Geometria Computacional

Produtos vetoriais

Prof. Edson Alves

Faculdade UnB Gama

Produto interno

Produto interno

- O produto interno (ou escalar) entre dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é dado pela soma dos produtos das coordenadas correspondentes dos dois vetores

Produto interno

- O produto interno (ou escalar) entre dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é dado pela soma dos produtos das coordenadas correspondentes dos dois vetores
- O resultado deste produto não é um vetor, e sim um escalar

Produto interno

- O produto interno (ou escalar) entre dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é dado pela soma dos produtos das coordenadas correspondentes dos dois vetores
- O resultado deste produto não é um vetor, e sim um escalar
- É possível mostrar que este produto coincide com o produto do tamanho dos dois vetores e do cosseno do ângulo entre estes vetores, conforme mostra a expressão abaixo:

$$< \vec{u}, \vec{v} >= \vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \theta$$

Produto interno

- O produto interno (ou escalar) entre dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é dado pela soma dos produtos das coordenadas correspondentes dos dois vetores
- O resultado deste produto não é um vetor, e sim um escalar
- É possível mostrar que este produto coincide com o produto do tamanho dos dois vetores e do cosseno do ângulo entre estes vetores, conforme mostra a expressão abaixo:

$$< \vec{u}, \vec{v} >= \vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \theta$$

- A relação acima permite computar o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$

Produto interno

- O produto interno (ou escalar) entre dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é dado pela soma dos produtos das coordenadas correspondentes dos dois vetores
- O resultado deste produto não é um vetor, e sim um escalar
- É possível mostrar que este produto coincide com o produto do tamanho dos dois vetores e do cosseno do ângulo entre estes vetores, conforme mostra a expressão abaixo:

$$< \vec{u}, \vec{v} >= \vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \theta$$

- A relação acima permite computar o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$
- O sinal do produto interno $d = \vec{u} \cdot \vec{v}$ pode ser utilizado para interpretar a natureza do ângulo entre os dois vetores:

Produto interno

- O produto interno (ou escalar) entre dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é dado pela soma dos produtos das coordenadas correspondentes dos dois vetores
- O resultado deste produto não é um vetor, e sim um escalar
- É possível mostrar que este produto coincide com o produto do tamanho dos dois vetores e do cosseno do ângulo entre estes vetores, conforme mostra a expressão abaixo:

$$< \vec{u}, \vec{v} >= \vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \theta$$

- A relação acima permite computar o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$
- O sinal do produto interno $d = \vec{u} \cdot \vec{v}$ pode ser utilizado para interpretar a natureza do ângulo entre os dois vetores:
    1. se $d = 0$, os vetores são ortogonais (formam um ângulo de 90°)

Produto interno

- O produto interno (ou escalar) entre dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é dado pela soma dos produtos das coordenadas correspondentes dos dois vetores
- O resultado deste produto não é um vetor, e sim um escalar
- É possível mostrar que este produto coincide com o produto do tamanho dos dois vetores e do cosseno do ângulo entre estes vetores, conforme mostra a expressão abaixo:

$$< \vec{u}, \vec{v} >= \vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \theta$$

- A relação acima permite computar o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$
- O sinal do produto interno $d = \vec{u} \cdot \vec{v}$ pode ser utilizado para interpretar a natureza do ângulo entre os dois vetores:
    1. se $d = 0$, os vetores são ortogonais (formam um ângulo de 90°)
    2. se $d > 0$, os vetores foram um ângulo agudo (menor que 90°)

Produto interno

- O produto interno (ou escalar) entre dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é dado pela soma dos produtos das coordenadas correspondentes dos dois vetores
- O resultado deste produto não é um vetor, e sim um escalar
- É possível mostrar que este produto coincide com o produto do tamanho dos dois vetores e do cosseno do ângulo entre estes vetores, conforme mostra a expressão abaixo:

$$< \vec{u}, \vec{v} >= \vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \theta$$

- A relação acima permite computar o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$
- O sinal do produto interno $d = \vec{u} \cdot \vec{v}$ pode ser utilizado para interpretar a natureza do ângulo entre os dois vetores:
    1. se $d = 0$, os vetores são ortogonais (formam um ângulo de 90°)
    2. se $d > 0$, os vetores foram um ângulo agudo (menor que 90°)
    3. se $d < 0$, os vetores formam um ângulo obtuso (maior que 90°)

