Grafos

Pontes e Pontos de Articulação

Prof. Edson Alves

Faculdade UnB Gama

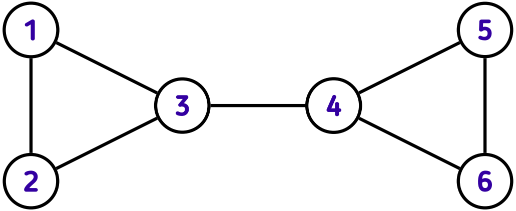
Pontes

Pontes

Seja $G(V, E)$ um grafo não-direcionado conectado. Uma aresta $e \in E$ é uma **ponte** se a exclusão de e torna o grafo G desconectado.

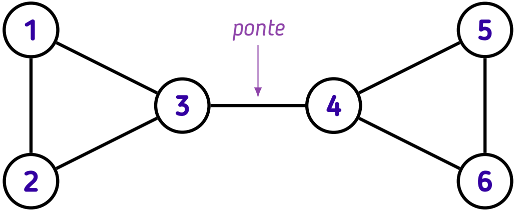
Pontes

Seja $G(V, E)$ um grafo não-direcionado conectado. Uma aresta $e \in E$ é uma ponte se a exclusão de e torna o grafo G desconectado.



Pontes

Seja $G(V, E)$ um grafo não-direcionado conectado. Uma aresta $e \in E$ é uma **ponte** se a exclusão de e torna o grafo G desconectado.



Árvore gerada pela DFS

Árvore gerada pela DFS

- **Uma DFS num grafo G gera uma árvore**

Árvore gerada pela DFS

- ⋆ **Uma DFS num grafo G gera uma árvore**
- ⋆ **Os vértices são os mesmos de G**

Árvore gerada pela DFS

- Uma DFS num grafo G gera uma árvore
- Os vértices são os mesmos de G
- As arestas dependem da ordem de descoberta dos vértices

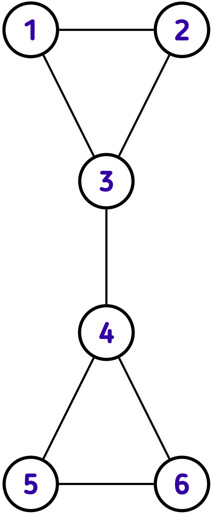
Árvore gerada pela DFS

- ⋆ Uma DFS num grafo G gera uma árvore
- ⋆ Os vértices são os mesmos de G
- ⋆ As arestas dependem da ordem de descoberta dos vértices
- ⋆ Esta ordem também determina uma permutação dos vértices

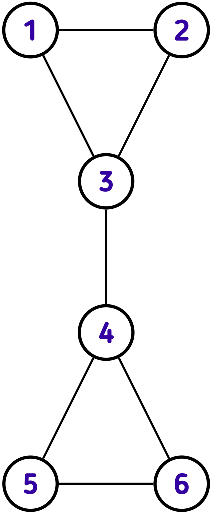
Árvore gerada pela DFS

- ⋆ Uma DFS num grafo G gera uma árvore
- ⋆ Os vértices são os mesmos de G
- ⋆ As arestas dependem da ordem de descoberta dos vértices
- ⋆ Esta ordem também determina uma permutação dos vértices
- ⋆ O índice de cada vértice nesta permutação tem importantes propriedades

