Árvores Binárias de Busca

Inserção e Remoção

Prof. Edson Alves - UnB/FGA

Sumário

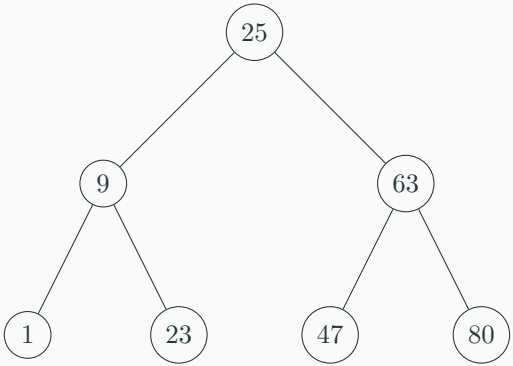
Inserção

Inserção em árvores binárias de busca

- O algoritmo a seguir insere um elemento x em uma árvore binária de busca:
  1. Comeşe no nó raiz
  2. Enquanto o nó a ser avaliado for não-nulo:
     i. seja y a informação armazenada no nó a ser avaliado
     ii. se x for menor do que y, vá para a raiz da subárvore da esquerda
     iii. caso contrário, vá para a raiz da subárvore da direita
  3. Insira um novo nó com a informação igual ao valor a ser inserido como filho do último nó não-nulo, na posição adequada
- No pior caso, o algoritmo visita todos os N nós da árvore, de modo que este algoritmo tem complexidade $O(N)$

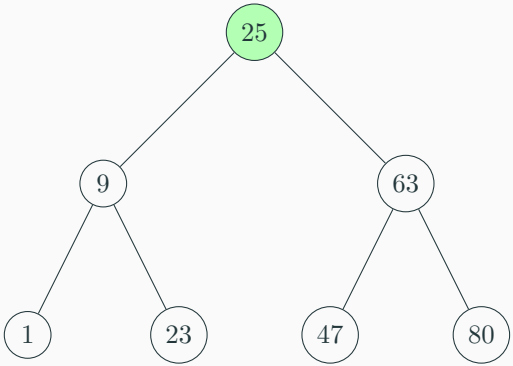
Exemplo de inserção em árvore binária de busca

Elemento a ser inserido: 14



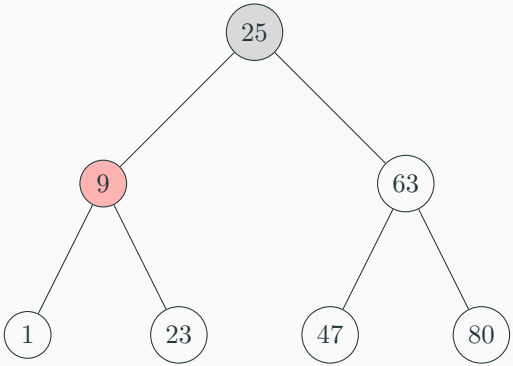
Exemplo de inserção em árvore binária de busca

Elemento a ser inserido: 14



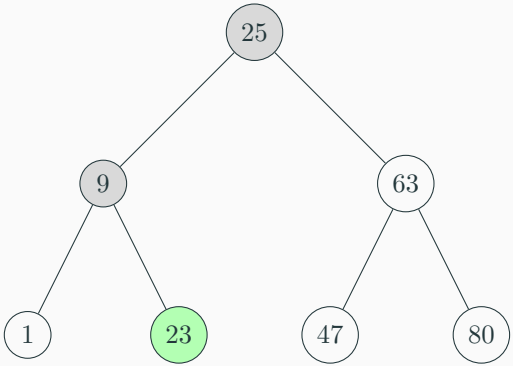
Exemplo de inserção em árvore binária de busca

Elemento a ser inserido: 14



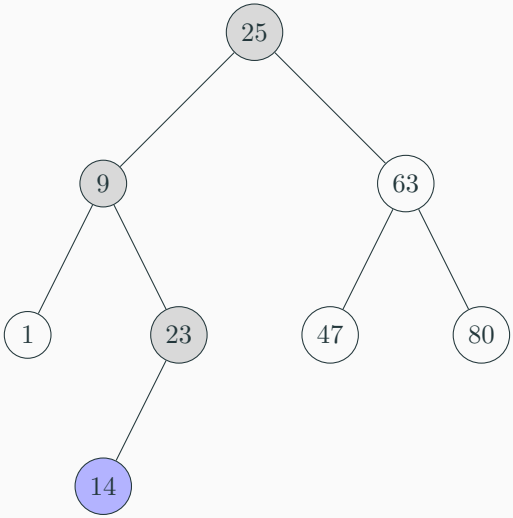
Exemplo de inserção em árvore binária de busca

