

Geometria Computacional

Polígonos: Trelças

Prof. Edson Alves

2019

Faculdade UnB Gama

1. Definição
2. Teorema de Pick

Definição

Definição de treliça

- Um polígono simples cujos vértices tem coordenadas inteiras em um plano bidimensional é denominado treliça (*lattice*)
- As treliças são mais adequadas para se trabalhar na prática, pois permite que alguns algoritmos possam trabalhar exclusivamente com números inteiros, evitando erros de precisão
- Em computação gráfica é possível relacionar seus vértices diretamente com os *pixels* da tela
- Outra vantagem das treliças é que elas podem ser armazenadas em arquivos ou transmitidas via rede com maior simplicidade e utilizando menos espaço, por não necessitar de informações após o ponto decimal

Teorema de Pick

- O Teorema de Pick relaciona a área de uma treliça com o número pontos com coordenadas inteiras que estão na borda com o número de pontos com coordenadas inteiras que estão estritamente no interior do polígono
- Georg Alexander Pick foi um matemático austríaco, que descobriu e provou esta relação em 1899
- Se estas quantias forem conhecidas, é possível computar a área do polígono em $O(1)$, mesmo sem conhecer seus vértices
- Conhecidos os vértices, é possível também computar o número de pontos com coordenadas inteiras no interior do polígono em $O(1)$

Teorema de Pick

Teorema de Pick

Seja P uma treliça com área A . Seja I e B o número de pontos com coordenadas inteiras no interior e na borda de P , respectivamente.

Então

$$A = I + \frac{B}{2} - 1$$

Demonstração do Teorema de Pick

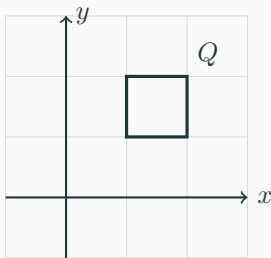
Demonstração: Considere que todas as figuras geométricas citadas nesta prova tenham vértices com coordenadas inteiras.

A prova do Teorema de Pick é feita em várias etapas:

- (1) mostrar que a fórmula é válida para quadrados unitários
- (2) mostrar que a fórmula vale para qualquer retângulo cujos lados são paralelos aos eixos ordenados
- (3) mostrar que a fórmula vale para triângulos retângulos
- (4) mostrar que a fórmula vale para triângulos arbitrários
- (5) mostrar que a fórmula vale para é um polígono simples

Demonstração da parte (1)

(1) Seja Q um quadrado unitário.



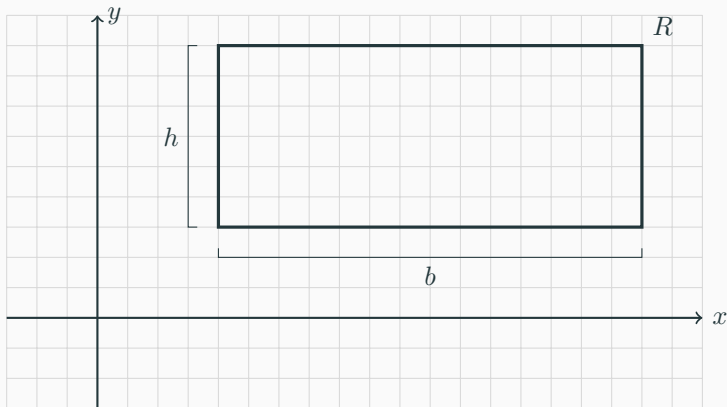
Sabemos que $A = 1$. Temos $I = 0$ e $B = 4$, de modo que

$$I + \frac{B}{2} - 1 = 0 + 2 - 1 = 1 = A$$

Logo o resultado é válido para quadrados unitários.

Demonstração da parte (2)

(2) Seja R um retângulo cujos lados são paralelos com os eixos x e y e medem b e h unidades, respectivamente.



