

# Paradigmas de Resolução de Problemas

Algoritmos Gulosos – *Two pointers*

---

Prof. Edson Alves - UnB/FGA

2020

1. *Two pointers*
2. Exemplos de aplicação de *two pointers*

*Two pointers*

---

# Definição

- *Two pointers* é uma técnica de gulosa aplicada em problemas em vetores
- Nela são utilizados dois ponteiros unidirecionais  $L$  e  $R$
- Assim, a cada iteração do algoritmo, estes ponteiros só podem avançar na direção pré-definida, sem recuar
- Isto faz com que cada ponteiro observe cada elemento do vetor uma única vez
- Para tal, é preciso considerar quais valores ainda podem fazer parte da solução, e quais podem, e devem, ser descartados
- Desde modo, esta é uma técnica gulosa, uma vez que, fixado um dos ponteiros, o segundo se move o máximo possível, e em seguida os ponteiros são reposicionados para as melhores posições possíveis

# Implementação

- Em geral, o ponteiro  $L$  (*left*) aponta para o início do vetor, e é incrementado a cada passo do algoritmo
- O ponteiro  $R$  (*right*) geralmente parte de  $L$  (ou  $L + 1$ ), e avança enquanto o intervalo  $[L, R)$  constituir uma subsolução válida do problema
- Em alguns problemas, o ponteiro  $L$  pode saltar diretamente para  $R$ , caso  $R$  não possa mais avançar
- Também há problemas onde  $R$  inicia no último elemento do vetor, e caminha em direção ao início do mesmo
- Na maioria dos casos, o uso desta técnica leva a algoritmos  $O(N)$ , onde  $N$  é o tamanho do vetor

## **Exemplos de aplicação de *two pointers***

---

# Maior substring em ordem lexicográfica

- Seja  $S$  uma string com  $N$  caracteres
- O problema consiste em determinar o tamanho  $M$  da maior substring  $b$  de  $S$  tal que os caracteres de  $b$  estão em ordem lexicográfica
- Em outras palavras, o problema é determinar a maior substring  $b = b[1..M]$  de  $S$  tal que  $b_{i-1} \leq b_i, \forall i \in [2, M]$
- A string  $S$  tem  $O(N^2)$  substrings, e a verificação se uma substring está em ordem lexicográfica ou não é feita em  $O(N)$
- Assim um algoritmo de busca completa tem complexidade  $O(N^3)$

## Maior substring em ordem lexicográfica

- Porém, é possível utilizar a técnica *two pointers* neste problema
- Inicie  $L$  no primeiro caractere de  $S$
- Para cada valor de  $L$ , faça  $R = L + 1$
- A substring  $S[L..(R - 1)]$  tem, inicialmente, um único caractere, de modo que está em ordem lexicográfica
- Enquanto  $R \leq N$  e  $S[R] \leq S[R - 1]$ , incremente  $R$
- Ao final do processo, a substring  $S[L..(R - 1)]$  terá  $R - L$  caracteres e estará em ordem lexicográfica
- Atualize  $L$  para  $R$  e prossiga enquanto  $L \leq N$
- Como tanto  $L$  quanto  $R$  observam cada caractere de  $S$  uma única vez, esta solução tem complexidade  $O(N)$  e memória  $O(1)$



# Tamanho da maior substring ordenada

```
1 #include <bits/stdc++.h>
2
3 using namespace std;
4
5 auto max_ordered_substring(const string& s)
6 {
7     auto N = s.size(), L = 0ul, ans = 0ul;
8
9     while (L < N)
10     {
11         auto R = L + 1;
12
13         while (R < N and s[R - 1] <= s[R])
14             ++R;
15
16         ans = max(ans, R - L);
17         L = R;
18     }
19
20     return ans;
21 }
```

# Tamanho da maior substring ordenada

```
22
23 int main()
24 {
25     string s1 { "abcde" }, s2 { "cba" }, s3 { "teste" };
26
27     cout << max_ordered_substring(s1) << '\n';
28     cout << max_ordered_substring(s2) << '\n';
29     cout << max_ordered_substring(s3) << '\n';
30
31     return 0;
32 }
```

## Maior subvetor com, no máximo, $K$ números ímpares

- Seja  $\vec{v}$  um vetor com  $N$  números inteiros
- O problema consiste em terminar o maior subvetor  $\vec{x} = \vec{v}[i..j]$  de  $\vec{v}$  que contenha, no máximo,  $K$  números ímpares
- Novamente,  $\vec{v}$  em  $O(N^2)$  subvetores, de modo que uma solução de busca completa que verifique cada um deles terá complexidade  $O(N^3)$
- A ideia central da solução usando *two pointers* é identificar intervalos  $[L, R)$  tais que os subvetores  $\vec{v}[L..(R - 1)]$  tenham, no máximo,  $K$  números ímpares
- Observe que  $|\vec{v}[L..(R - 1)]| = R - L$
- O ponteiro  $L$  observará, um a um, os elementos de  $\vec{v}$ , do primeiro para o último
- O ponteiro  $R$  iniciará apontando para o primeiro elemento

