Matemática

Princípio da Inclusão/Exclusão

Prof. Edson Alves

Faculdade UnB Gama

Princípio da Inclusão/Exclusão

Cardinalidade da união de dois conjuntos

- Sejam A e B dois conjuntos com interseção $A \cap B$ não-vazia. Quantos são os elementos do conjunto união $A \cup B$?
- A princípio a expressão $|A \cup B| = |A| + |B|$ pode parecer correta, mas há um problema
- Quando somamos todos os elementos do conjunto A, somamos também os elementos da interseção $A \cup B$; ao somarmos os elementos de B, os elementos da interseção são novamente somados, de modo que a expressão proposta conta elementos duplicados
- Esta contagem pode ser corrigida descontado uma vez cada elemento dobrado
- Assim
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$
- A expressão acima é o Princípio da Inclusão/Exclusão para dois conjuntos.

Cardinalidade da união de três conjuntos

- Para o caso de 3 conjuntos, devemos atentar as possíveis interseções entre os conjuntos e os efeitos colaterais da soma e subtração de cada uma
- Na soma
$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C|$$
as interseções $A \cap B$, $A \cap C$ e $B \cap C$ são contadas duas vezes, e a interseção $A \cap B \cap C$ três vezes
- Ao remover as duplicatas, ficamos com
$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|$$
- As duplicatas foram removidas, mas a interseção $A \cap B \cap C$ foi removida completamente (três vezes), de modo que não está mais sendo contada
- A última correção necessária, portanto, é incluir a interseção ausente:
$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$
- Este é o Princípio da Inclusão/Exclusão para três conjuntos

Princípio da Inclusão/Exclusão

Definição

Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_N$ conjuntos finitos. Então

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_N| = \sum_{i} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^N |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_N|$$

- O Princípio da Inclusão/Exclusão é a generalização do Princípio Aditivo, para os casos onde 2 ou mais conjuntos tem interseção não-vazia
- Observe que o número de elementos dos próprios conjuntos, e de suas interseções em quantidade par, são somados ao total
- Já as interseções em quantidade ímpar são subtraídas da contagem

Aplicações do Princípio da Inclusão/Exclusão

Permutações caóticas

Definição

Uma permutação de N elementos é dita caótica se nenhum dos N elementos ocupa, na permutação, a mesma posição que ocupava na posicionamento original, isto é, o elemento i não ocupa a i-ésima posição.

Contando permutações caóticas

Podemos contar o total de permutações caóticas $D(N)$ (D de *derangement*, em inglês) da seguinte forma: seja A_k o conjunto das permutações nas quais o elemento k ocupa a k-ésima posição. Assim

$$D(N) = P(N) - \sum_{i} |A_i| + \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| - \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + ... + (-1)^N |A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_N|$$

onde $P(N)$ é o total de permutações de N elementos.

Observe que $|A_i| = (N-1)!$ (pois o elemento i está fixo), $|A_i \cap A_j| = (N-2)!$ (dois elementos fixos), e assim por diante. Logo

$$D(N) = N! - \binom{N}{1}(N-1)! + \binom{N}{2}(N-2)! - ... + (-1)^N \binom{N}{N}$$

o que nos dá

$$D(N) = N!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... + (-1)^N \frac{1}{N!}\right)$$

Permutações caóticas e programação dinâmica

Na prática, para computar $D(N)$ é melhor utilizar a seguinte recorrência. Para $N = 1$, não há permutações caóticas entre as $1!$ possíveis. Para o caso $N = 2$, há uma permutação caótica entre as 2 possíveis (a saber, a permutação $(2\ 1)$). Assim os casos base da recorrência são:

$$
\begin{aligned}
D(1) &= 0 \\
D(2) &= 1
\end{aligned}
$$

Para computar $D(N)$ devemos decidir o que fazer com o elemento que ocupa a posição 1. Temos duas situações possíveis

1. trocar os elementos das posições 1 e j;
2. colocar o elemento da posição j na posição 1, mas não colocar o elemento da posição 1 na posição j.

Permutações caóticas e programação dinâmica

Tanto no primeiro quanto no segundo cenário temos $(N-1)$ valores possíveis para j. No primeiro caso, após a troca de ambos, restam $N-2$ elementos a serem posicionados, o que pode ser feito de $D(N-2)$ maneiras; no segundo caso, como 1 não pode ocupar a posição j, ficamos na situação de posicionar $N-1$ elementos, pois o 1 fará o papel do j, o que pode ser feito de $D(N-1)$ maneiras. Assim

$$D(N) = (N-1)(D(N-1) + D(N-2))$$

Os primeiros valores para esta sequência são

$$1, 0, 1, 2, 9, 44, 265, 1854, 14833, 133496, 1334961, 14684570, 176214841, 2290792932, \ldots$$

Uma notação alternativa para $D(N)$ é $!n$, que faz referência as permutações (que seriam $n!$).

