

# Geometria Computacional

## Triângulos

---

Prof. Edson Alves

Faculdade UnB Gama

1. Definição de triângulo
2. Classificação de um triângulo
3. Perímetro e área
4. Lugares Geométricos

## Definição de triângulo

---

## Definição

- Um triângulo é uma figura geométrica fechada composta por três pontos não-colineares, denominados vértices, e três segmentos de retas formados por todos pares possíveis entre estes pontos, denominados arestas ou lados

# Definição

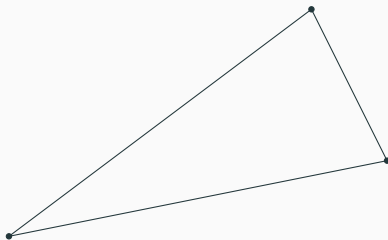
- Um triângulo é uma figura geométrica fechada composta por três pontos não-colineares, denominados vértices, e três segmentos de retas formados por todos pares possíveis entre estes pontos, denominados arestas ou lados
- A cada vértice está associado um ângulo, definido pelos dois segmentos de reta dos quais o vértice é um dos extremos

# Definição

- Um triângulo é uma figura geométrica fechada composta por três pontos não-colineares, denominados vértices, e três segmentos de retas formados por todos pares possíveis entre estes pontos, denominados arestas ou lados
- A cada vértice está associado um ângulo, definido pelos dois segmentos de reta dos quais o vértice é um dos extremos
- O triângulo é o mais simples dentre os polígonos, mas possui uma série de características e propriedades notáveis

# Definição

- Um triângulo é uma figura geométrica fechada composta por três pontos não-colineares, denominados vértices, e três segmentos de retas formados por todos pares possíveis entre estes pontos, denominados arestas ou lados
- A cada vértice está associado um ângulo, definido pelos dois segmentos de reta dos quais o vértice é um dos extremos
- O triângulo é o mais simples dentre os polígonos, mas possui uma série de características e propriedades notáveis



# Representação de um triângulo

- Um triângulo pode ser representado pelas coordenadas de seus vértices



## Representação de um triângulo

- Um triângulo pode ser representado pelas coordenadas de seus vértices
- Outra alternativa é representar o triângulo pelos tamanhos de suas arestas

# Representação de um triângulo

- Um triângulo pode ser representado pelas coordenadas de seus vértices
- Outra alternativa é representar o triângulo pelos tamanhos de suas arestas
- É possível deduzir estes tamanhos a partir da primeira representação

# Representação de um triângulo

- Um triângulo pode ser representado pelas coordenadas de seus vértices
- Outra alternativa é representar o triângulo pelos tamanhos de suas arestas
- É possível deduzir estes tamanhos a partir da primeira representação
- Porém há infinitas possibilidades de coordenadas que satisfaçam as três medidas, uma vez que translações e rotações preservam tais valores

# Representação de um triângulo

- Um triângulo pode ser representado pelas coordenadas de seus vértices
- Outra alternativa é representar o triângulo pelos tamanhos de suas arestas
- É possível deduzir estes tamanhos a partir da primeira representação
- Porém há infinitas possibilidades de coordenadas que satisfaçam as três medidas, uma vez que translações e rotações preservam tais valores
- A representação por vértices pode incluir a representação de um triângulo degenerado (quando os três pontos são colineares)

# Representação de um triângulo

- Um triângulo pode ser representado pelas coordenadas de seus vértices
- Outra alternativa é representar o triângulo pelos tamanhos de suas arestas
- É possível deduzir estes tamanhos a partir da primeira representação
- Porém há infinitas possibilidades de coordenadas que satisfaçam as três medidas, uma vez que translações e rotações preservam tais valores
- A representação por vértices pode incluir a representação de um triângulo degenerado (quando os três pontos são colineares)
- A representação por medidas inclui mais casos especiais: pode ser que tais medidas não formem um triângulo

# Representação de um triângulo

- Um triângulo pode ser representado pelas coordenadas de seus vértices
- Outra alternativa é representar o triângulo pelos tamanhos de suas arestas
- É possível deduzir estes tamanhos a partir da primeira representação
- Porém há infinitas possibilidades de coordenadas que satisfaçam as três medidas, uma vez que translações e rotações preservam tais valores
- A representação por vértices pode incluir a representação de um triângulo degenerado (quando os três pontos são colineares)
- A representação por medidas inclui mais casos especiais: pode ser que tais medidas não formem um triângulo
- A Desigualdade Triangular diz que, se  $a, b, c$  são números reais, eles serão medidas dos lados de um triângulo se, e somente se,

$$a \leq b + c, \quad b \leq a + c, \quad c \leq a + b$$

## Exemplo de representação do triângulo pelos vértices

```
1 // Definição da classe Ponto
2
3 template<typename T>
4 struct Triangle {
5     Point<T> A, B, C;
6 };
```

