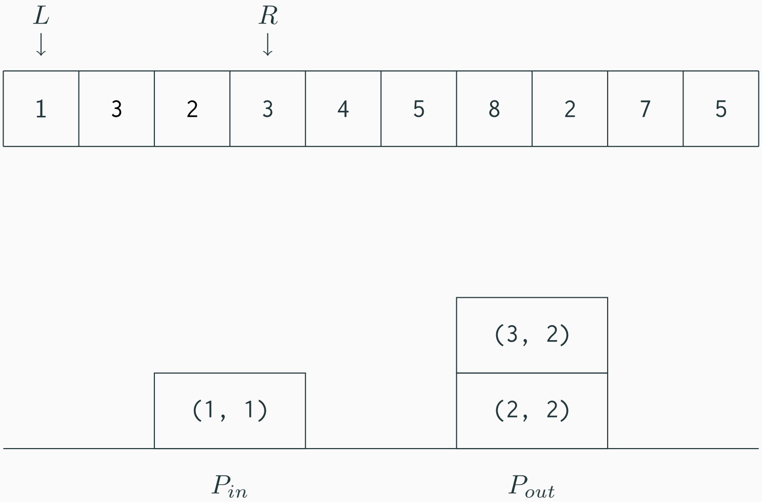
Visualização do menor elemento em cada um dos subvetores de tamanho $K = 3$



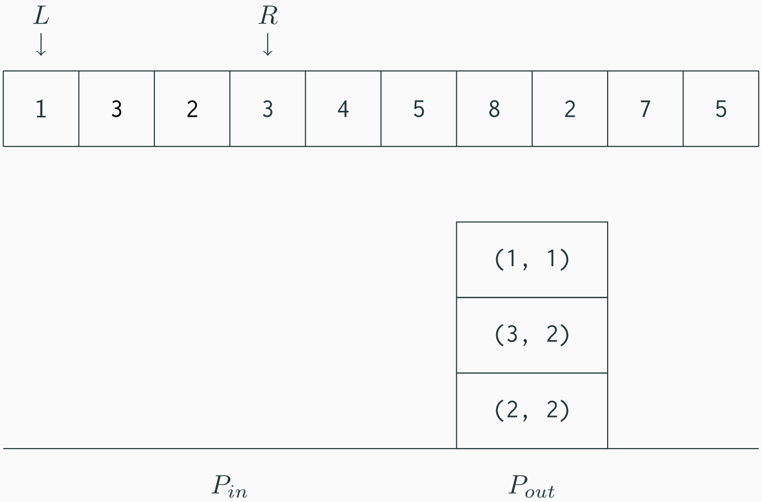
Visualização do menor elemento em cada um dos subvetores de tamanho $K = 3$



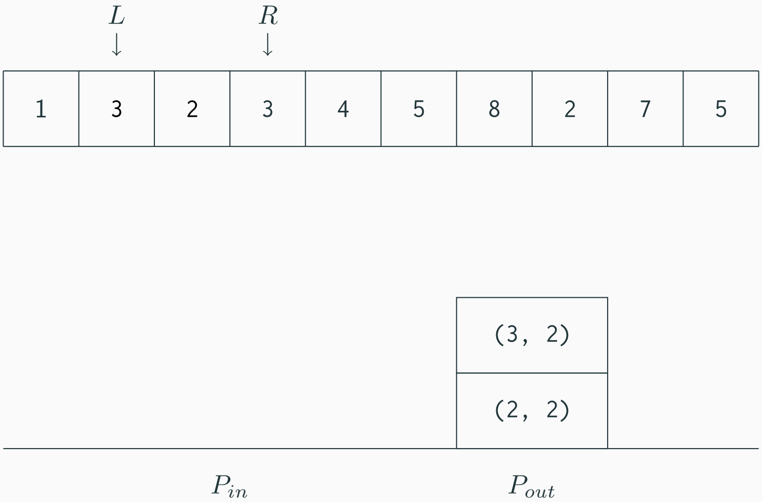
Visualização do menor elemento em cada um dos subvetores de tamanho $K = 3$