Número de funções

Sejam A e B dois conjuntos com n e m elementos, respectivamente. *Quantas são as funções $f : A \to B$?*

Esta é uma pergunta relativamente fácil de responder. Seja

$$\mathcal{F} = \{ \ f \mid f : A \to B \ \}$$

Cada um dos elementos de A devem estar associados a um único elemento de B. Assim temos, para cada um dos n elementos, m escolhas possíveis. Pelo Princípio Multiplicativo temos que

$$|\mathcal{F}| = m^n$$

Número de funções bijetoras

A pergunta se torna mais interessante, porém, se adicionarmos algumas restrições. A primeira variante seria: *quantas são as funções bijetoras de A em B?*

Para que existam funções bijetoras de A em B, é necessário que $n = m$. Neste caso, seja

$$\mathcal{B} = \{\ g \mid g : A \to B \text{ e } g \text{ é bijetora }\}$$

Agora, cada um elemento de A tem que estar associado a um único elemento de B, cada elemento de B deve estar associado a um único elemento de A, e todos os elementos de B devem estar associados a algum elemento de A. Assim, o primeiro elemento de A tem n escolhas, o segundo tem $(n-1)$, o terceiro $(n-2)$, e assim por diante. Portanto,

$$|\mathcal{B}| = n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 2 \times 1 = P(n) = n!$$

Número de funções injetoras

A segunda variante da pergunta é: *quantas são as funções injetoras de A em B?*

Para que existam funções injetoras de A em B, é necessário que $n \leq m$. Neste caso, seja

$$\mathcal{I} = \{ \ h \mid h : A \to B \text{ e } h \text{ é injetora } \}$$

Agora, cada um elemento de A tem que estar associado a um único elemento de B e cada elemento de B deve estar associado a um único elemento de A. Assim, o primeiro elemento de A tem m escolhas, o segundo tem $(m-1)$, o terceiro $(m-2)$, e assim por diante. Portanto,

$$|\mathcal{I}| = m \times (m-1) \times (m-2) \times ... \times (m-n+1) = A(m,n) = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Número de funções sobrejetoras

Por fim, a mais interessante variação da pergunta: *quantas são as funções sobrejetoras de A em B?*

Precisamos, neste cenário, que $n \geq m$. Seja

$$\mathcal{S} = \{\ f : A \to B \mid f \text{ é sobrejetora } \}$$

e defina

$$\mathcal{C}_k = \{\ f : A \to B \mid f(a_i) \neq b_k, \forall a_i \in A\ \}$$

Veja que uma função deixa de ser sobrejetora se pertencer a pelo menos um dos conjuntos C_k. Pelo Princípio da Inclusão/Exclusão temos que

$$|\mathcal{S}| = |\mathcal{F}| - \sum_{i} |\mathcal{C}_i| + \sum_{i<j} |\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j| - \sum_{i<j<k} |\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j \cap \mathcal{C}_k| + \ldots + (-1)^N |\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \cap \ldots \cap \mathcal{C}_N|$$

Número de funções sobrejetoras

Observe que $|\mathcal{C}_i| = (m-1)^n$, $|\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j| = (m-2)^n$, e assim por diante, de modo que

$$|\mathcal{S}| = m^n - \binom{m}{1}(m-1)^n + \binom{m}{2}(m-2)^n + ... + (-1)^m \binom{m}{m}(m-m)^n$$

o que nos dá

$$|\mathcal{S}| = \sum_i (-1)^i \binom{m}{i}(m-i)^n,$$

para i variando de 0 a m.

Este valor coincide com o número de maneiras de se distribuir n bolas distintas em m caixas distintas, sem que nenhuma caixa fique vazia.

Deste mesmo resultado pode-se deduzir este outro importante resultado: há $T = |\mathcal{S}|/m!$ maneiras de se distribuir n bolas distintas em m caixas iguais, sem que nenhuma caixa fique vazia.

Referências

1. **SANTOS**, José Plínio O., **MELLO**, Margarida P., **MURARI**, Idani T. Introdução à Análise Combinatória, Editora Ciência Moderna, 2007.