Grafo

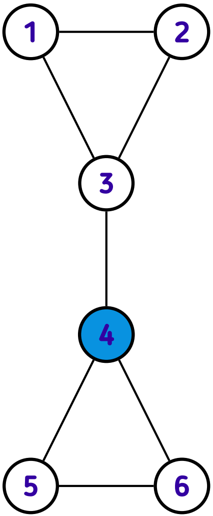


Grafo



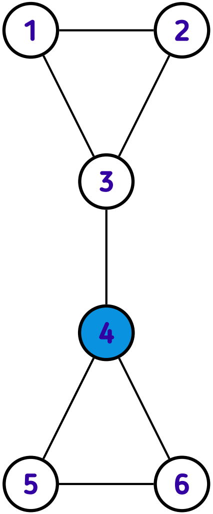
Árvore gerada pelo DFS

Grafo



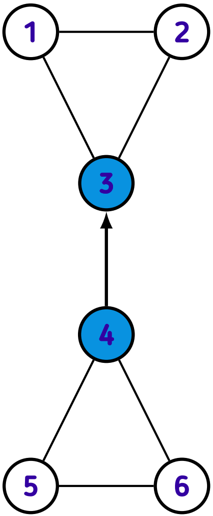
Árvore gerada pelo DFS

Grafo



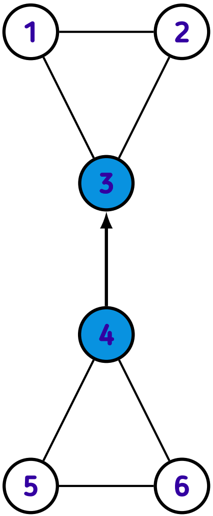
Árvore gerada pelo DFS

Grafo

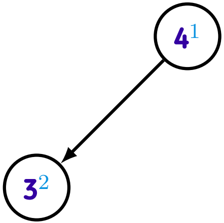


Árvore gerada pelo DFS

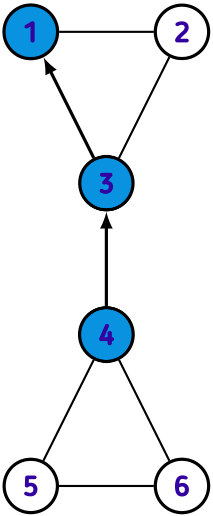
Grafo



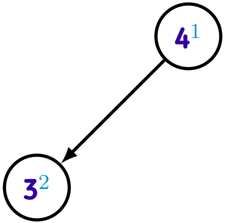
Árvore gerada pelo DFS



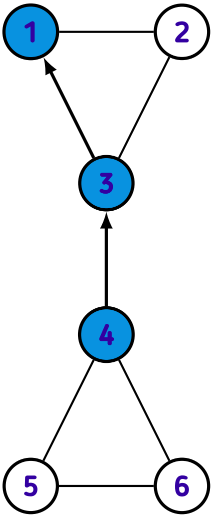
Grafo



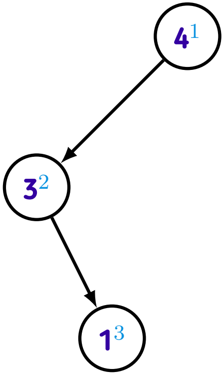
Árvore gerada pelo DFS



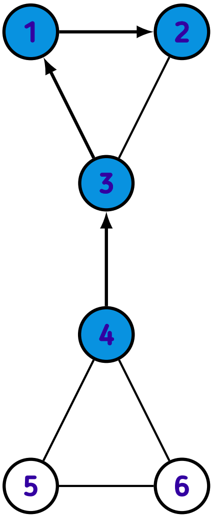
Grafo



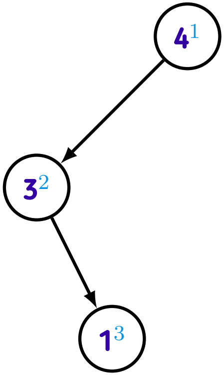
Árvore gerada pelo DFS



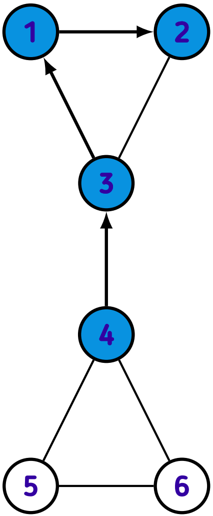
Grafo



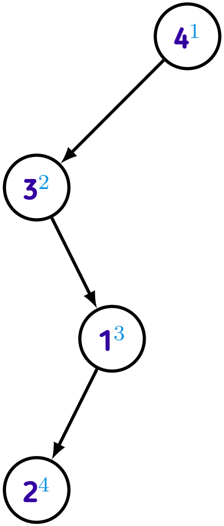
Árvore gerada pelo DFS



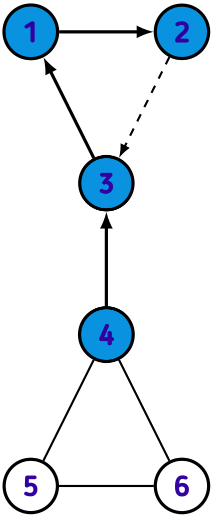
Grafo



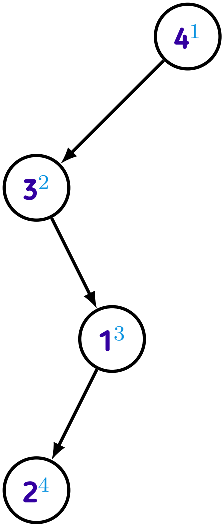
Árvore gerada pelo DFS



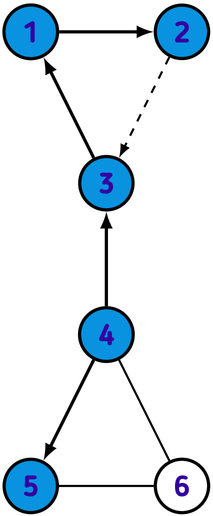
Grafo



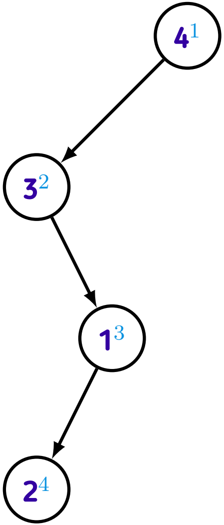
Árvore gerada pelo DFS



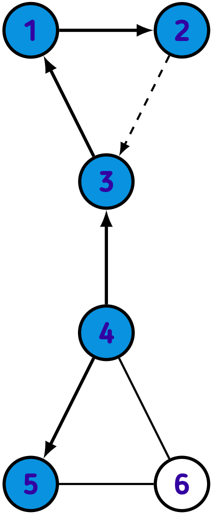
Grafo



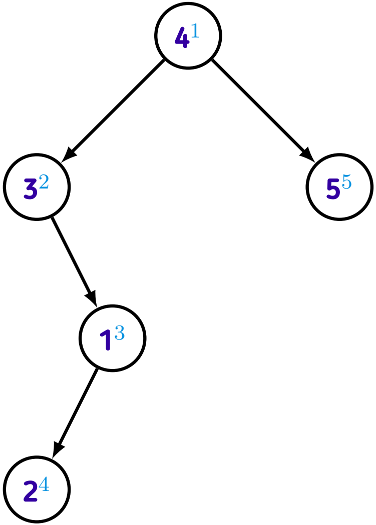
Árvore gerada pelo DFS



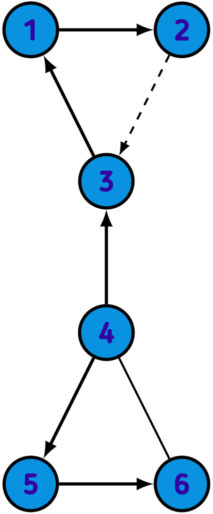
Grafo



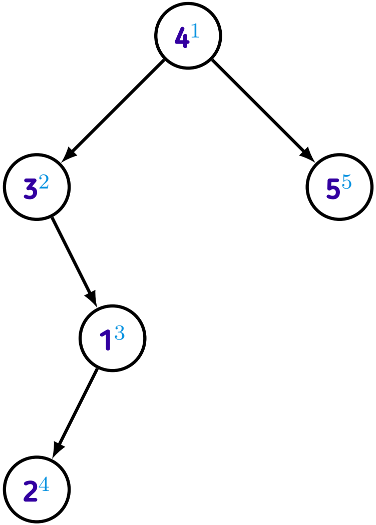
Árvore gerada pelo DFS



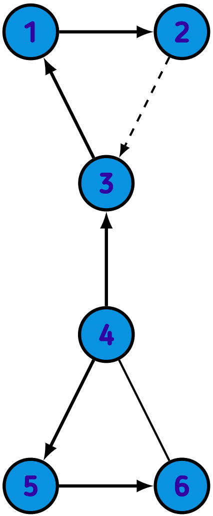
Grafo



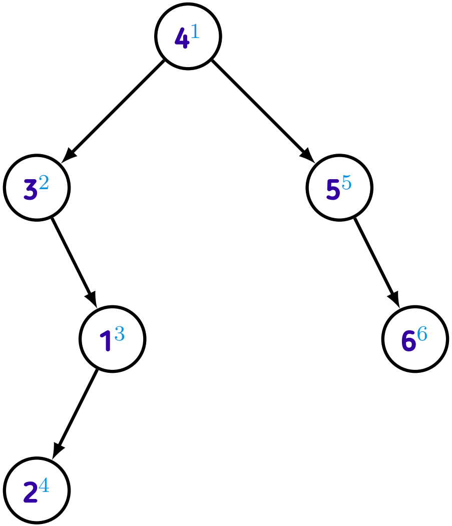
Árvore gerada pelo DFS



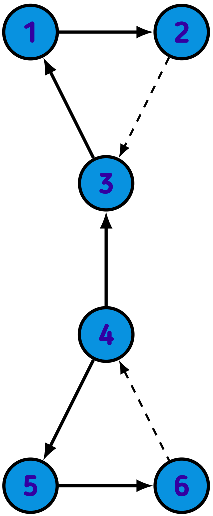
Grafo



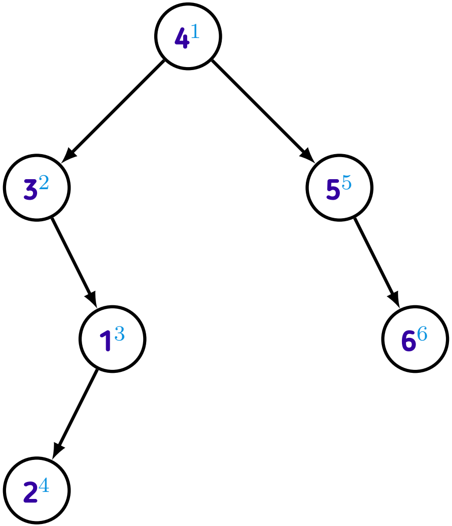
Árvore gerada pelo DFS



Grafo



Árvore gerada pelo DFS



Propriedades dos índices da permutação

Propriedades dos índices da permutação

$\star$ Seja $i_s(u)$ o índice do vértice u na permutação gerada pela DFS que tem s como vértice inicial

Propriedades dos índices da permutação

$\star$ **Seja $i_s(u)$ o índice do vértice u na permutação gerada pela DFS que tem s como vértice inicial**

$\star$ **Se $i_s(u) < i_s(v)$ então ou u é ancestral de v ou u está em uma subárvore de s da subárvore que contém v**

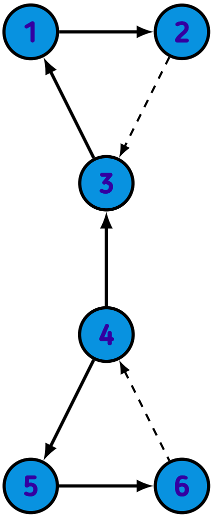
Propriedades dos índices da permutação

$\star$ Seja $i_s(u)$ o índice do vértice u na permutação gerada pela DFS que tem s como vértice inicial

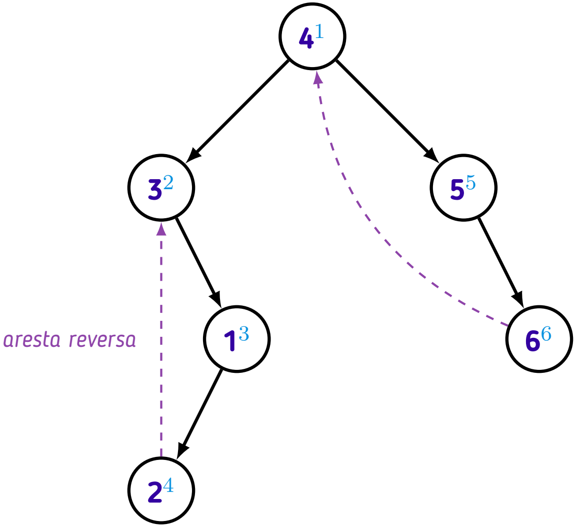
$\star$ Se $i_s(u) < i_s(v)$ então ou u é ancestral de v ou u está em uma subárvore de s da subárvore que contém v

$\star$ Se $(u, v) \in E$ e $i_s(v) < i_s(u)$, então (u, v) é uma aresta reversa

Grafo



Árvore gerada pelo DFS



Menor ancestral alcançável

Menor ancestral alcançável

- **Seja $\mu_s(u)$ o menor índice dentre todos os vértices atingíveis a partir da subárvore (ou subgrafo) cuja raiz é u**

Menor ancestral alcançável

- $\star$ **Seja $\mu_s(u)$ o menor índice dentre todos os vértices atingíveis a partir da subárvore (ou subgrafo) cuja raiz é u**

- $\star$ **A DFS a partir de u gera uma subárvore se não houverem arestas reversas**