Elemento a ser inserido: 14



Exemplo de inserção em árvore binária de busca

Elemento a ser inserido: 14



Implementação da inserção em uma BST

```
1  template<typename T>
2  class BST {
3  private:
4      struct Node {
5          T info;
6          Node *left, *right;
7      };
8
9      Node *root;
10
11 public:
12     BST() : root(nullptr) {}
13
14     void insert(const T& info)
15     {
16         Node *node = root, *prev = nullptr;
17
18         while (node)
19         {
20             prev = node;
```

Implementação da inserção em uma BST

```
22              if (node->info == info)
23                  return;
24              else if (info < node->info)
25                  node = node->left;
26              else
27                  node = node->right;
28          }
29
30          node = new Node { info, nullptr, nullptr };
31
32          if (!root)
33              root = node;
34          else if (info < prev->info)
35              prev->left = node;
36          else
37              prev->right = node;
38      }
39  };
```

Notas sobre a inserção

- A inserção não modifica a estrutura da árvore, exceto no que se refere a acomodação do novo elemento.
- Deste modo, a propriedade da árvore binária de busca (BST) fica preservada
- O algoritmo que localiza o nó onde ocorrerá a inserção é semelhante ao código utilizado para buscar elementos na árvore
- A inserção pode desbalancear a árvore, isto é, pode fazer com que em um determinado nó, uma das subárvores tenha um número de nós significativamente maior do que a outra
- A inserção de um série de elementos em ordem crescente ou decrescente leva a uma árvore desbalanceada degenerada, que tem mesma estrutura de uma lista encadeada
- Esta árvore degenerada configura o pior caso do algoritmo

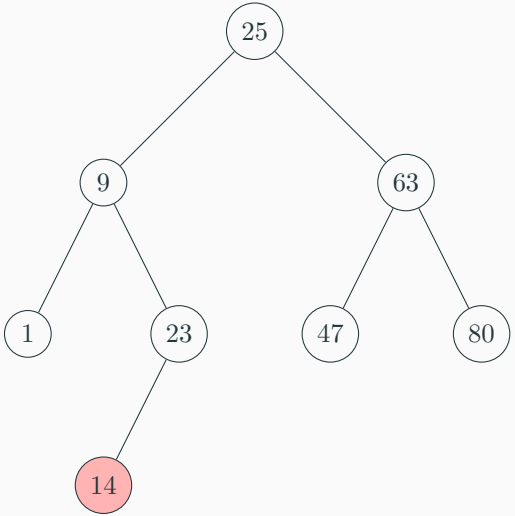
Remoção

Remoção em árvores binárias de busca

- A remoção em árvores binárias depende da posição do nó a ser removido
- São três casos:
  1. o nó é uma folha, isto é, não tem filhos
  2. o nó tem um filho
  3. o nó tem dois filhos
- No primeiro caso, basta remover a referência do pai e remover o nó
- No segundo caso, a referência do pai é alterada para apontar para neto, e o nó é removido
- O terceiro caso não pode ser resolvido em um único passo
- Duas possíveis soluções são a remoção por fusão ou a remoção por cópia