## Maior subvetor com, no máximo, $K$ números ímpares

- Um contador  $c$ , inicialmente igual a zero, manterá o registro do número de elementos ímpares dentre os elementos de  $\vec{v}$  cujos índices estão no intervalo  $[L, R)$
- Para cada valor de  $L$ , o ponteiro  $R$  apontará para  $L$  ou manterá o seu valor, o que estiver mais distante do início do vetor
- Enquanto  $R$  apontar para um elemento par, ou apontar para um ímpar com o contador  $c < K$ , o contador é atualizado com o valor de  $\vec{v}[R]$  e  $R$  é incrementado
- Ao final deste processo, a resposta é atualizada em relação ao tamanho do subvetor válido  $(R - L)$
- Por fim, o contador é ajustado, caso o valor de  $\vec{v}[L]$  tenha sido considerado, e  $L$  é incrementado
- A complexidade da solução é  $O(N)$

# Visualização do algoritmo do maior subvetor com, no máximo, $K = 1$ números ímpares

$ans = 0$

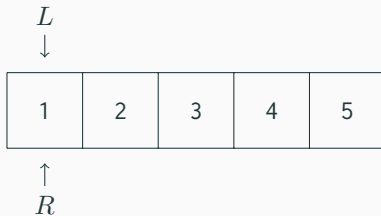
$c = 0$

1	2	3	4	5
---	---	---	---	---

## Visualização do algoritmo do maior subvetor com, no máximo, $K = 1$ números ímpares

$ans = 0$

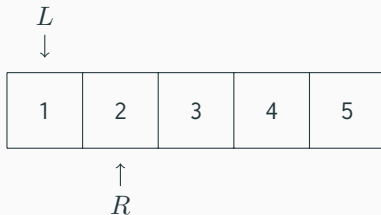
$c = 1$



## Visualização do algoritmo do maior subvetor com, no máximo, $K = 1$ números ímpares

$ans = 0$

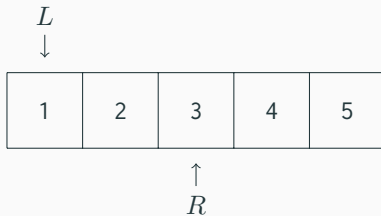
$c = 1$



## Visualização do algoritmo do maior subvetor com, no máximo, $K = 1$ números ímpares

$ans = 0$

$c = 1$

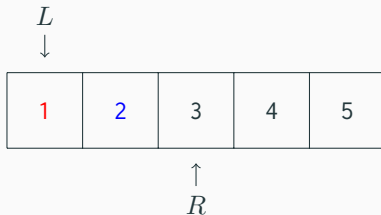




# Visualização do algoritmo do maior subvetor com, no máximo, $K = 1$ números ímpares

$ans = 2$

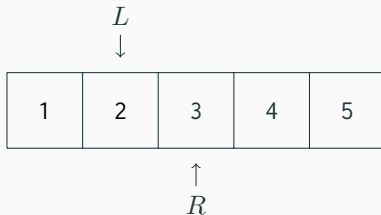
$c = 1$



# Visualização do algoritmo do maior subvetor com, no máximo, $K = 1$ números ímpares

$ans = 2$

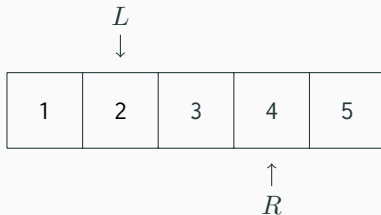
$c = 0$



## Visualização do algoritmo do maior subvetor com, no máximo, $K = 1$ números ímpares

$ans = 2$

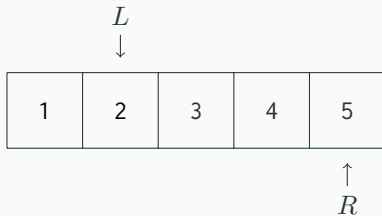
$c = 1$



## Visualização do algoritmo do maior subvetor com, no máximo, $K = 1$ números ímpares

$$ans = 2$$

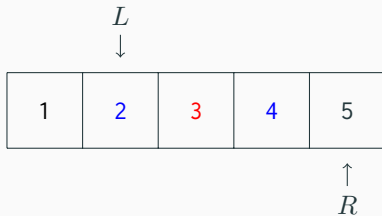
$$c = 1$$



## Visualização do algoritmo do maior subvetor com, no máximo, $K = 1$ números ímpares

$ans = 3$

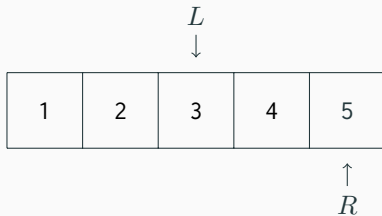
$c = 1$



## Visualização do algoritmo do maior subvetor com, no máximo, $K = 1$ números ímpares

$$ans = 3$$

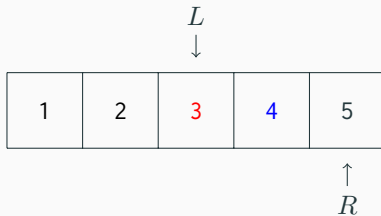
$$c = 1$$



## Visualização do algoritmo do maior subvetor com, no máximo, $K = 1$ números ímpares

$ans = 3$

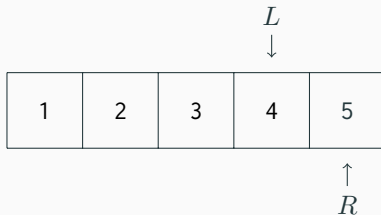
$c = 1$



# Visualização do algoritmo do maior subvetor com, no máximo, $K = 1$ números ímpares

$ans = 3$