## **Classificação de um triângulo**

---



## Classificação de acordo com as medidas dos lados

- Sejam  $a, b, c$  as medidas dos três lados de um triângulo  $T$

## Classificação de acordo com as medidas dos lados

- Sejam  $a, b, c$  as medidas dos três lados de um triângulo  $T$
- $T$  é dito equilátero se  $a = b = c$

## Classificação de acordo com as medidas dos lados

- Sejam  $a, b, c$  as medidas dos três lados de um triângulo  $T$
- $T$  é dito equilátero se  $a = b = c$
- Se dois lados tem medidas iguais e o terceiro tem medida diferente,  $T$  é dito isóceles

## Classificação de acordo com as medidas dos lados

- Sejam  $a, b, c$  as medidas dos três lados de um triângulo  $T$
- $T$  é dito equilátero se  $a = b = c$
- Se dois lados tem medidas iguais e o terceiro tem medida diferente,  $T$  é dito isóceles
- Se as três medidas são diferentes o triângulo  $T$  é denominado escaleno

# Implementação da classificação por medidas dos lados

```
1 template<typename T>
2 struct Triangle {
3     Point<T> A, B, C;
4
5     enum Sides { EQUILATERAL, ISOSCELES, SCALENE };
6
7     Sides classification_by_sides() const
8     {
9         auto a = dist(A, B), b = dist(B, C), c = dist(C, A);
10
11         if (equals(a, b) and equals(b, c))
12             return EQUILATERAL;
13
14         if (equals(a, b) or equals(a, c) or equals(b, c))
15             return ISOSCELES;
16
17         return SCALENE;
18     }
19 };
```

## Classificação de acordo com as medidas dos ângulos internos

- Sejam  $\alpha, \beta, \gamma$  os ângulos internos de um triângulo  $T$

## Classificação de acordo com as medidas dos ângulos internos

- Sejam  $\alpha, \beta, \gamma$  os ângulos internos de um triângulo  $T$
- Se um destes três ângulos for igual a  $90^\circ$ ,  $T$  é dito retângulo

## Classificação de acordo com as medidas dos ângulos internos

- Sejam  $\alpha, \beta, \gamma$  os ângulos internos de um triângulo  $T$
- Se um destes três ângulos for igual a  $90^\circ$ ,  $T$  é dito retângulo
- Se um destes três ângulos for maior do que  $90^\circ$ ,  $T$  é denominado obtusângulo



## Classificação de acordo com as medidas dos ângulos internos

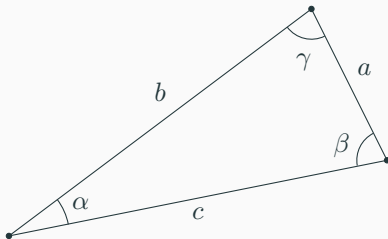
- Sejam  $\alpha, \beta, \gamma$  os ângulos internos de um triângulo  $T$
- Se um destes três ângulos for igual a  $90^\circ$ ,  $T$  é dito retângulo
- Se um destes três ângulos for maior do que  $90^\circ$ ,  $T$  é denominado obtusângulo
- Se  $\alpha, \beta, \gamma < 90^\circ$ ,  $T$  é chamado acutângulo

## Classificação de acordo com as medidas dos ângulos internos

- Sejam  $\alpha, \beta, \gamma$  os ângulos internos de um triângulo  $T$
- Se um destes três ângulos for igual a  $90^\circ$ ,  $T$  é dito retângulo
- Se um destes três ângulos for maior do que  $90^\circ$ ,  $T$  é denominado obtusângulo
- Se  $\alpha, \beta, \gamma < 90^\circ$ ,  $T$  é chamado acutângulo
- Importante:  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

## Classificação de acordo com as medidas dos ângulos internos

- Sejam  $\alpha, \beta, \gamma$  os ângulos internos de um triângulo  $T$
- Se um destes três ângulos for igual a  $90^\circ$ ,  $T$  é dito retângulo
- Se um destes três ângulos for maior do que  $90^\circ$ ,  $T$  é denominado obtusângulo
- Se  $\alpha, \beta, \gamma < 90^\circ$ ,  $T$  é chamado acutângulo
- Importante:  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$



## Relação entre medidas dos lados e ângulos

- A Lei dos Cossenos nos diz que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha,$$

## Relação entre medidas dos lados e ângulos

- A Lei dos Cossenos nos diz que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha,$$

- Esta lei permite determinar o ângulo oposto a um lado escolhido:

$$\alpha = \cos^{-1} \left( \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)$$