Menor ancestral alcançável

$\star$ **Seja $\mu_s(u)$ o menor índice dentre todos os vértices atingíveis a partir da subárvore (ou subgrafo) cuja raiz é u**

$\star$ **A DFS a partir de u gera uma subárvore se não houverem arestas reversas**

$\star$ **Neste caso, $i_s(w) = \mu_s(w)$ para todo vértice w nesta subárvore**

Menor ancestral alcançável

$\star$ **Seja** $\mu_s(u)$ **o menor índice dentre todos os vértices atingíveis a partir da subárvore (ou subgrafo) cuja raiz é** u

$\star$ **A DFS a partir de** u **gera uma subárvore se não houverem arestas reversas**

$\star$ **Neste caso,** $i_s(w) = \mu_s(w)$ **para todo vértice** w **nesta subárvore**

$\star$ **As arestas reversas impactam nos valores de** $\mu_s(u)$

Menor ancestral alcançável

- $\star$ Seja $\mu_s(u)$ o menor índice dentre todos os vértices atingíveis a partir da subárvore (ou subgrafo) cuja raiz é u

- $\star$ A DFS a partir de u gera uma subárvore se não houverem arestas reversas

- $\star$ Neste caso, $i_s(w) = \mu_s(w)$ para todo vértice w nesta subárvore

- $\star$ As arestas reversas impactam nos valores de $\mu_s(u)$

- $\star$ Se (u, v) é aresta reversa, então $\mu_s(u) = \min\{\mu_s(u), i_s(v)\}$

Identificação de pontes

Identificação de pontes

Seja $G(V, E)$ um grafo conectado e $s \in V$ o vértice de partida de uma DFS.

A aresta $(u, v) \in E$ é uma ponte se $\mu_s(v) > i_s(u)$.

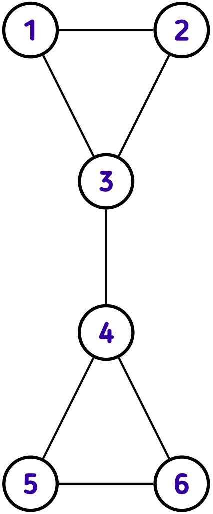
Identificação de pontes

Seja $G(V, E)$ um grafo conectado e $s \in V$ o vértice de partida de uma DFS.

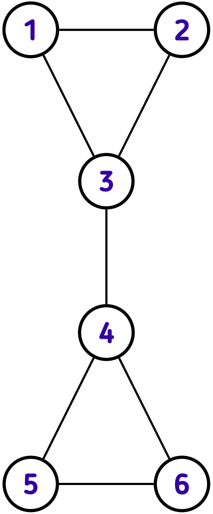
A aresta $(u, v) \in E$ é uma ponte se $\mu_s(v) > i_s(u)$.

Definição: Se G não pontes ele é denominado **biconectado**.