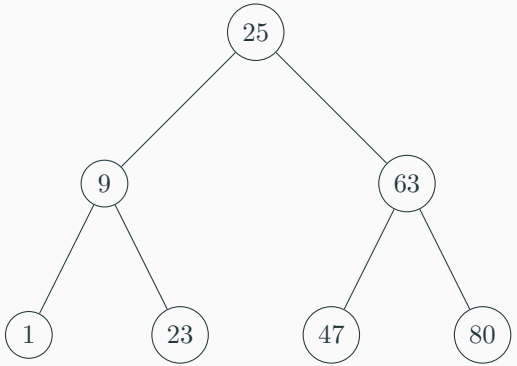
Exemplo de remoção de nó sem filhos

Elemento a ser removido: 14



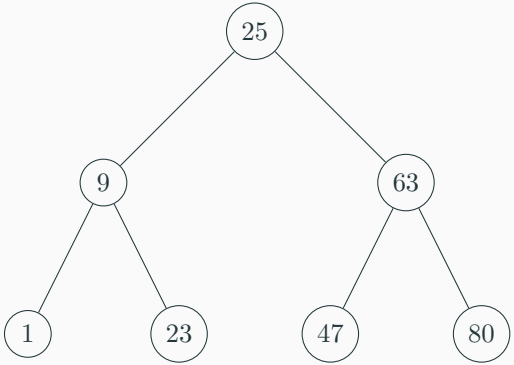
Exemplo de remoção de nó sem filhos

Elemento a ser removido: 14



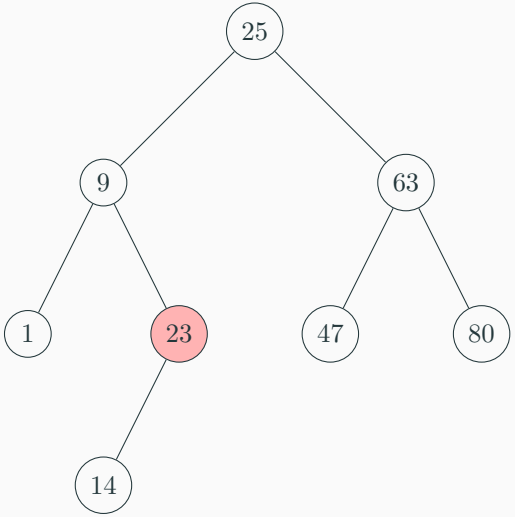
Exemplo de remoção de nó sem filhos

Elemento a ser removido: 14



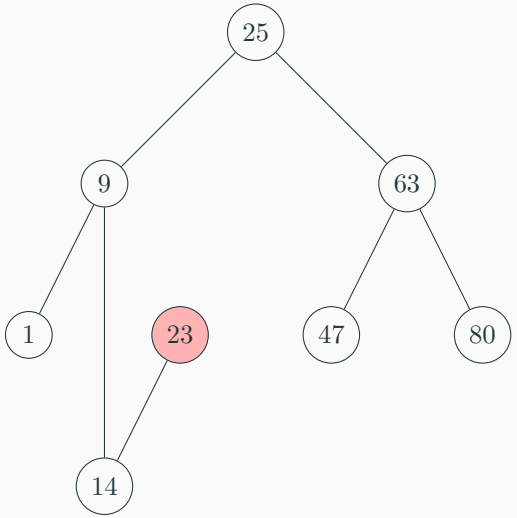
Exemplo de remoção de nó com apenas um filho

Elemento a ser removido: 23



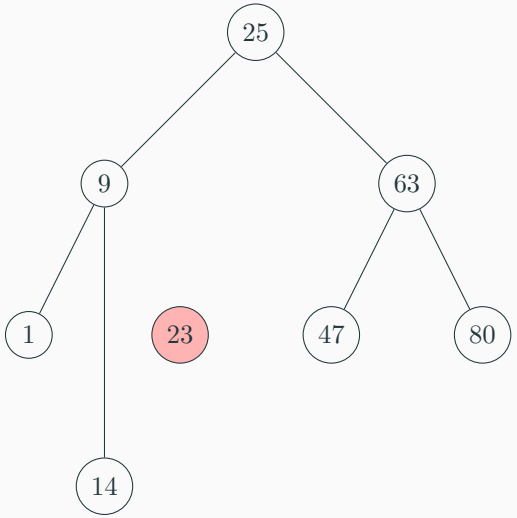
Exemplo de remoção de nó com apenas um filho