## Relação entre medidas dos lados e ângulos

- A Lei dos Cossenos nos diz que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha,$$

- Esta lei permite determinar o ângulo oposto a um lado escolhido:

$$\alpha = \cos^{-1} \left( \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)$$

- Observe que, se  $\alpha = 90^\circ$ , a Lei dos Cossenos se reduz ao Teorema de Pitágoras

## Relação entre medidas dos lados e ângulos

- A Lei dos Cossenos nos diz que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha,$$

- Esta lei permite determinar o ângulo oposto a um lado escolhido:

$$\alpha = \cos^{-1} \left( \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)$$

- Observe que, se  $\alpha = 90^\circ$ , a Lei dos Cossenos se reduz ao Teorema de Pitágoras
- A Lei dos Senos também relaciona lados e ângulos, com o bônus de permitir determinar o raio  $R$  do círculo que circunscreve o triângulo:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

# Implementação da classificação por ângulos internos

```
1 template<typename T>
2 struct Triangle {
3     Point<T> A, B, C;
4
5     enum Angles { RIGHT, ACUTE, OBTUSE };
6
7     Angles classification_by_angles() const
8     {
9         auto a = dist(A, B);
10        auto b = dist(B, C);
11        auto c = dist(C, A);
12
13        auto alpha = acos((a*a - b*b - c*c)/(-2*b*c));
14        auto beta = acos((b*b - a*a - c*c)/(-2*a*c));
15        auto gamma = acos((c*c - a*a - b*b)/(-2*a*b));
16
17        auto right = PI / 2.0;
18    }
```



# Implementação da classificação por ângulos internos

```
19     if (equals(alpha, right) || equals(beta, right) || equals(gamma, right))
20         return RIGHT;
21
22     if (alpha > right || beta > right || gamma > right)
23         return OBTUSE;
24
25     return ACUTE;
26 }
27 };
```

## Perímetro e área

---

## Perímetro de um triângulo

- O perímetro de um triângulo é dado pela soma das medidas de seus lados

## Perímetro de um triângulo

- O perímetro de um triângulo é dado pela soma das medidas de seus lados
- Em notação matemática, se o triângulo  $T$  tem lados com medidas  $a, b, c$ , o perímetro  $P$  é dado por

$$P = a + b + c$$

# Perímetro de um triângulo

- O perímetro de um triângulo é dado pela soma das medidas de seus lados
- Em notação matemática, se o triângulo  $T$  tem lados com medidas  $a, b, c$ , o perímetro  $P$  é dado por

$$P = a + b + c$$

```
1 template<typename T>
2 struct Triangle {
3     Point<T> A, B, C;
4
5     double perimeter() const
6     {
7         auto a = dist(A, B), b = dist(B, C), c = dist(C, A);
8
9         return a + b + c;
10    }
11 };
```

# Área de um triângulo

- Há três formas de se computar a área de um triângulo

# Área de um triângulo

- Há três formas de se computar a área de um triângulo
- A primeira delas é usar a fórmula ensinada no ensino médio:

$$A = \frac{bh}{2}$$

onde  $b$  é a medida da base do triângulo (um de seus lados) e  $h$  é a altura do segmento de reta, perpendicular à base, com um ponto sobre a base e o outro no vértice oposto a esta

# Área de um triângulo

- Há três formas de se computar a área de um triângulo
- A primeira delas é usar a fórmula ensinada no ensino médio:

$$A = \frac{bh}{2}$$

onde  $b$  é a medida da base do triângulo (um de seus lados) e  $h$  é a altura do segmento de reta, perpendicular à base, com um ponto sobre a base e o outro no vértice oposto a esta

- Contudo, na representação por pontos ou por medidas, esta abordagem é pouco prática, pois envolve o cálculo da altura



# Área de um triângulo

- Há três formas de se computar a área de um triângulo
- A primeira delas é usar a fórmula ensinada no ensino médio:

$$A = \frac{bh}{2}$$

onde  $b$  é a medida da base do triângulo (um de seus lados) e  $h$  é a altura do segmento de reta, perpendicular à base, com um ponto sobre a base e o outro no vértice oposto a esta

- Contudo, na representação por pontos ou por medidas, esta abordagem é pouco prática, pois envolve o cálculo da altura
- A altura pode ser obtida como a distância do vértice oposto até a base

# Cálculo da área por base e altura

```
1 // Definição das estruturas Point e Line
2
3 template<typename T>
4 struct Triangle {
5     Point<T> A, B, C;
6
7     double area() const
8     {
9         Line<T> r(A, B);
10
11         auto b = dist(A, B);
12         auto h = r.distance(C);
13
14         return (b * h)/2;
15     }
16 };
```