Grafo

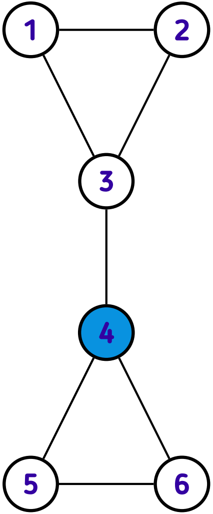


Grafo



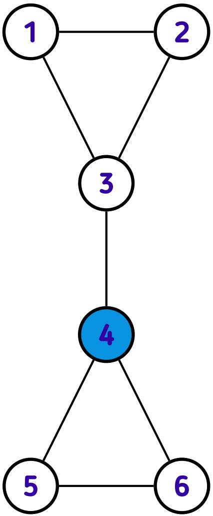
Árvore gerada pelo DFS

Grafo

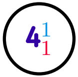


Árvore gerada pelo DFS

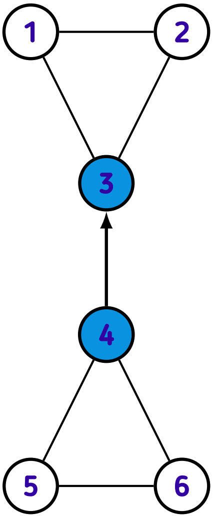
Grafo



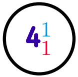
Árvore gerada pelo DFS



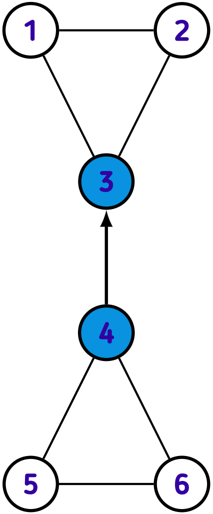
Grafo



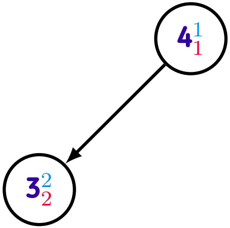
Árvore gerada pelo DFS



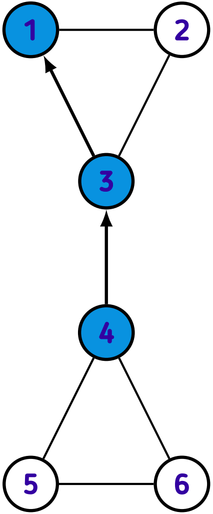
Grafo



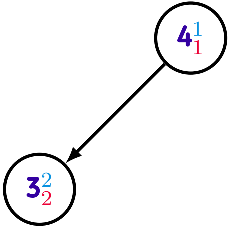
Árvore gerada pelo DFS



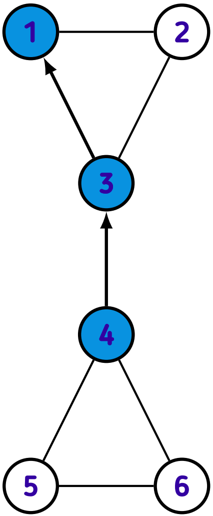
Grafo



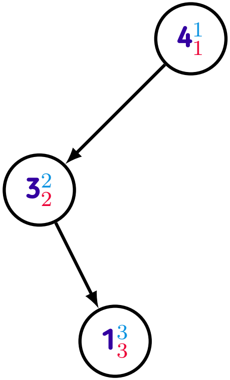
Árvore gerada pelo DFS



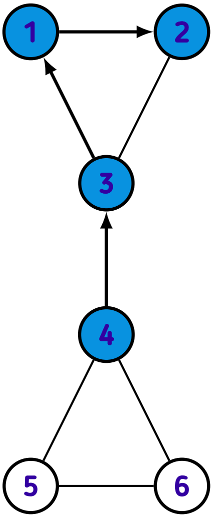
Grafo



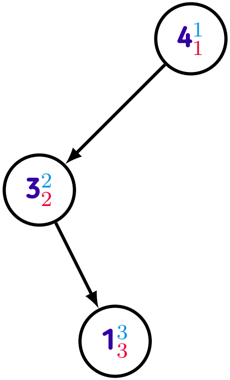
Árvore gerada pelo DFS



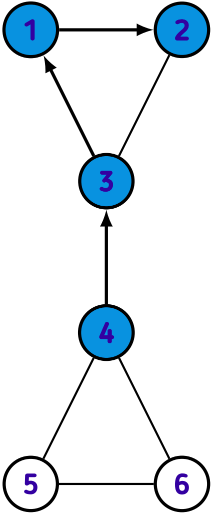
Grafo



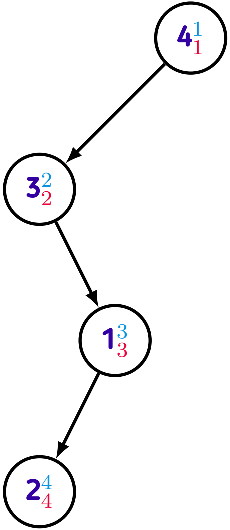
Árvore gerada pelo DFS



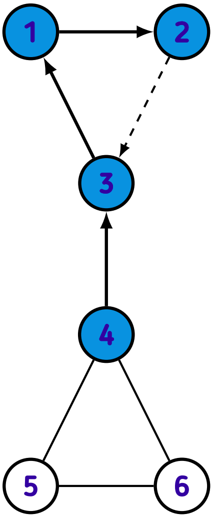
Grafo



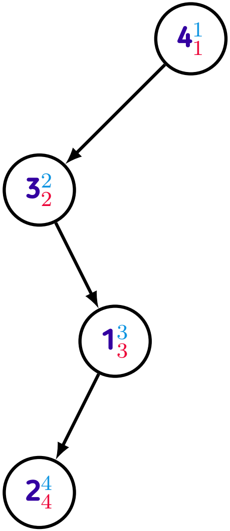
Árvore gerada pelo DFS



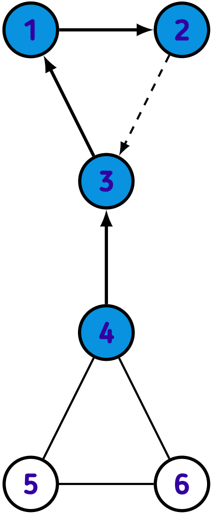
Grafo



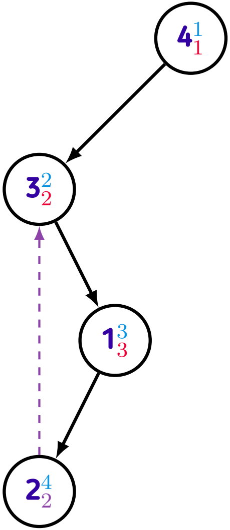
Árvore gerada pelo DFS



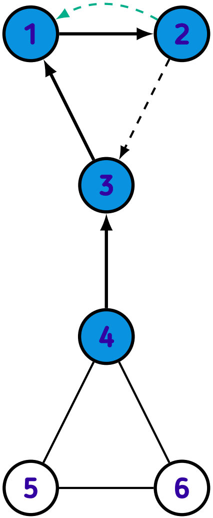
Grafo



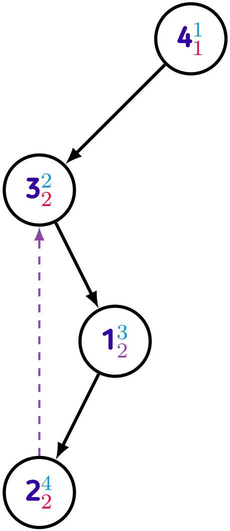
Árvore gerada pelo DFS



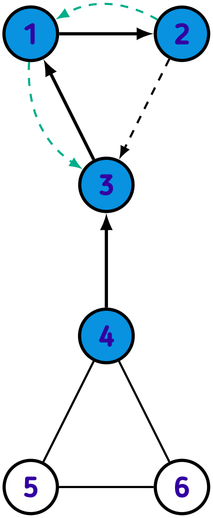
Grafo



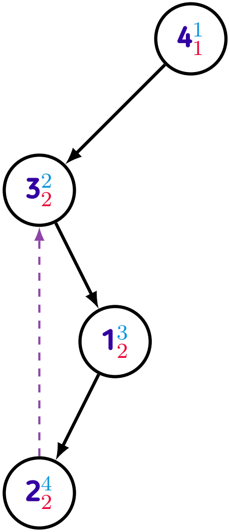
Árvore gerada pelo DFS



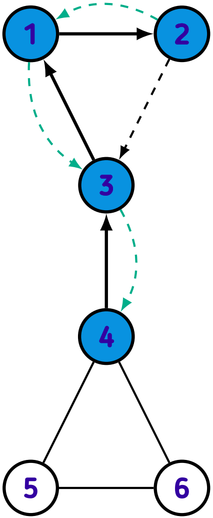
Grafo



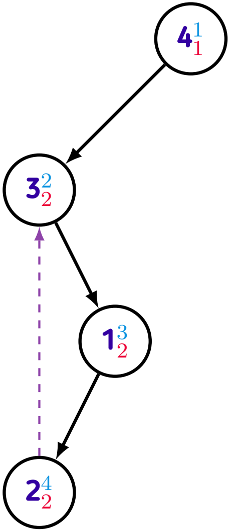
Árvore gerada pelo DFS



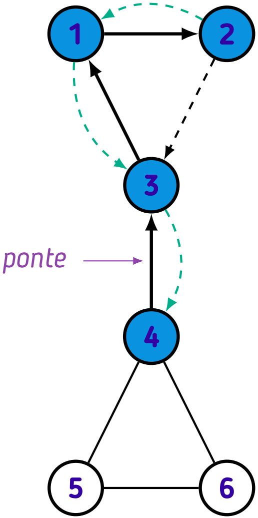
Grafo



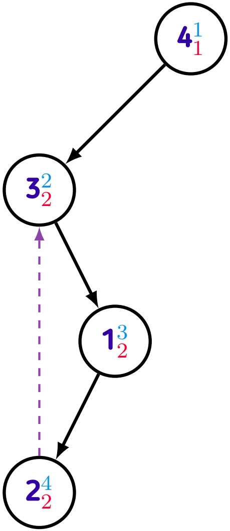
Árvore gerada pelo DFS



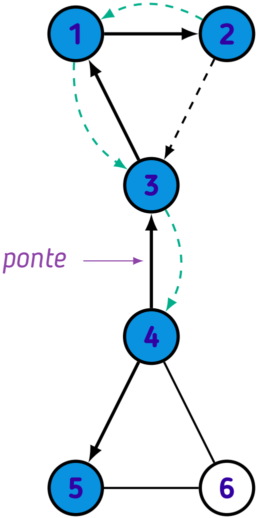
Grafo



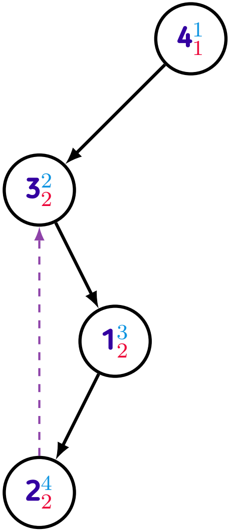
Árvore gerada pelo DFS



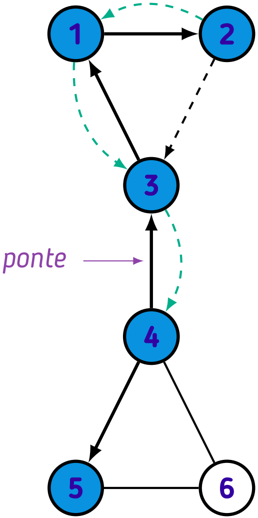
Grafo



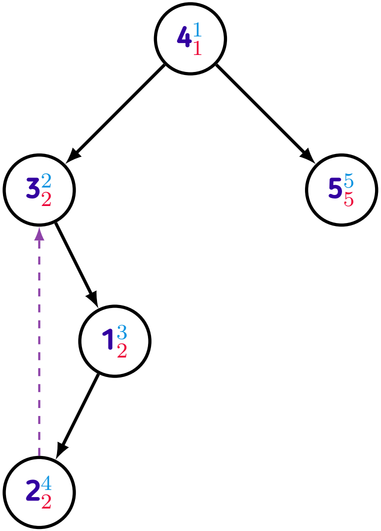
Árvore gerada pelo DFS



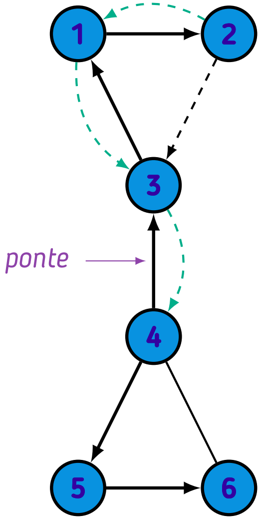
Grafo



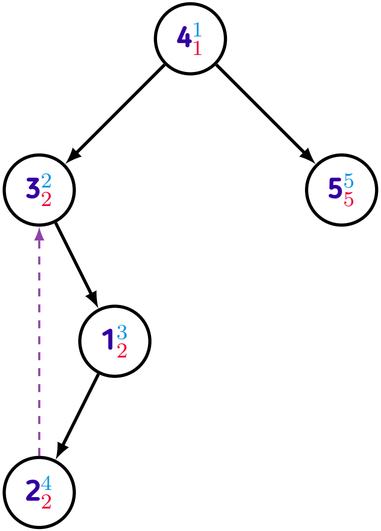