$c = 0$

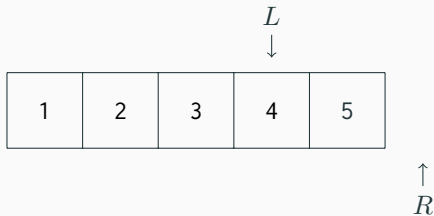




# Visualização do algoritmo do maior subvetor com, no máximo, $K = 1$ números ímpares

$ans = 3$

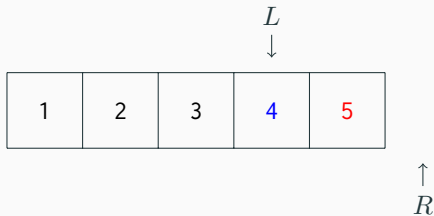
$c = 1$



## Visualização do algoritmo do maior subvetor com, no máximo, $K = 1$ números ímpares

$ans = 3$

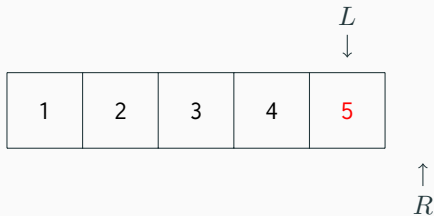
$c = 1$



# Visualização do algoritmo do maior subvetor com, no máximo, $K = 1$ números ímpares

$ans = 3$

$c = 1$



# Implementação do maior subvetor com, no máximo, $K$ ímpares

```
1 #include <bits/stdc++.h>
2
3 using namespace std;
4
5 size_t max_subarray(const vector<int>& xs, size_t K)
6 {
7     auto N = xs.size(), L = 0ul, R = 0ul, odds = 0ul, ans = 0ul;
8
9     while (L < N)
10     {
11         R = max(L, R);
12
13         while (R < N and (xs[R] % 2 == 0 or odds < K))
14             odds += (xs[R++] % 2);
15
16         ans = max(ans, R - L);
17
18         odds = max(odds - (xs[L] % 2), 0ul);
19         ++L;
20     }
21 }
```

# Implementação do maior subvetor com, no máximo, $K$ ímpares

```
22     return ans;
23 }
24
25 int main()
26 {
27     vector<int> xs { 1, 3, 5, 4, 5 }, ys { 1, 3, 5 };
28
29     cout << max_subarray(xs, 1) << '\n';
30     cout << max_subarray(xs, 2) << '\n';
31     cout << max_subarray(xs, 3) << '\n';
32     cout << max_subarray(ys, 0) << '\n';
33
34     return 0;
35 }
```

## Menor elemento em um subvetor de tamanho $K$

- Quando o intervalo delimitador por  $[L, R)$  tem um tamanho  $K$  fixo, a técnica dos dois ponteiros também é conhecida como *sliding window*
- Seja  $\vec{v}$  um vetor com  $N$  inteiros
- O problema de se determinar o menor elemento de cada um dos  $N - K + 1$  subintervalos de tamanho  $K$  pode ser resolvido com dois ponteiros e duas pilhas  $P_{in}$  e  $P_{out}$
- As pilhas armazenarão pares de valores  $(x, m)$ , onde  $x$  é o elemento do vetor a ser inserido, e  $m$  é o menor dentre os valores contidos na pilha e o próprio  $x$

## Menor elemento em um subvetor de tamanho $K$

- Observe que  $m$  será igual ao próprio  $x$ , caso a pilha esteja vazia
- Nos demais casos,  $m = \min\{x, M\}$ , onde  $M$  é o segundo elemento do par que está no topo da pilha
- Inicialmente, insira os primeiros  $K$  elementos de  $\vec{v}$  na pilha  $P_{in}$
- O segundo elemento do par do topo de  $P_{in}$  será a resposta para o primeiro intervalo
- Faça  $L = 0$  e  $R = K$
- Caso a pilha  $P_{out}$  esteja vazia mova, um a um, os elementos de  $P_{in}$  para  $P_{out}$ , atualizando corretamente os valores de  $m$

