

# Árvores Binárias de Busca

Inserção e Remoção

---

Prof. Edson Alves - UnB/FGA

2020

1. Inserção

2. Remoção

# **Inserção**

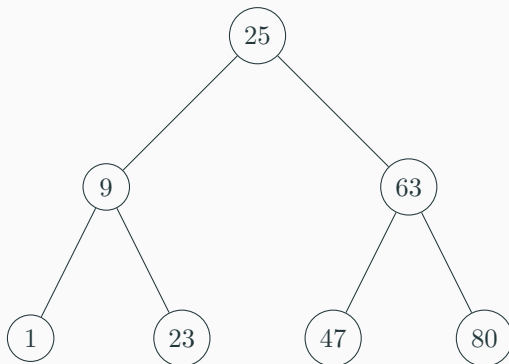
---

# Inserção em árvores binárias de busca

- O algoritmo a seguir insere um elemento  $x$  em uma árvore binária de busca:
  1. Comece no nó raiz
  2. Enquanto o nó a ser avaliado for não-nulo:
    - i. seja  $y$  a informação armazenada no nó a ser avaliado
    - ii. se  $x$  for menor do que  $y$ , vá para a raiz da subárvore da esquerda
    - iii. caso contrário, vá para a raiz da subárvore da direita
  3. Insira um novo nó com a informação igual ao valor a ser inserido como filho do último nó não-nulo, na posição adequada
- No pior caso, o algoritmo visita todos os  $N$  nós da árvore, de modo que este algoritmo tem complexidade  $O(N)$

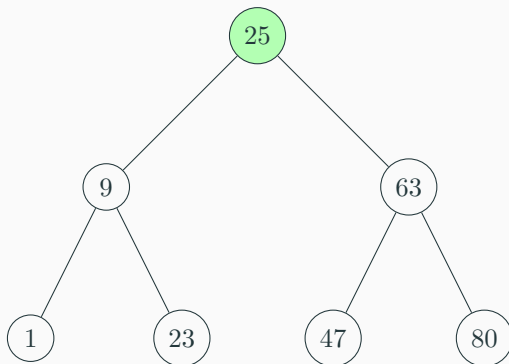
## Exemplo de inserção em árvore binária de busca

Elemento a ser inserido: 14



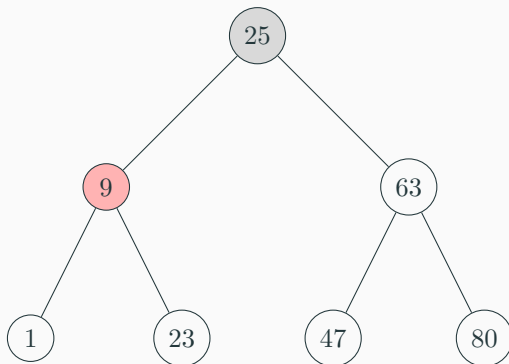
## Exemplo de inserção em árvore binária de busca

Elemento a ser inserido: 14



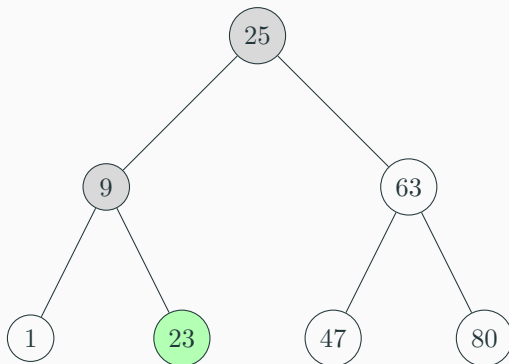
## Exemplo de inserção em árvore binária de busca