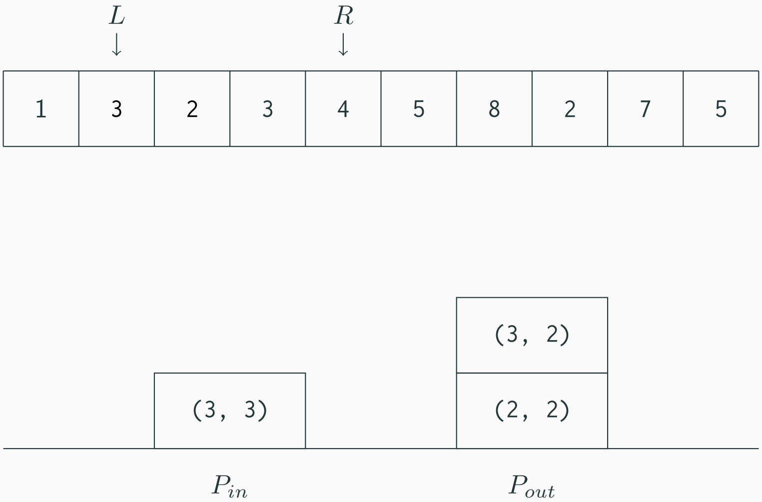
Visualização do menor elemento em cada um dos subvetores de tamanho $K = 3$



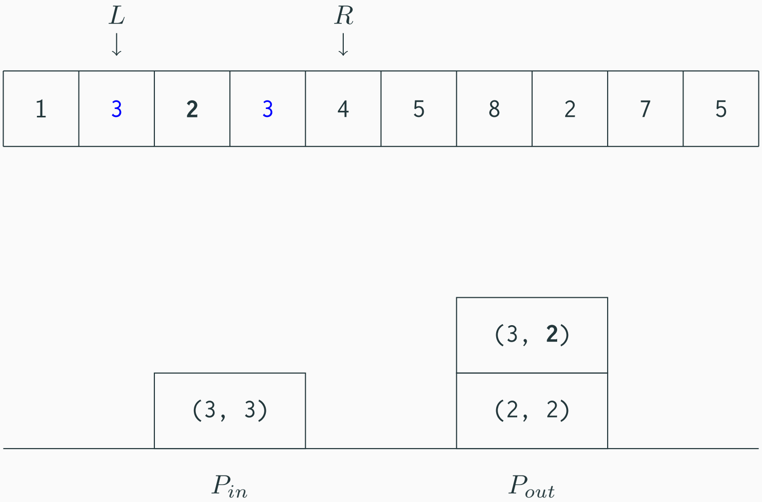
Visualização do menor elemento em cada um dos subvetores de tamanho $K = 3$



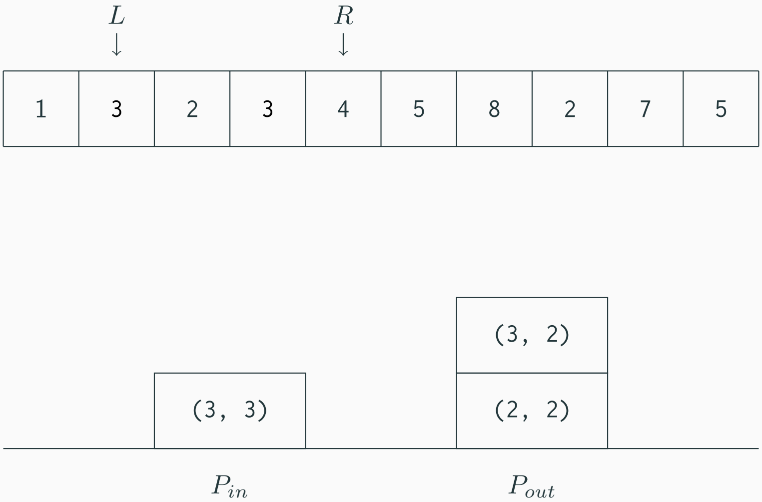
Visualização do menor elemento em cada um dos subvetores de tamanho $K = 3$