Árvore gerada pelo DFS



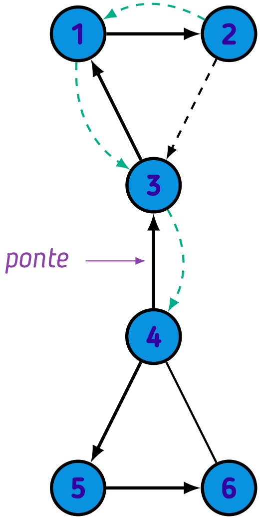
Grafo



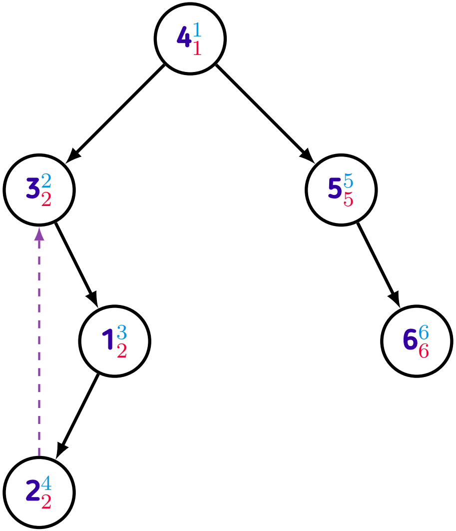
Árvore gerada pelo DFS



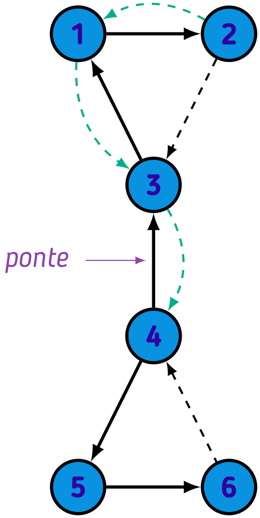
Grafo



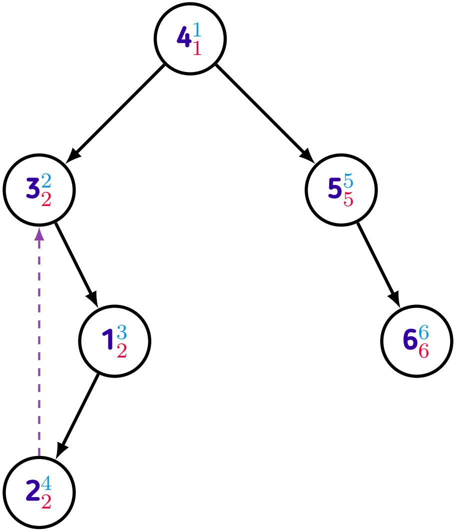
Árvore gerada pelo DFS



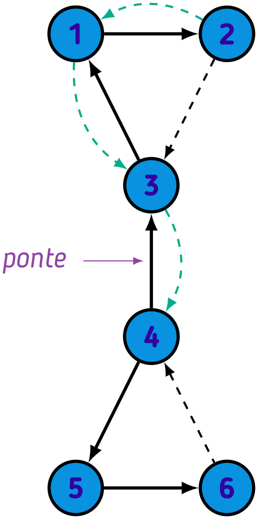
Grafo



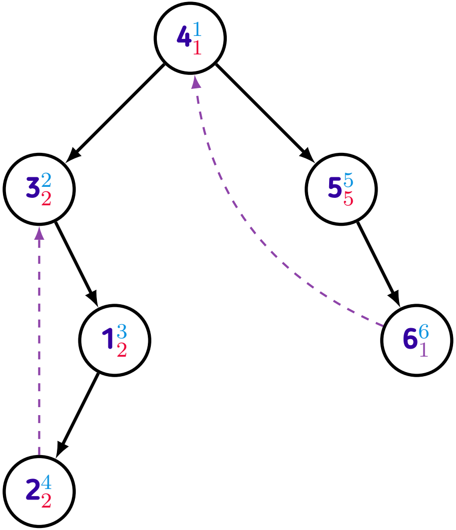
Árvore gerada pelo DFS

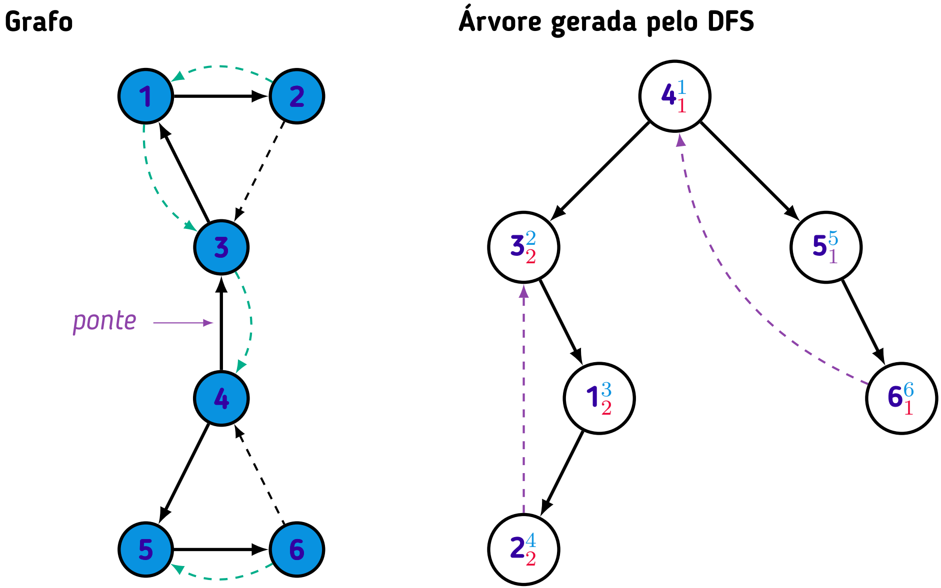


Grafo

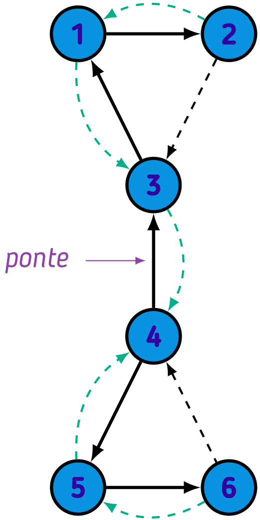


Árvore gerada pelo DFS

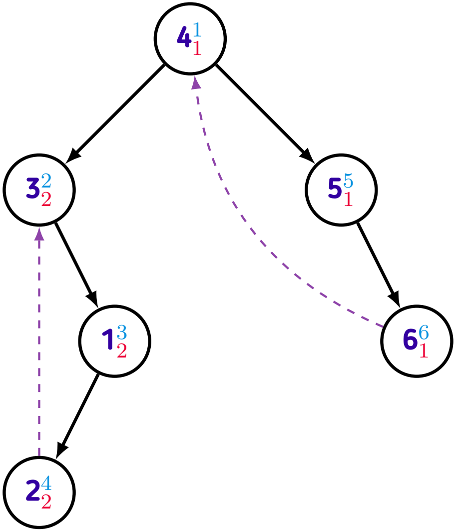



Grafo
Árvore gerada pelo DFS
ponte
1
2
3
4
5
6

Grafo



Árvore gerada pelo DFS



```cpp
void dfs_bridge(int u, int p, int& next, vector<edge>& bridges)
{
    dfs_low[u] = dfs_num[u] = next++;

    for (auto v : adj[u])
        if (not dfs_num[v]) {

            dfs_bridge(v, u, next, bridges);

            if (dfs_low[v] > dfs_num[u])
                bridges.emplace_back(u, v);

            dfs_low[u] = min(dfs_low[u], dfs_low[v]);
        } else if (v != p)
            dfs_low[u] = min(dfs_low[u], dfs_num[v]);
}
```

```
vector<edge> bridges(int N)
{
    memset(dfs_num, 0, (N + 1)*sizeof(int));
    memset(dfs_low, 0, (N + 1)*sizeof(int));

    vector<edge> bridges;

    for (int u = 1, next = 1; u <= N; ++u)
        if (not dfs_num[u])
            dfs_bridge(u, u, next, bridges);

    return bridges;
}
```

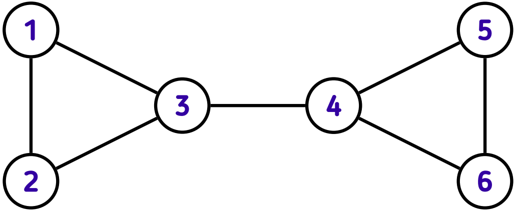
Pontos de articulação

Pontos de articulação

Seja $G(V, E)$ um grafo não-direcionado conectado. Um vértice $u \in V$ é um **ponto de articulação** se a exclusão de u e de todas as arestas que incidem em u torna o grafo desconectado.

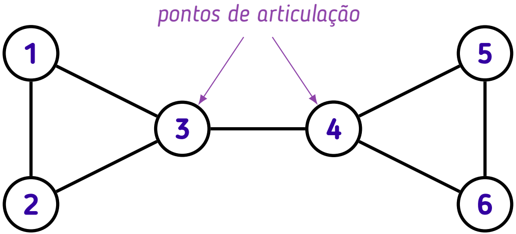
Pontos de articulação

Seja $G(V, E)$ um grafo não-direcionado conectado. Um vértice $u \in V$ é um **ponto de articulação** se a exclusão de u e de todas as arestas que incidem em u torna o grafo desconectado.