Elemento a ser inserido: 14



## Exemplo de inserção em árvore binária de busca

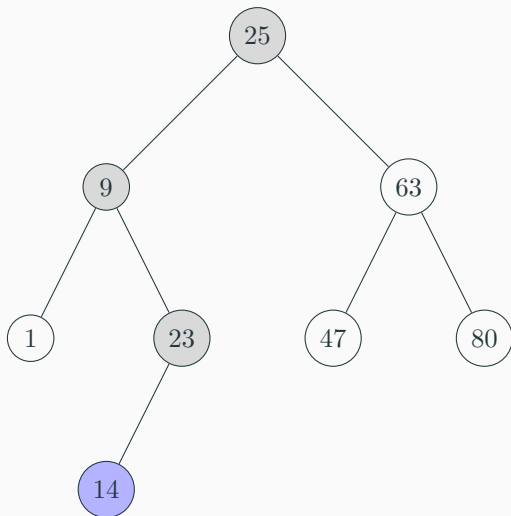
Elemento a ser inserido: 14





## Exemplo de inserção em árvore binária de busca

Elemento a ser inserido: 14



# Implementação da inserção em uma BST

```
1 template<typename T>
2 class BST {
3 private:
4     struct Node {
5         T info;
6         Node *left, *right;
7     };
8
9     Node *root;
10
11 public:
12     BST() : root(nullptr) {}
13
14     void insert(const T& info)
15     {
16         Node *node = root, *prev = nullptr;
17
18         while (node)
19         {
20             prev = node;
21
```

# Implementação da inserção em uma BST

```
22         if (node->info == info)
23             return;
24         else if (info < node->info)
25             node = node->left;
26         else
27             node = node->right;
28     }
29
30     node = new Node { info, nullptr, nullptr };
31
32     if (!root)
33         root = node;
34     else if (info < prev->info)
35         prev->left = node;
36     else
37         prev->right = node;
38 }
39 };
```

# Notas sobre a inserção

- A inserção não modifica a estrutura da árvore, exceto no que se refere a acomodação do novo elemento.
- Deste modo, a propriedade da árvore binária de busca (BST) fica preservada
- O algoritmo que localiza o nó onde ocorrerá a inserção é semelhante ao código utilizado para buscar elementos na árvore
- A inserção pode desbalancear a árvore, isto é, pode fazer com que em um determinado nó, uma das subárvores tenha um número de nós significativamente maior do que a outra
- A inserção de um série de elementos em ordem crescente ou decrescente leva a uma árvore desbalanceada degenerada, que tem mesma estrutura de uma lista encadeada
- Esta árvore degenerada configura o pior caso do algoritmo

# Remoção

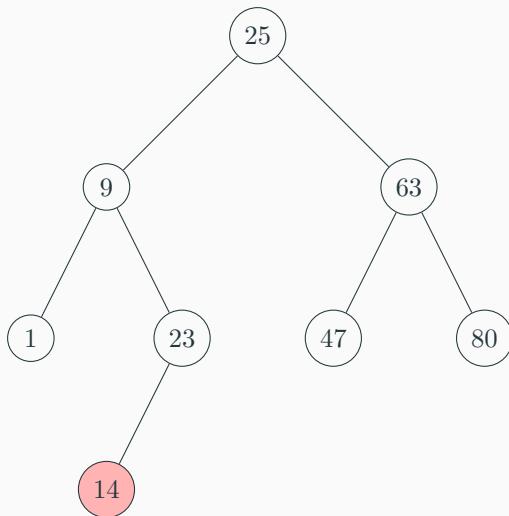
---

# Remoção em árvores binárias de busca

- A remoção em árvores binárias depende da posição do nó a ser removido
- São três casos:
  1. o nó é uma folha, isto é, não tem filhos
  2. o nó tem um filho
  3. o nó tem dois filhos
- No primeiro caso, basta remover a referência do pai e remover o nó
- No segundo caso, a referência do pai é alterada para apontar para neto, e o nó é removido
- O terceiro caso não pode ser resolvido em um único passo
- Duas possíveis soluções são a remoção por fusão ou a remoção por cópia