Elemento a ser removido: 23



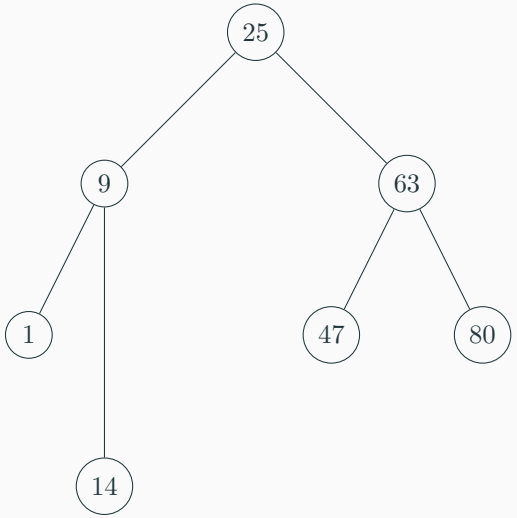
Exemplo de remoção de nó com apenas um filho

Elemento a ser removido: 23



Exemplo de remoção de nó com apenas um filho

Elemento a ser removido: 23

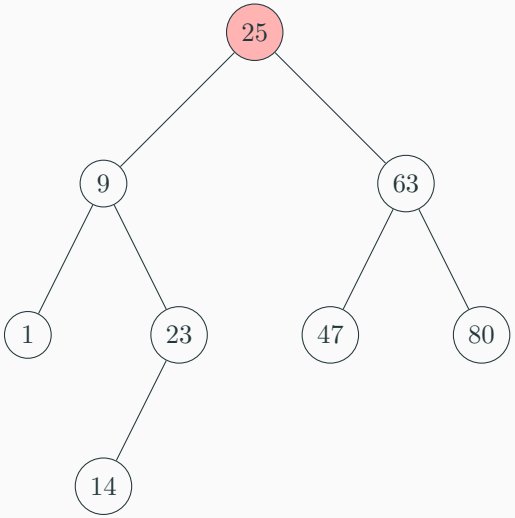


Remoção por fusão

- Esta técnica consiste em gerar uma nova árvore a partir das duas subárvores do nó a ser removido
- Numa árvore binária de busca, qualquer elemento da subárvore à direita é maior do que qualquer elemento da subárvore à esquerda
- Desta maneira, basta encontrar o nó mais à direita da subárvore à esquerda e transformá-lo no pai da subárvore à direita
- São quatro passos para a remoção por fusão:
  1. Localize o nó que deve ser removido (com dois filhos) e seu pai
  2. Na subárvore à esquerda, encontre o elemento mais à direita possível: basta mover-se sempre para a direita até que se encontre um nó nulo
  3. Torne a raiz da subárvore à esquerda o novo filho do pai do nó a ser removido
  4. Faça com que o nó mais à direita da subárvore à esquerda tenha como filho à direita a subárvore à direita do nó a ser removido
- *Corner case*: caso o nó seja a raiz, após a remoção a raiz deve apontar para a raiz da subárvore à esquerda