## Menor elemento em um subvetor de tamanho $K$

- Exclua o elemento do topo de  $P_{out}$ : isto removerá o elemento  $\vec{v}[L]$  das pilhas
- Em seguida, incremente  $L$
- Agora, insira  $\vec{v}[R]$  na pilha  $P_{in}$  e incremente  $R$
- Após estes ajustes, as pilhas conterão os elementos do intervalo de tamanho  $K$  adjacente ao anterior (isto é, a janela se moveu de  $[L, R)$  para  $[L + 1, R + 1)$ )
- A resposta para  $L$  será o menor entre os valores  $m$  dos topos das pilhas
- Como cada ponteiros observa cada elemento de  $\vec{v}$  no máximo uma vez, e cada elemento passa por, no máximo, duas pilhas, a complexidade do algoritmo é  $O(N)$



## Visualização do menor elemento em cada um dos subvetores de tamanho $K = 3$

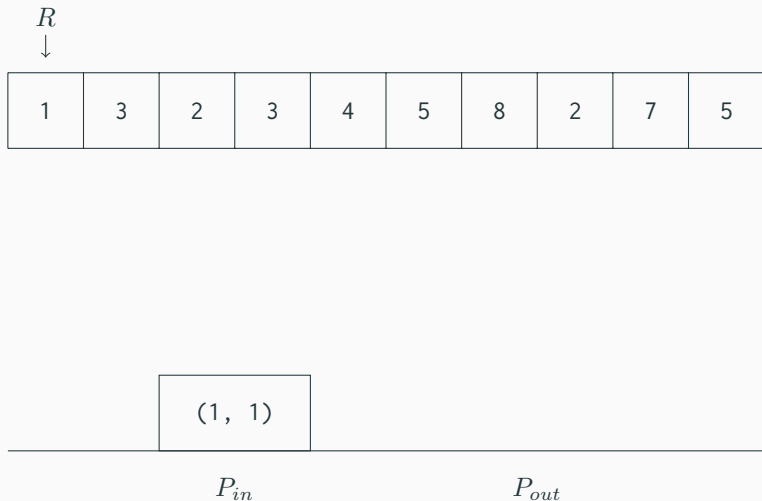
1	3	2	3	4	5	8	2	7	5
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

---

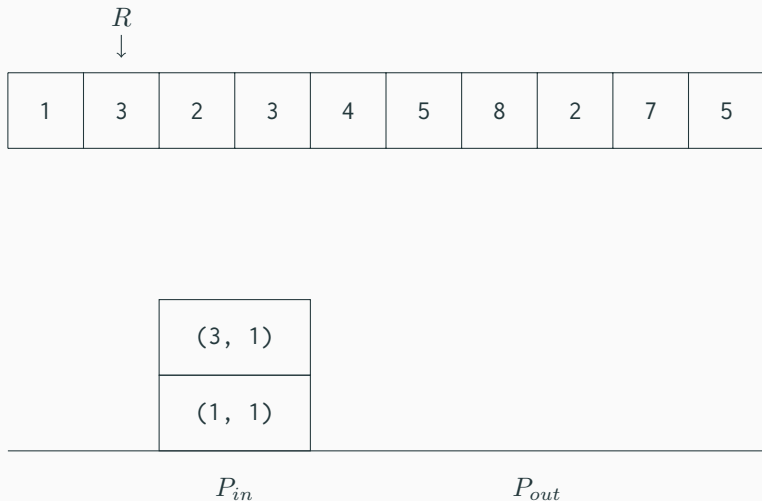
$P_{in}$

$P_{out}$

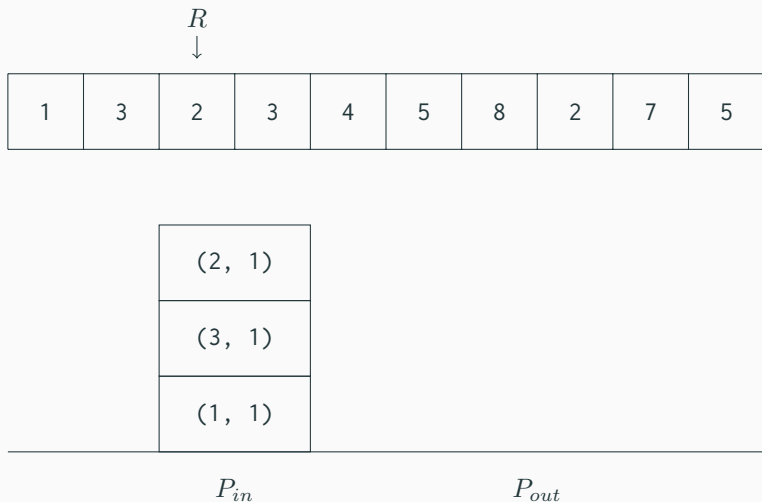
## Visualização do menor elemento em cada um dos subvetores de tamanho $K = 3$