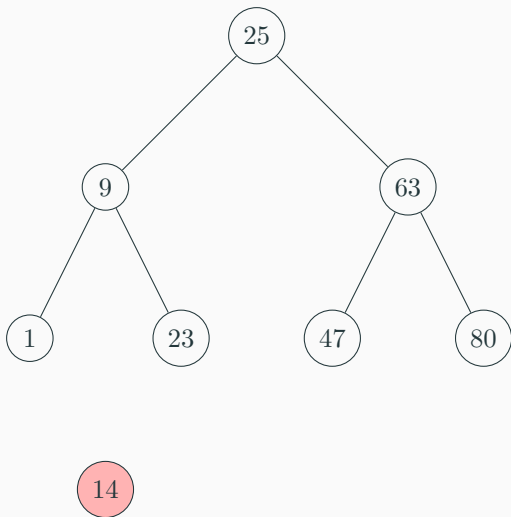
## Exemplo de remoção de nó sem filhos

Elemento a ser removido: 14



## Exemplo de remoção de nó sem filhos

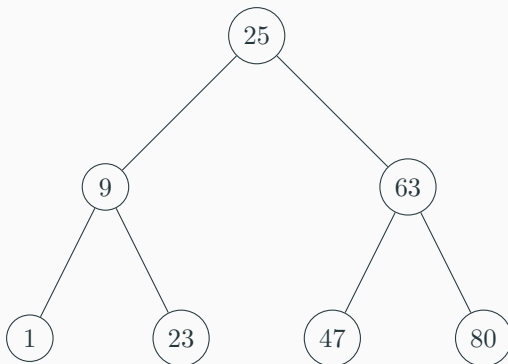
Elemento a ser removido: 14





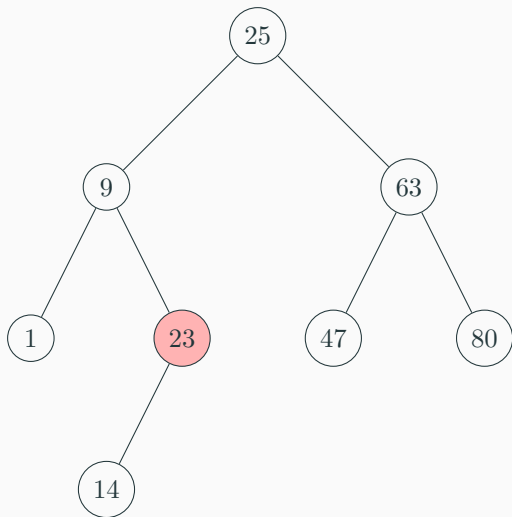
## Exemplo de remoção de nó sem filhos

Elemento a ser removido: 14



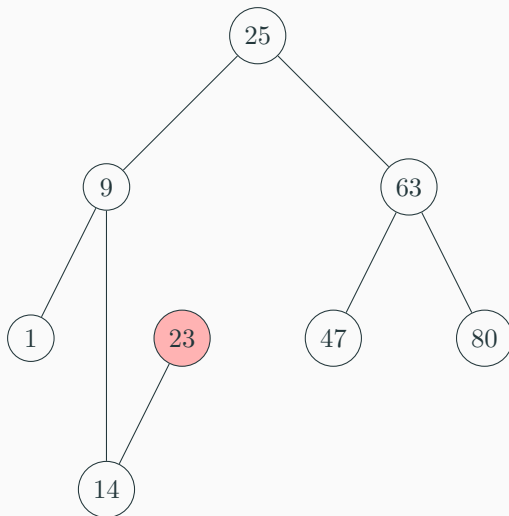
## Exemplo de remoção de nó com apenas um filho

Elemento a ser removido: 23



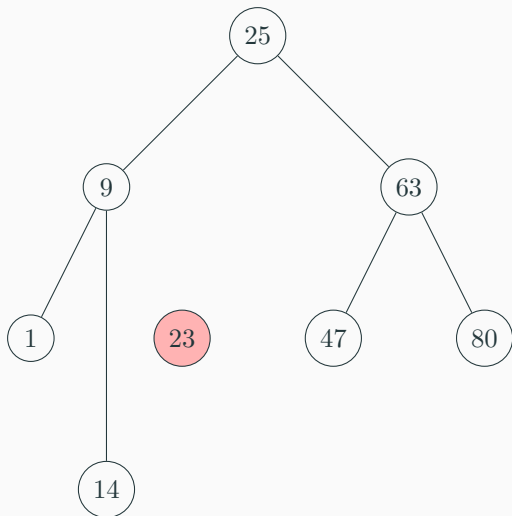
## Exemplo de remoção de nó com apenas um filho