Demonstração da parte (2)

Na borda do retângulo há $B = 2(b + 1) + 2(h + 1) - 4$ pontos com coordenadas inteiras, sendo que o termo -4 compensa o fato dos vértices estarem sendo contabilizados duas vezes no termo $2(b + 1) + 2(h + 1)$.

No interior do retângulo há $I = (b - 1)(h - 1)$ pontos com coordenadas inteiras.

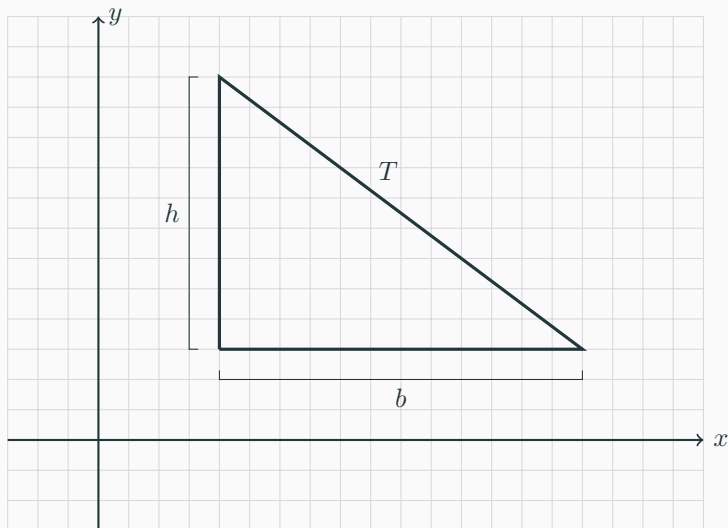
Sabendo que a área de um retângulo com base b e altura h é $A = bh$, segue que

$$\begin{aligned} I + \frac{B}{2} - 1 &= (b - 1)(h - 1) + \frac{2(b + 1) + 2(h + 1) - 4}{2} - 1 \\ &= (bh - b - h + 1) - (b + 1 + h + 1 - 2) - 1 \\ &= bh = A \end{aligned}$$

Portanto o resultado vale para um retângulo cujos lados estão alinhados com os eixos ordenados.

Demonstração da parte (3)

(3) Seja T um triângulo retângulo.



Demonstração da parte (3)

No base do triângulo há $b + 1$ pontos com coordenadas inteiras; já na altura são $h + 1$ pontos.

Seja $d = (b, h)$ o maior divisor comum entre b e h . A reta que passa pela hipotenusa tem inclinação $m = h'/b'$, onde $b = db'$, $h = dh'$. Isto significa que, para cada unidade no sentido x positivo, a altura y varia m unidades.

Assim, a equação da reta é dada por $y = m(x - x_0) + y_0$, onde x_0 e y_0 tem coordenadas inteiras. Assim, os valores de x serão inteiros quando $(x - x_0)$ assumir valores múltiplos de b' .

Como o segmento começa com $y = y_0$ e termina com $y = y_1$ inteiro, com $y_1 - y_0 = h$. Em y_0 temos $x = x_0$, ou seja, $(x - x_0) = 0 = 0 \cdot b'$. Em y_1 temos

$$y_1 = y_0 + h = m(x - x_0) + y_0 = \frac{h'}{b'}(x - x_0) + y_0$$

Demonstração da parte (3)

Assim,

$$\begin{aligned}\frac{h'}{b'}(x - x_0) &= h \\ (x - x_0) &= h \frac{b'}{h'} = b' \cdot d,\end{aligned}$$

de modo que y será inteiros em $d + 1$ múltiplos de b' , a saber: $0, 1, \dots, d$.

Levando em consideração que os vértices são contados duas vezes cada, o número de pontos B com coordenadas inteiras na borda de T é igual a

$$B = (b + 1) + (h + 1) + (d + 1) - 3 = b + h + d$$

O número de pontos com coordenadas inteiras I no interior de T é igual a metade do número de pontos no interior do retângulo com base b e altura h , exceto os pontos sobre a diagonal e que são interiores, isto é, $(d + 1) - 2 = d - 1$.