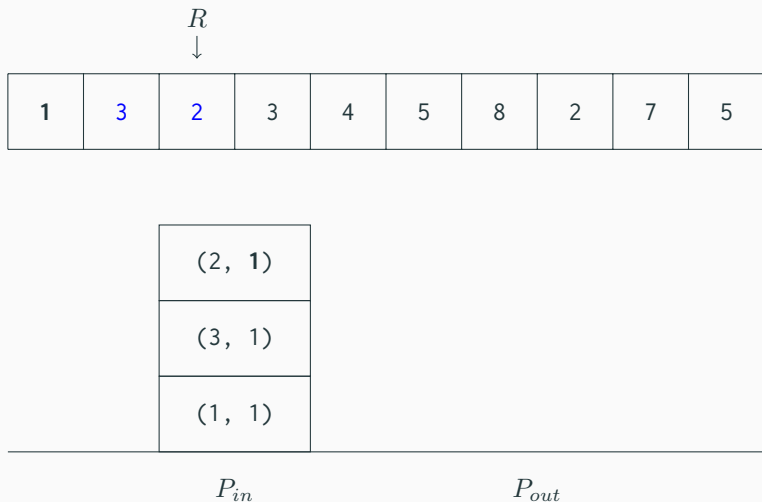
## Visualização do menor elemento em cada um dos subvetores de tamanho $K = 3$



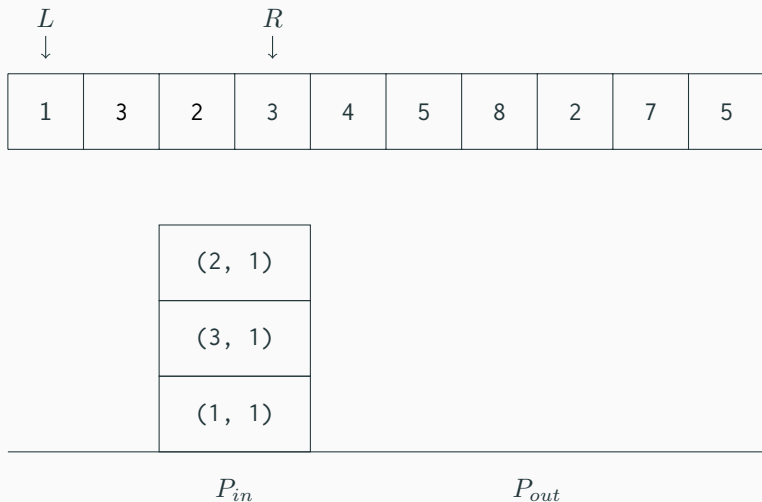
## Visualização do menor elemento em cada um dos subvetores de tamanho $K = 3$