# Fórmula de Heron

- A segunda maneira de se obter a área de um triângulo é utilizar a fórmula de Heron:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

onde  $A$  é a área do triângulo de lados  $a, b, c$  e  $s$  é o semiperímetro, isto é, a metade do perímetro:

$$s = \frac{a + b + c}{2}$$

# Fórmula de Heron

- A segunda maneira de se obter a área de um triângulo é utilizar a fórmula de Heron:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

onde  $A$  é a área do triângulo de lados  $a, b, c$  e  $s$  é o semiperímetro, isto é, a metade do perímetro:

$$s = \frac{a + b + c}{2}$$

- Esta abordagem é a mais apropriada na representação do triângulo pela medida de seus lados

# Fórmula de Heron

- A segunda maneira de se obter a área de um triângulo é utilizar a fórmula de Heron:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

onde  $A$  é a área do triângulo de lados  $a, b, c$  e  $s$  é o semiperímetro, isto é, a metade do perímetro:

$$s = \frac{a + b + c}{2}$$

- Esta abordagem é a mais apropriada na representação do triângulo pela medida de seus lados
- Observe que, caso exista a possibilidade de *overflow* no produto dos quatro termos que estão dentro da raiz, deve-se tirar a raiz de cada fator antes de prosseguir com o produto

# Cálculo da área usando a fórmula de Heron

```
1 // Definição da estrutura Point
2
3 template<typename T>
4 struct Triangle {
5     Point<T> A, B, C;
6
7     double area() const
8     {
9         auto a = dist(A, B);
10        auto b = dist(B, C);
11        auto c = dist(C, A);
12
13        auto s = (a + b + c)/2
14
15        return sqrt(s)*sqrt(s - a)*sqrt(s - b)*sqrt(s - c);
16    }
17 };
```

## Variantes da fórmula de Heron

- Existem variantes da fórmula de Heron que permitem o cálculo da área do triângulo em termos de outras medidas, como as medianas, as alturas ou os ângulos internos

## Variantes da fórmula de Heron

- Existem variantes da fórmula de Heron que permitem o cálculo da área do triângulo em termos de outras medidas, como as medianas, as alturas ou os ângulos internos
- Se  $m_a, m_b, m_c$  são as medidas das medianas, então

$$A = \frac{4}{3} \sqrt{\sigma(\sigma - m_a)(\sigma - m_b)(\sigma - m_c)}, \quad \sigma = \frac{m_a + m_b + m_c}{2}$$



## Variantes da fórmula de Heron

- Existem variantes da fórmula de Heron que permitem o cálculo da área do triângulo em termos de outras medidas, como as medianas, as alturas ou os ângulos internos
- Se  $m_a, m_b, m_c$  são as medidas das medianas, então

$$A = \frac{4}{3} \sqrt{\sigma(\sigma - m_a)(\sigma - m_b)(\sigma - m_c)}, \quad \sigma = \frac{m_a + m_b + m_c}{2}$$

- Se  $h_a, h_b, h_c$  são medidas as alturas, então

$$\frac{1}{A} = 4 \sqrt{H \left( H - \frac{1}{h_a} \right) \left( H - \frac{1}{h_b} \right) \left( H - \frac{1}{h_c} \right)}$$

com

$$H = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \right)$$

## Variantes da fórmula de Heron

- Por fim, sendo usando a notação de lados e ângulos já estabelecida, é possível computar a área, conhecidos os três ângulos e apenas um dos três lados:

$$A = D^2 \sqrt{S(S - \sin \alpha)(S - \sin \beta)(S - \sin \gamma)},$$

onde

$$S = \frac{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}{2}$$

e

$$D = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

## Cálculo da área por coordenadas dos vértices

- A terceira maneira é computar a área a partir das coordenadas dos vértices

## Cálculo da área por coordenadas dos vértices

- A terceira maneira é computar a área a partir das coordenadas dos vértices
- Se os vértices de um triângulo são  $P = (x_1, y_1)$ ,  $Q = (x_2, y_2)$ ,  $R = (x_3, y_3)$ , a área  $A$  do triângulo é dada por

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

## Cálculo da área por coordenadas dos vértices

- A terceira maneira é computar a área a partir das coordenadas dos vértices
- Se os vértices de um triângulo são  $P = (x_1, y_1)$ ,  $Q = (x_2, y_2)$ ,  $R = (x_3, y_3)$ , a área  $A$  do triângulo é dada por

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

- Esta área é sinalizada: logo deve se considerar o valor absoluto desta expressão

## Cálculo da área por coordenadas dos vértices

- A terceira maneira é computar a área a partir das coordenadas dos vértices
- Se os vértices de um triângulo são  $P = (x_1, y_1)$ ,  $Q = (x_2, y_2)$ ,  $R = (x_3, y_3)$ , a área  $A$  do triângulo é dada por