Demonstração da parte (3)

Logo,

$$I = \frac{(b-1)(h-1) - (d-1)}{2} = \frac{bd - b - h - d + 2}{2}$$

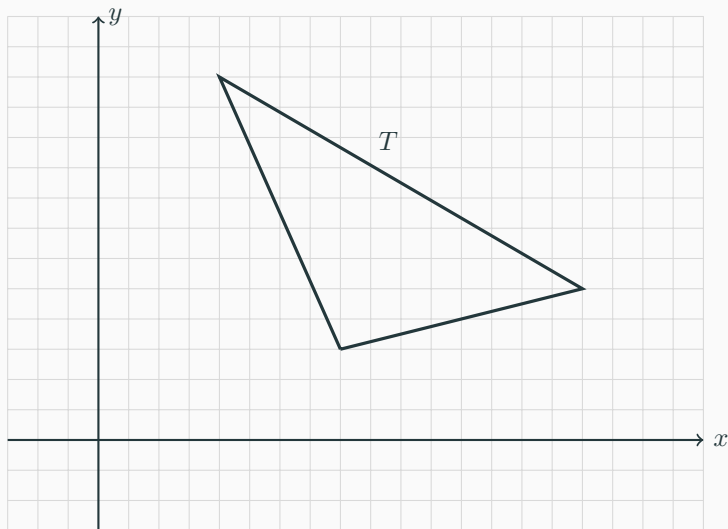
Sabendo que a área de um triângulo retângulo com base b e altura h é dada por $A = bh/2$, segue que

$$\begin{aligned} I + \frac{B}{2} - 1 &= \frac{bd - b - h - d + 2}{2} + \frac{b + d + h}{2} - 1 \\ &= \frac{bh}{2} + \frac{2}{2} - 1 = \frac{bh}{2} = A, \end{aligned}$$

portanto o resultado vale para T .

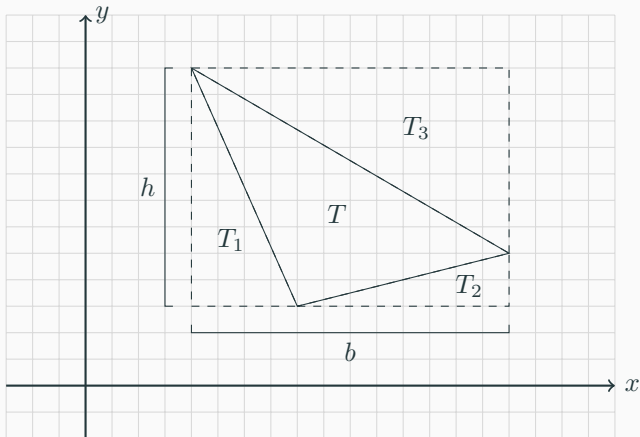
Demonstração da parte (4)

(4) Seja T um triângulo qualquer.



Demonstração da parte (4)

Seja $x_{\min}, y_{\min}, x_{\max}, y_{\max}$ os valores mínimos e máximos das coordenadas dos vértices. É possível construir um retângulo com base $b = x_{\max} - x_{\min}$ e altura $h = y_{\max} - y_{\min}$ através da união de T com três triângulos retângulos T_1, T_2 e T_3



Demonstração da parte (4)

O número de pontos com coordenadas inteiras no interior do retângulo R é igual a

$$I_R = I_{T_1} + I_{T_2} + I_{T_3} + I_T + (B_T - 3),$$

onde B_T é o número de pontos com coordenadas inteiras na borda de T

Por outro lado,

$$B_R = B_{T_1} + B_{T_2} + B_{T_3} - B_T$$

Como o resultado vale para retângulos e triângulos retângulos, e observando que

$$A_T = A_R - (A_{T_1} + A_{T_2} + A_{T_3}),$$

Demonstração da parte (4)