## Visualização do menor elemento em cada um dos subvetores de tamanho $K = 3$

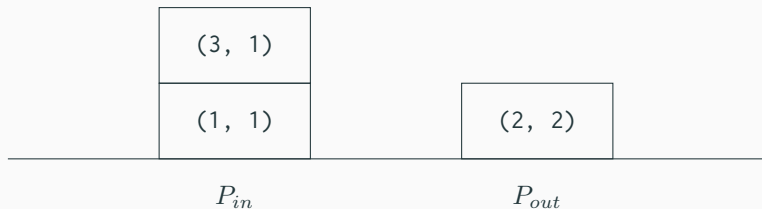


## Visualização do menor elemento em cada um dos subvetores de tamanho $K = 3$

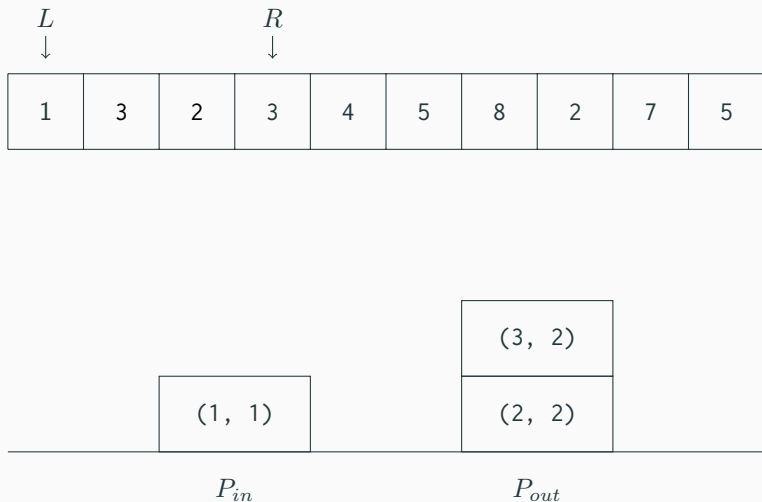


## Visualização do menor elemento em cada um dos subvetores de tamanho $K = 3$

$L$ ↓			$R$ ↓						
1	3	2	3	4	5	8	2	7	5

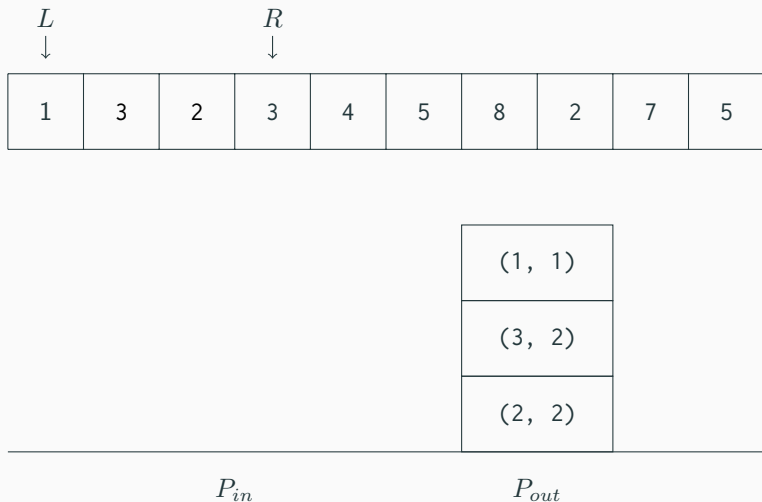


## Visualização do menor elemento em cada um dos subvetores de tamanho $K = 3$



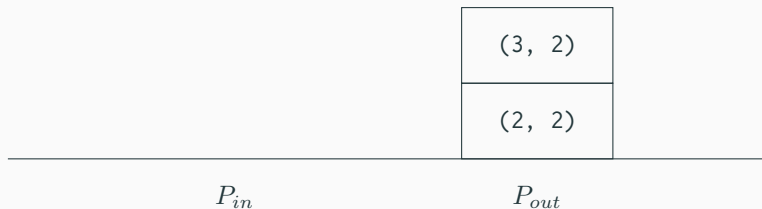


## Visualização do menor elemento em cada um dos subvetores de tamanho $K = 3$

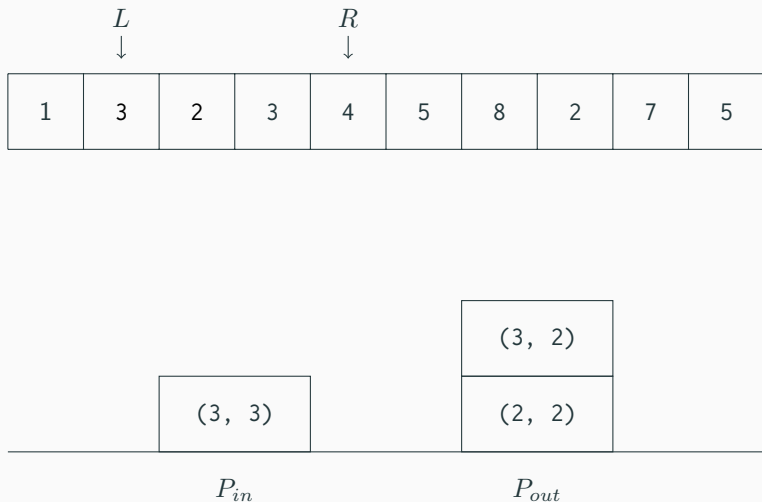