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

- Esta área é sinalizada: logo deve se considerar o valor absoluto desta expressão
- Observe que não é necessário implementar uma estrutura que represente matrizes e a operação de determinante

## Cálculo da área por coordenadas dos vértices

- A terceira maneira é computar a área a partir das coordenadas dos vértices
- Se os vértices de um triângulo são  $P = (x_1, y_1)$ ,  $Q = (x_2, y_2)$ ,  $R = (x_3, y_3)$ , a área  $A$  do triângulo é dada por

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

- Esta área é sinalizada: logo deve se considerar o valor absoluto desta expressão
- Observe que não é necessário implementar uma estrutura que represente matrizes e a operação de determinante
- A expansão da expressão acima leva a três termos positivos e a três termos negativos

# Cálculo da área por determinante

```
1 // Definição da estrutura Point
2
3 template<typename T>
4 struct Triangle {
5     Point<T> A, B, C;
6
7     double area() const
8     {
9         double det = (A.x*B.y + A.y*C.x + B.x*C.y) - (C.x*B.y + C.y*A.x + B.x*A.y);
10
11         return 0.5 * fabs(det);
12     }
13 };
```



# Lugares Geométricos

---

- Um triângulo possui quatro lugares geométricos notáveis

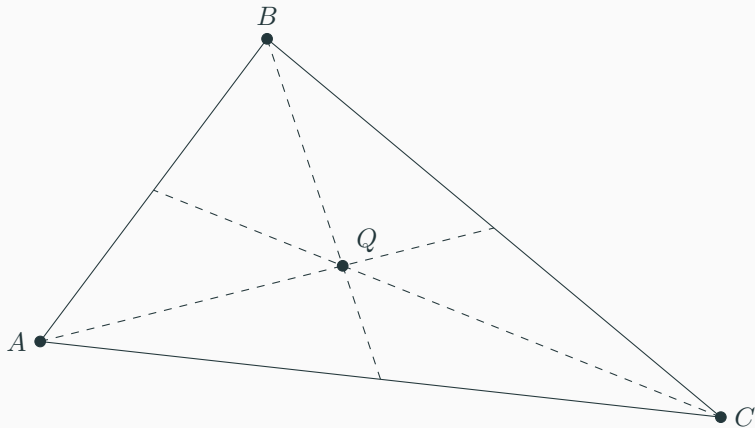
- Um triângulo possui quatro lugares geométricos notáveis
- O primeiro deles é o baricentro (centróide ou centro de massa), que é o ponto de interseção entre as três medianas (segmentos de reta que unem um vértice ao ponto médio do lado oposto)

- Um triângulo possui quatro lugares geométricos notáveis
- O primeiro deles é o baricentro (centróide ou centro de massa), que é o ponto de interseção entre as três medianas (segmentos de reta que unem um vértice ao ponto médio do lado oposto)
- O baricentro divide uma mediana na proporção de 2:1, isto é, ele está a um terço de distância do lado oposto

- Um triângulo possui quatro lugares geométricos notáveis
- O primeiro deles é o baricentro (centróide ou centro de massa), que é o ponto de interseção entre as três medianas (segmentos de reta que unem um vértice ao ponto médio do lado oposto)
- O baricentro divide uma mediana na proporção de 2:1, isto é, ele está a um terço de distância do lado oposto
- As coordenadas do baricentro  $Q$  podem ser computadas diretamente a partir das coordenadas dos vértices: serão a média aritmética entre as mesmas

$$Q = \left( \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right)$$

## Visualização do baricentro



# Implementação da identificação do baricentro

```
1 // Definição da estrutura Point
2
3 template<typename T>
4 struct Triangle {
5     Point<T> A, B, C;
6
7     Point<T> barycenter() const
8     {
9         auto x = (A.x + B.x + C.x) / 3.0;
10        auto y = (A.y + B.y + C.y) / 3.0;
11
12        return Point<T> { x, y };
13    }
14 };
```

- O ortocentro de um triângulo é o ponto de encontro de suas três alturas



- O ortocentro de um triângulo é o ponto de encontro de suas três alturas
- O ortocentro pode mesmo estar fora do triângulo, no caso de um obtusângulo