segue que

$$\begin{aligned}A_T &= \left(I_R - \frac{B_R}{2} - 1\right) - \left[(I_{T_1} + I_{T_2} + I_{T_3}) + \left(\frac{B_{T_1} + B_{T_2} + B_{T_3}}{2}\right) - 3\right] \\&= (I_R - I_{T_1} + I_{T_2} + I_{T_3}) + \left(\frac{B_R - B_{T_1} - B_{T_2} - B_{T_3}}{2}\right) + 2 \\&= (I_T + B_T - 3) - \left(\frac{B_T}{2}\right) + 2 \\&= I_T + \frac{B_T}{2} - 1,\end{aligned}$$

logo o teorema é verdadeiro para um triângulo T qualquer.

Demonstração da parte (5)

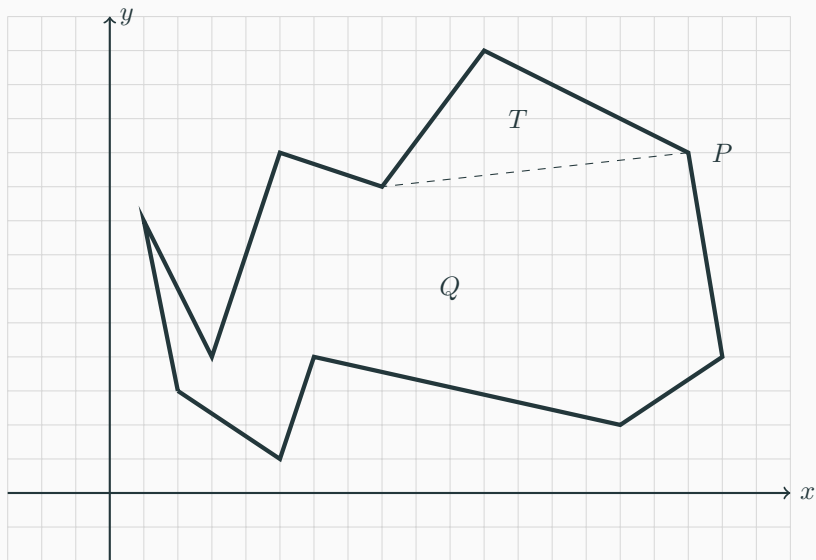
(5) A última parte é demonstrada por indução.

Seja P um polígono simples. O caso base ocorre para um triângulo, e o resultado é verdadeiro para qualquer triângulo T , conforme já demonstrado.

Suponha que o resultado seja verdadeiro para qualquer polígono simples como $m \geq 3$ lados. Seja P um polígono simples com $m + 1$ lados. Como P é simples, ele pode ser decomposto na forma $P = T \cup Q$, onde T é um triângulo e Q um polígono simples com m lados, ambos compartilhando uma aresta em comum. Considere que o número de pontos com coordenadas inteiras na aresta comum de T e Q seja igual a k .

Desde modo, $I_P = I_T + I_Q + k$ e $B_P = B_T + B_Q - 2k$. Veja a figura a seguir.

Demonstração da parte (5)



Demonstração da parte (5)

Assim,

$$\begin{aligned}A_P &= A_T + A_Q \\&= \left(I_T + \frac{B_T}{2} - 1\right) + \left(I_Q + \frac{B_Q}{2} - 1\right) \\&= (I_T + I_Q + k) + \left(\frac{B_T + B_Q}{2} - k\right) - 1 \\&= I_P + \left(\frac{B_T + B_Q - 2k}{2}\right) - 1 \\&= I_P + \left(\frac{B_P}{2}\right) - 1,\end{aligned}$$

Portanto o resultado é válido para qualquer polígono simples.



1. CP-Algorithms. [Lattice points inside non-lattice polygon](#), acesso em 06/07/2019.
2. CP-Algorithms. [Pick's Theorem](#), acesso em 06/07/2019.
3. Wikipedia. [Pick's Theorem](#), acesso em 06/07/2019.