Elemento a ser removido: 23



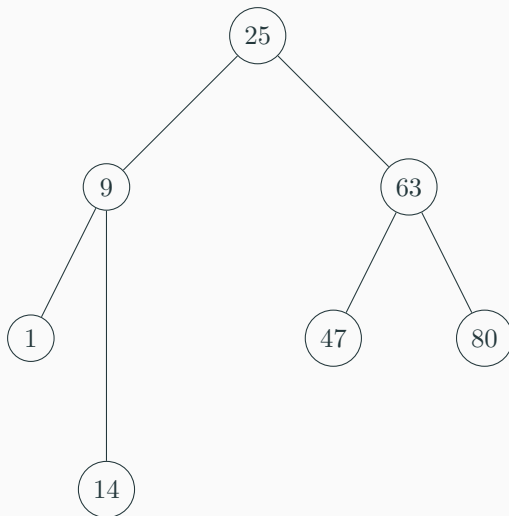
## Exemplo de remoção de nó com apenas um filho

Elemento a ser removido: 23



## Exemplo de remoção de nó com apenas um filho

Elemento a ser removido: 23

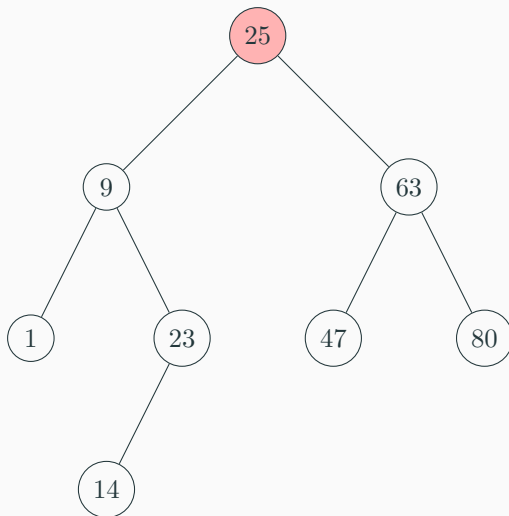


# Remoção por fusão

- Esta técnica consiste em gerar uma nova árvore a partir das duas subárvores do nó a ser removido
- Numa árvore binária de busca, qualquer elemento da subárvore à direita é maior do que qualquer elemento da subárvore à esquerda
- Desta maneira, basta encontrar o nó mais à direita da subárvore à esquerda e transformá-lo no pai da subárvore à direita
- São quatro passos para a remoção por fusão:
  1. Localize o nó que deve ser removido (com dois filhos) e seu pai
  2. Na subárvore à esquerda, encontre o elemento mais à direita possível: basta mover-se sempre para a direita até que se encontre um nó nulo
  3. Torne a raiz da subárvore à esquerda o novo filho do pai do nó a ser removido
  4. Faça com que o nó mais à direita da subárvore à esquerda tenha como filho à direita a subárvore à direita do nó a ser removido
- *Corner case*: caso o nó seja a raiz, após a remoção a raiz deve apontar para a raiz da subárvore à esquerda

