

# Geometria Computacional

## Objetos Tridimensionais

---

Prof. Edson Alves

2019

Faculdade UnB Gama

1. Esfera
2. Cubo
3. Paralelepípedos

# Esfera

---

## Definição de esfera

- A esfera é o conjunto de pontos do espaço tridimensional que são equidistantes de um ponto fixo
- Este ponto fixo é denominado centro  $C$  da esfera
- A distância de um ponto da esfera a  $C$  é denominada raio  $r$
- A esfera pode ser representada, em coordenadas cartesianas, pela equação abaixo, onde  $(x_0, y_0)$  são as coordenadas do centro e  $r$  é o raio

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

- Pode ser útil, porém, utilizar a representação da esfera em coordenadas esféricas, onde  $r$  é o raio,  $\theta$  um ângulo que varia de 0 a  $2\pi$  e  $\varphi$  é um ângulo que varia de 0 a  $\pi$ :

$$x = x_0 + r \cos \theta \sin \varphi$$

$$y = y_0 + r \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = z_0 + r \cos \varphi$$

- A área da superfície da esfera é dada por  $A = 4\pi r^2$ , onde  $r$  é o raio da esfera
- O seu volume é igual a

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

- Estas expressões podem ser verificadas através das integrais de área e volume em coordenadas esféricas, cujo jacobiano é dado por  $r^2 \sin(\varphi)$ :

$$A = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin(\varphi) \, d\theta d\varphi$$

e

$$V = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin(\varphi) \, d\theta d\varphi dR$$

# Implementação do cálculo da área e do volume da esfera

```
1 // Definição da constante PI
2 template<typename T>
3 struct Point3D {
4     T x, y, z;
5 };
6
7 template<typename T>
8 struct Sphere {
9     Point3D<T> C;
10    T r;
11
12    double area() const
13    {
14        return 4.0*PI*r*r;
15    }
16
17    double volume() const
18    {
19        return 4.0*PI*r*r*r/3.0;
20    }
21 };
```

**Cubo**

---

## Definição de cubo

- Um cubo é uma região do espaço delimitada por 6 quadrados idênticos, unidos por meio de suas arestas
- O cubo é um dos cinco poliedros regulares
- Os demais são o tetraedro, o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro, que também são denominados Sólidos de Platão
- O cubo possui 12 arestas, 6 faces e 8 vértices, o que pode ser confirmado pela Equação de Euler

$$V + F - A = 2.$$

- A menos de sua posição no espaço, um cubo pode ser unicamente determinado pela medida  $L$  do lado do quadrado que compõe suas faces
- A medida da diagonal facial, isto é, a diagonal que une dos vértices opostos de uma mesma face, é igual a  $L\sqrt{2}$
- A medida da diagonal espacial, isto é, a diagonal que une dois vértices opostos, atravessando o cubo por seu interior, é dada por  $L\sqrt{3}$



## Exemplo de implementação do cubo

```
1  template<typename T>
2  struct Cube {
3      T L;
4
5      double face_diagonal() const
6      {
7          return L*sqrt(2.0);
8      }
9
10     double space_diagonal() const
11     {
12         return L*sqrt(3.0);
13     }
14 };
```

- A área da superfície do cubo (a soma das áreas de suas faces) é igual a

$$A = 6L^2,$$

uma vez que esta área é composta pela soma das áreas de seis quadrados idênticos

- O volume é dado por

$$V = L^3$$

- Sendo uma expressão cúbica, é preciso tomar cuidado com possíveis *overflows* no cálculo do volume

# Implementação do cálculo da área e do volume

```
1 template<typename T>
2 struct Cube {
3     // Membros e construtor
4
5     double area() const
6     {
7         return 6.0*L*L;
8     }
9
10    double volume() const
11    {
12        return L*L*L;
13    }
14 };
```

## Relação entre cubo e esfera

- O cubo tem três esferas associadas
- A esfera circunscrita, cujo raio é igual a  $L(\sqrt{3}/2)$ , passa pelos 8 vértices do cubo
- A esfera inscrita é tangente às 6 faces do cubo
- O raio da esfera inscrita é igual a  $L/2$
- A esfera tangente às arestas do cubo tem raio igual a  $L/\sqrt{2}$

# Paralelepípedos

---

## Definição e área

- Um paralelepípedo é uma figura geométrica formada por seis paralelogramos
- Em geral, um paralelepípedo é representado por três vetores linearmente independentes  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$
- Caso estes vetores sejam linearmente dependentes, o paralelepípedo resultante é degenerado, tendo volume igual a zero
- A área é dada pelas somas das áreas de suas faces
- A face delimitada pelos vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  tem área dada por

$$A = |\vec{u} \times \vec{v}|$$

- O mesmo vale para as outras faces, usando-se os vetores apropriados

- O volume é igual ao módulo do produto misto

$$V = |(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}|,$$

onde  $x \cdot y$  é o produto interno entre os vetores  $x$  e  $y$

- Na prática, o produto misto é equivalente ao determinante

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \det \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{bmatrix}$$

- Se conhecidos apenas os comprimentos  $a, b, c$  das arestas e os ângulos internos  $\alpha, \beta, \gamma$  formados entre elas, é possível computar o volume do paralelogramo através da expressão:

$$V = abc\sqrt{1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma}$$

# Implementação do cálculo da área e do volume

```
1 // Definição da estrutura Vector3D
2
3 template<typename T>
4 struct Paralelepiped {
5     Vector3D<T> u, v, w;
6
7     double volume() const
8     {
9         return fabs(u.x*v.y*w.z + u.y*v.z*w.x + u.z*v.x*w.y
10                    - (u.x*v.z*w.y + u.y*v.x*w.z + u.z*v.y*w.x));
11     }
12
13     double volume2() const
14     {
15         double a = u.length();
16         double b = v.length();
17         double c = w.length();
18
19         double m = angle(u, v);
20         double n = angle(u, w);
21         double p = angle(v, w);
```



# Implementação do cálculo da área e do volume

```
22
23     return a*b*c*sqrt(1 + 2*cos(m)*cos(n)*cos(p) - cos(m)*cos(m)
24         - cos(n)*cos(n) - cos(p)*cos(p));
25 }
26
27 double volume3() const
28 {
29     return fabs(dot_product(u, cross_product(v, w)));
30 }
31
32 double area() const
33 {
34     double uv = cross_product(u, v).length();
35     double uw = cross_product(u, w).length();
36     double vw = cross_product(v, w).length();
37
38     return 2*(uv + uw + vw);
39 }
40 };
```

1. **HALIM**, Felix; **HALIM**, Steve. *Competitive Programming 3*, 2010.
2. The University of Georgia. [Volume of a Frustum of a Right Circular Cone](#), acesso em 17/05/2019.
3. Wikipedia. [Cylinder \(geometry\)](#), acesso em 17/05/2019.
4. Wikipedia. [Parallelepiped](#), acesso em 17/05/2019.
5. Wolfram MathWorld. [Spherical Coordinates](#), acesso em 18/04/2019.