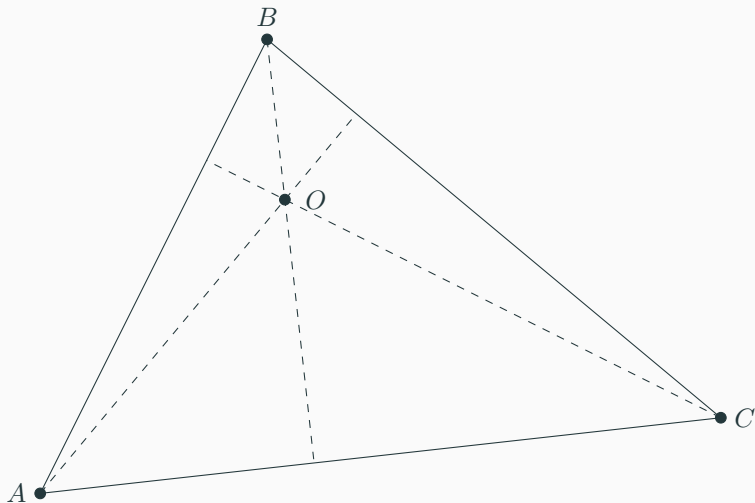
- O ortocentro de um triângulo é o ponto de encontro de suas três alturas
- O ortocentro pode mesmo estar fora do triângulo, no caso de um obtusângulo
- No caso de um triângulo retângulo, o ortocentro sempre coincide com o vértice oposto à hipotenusa

- O ortocentro de um triângulo é o ponto de encontro de suas três alturas
- O ortocentro pode mesmo estar fora do triângulo, no caso de um obtusângulo
- No caso de um triângulo retângulo, o ortocentro sempre coincide com o vértice oposto à hipotenusa
- Para obter as coordenadas do ortocentro, é preciso determinar, inicialmente, as retas  $r$  e  $s$  que contém os segmentos  $AB$  e  $AC$ , respectivamente

- O ortocentro de um triângulo é o ponto de encontro de suas três alturas
- O ortocentro pode mesmo estar fora do triângulo, no caso de um obtusângulo
- No caso de um triângulo retângulo, o ortocentro sempre coincide com o vértice oposto à hipotenusa
- Para obter as coordenadas do ortocentro, é preciso determinar, inicialmente, as retas  $r$  e  $s$  que contém os segmentos  $AB$  e  $AC$ , respectivamente
- Em seguida, é preciso determinar as retas  $u$  e  $v$  perpendiculares a  $r$  e  $s$  que passam por  $C$  e  $B$ , respectivamente

- O ortocentro de um triângulo é o ponto de encontro de suas três alturas
- O ortocentro pode mesmo estar fora do triângulo, no caso de um obtusângulo
- No caso de um triângulo retângulo, o ortocentro sempre coincide com o vértice oposto à hipotenusa
- Para obter as coordenadas do ortocentro, é preciso determinar, inicialmente, as retas  $r$  e  $s$  que contém os segmentos  $AB$  e  $AC$ , respectivamente
- Em seguida, é preciso determinar as retas  $u$  e  $v$  perpendiculares a  $r$  e  $s$  que passam por  $C$  e  $B$ , respectivamente
- O ortocentro  $O$  será a interseção entre  $u$  e  $v$

## Visualização do ortocentro



# Implementação da identificação do ortocentro

```
22 template<typename T>
23 struct Triangle {
24     Point<T> A, B, C;
25
26     Point<T> orthocenter() const
27     {
28         Line<T> r(A, B), s(A, C);
29
30         Line<T> u { r.b, -r.a, -(C.x*r.b - C.y*r.a) };
31         Line<T> v { s.b, -s.a, -(B.x*s.b - B.y*s.a) };
32
33         auto det = u.a * v.b - u.b * v.a;
34         auto x = (-u.c * v.b + v.c * u.b) / det;
35         auto y = (-v.c * u.a + u.c * v.a) / det;
36
37         return { x, y };
38     }
39 };
40
```

- O incentro de um triângulo é o ponto de encontro de suas bissetrizes (retas que dividem um ângulo interno na metade)



- O incentro de um triângulo é o ponto de encontro de suas bissetrizes (retas que dividem um ângulo interno na metade)
- Além de ser sempre um ponto interior do triângulo, o incentro é o centro do círculo inscrito no triângulo, isto é, o maior círculo que cabe dentro do triângulo e que toca todos os seus três lados

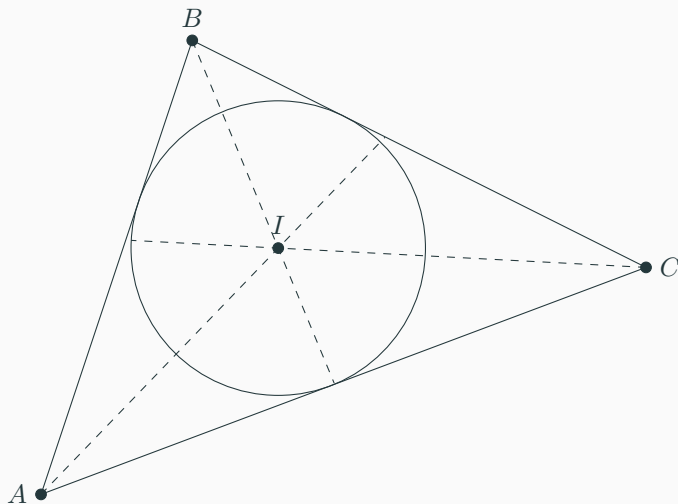
- O incentro de um triângulo é o ponto de encontro de suas bissetrizes (retas que dividem um ângulo interno na metade)
- Além de ser sempre um ponto interior do triângulo, o incentro é o centro do círculo inscrito no triângulo, isto é, o maior círculo que cabe dentro do triângulo e que toca todos os seus três lados
- Os lados do círculo são tangentes ao círculo inscrito