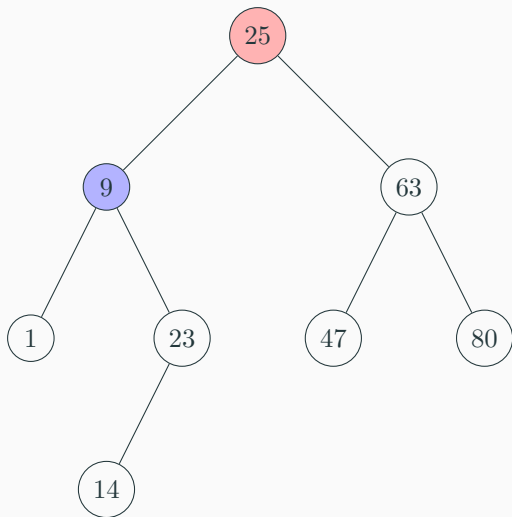
## Exemplo de remoção por fusão

Elemento a ser removido: 25



## Exemplo de remoção por fusão

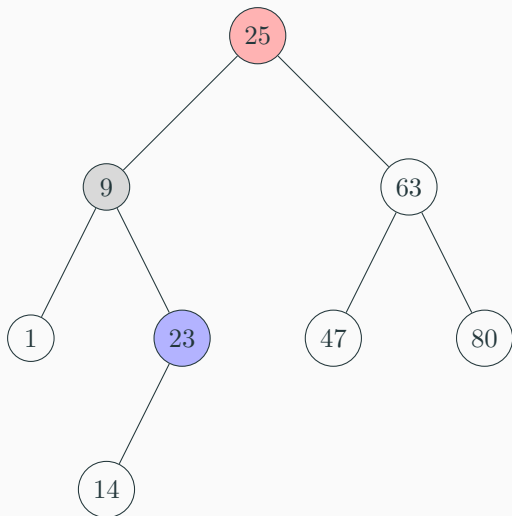
Elemento a ser removido: 25





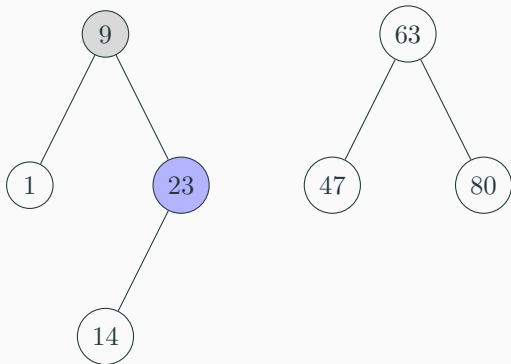
## Exemplo de remoção por fusão

Elemento a ser removido: 25



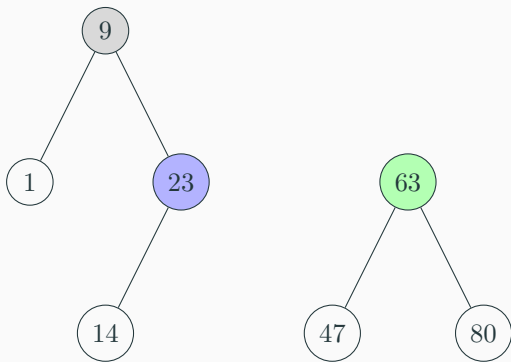
## Exemplo de remoção por fusão

Elemento a ser removido: 25



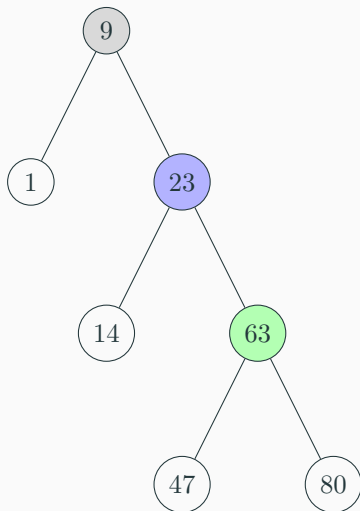
## Exemplo de remoção por fusão

Elemento a ser removido: 25



## Exemplo de remoção por fusão

Elemento a ser removido: 25



# Implementação da remoção por fusão

```
1 template<typename T>
2 class BST {
3 private:
4     struct Node {
5         T info;
6         Node *left, *right;
7     };
8
9     Node *root;
10
11     void delete_by_merging(Node** n)
12     {
13         auto node = *n;
14
15         if (node == nullptr) return;
16
17         if (node->right == nullptr)           // Casos 1 e 2
18             *n = node->left;
19         else if (node->left == nullptr)       // Caso 2
20             *n = node->right;
```

# Implementação da remoção por fusão

```
21     else {                                     // Caso 3
22         auto temp = node->left;
23
24         while (temp->right)
25             temp = temp->right;
26
27         temp->right = node->right;
28         *n = node->left;
29     }
30
31     delete node;
32 }
33
34 public:
35     BST() : root(nullptr) {}
36
```

# Implementação da remoção por fusão

```
37 void erase(const T& info)
38 {
39     Node** node = &root;
40
41     while (*node)
42     {
43         if ((*node)->info == info)
44             break;
45
46         if (info < (*node)->info)
47             node = &(*node)->left;
48         else
49             node = &(*node)->right;
50     }
51
52     delete_by_merging(node);
53 }
54 };
```