## Visualização do menor elemento em cada um dos subvetores de tamanho $K = 3$

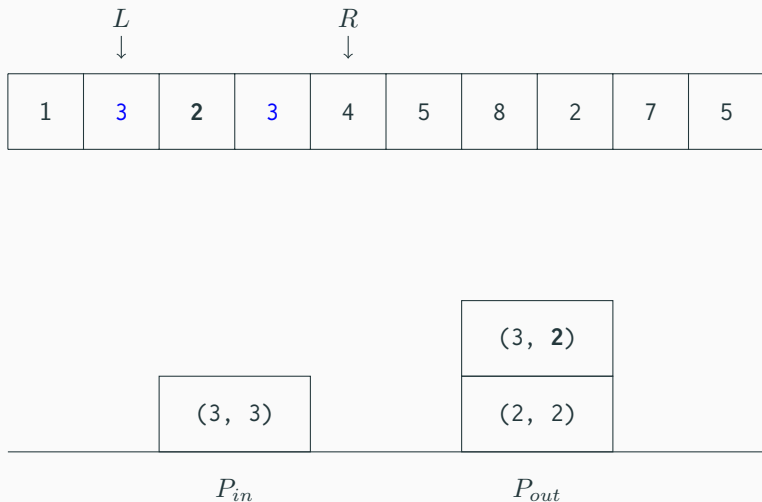
$L$ ↓			$R$ ↓						
1	3	2	3	4	5	8	2	7	5



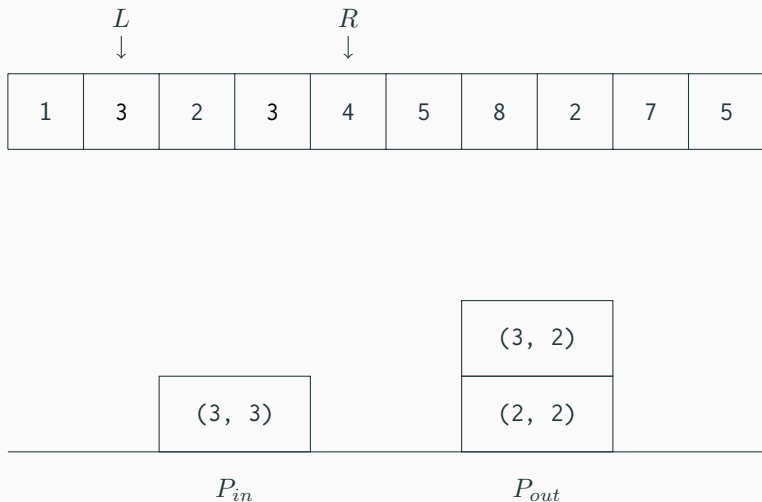
## Visualização do menor elemento em cada um dos subvetores de tamanho $K = 3$



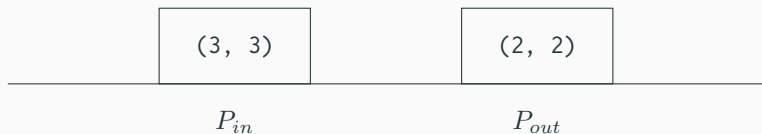
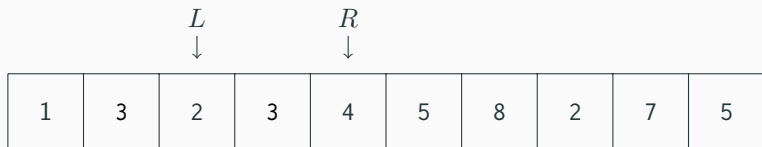
## Visualização do menor elemento em cada um dos subvetores de tamanho $K = 3$



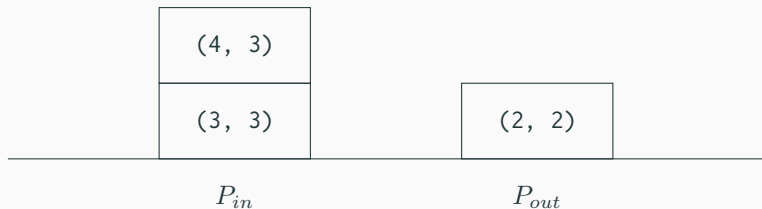
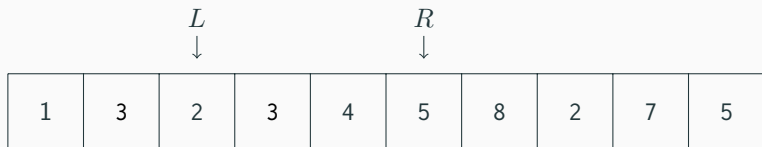
## Visualização do menor elemento em cada um dos subvetores de tamanho $K = 3$



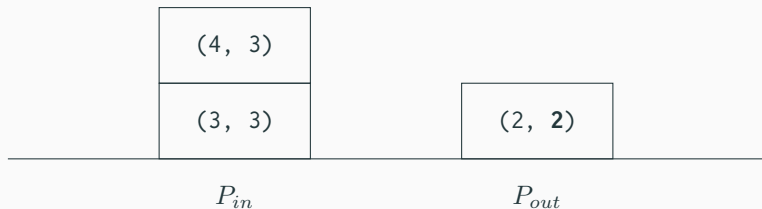
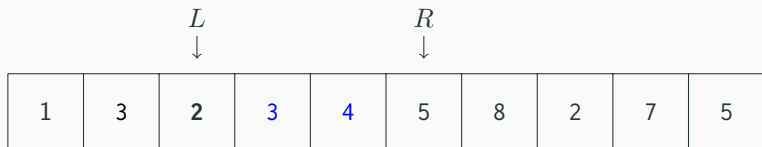
## Visualização do menor elemento em cada um dos subvetores de tamanho $K = 3$