Pontos de articulação

Seja $G(V, E)$ um grafo não-direcionado conectado. Um vértice $u \in V$ é um ponto de articulação se a exclusão de u e de todas as arestas que incidem em u torna o grafo desconectado.



Identificação de pontos de articulação

Identificação de pontos de articulação

Seja $G(V, E)$ um grafo conectado e $s \in V$ o vértice de partida de uma DFS.

A aresta $(u, v) \in E$ é uma ponte se $\mu_s(v) \geq i_s(u)$.

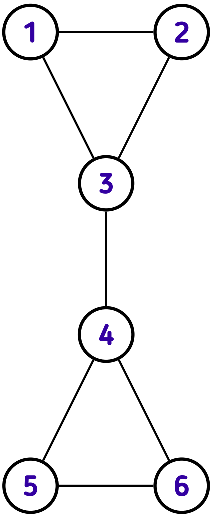
Identificação de pontos de articulação

Seja $G(V, E)$ um grafo conectado e $s \in V$ o vértice de partida de uma DFS.

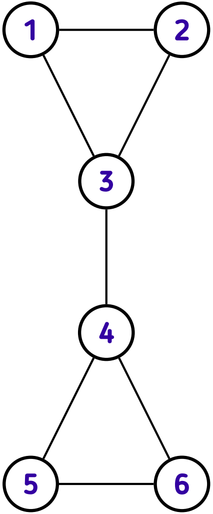
A aresta $(u, v) \in E$ é uma ponte se $\mu_s(v) \geq i_s(u)$.