Implementação do produto interno e do ângulo entre vetores em C++

```cpp
template<typename T>
T dot_product(const Vector<T>& u, const Vector<T>& v)
{
    return u.x * v.x + u.y * v.y;
}

// O retorno está no intervalo [0, pi]
template<typename T>
double angle(const Vector<T>& u, const Vector<T>& v)
{
    auto lu = u.length();
    auto lv = v.length();
    auto prod = dot_product(u, v);

    return acos(prod/(lu * lv));
}
```

Produto vetorial

Produto vetorial

- O produto vetorial entre dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ cujas coordenadas são obtidas através do determinante

$$u \times v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix},$$

onde $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ são vetores unitários com mesma direção e sentido que os eixos x, y, z, respectivamente

Produto vetorial

- O produto vetorial entre dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ cujas coordenadas são obtidas através do determinante

$$u \times v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix},$$

  onde $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ são vetores unitários com mesma direção e sentido que os eixos x, y, z, respectivamente
- Sendo definido por um determinante, o produto vetorial não é comutativo: a troca da ordem dos vetores altera o sentido do resultado

Produto vetorial

- O produto vetorial entre dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ cujas coordenadas são obtidas através do determinante

$$u \times v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix},$$

  onde $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ são vetores unitários com mesma direção e sentido que os eixos x, y, z, respectivamente
- Sendo definido por um determinante, o produto vetorial não é comutativo: a troca da ordem dos vetores altera o sentido do resultado
- Para computar o produto vetorial entre vetores bidimensionais, basta fazer a coordenada z de ambos vetores iguais a zero

Produto vetorial

- O produto vetorial entre dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ cujas coordenadas são obtidas através do determinante

$$u \times v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix},$$

  onde $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ são vetores unitários com mesma direção e sentido que os eixos x, y, z, respectivamente
- Sendo definido por um determinante, o produto vetorial não é comutativo: a troca da ordem dos vetores altera o sentido do resultado
- Para computar o produto vetorial entre vetores bidimensionais, basta fazer a coordenada z de ambos vetores iguais a zero
- O vetor resultante é perpendicular tanto a $\vec{u}$ quanto a $\vec{v}$

Produto vetorial

- A magnitude deste vetor é igual ao produto dos comprimentos dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e do seno do ângulo θ formado por estes dois vetores, isto é,

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin \theta$$

Produto vetorial

- A magnitude deste vetor é igual ao produto dos comprimentos dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e do seno do ângulo θ formado por estes dois vetores, isto é,

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin\theta$$

- Este valor coincide com a área do paralelogramo formado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$

Produto vetorial

- A magnitude deste vetor é igual ao produto dos comprimentos dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e do seno do ângulo θ formado por estes dois vetores, isto é,

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin \theta$$

- Este valor coincide com a área do paralelogramo formado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$
- Se os vetores tiverem mesma direção, o produto vetorial terá comprimento zero (como não definirão um plano, não há um vetor normal)

Produto vetorial

- A magnitude deste vetor é igual ao produto dos comprimentos dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e do seno do ângulo θ formado por estes dois vetores, isto é,

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin \theta$$

- Este valor coincide com a área do paralelogramo formado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$
- Se os vetores tiverem mesma direção, o produto vetorial terá comprimento zero (como não definirão um plano, não há um vetor normal)
- Vetores normais podem ser utilizados para definir a orientação de uma figura tridimensional (o lado interno e externo da figura)

Exemplo de implementação de produto vetorial em C++

```cpp
template<typename T>
Vector<T> cross_product(const Vector<T>& u, const Vector<T>& v)
{
    auto x = u.y*v.z - v.y*u.z;
    auto y = u.z*v.x - u.x*v.z;
    auto z = u.x*v.y - u.y*v.x;

    return Vector<T> { x, y, z };
}
```

Referências

1. **HALIM**, Felix; **HALIM**, Steve. *Competitive Programming 3*, 2010.
2. **LAAKSONEN**, Antti. *Competitive Programmer's Handbook*, 2018.
3. **De BERG**, Mark; **CHEONG**, Otfried. *Computational Geometry: Algorithms and Applications*, 2008.