- O incentro de um triângulo é o ponto de encontro de suas bissetrizes (retas que dividem um ângulo interno na metade)
- Além de ser sempre um ponto interior do triângulo, o incentro é o centro do círculo inscrito no triângulo, isto é, o maior círculo que cabe dentro do triângulo e que toca todos os seus três lados
- Os lados do círculo são tangentes ao círculo inscrito
- O raio  $r$  do círculo inscrito é dado pela razão entre o dobro da área  $A$  e o perímetro  $P$

- O incentro de um triângulo é o ponto de encontro de suas bissetrizes (retas que dividem um ângulo interno na metade)
- Além de ser sempre um ponto interior do triângulo, o incentro é o centro do círculo inscrito no triângulo, isto é, o maior círculo que cabe dentro do triângulo e que toca todos os seus três lados
- Os lados do círculo são tangentes ao círculo inscrito
- O raio  $r$  do círculo inscrito é dado pela razão entre o dobro da área  $A$  e o perímetro  $P$
- As coordenadas do centro  $I$  do círculo inscrito são obtidas pela média ponderada das coordenadas  $x$  e  $y$  pelos comprimentos dos lados opostos:

$$r = \frac{2A}{P}, I_x = \frac{aA_x + bB_x + cC_x}{P}, I_y = \frac{aA_y + bB_y + cC_y}{P}$$

## Visualização do incentro e o círculo inscrito



# Implementação do centro e do raio do círculo inscrito

```
1 template<typename T>
2 struct Triangle {
3     Point<T> A, B, C;
4
5     double inradius() const
6     {
7         return (2 * area()) / perimeter();
8     }
9
10    Point<double> incenter() const
11    {
12        auto a = dist(B, C), b = dist(A, C), c = dist(A, B);
13        auto P = perimeter();
14        auto x = (a*A.x + b*B.x + c*C.x)/P;
15        auto y = (a*A.y + b*B.y + c*C.y)/P;
16
17        return { x, y };
18    }
19 };
```

- O circuncentro é o ponto de encontro entre as retas bisectoras perpendiculares (isto é, retas perpendiculares aos lados do triângulo que os interceptam nos pontos médios)

# Circuncentro

- O circuncentro é o ponto de encontro entre as retas bisectoras perpendiculares (isto é, retas perpendiculares aos lados do triângulo que os interceptam nos pontos médios)
- O circuncentro é o centro do círculo circunscrito do triângulo, isto é, o círculo que passa pelos três vértices do triângulo



# Circuncentro

- O circuncentro é o ponto de encontro entre as retas bisectoras perpendiculares (isto é, retas perpendiculares aos lados do triângulo que os interceptam nos pontos médios)
- O circuncentro é o centro do círculo circunscrito do triângulo, isto é, o círculo que passa pelos três vértices do triângulo
- O circuncentro, assim como o ortocentro, pode estar localizado do lado externo do triângulo

- O circuncentro é o ponto de encontro entre as retas bisectoras perpendiculares (isto é, retas perpendiculares aos lados do triângulo que os interceptam nos pontos médios)
- O circuncentro é o centro do círculo circunscrito do triângulo, isto é, o círculo que passa pelos três vértices do triângulo
- O circuncentro, assim como o ortocentro, pode estar localizado do lado externo do triângulo
- Um caso especial interessante é o do triângulo retângulo, onde o circuncentro se localiza no ponto médio da hipotenusa