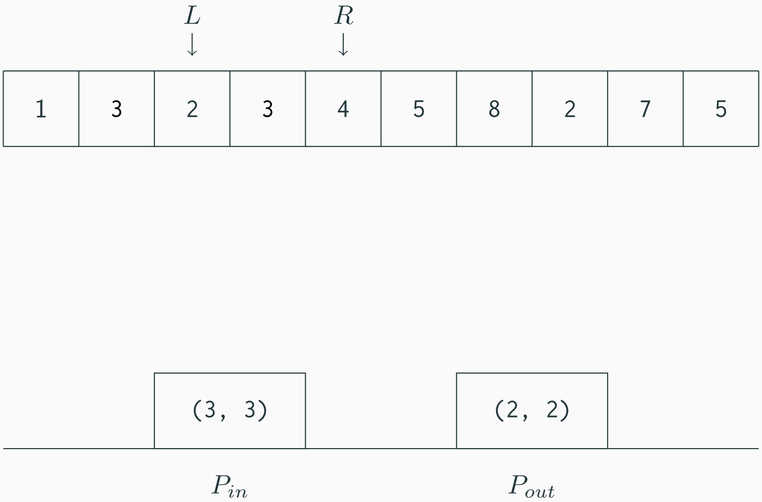
Visualização do menor elemento em cada um dos subvetores de tamanho $K = 3$



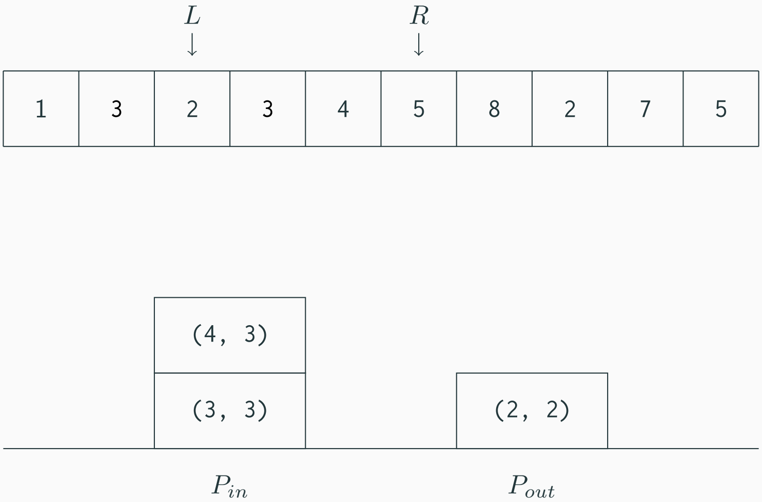
Visualização do menor elemento em cada um dos subvetores de tamanho $K = 3$



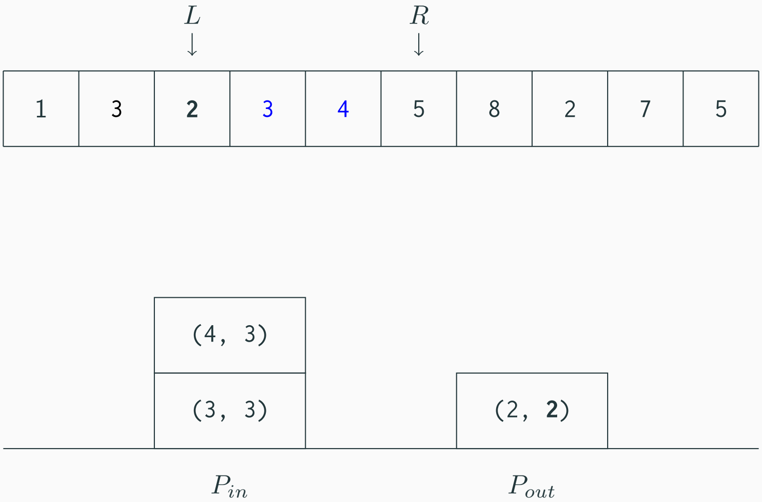
Visualização do menor elemento em cada um dos subvetores de tamanho $K = 3$