## Visualização do menor elemento em cada um dos subvetores de tamanho $K = 3$



## Visualização do menor elemento em cada um dos subvetores de tamanho $K = 3$





# Implementação

```
1 #include <bits/stdc++.h>
2
3 using namespace std;
4 using ii = pair<int, int>;
5 const int oo { 1000000010 };
6
7 void insert(stack<ii>& s, int x)
8 {
9     int m = s.empty() ? x : min(s.top().second, x);
10    s.push(ii(x, m));
11 }
12
13 void move(stack<ii>& out, stack<ii>& in)
14 {
15     while (not in.empty())
16     {
17         auto x = in.top().first;
18         in.pop();
19         insert(out, x);
20     }
21 }
```

# Implementação

```
22
23 vector<int> minimum(int N, int K, const vector<int>& xs)
24 {
25     stack<ii> in, out;
26
27     int L = 0, R;
28
29     for (R = 0; R < K; ++R)
30         insert(in, xs[R]);
31
32     move(out, in);
33
34     vector<int> ans(N - K + 1, -1);
35
36     ans[L] = out.top().second;
37
38     while (R < N)
39     {
40         if (out.empty())
41             move(out, in);
42
```

# Implementação

```
43     insert(in, xs[R]);
44     out.pop();
45
46     ++L;
47     ++R;
48
49     auto a = in.empty() ? oo : in.top().second;
50     auto b = out.empty() ? oo : out.top().second;
51
52     ans[L] = min(a, b);
53 }
54
55 return ans;
56 }
57
58 int main()
59 {
60     vector<int> xs { 1, 3, 2, 3, 4, 5, 8, 2, 7, 5, 3, 10, 6, 9 };
61     int K = 3;
62
63     auto ans = minimum((int) xs.size(), K, xs);
```

# Implementação

```
64
65     for (size_t i = 0; i < ans.size(); ++i)
66     {
67         cout << "[";
68
69         for (int j = 0; j < K; ++j)
70             cout << xs[i + j] << (j + 1 == K ? "]" : ", ");
71
72         cout << " -> " << ans[i] << '\n';
73     }
74
75     return 0;
76 }
```

- O 2SUM é um problema bastante conhecido: dado um vetor  $\vec{v}$  com  $N$  inteiros, determine se, para um dado  $S$ , existem dois elementos  $v_i$  e  $v_j$  tais que  $v_i + v_j = S$
- Há  $O(N^2)$  pares de elementos de  $\vec{v}$ , de modo que uma solução que verificasse cada um destes pares teria complexidade  $O(N^2)$
- É possível usar a técnica dos dois ponteiros para reduzir complexidade
- Se  $\vec{v}$  não estiver ordenado, ordene-o em ordem não-decrescente
- Inicie os ponteiros  $L = 0$  e  $R = N - 1$
- Enquanto  $R > L$  (ou  $R \geq L$ , se um elemento puder se utilizado duas vezes) e  $\vec{v}[L] + \vec{v}[R] > S$ , decemente  $R$

- Caso  $\vec{v}[L] + \vec{v}[R] = S$ , a solução foi encontrada e o algoritmo termina
- Caso contrário, incrementa  $L$  e repita o processo
- Se, em algum momento,  $R < L$ , o algoritmo finalizará e o problema não tem solução
- Este problema é um exemplo onde os ponteiros avançam em direções opostas
- Como cada elemento é observado, no máximo, uma única vez por cada ponteiros, a complexidade do algoritmo é  $O(N)$
- Caso o vetor não esteja inicialmente ordenado, a complexidade passa a ser  $O(N \log N)$ , devido ao algoritmo de ordenação

# Implementação do 2SUM

```
1 #include <bits/stdc++.h>
2
3 using namespace std;
4
5 bool _2sum(int N, int S, vector<int>& xs)
6 {
7     sort(xs.begin(), xs.end());
8
9     int L = 0, R = N - 1;
10
11     // A solução exige dois elementos distintos de xs
12     while (L < R)
13     {
14         while (R > L and xs[L] + xs[R] > S)
15             --R;
16
17         if (R <= L)
18             break;
19
20         if (xs[L] + xs[R] == S)
21             return true;
```

# Implementação do 2SUM

```
22
23     ++L;
24 }
25
26 return false;
27 }
28
29 int main()
30 {
31     vector<int> xs { 1, -2, 5, 8, -3, 7, -5 };
32     int N = (int) xs.size();
33
34     cout << _2sum(N, 0, xs) << endl;
35     cout << _2sum(N, 1, xs) << endl;
36     cout << _2sum(N, 4, xs) << endl;
37     cout << _2sum(N, 14, xs) << endl;
38
39     return 0;
40 }
```



1. **LAARKSONEN**, Antti. *Competitive Programmer's Handbook*, 2017.
2. **HALIM**, Steve; **HALIM**, Felix. *Competitive Programming 3*, Lulu, 2013.