- O circuncentro é o ponto de encontro entre as retas bisectoras perpendiculares (isto é, retas perpendiculares aos lados do triângulo que os interceptam nos pontos médios)
- O circuncentro é o centro do círculo circunscrito do triângulo, isto é, o círculo que passa pelos três vértices do triângulo
- O circuncentro, assim como o ortocentro, pode estar localizado do lado externo do triângulo
- Um caso especial interessante é o do triângulo retângulo, onde o circuncentro se localiza no ponto médio da hipotenusa
- O raio  $R$  do circuncentro é dado pela razão entre o produto das medidas de seus lados  $a, b, c$  e o quádruplo de sua área  $A$ , isto é

$$R = \frac{abc}{4A}$$

- Seja  $|P|$  o tamanho do vetor posição de  $P$ , isto é

$$|P| = \sqrt{P_x^2 + P_y^2}$$

# Circuncentro

- Seja  $|P|$  o tamanho do vetor posição de  $P$ , isto é

$$|P| = \sqrt{P_x^2 + P_y^2}$$

- As coordenadas do circuncentro são dadas por

$$S_x = \frac{1}{2d} \begin{vmatrix} |A|^2 & A_y & 1 \\ |B|^2 & B_y & 1 \\ |C|^2 & C_y & 1 \end{vmatrix}, S_y = \frac{1}{2d} \begin{vmatrix} A_x & |A|^2 & 1 \\ B_x & |B|^2 & 1 \\ C_x & |C|^2 & 1 \end{vmatrix}$$

onde

$$d = \begin{vmatrix} A_x & A_y & 1 \\ B_x & B_y & 1 \\ C_x & C_y & 1 \end{vmatrix}$$

# Circuncentro

- Seja  $|P|$  o tamanho do vetor posição de  $P$ , isto é

$$|P| = \sqrt{P_x^2 + P_y^2}$$

- As coordenadas do circuncentro são dadas por

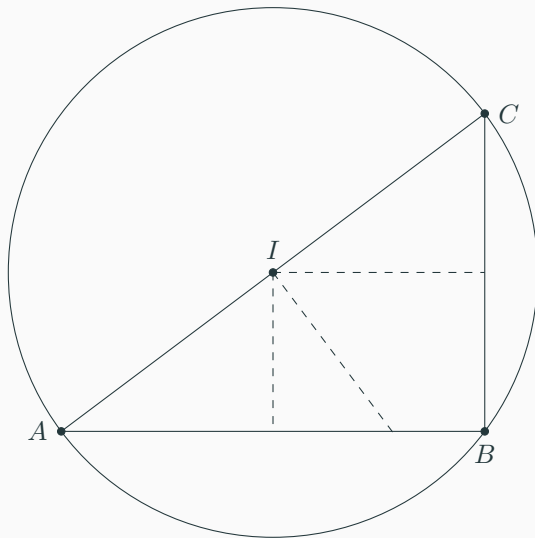
$$S_x = \frac{1}{2d} \begin{vmatrix} |A|^2 & A_y & 1 \\ |B|^2 & B_y & 1 \\ |C|^2 & C_y & 1 \end{vmatrix}, S_y = \frac{1}{2d} \begin{vmatrix} A_x & |A|^2 & 1 \\ B_x & |B|^2 & 1 \\ C_x & |C|^2 & 1 \end{vmatrix}$$

onde

$$d = \begin{vmatrix} A_x & A_y & 1 \\ B_x & B_y & 1 \\ C_x & C_y & 1 \end{vmatrix}$$

- A reta de Euler é uma reta especial associada ao triângulo, que passa pelo baricentro, ortocentro e circuncentro, que estão sempre alinhados

## Visualização do circuncentro e o círculo circunscrito



# Implementação do centro e raio do círculo circunscrito

```
1 // Definição da estrutura Point e da função de distância
2 // entre pontos dist()
3
4 template<typename T>
5 struct Triangle {
6     Point<T> A, B, C;
7
8     // Definição do método area()
9
10    double circumradius() const
11    {
12        auto a = dist(B, C);
13        auto b = dist(A, C);
14        auto c = dist(A, B);
15
16        return (a * b * c)/(4 * area());
17    }
18
```



# Implementação do centro e raio do círculo circunscrito

```
19 Point<T> circumcenter() const
20 {
21     auto D = 2*(A.x*(B.y - C.y) + B.x*(C.y - A.y) + C.x*(A.y - B.y));
22
23     auto A2 = A.x*A.x + A.y*A.y;
24     auto B2 = B.x*B.x + B.y*B.y;
25     auto C2 = C.x*C.x + C.y*C.y;
26
27     auto x = (A2*(B.y - C.y) + B2*(C.y - A.y) + C2*(A.y - B.y))/D;
28     auto y = (A2*(C.x - B.x) + B2*(A.x - C.x) + C2*(B.x - A.x))/D;
29
30     return { x, y };
31 }
32 };
```

1. **HALIM**, Felix; **HALIM**, Steve. *Competitive Programming 3*, 2010.
2. Math Open Reference. [Orthocenter of a Triangle](#), acesso em 27/07/2016.
3. Math Open Reference. [Incenter of a Triangle](#), acesso em 27/07/2016.
4. Wikipedia. [Circumscribed Circle](#), acesso em 27/07/2016.
5. Wikipedia. [Heron's Formula](#), acesso em 22/09/2016.