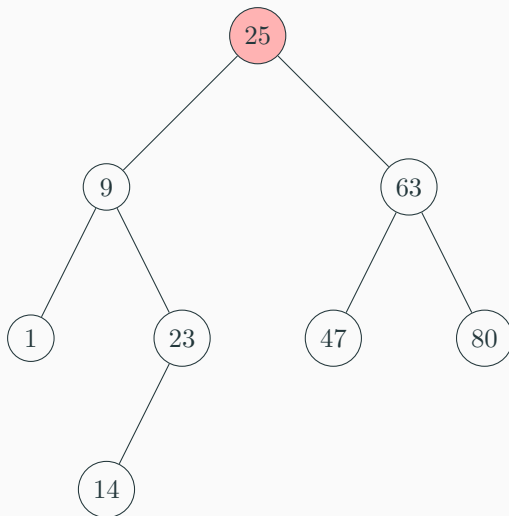
# Remoção por cópia

- Algoritmo proposto por Donald Knuth e Thomas Hibbard
- Ele reduz o caso de um nó ter dois filhos para um dos casos anteriores: ou o nó não tem filhos ou tem apenas um
- Isto é feito substituindo a informação do nó a ser deletado pela informação do nó mais à direita da subárvore à esquerda, apagando este nó em seguida
- Os quatro passos da remoção por cópia são:
  1. Localize o nó com dois filhos que deve ser removido
  2. Na subárvore à esquerda, encontre o elemento mais à direita possível
  3. Substitua a informação do nó a ser removido pela informação do nó localizado no passo anterior
  4. Remova o nó localizado no segundo passo