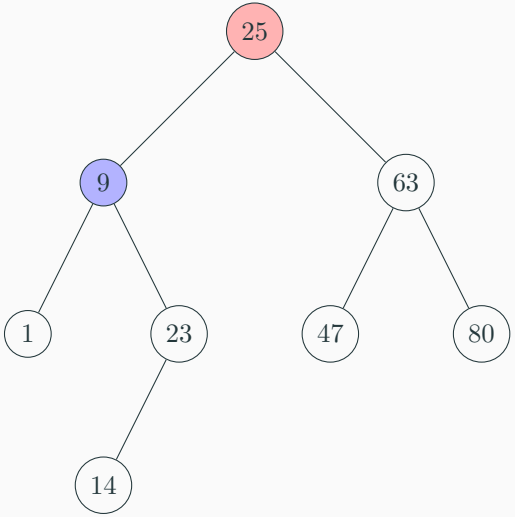
Exemplo de remoção por fusão

Elemento a ser removido: 25



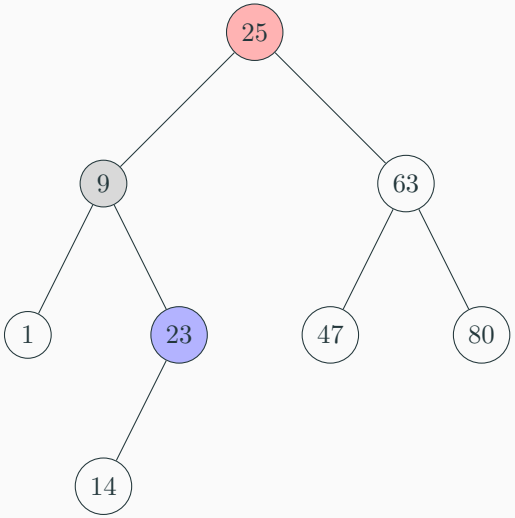
Exemplo de remoção por fusão

Elemento a ser removido: 25



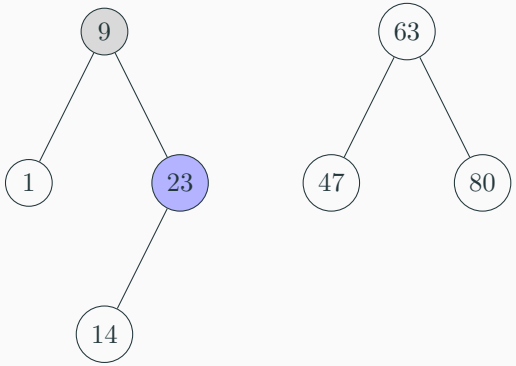
Exemplo de remoção por fusão

Elemento a ser removido: 25



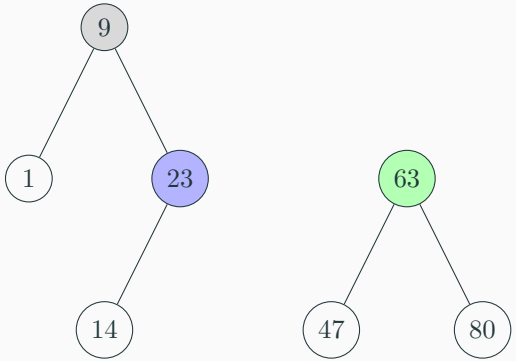
Exemplo de remoção por fusão

Elemento a ser removido: 25



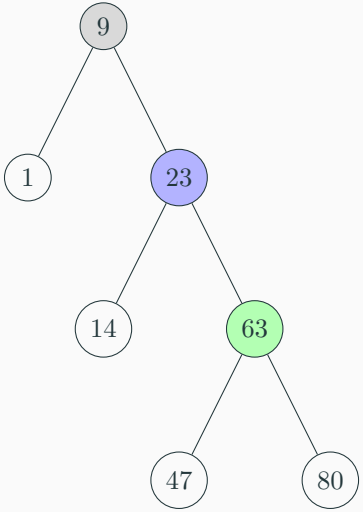
Exemplo de remoção por fusão

Elemento a ser removido: 25



Exemplo de remoção por fusão

Elemento a ser removido: 25



Implementação da remoção por fusão

```
1  template<typename T>
2  class BST {
3  private:
4      struct Node {
5          T info;
6          Node *left, *right;
7      };
8
9      Node *root;
10
11     void delete_by_merging(Node** n)
12     {
13         auto node = *n;
14
15         if (node == nullptr) return;
16
17         if (node->right == nullptr)          // Casos 1 e 2
18             *n = node->left;
19         else if (node->left == nullptr)      // Caso 2
20             *n = node->right;
```

Implementação da remoção por fusão

```
21          else {                              // Caso 3
22              auto temp = node->left;
23
24              while (temp->right)
25                  temp = temp->right;
26
27              temp->right = node->right;
28              *n = node->left;
29          }
30
31          delete node;
32      }
33
34  public:
35      BST() : root(nullptr) {}
36
```

Implementação da remoção por fusão

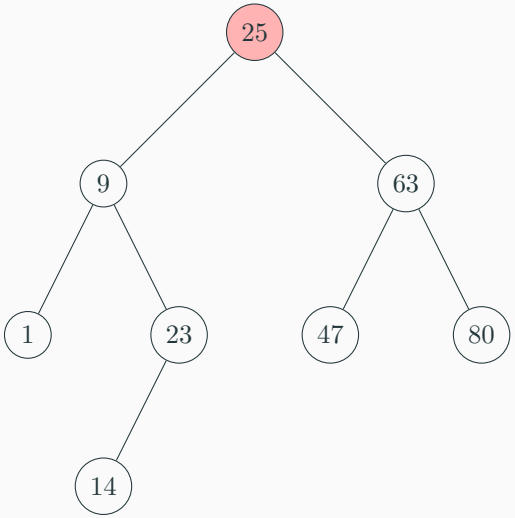
```
37      void erase(const T& info)
38      {
39          Node** node = &root;
40
41          while (*node)
42          {
43              if ((*node)->info == info)
44                  break;
45
46              if (info < (*node)->info)
47                  node = &(*node)->left;
48              else
49                  node = &(*node)->right;
50          }
51
52          delete_by_merging(node);
53      }
54  };
```