Caso especial: s só é ponto de articulação se ele tem, no mínimo, dois filhos

Grafo

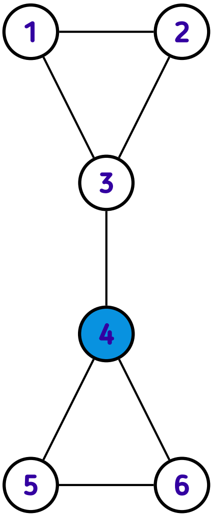


Grafo



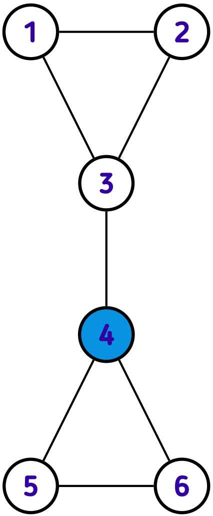
Árvore gerada pelo DFS

Grafo

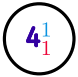


Árvore gerada pelo DFS

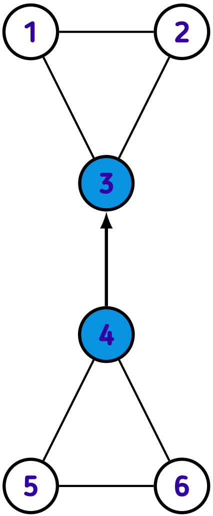
Grafo



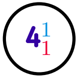
Árvore gerada pelo DFS



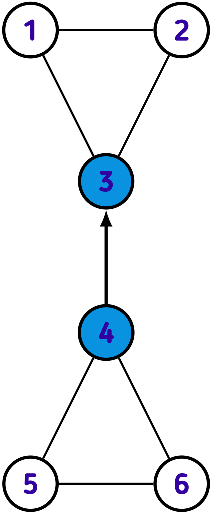
Grafo



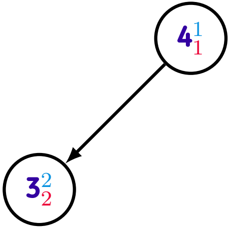
Árvore gerada pelo DFS



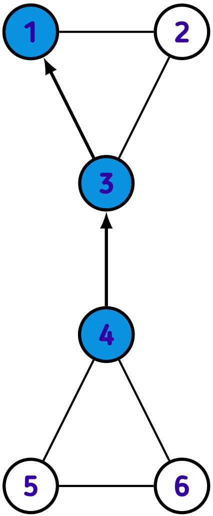
Grafo



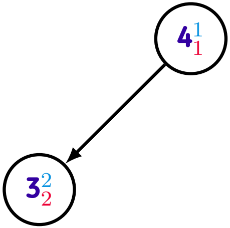
Árvore gerada pelo DFS



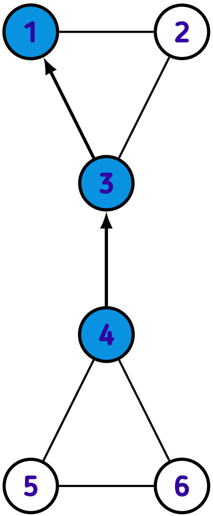
Grafo



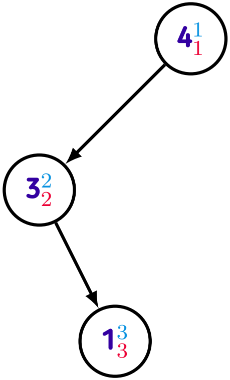
Árvore gerada pelo DFS



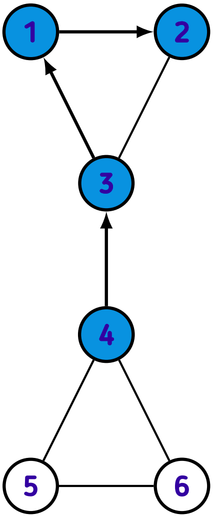
Grafo



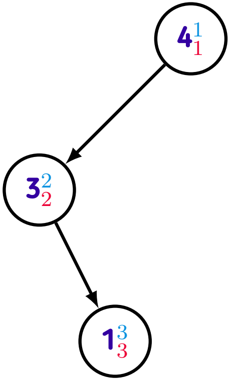
Árvore gerada pelo DFS



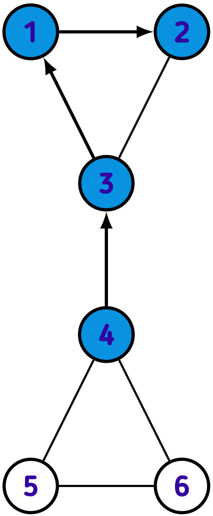
Grafo



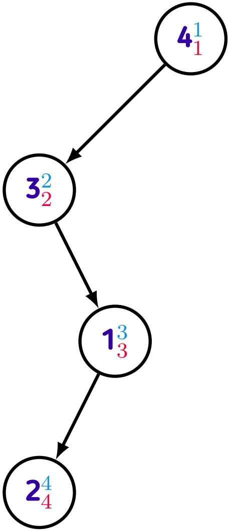
Árvore gerada pelo DFS



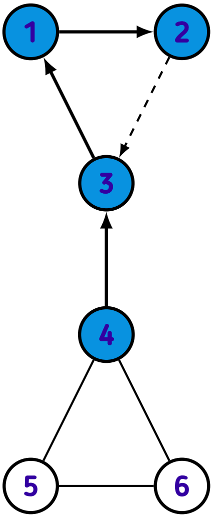
Grafo



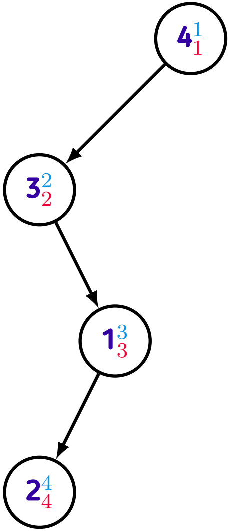
Árvore gerada pelo DFS



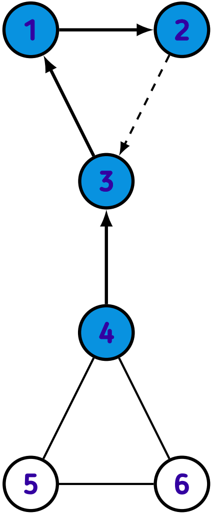
Grafo



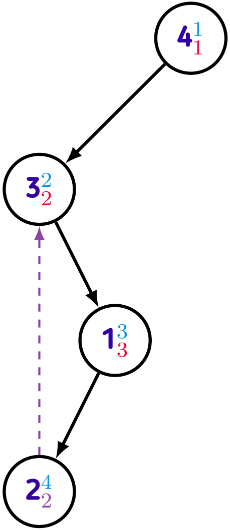
Árvore gerada pelo DFS



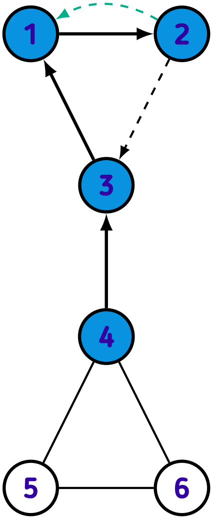
Grafo



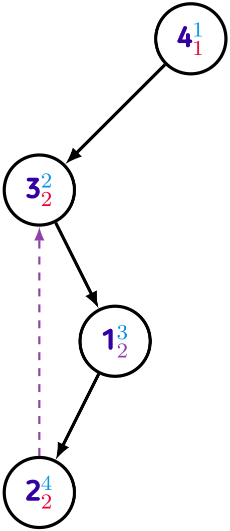
Árvore gerada pelo DFS



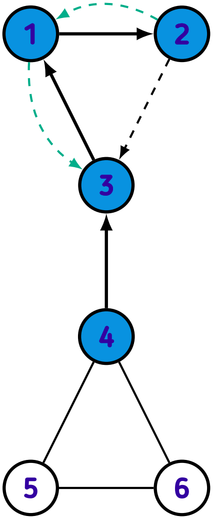
Grafo



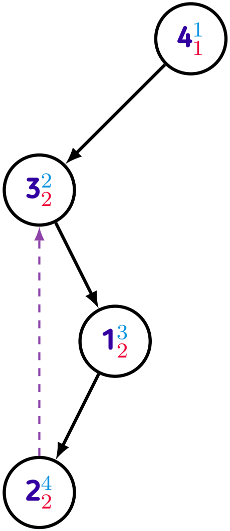
Árvore gerada pelo DFS



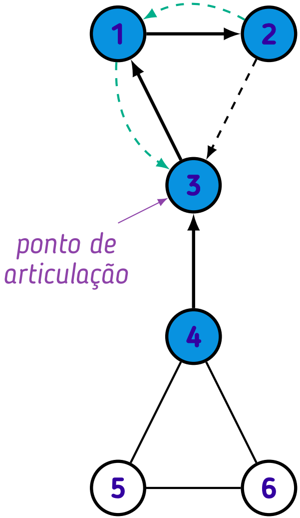
Grafo



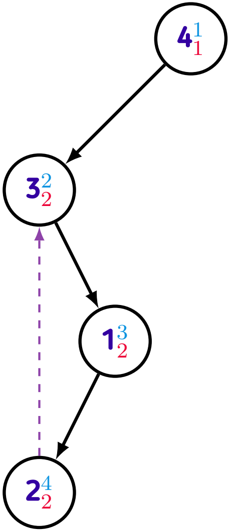
Árvore gerada pelo DFS



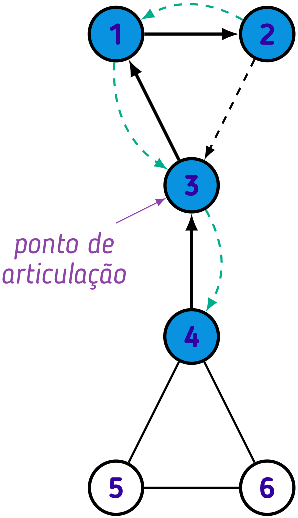
Grafo



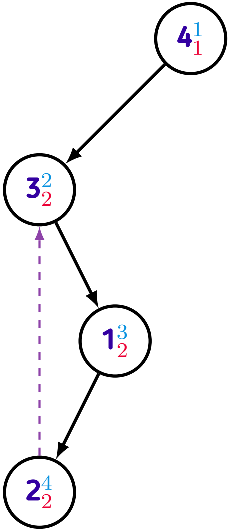
Árvore gerada pelo DFS



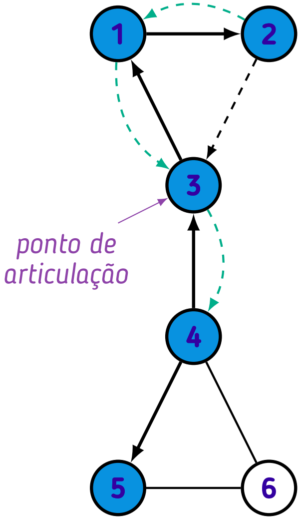
Grafo



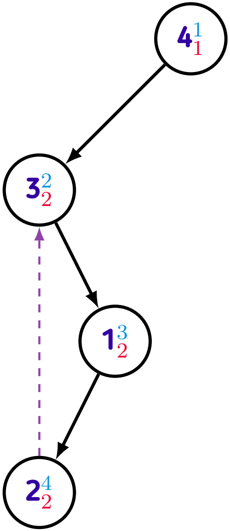
Árvore gerada pelo DFS



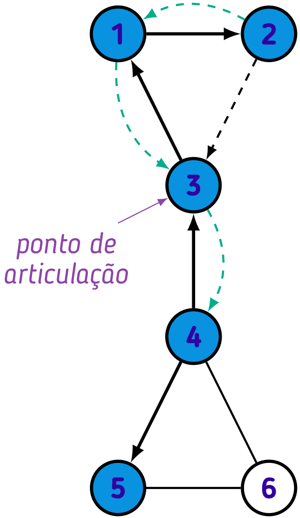
Grafo



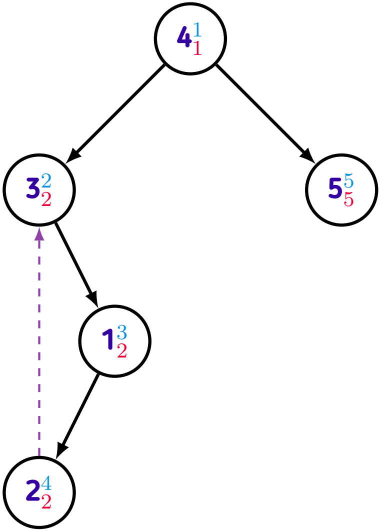
Árvore gerada pelo DFS



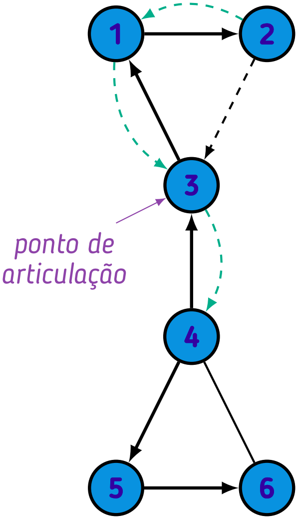
Grafo



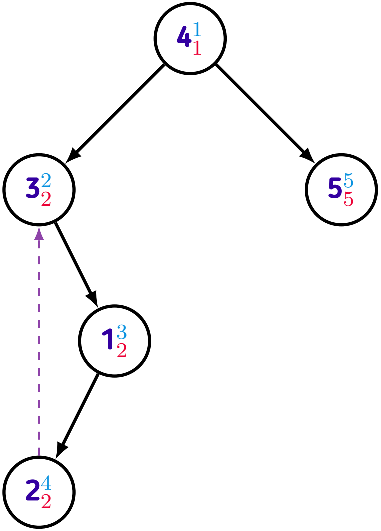
Árvore gerada pelo DFS



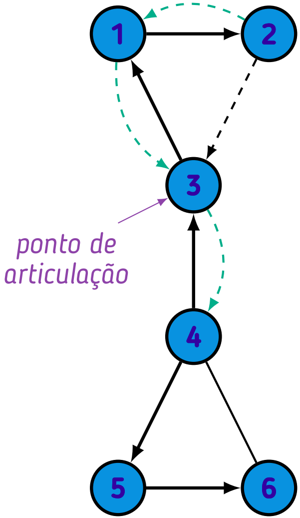