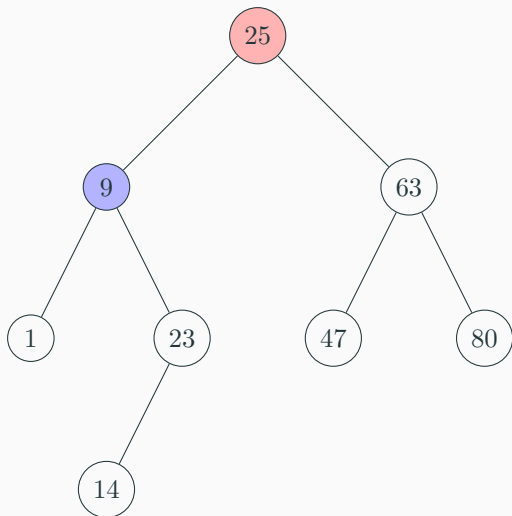
## Exemplo de remoção por cópia

Elemento a ser removido: 25



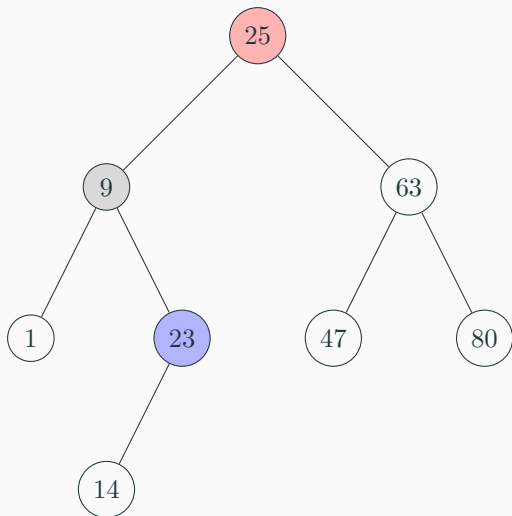
## Exemplo de remoção por cópia

Elemento a ser removido: 25



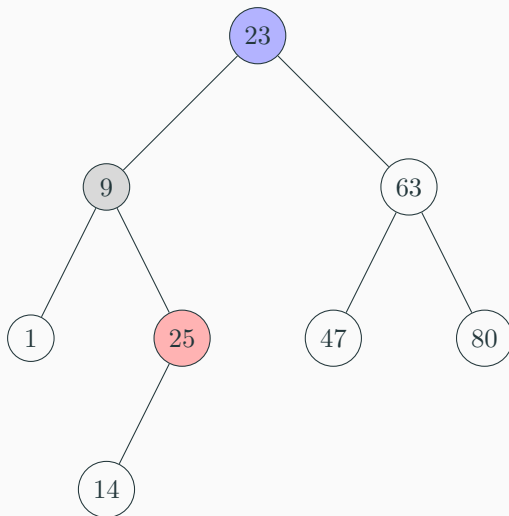
## Exemplo de remoção por cópia

Elemento a ser removido: 25



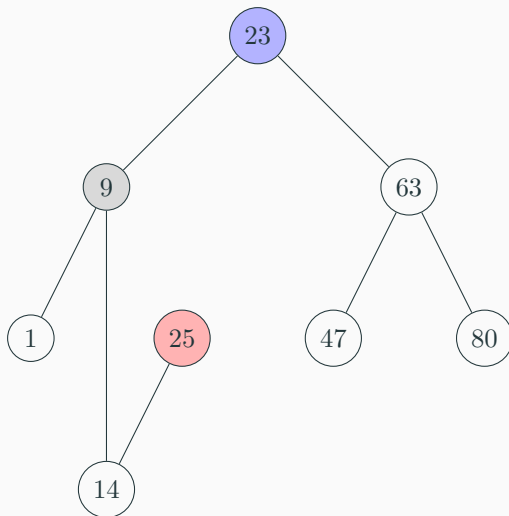
## Exemplo de remoção por cópia

Elemento a ser removido: 25



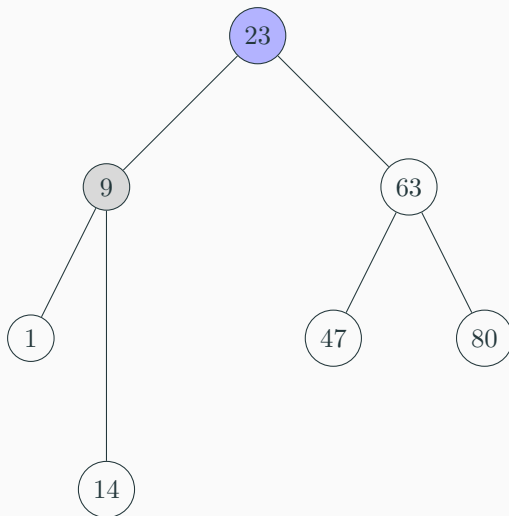
## Exemplo de remoção por cópia

Elemento a ser removido: 25



## Exemplo de remoção por cópia

Elemento a ser removido: 25



# Implementação da remoção por cópia

```
1 template<typename T>
2 class BST {
3 private:
4     struct Node {
5         T info;
6         Node *left, *right;
7     };
8
9     Node *root;
10
11     void delete_by_copying(Node** n)
12     {
13         auto node = *n;
14
15         if (node == nullptr) return;
16
17         if (node->right == nullptr)           // Casos 1 e 2
18             *n = node->left;
19         else if (node->left == nullptr)        // Caso 2
20             *n = node->right;
```

# Implementação da remoção por cópia

```
21     else {                                     // Caso 3
22         auto temp = &(*n)->left;
23
24         while ((*temp)->right)
25             temp = &(*temp)->right;
26
27         node->info = (*temp)->info;
28         return delete_by_copying(temp);
29     }
30
31     delete node;
32 }
33
34
35 public:
36     BST() : root(nullptr) {}
```



# Implementação da remoção por cópia

```
37
38 void erase(const T& info)
39 {
40     Node** node = &root;
41
42     while (*node)
43     {
44         if ((*node)->info == info)
45             break;
46
47         if (info < (*node)->info)
48             node = &(*node)->left;
49         else
50             node = &(*node)->right;
51     }
52
53     delete_by_copying(node);
54 }
55 };
```

# Notas sobre os algoritmos de remoção

- De forma semelhante à inserção, ambos algoritmos de remoção em complexidade  $O(N)$  no pior caso (folha de uma árvore degenerada com  $N$  nós)
- Observe que a remoção por fusão aumenta ou mantém a altura da árvore
- Já a remoção por cópia mantém ou diminui a altura da árvore
- Efetivamente, a complexidade de ambos algoritmos é  $O(h)$ , onde  $h$  é a altura da árvore
- Em uma árvore balanceada,  $h = O(\log N)$ , o que melhora a complexidade de ambos algoritmos
- Para manter uma árvore balanceada, a remoção por cópia é mais adequada do que a remoção por fusão
- Contudo, como já dito, a inserção pode desbalancear a árvore
- Logo é preciso alterar a inserção para que o balanceamento seja preservado

1. **DROZDEK**, Adam. *Algoritmos e Estruturas de Dados em C++*, 2002.
2. **KERNIGHAN**, Bryan; **RITCHIE**, Dennis. *The C Programming Language*, 1978.
3. **STROUSTROUP**, Bjarne. *The C++ Programming Language*, 2013.
4. C++ Reference<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup><https://en.cppreference.com/w/>