Remoção por cópia

- Algoritmo proposto por Donald Knuth e Thomas Hibbard
- Ele reduz o caso de um nó ter dois filhos para um dos casos anteriores: ou o nó não tem filhos ou tem apenas um
- Isto é feito substituíndo a informação do nó a ser deletado pela informação do nó mais à direita da subárvore à esquerda, apagando este nó em seguida
- Os quatro passos da remoção por cópia são:
  1. Localize o nó com dois filhos que deve ser removido
  2. Na subárvore à esquerda, encontre o elemento mais à direita possível
  3. Substitua a informação do nó a ser removido pela informação do nó localizado no passo anterior
  4. Remova o nó localizado no segundo passo

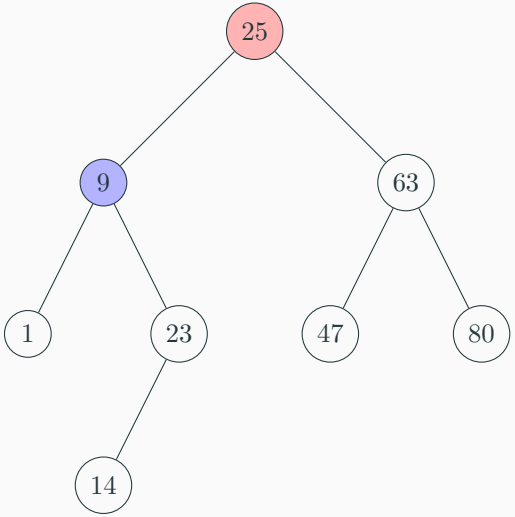
Exemplo de remoção por cópia

Elemento a ser removido: 25



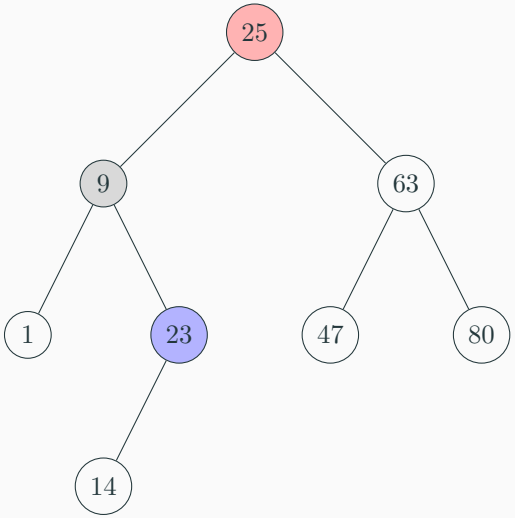
Exemplo de remoção por cópia

Elemento a ser removido: 25



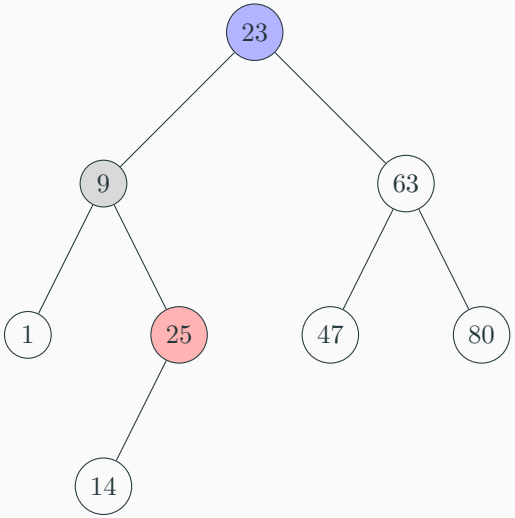
Exemplo de remoção por cópia

Elemento a ser removido: 25



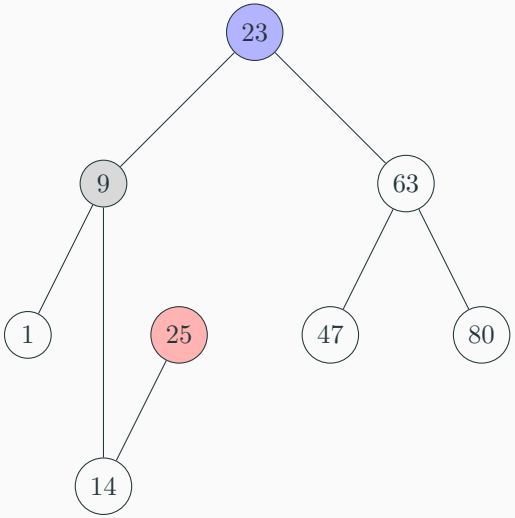
Exemplo de remoção por cópia

Elemento a ser removido: 25



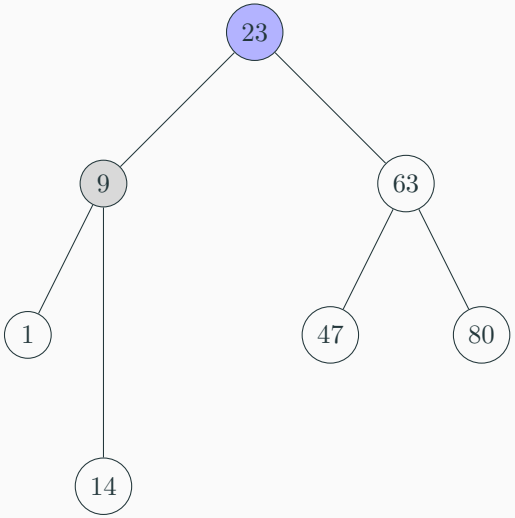
Exemplo de remoção por cópia

Elemento a ser removido: 25



Exemplo de remoção por cópia

Elemento a ser removido: 25



Implementação da remoção por cópia

```
1  template<typename T>
2  class BST {
3  private:
4      struct Node {
5          T info;
6          Node *left, *right;
7      };
8
9      Node *root;
10
11     void delete_by_copying(Node** n)
12     {
13         auto node = *n;
14
15         if (node == nullptr) return;
16
17         if (node->right == nullptr)          // Casos 1 e 2
18             *n = node->left;
19         else if (node->left == nullptr)      // Caso 2
20             *n = node->right;
```

Implementação da remoção por cópia

```
21          else {                              // Caso 3