Grafo



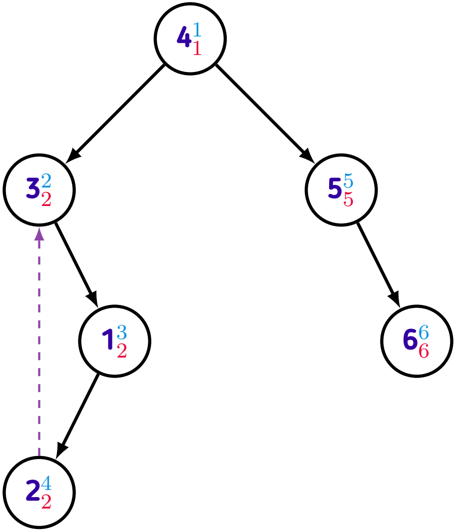
Árvore gerada pelo DFS



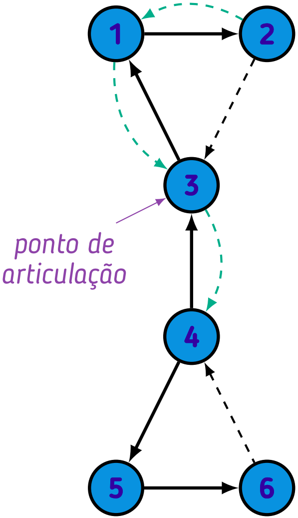
Grafo



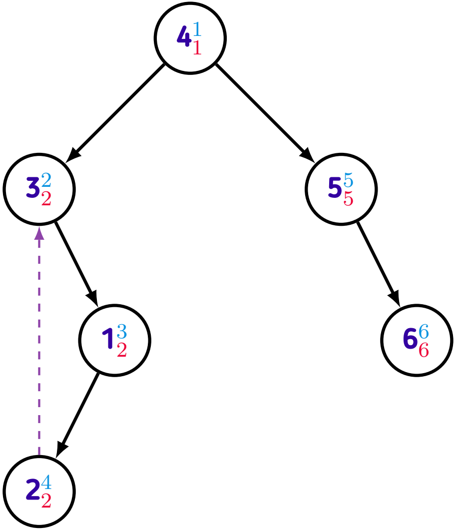
Árvore gerada pelo DFS



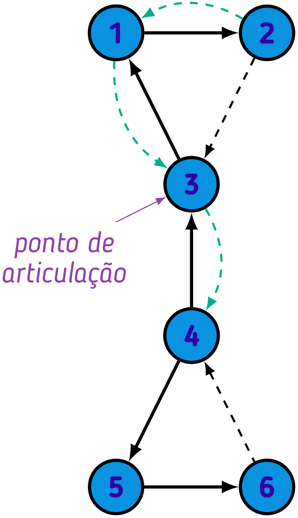
Grafo



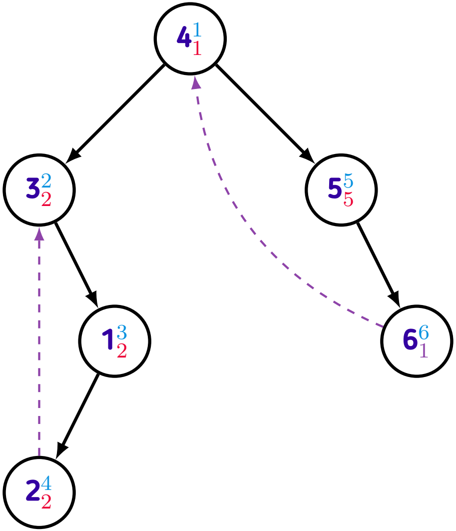
Árvore gerada pelo DFS

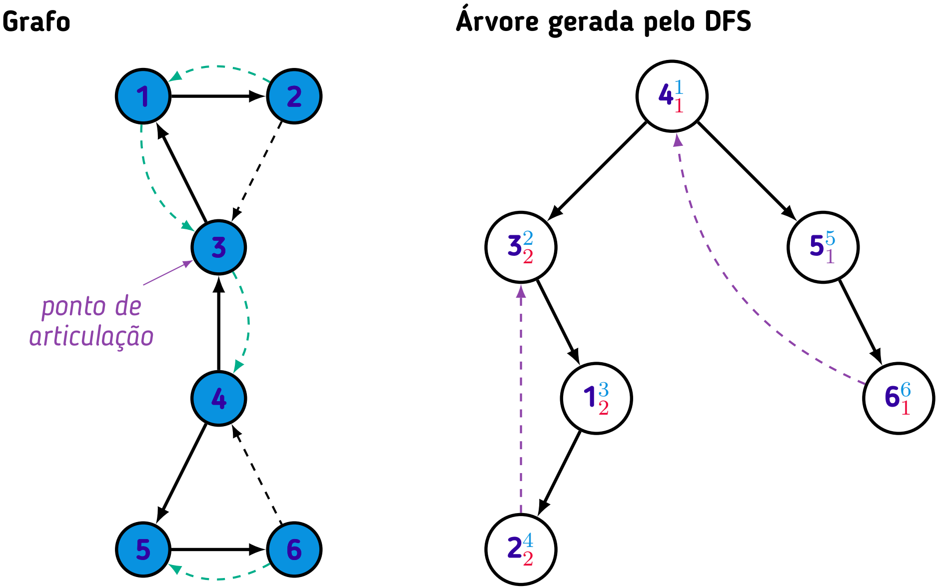


Grafo



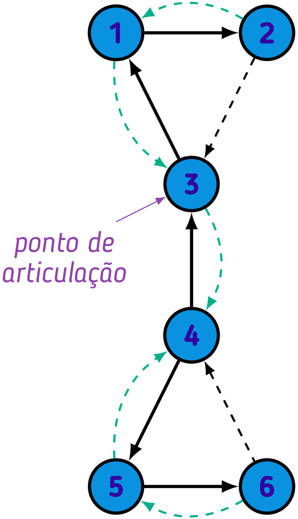
Árvore gerada pelo DFS



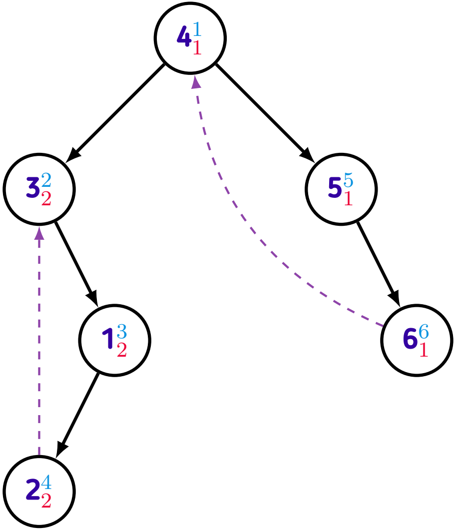


Grafo
1
2
3
4
5
6
ponto de articulação
Árvore gerada pelo DFS
4^{1}_{1}
3^{2}_{2}
5^{5}_{1}
1^{3}_{2}
6^{6}_{1}
2^{4}_{2}

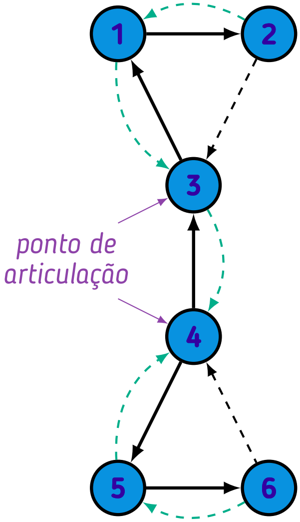
Grafo



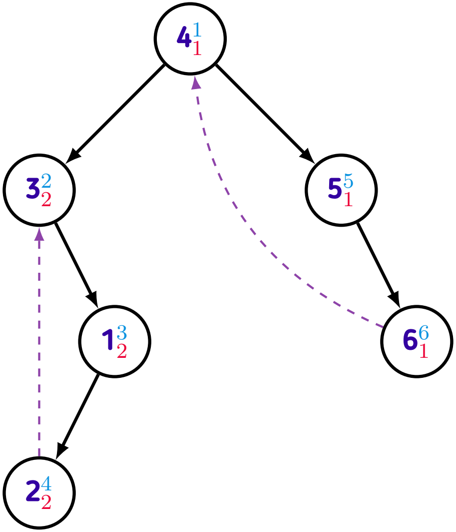
Árvore gerada pelo DFS



Grafo



Árvore gerada pelo DFS



```cpp
int dfs_articulation_points(int u, int p, int& next, set<int>& points)
{
    int children = 0;
    dfs_low[u] = dfs_num[u] = next++;

    for (auto v : adj[u])
        if (not dfs_num[v]) {
            ++children;

            dfs_articulation_points(v, u, next, points);

            if (dfs_low[v] >= dfs_num[u])
                points.insert(u);

            dfs_low[u] = min(dfs_low[u], dfs_low[v]);
        } else if (v != p)
            dfs_low[u] = min(dfs_low[u], dfs_num[v]);

    return children;
}
```

```cpp
set<int> articulation_points(int N)
{
    memset(dfs_num, 0, (N + 1)*sizeof(int));
    memset(dfs_low, 0, (N + 1)*sizeof(int));

    set<int> points;

    for (int u = 1, next = 1; u <= N; ++u)
        if (not dfs_num[u])
        {
            auto children = dfs_articulation_points(u, u, next, points);

            if (children == 1)
                points.erase(u);
        }

    return points;
}
```

Problemas sugeridos

1. AtCoder Beginner Contest 075 – Problem C: Bridge
2. OJ 315 – Network
3. OJ 610 – Street Directions
4. SPOJ SUBMERGE – Submerging Islands

Referências

1. HALIM, Felix; HALIM, Steve. *Competitive Programming 3*, 2010.

2. LAAKSONEN, Antti. *Competitive Programmer's Handbook*, 2018.

3. SKIENA, Steven; REVILLA, Miguel. *Programming Challenges*, 2003.