Visualização do menor elemento em cada um dos subvetores de tamanho $K = 3$



Visualização do menor elemento em cada um dos subvetores de tamanho $K = 3$



Implementação

```cpp
#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;
using ii = pair<int, int>;
const int oo { 1000000010 };

void insert(stack<ii>& s, int x)
{
    int m = s.empty() ? x : min(s.top().second, x);
    s.push(ii(x, m));
}

void move(stack<ii>& out, stack<ii>& in)
{
    while (not in.empty()) {
        auto x = in.top().first;
        in.pop();
        insert(out, x);
    }
}
```

Implementação

```
vector<int> minimum(int N, int K, const vector<int>& xs)
{
    stack<ii> in, out;

    int L = 0, R;

    for (R = 0; R < K; ++R)
        insert(in, xs[R]);

    move(out, in);

    vector<int> ans(N - K + 1, -1);

    ans[L] = out.top().second;

    while (R < N)
    {
        if (out.empty())
            move(out, in);
```

Implementação

```
        insert(in, xs[R]);
        out.pop();

        ++L;
        ++R;

        auto a = in.empty() ? oo : in.top().second;
        auto b = out.empty() ? oo : out.top().second;

        ans[L] = min(a, b);
    }

    return ans;
}
```

Implementação

```
int main()
{
    vector<int> xs { 1, 3, 2, 3, 4, 5, 8, 2, 7, 5, 3, 10, 6, 9 };
    int K = 3;

    auto ans = minimum((int) xs.size(), K, xs);

    for (size_t i = 0; i < ans.size(); ++i)
    {
        cout << "[";

        for (int j = 0; j < K; ++j)
            cout << xs[i + j] << (j + 1 == K ? "]" : ", ");

        cout << " -> " << ans[i] << '\n';
    }

    return 0;
}
```

2SUM

- O 2SUM é um problema bastante conhecido: dado um vetor $\vec{v}$ com N inteiros, determine se, para um dado S, existem dois elementos v_i e v_j tais que $v_i + v_j = S$
- Há $O(N^2)$ pares de elementos de $\vec{v}$, de modo que uma solução que verificasse cada um destes pares teria complexidade $O(N^2)$
- É possível usar a técnica dos dois ponteiros para reduzir complexidade
- Se $\vec{v}$ não estiver ordenado, ordene-o em ordem não-decrescente
- Inicie os ponteiros $L = 0$ e $R = N - 1$
- Enquanto $R > L$ (ou $R \geq L$, se um elemento puder se utilizado duas vezes) e $\vec{v}[L] + \vec{v}[R] > S$, decremente R

2SUM

- Caso $\vec{v}[L] + \vec{v}[R] = S$, a solução foi encontrada e o algoritmo termina
- Caso contrário, incremente L e repita o processo
- Se, em algum momento, $R < L$, o algoritmo finalizará e o problema não tem solução
- Este problema é um exemplo onde os ponteiros avançam em direções opostas
- Como cada elemento é observado, no máximo, uma única vez por cada ponteiros, a complexidade do algoritmo é $O(N)$
- Caso o vetor não esteja inicialmente ordenado, a complexidade passa a ser $O(N \log N)$, devido ao algoritmo de ordenação

Implementação do 2SUM

```cpp
#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;

bool _2sum(int N, int S, vector<int>& xs)
{
    sort(xs.begin(), xs.end());

    int L = 0, R = N - 1;

    // A solução exige dois elementos distintos de xs
    while (L < R) {
        while (R > L and xs[L] + xs[R] > S)
            --R;

        if (R <= L)
            break;

        if (xs[L] + xs[R] == S)
            return true;
```

```cpp
            ++L;
    }

    return false;
}

int main()
{
    vector<int> xs { 1, -2, 5, 8, -3, 7, -5 };
    int N = (int) xs.size();

    cout << _2sum(N, 0, xs) << endl;
    cout << _2sum(N, 1, xs) << endl;
    cout << _2sum(N, 4, xs) << endl;
    cout << _2sum(N, 14, xs) << endl;

    return 0;
}
```

Referências

1. **LAARKSONEN**, Antti. *Competitive Programmer's Handbook*, 2017.
2. **HALIM**, Steve; **HALIM**, Felix. *Competitive Programming 3*, Lulu, 2013.