22              auto temp = &(*n)->left;
23
24              while ((*temp)->right)
25                  temp = &(*temp)->right;
26
27              node->info = (*temp)->info;
28              return delete_by_copying(temp);
29          }
30
31          delete node;
32      }
33
34
35  public:
36      BST() : root(nullptr) {}
```

Implementação da remoção por cópia

```
37
38      void erase(const T& info)
39      {
40          Node** node = &root;
41
42          while (*node)
43          {
44              if ((*node)->info == info)
45                  break;
46
47              if (info < (*node)->info)
48                  node = &(*node)->left;
49              else
50                  node = &(*node)->right;
51          }
52
53          delete_by_copying(node);
54      }
55  };
```

Notas sobre os algoritmos de remoção

- De forma semelhante à inserção, ambos algoritmos de remoção em complexidade $O(N)$ no pior caso (folha de uma árvore degenerada com N nós)
- Observe que a remoção por fusão aumenta ou mantém a altura da árvore
- Já a remoção por cópia mantém ou diminui a altura da árvore
- Efetivamente, a complexidade de ambos algoritmos é $O(h)$, onde h é a altura da árvore
- Em uma árvore balanceada, $h = O(\log N)$, o que melhora a complexidade de ambos algoritmos
- Para manter uma árvore balanceada, a remoção por cópia é mais adequada do que a remoção por fusão
- Contudo, como já dito, a inserção pode desbalancear a árvore
- Logo é preciso alterar a inserção para que o balanceamento seja preservado

Referências

1. **DROZDEK**, Adam. *Algoritmos e Estruturas de Dados em C++*, 2002.
2. **KERNIGHAN**, Bryan; **RITCHIE**, Dennis. *The C Programming Language*, 1978.
3. **STROUSTROUP**, Bjarne. *The C++ Programming Language*, 2013.
4. C++ Reference[1].

[1] https://en.cppreference.com/w/