

# Geometria Computacional

Retas: definição

---

Prof. Edson Alves

Faculdade UnB Gama

## Definição de reta

---

# Definição

- Reta também é um termo primitivo da Geometria

# Definição

- Reta também é um termo primitivo da Geometria
- No primeiro livro dos elementos, Euclides define reta como “*a line is breadthless length*”, que numa tradução livre diz que “linha é comprimento sem largura”

# Definição

- Reta também é um termo primitivo da Geometria
- No primeiro livro dos elementos, Euclides define reta como “*a line is breadthless length*”, que numa tradução livre diz que “linha é comprimento sem largura”
- As linhas são elementos unidimensionais

# Definição

- Reta também é um termo primitivo da Geometria
- No primeiro livro dos elementos, Euclides define reta como “*a line is breadthless length*”, que numa tradução livre diz que “linha é comprimento sem largura”
- As linhas são elementos unidimensionais
- As retas podem ser representados através ou de sua equação geral, ou de sua equação reduzida

# Definição

- Reta também é um termo primitivo da Geometria
- No primeiro livro dos elementos, Euclides define reta como “*a line is breadthless length*”, que numa tradução livre diz que “linha é comprimento sem largura”
- As linhas são elementos unidimensionais
- As retas podem ser representados através ou de sua equação geral, ou de sua equação reduzida
- A equação reduzida de uma reta é a mais conhecida e utilizada nos cursos de ensino médio

# Definição

- Reta também é um termo primitivo da Geometria
- No primeiro livro dos elementos, Euclides define reta como “*a line is breadthless length*”, que numa tradução livre diz que “linha é comprimento sem largura”
- As linhas são elementos unidimensionais
- As retas podem ser representados através ou de sua equação geral, ou de sua equação reduzida
- A equação reduzida de uma reta é a mais conhecida e utilizada nos cursos de ensino médio
  1. tem a vantagem de facilitar comparações entre retas e identificar paralelismo



# Definição

- Reta também é um termo primitivo da Geometria
- No primeiro livro dos elementos, Euclides define reta como “*a line is breadthless length*”, que numa tradução livre diz que “linha é comprimento sem largura”
- As linhas são elementos unidimensionais
- As retas podem ser representados através ou de sua equação geral, ou de sua equação reduzida
- A equação reduzida de uma reta é a mais conhecida e utilizada nos cursos de ensino médio
  1. tem a vantagem de facilitar comparações entre retas e identificar paralelismo
  2. não é capaz de representar retas verticais

# Definição

- Reta também é um termo primitivo da Geometria
- No primeiro livro dos elementos, Euclides define reta como “*a line is breadthless length*”, que numa tradução livre diz que “linha é comprimento sem largura”
- As linhas são elementos unidimensionais
- As retas podem ser representados através ou de sua equação geral, ou de sua equação reduzida
- A equação reduzida de uma reta é a mais conhecida e utilizada nos cursos de ensino médio
  1. tem a vantagem de facilitar comparações entre retas e identificar paralelismo
  2. não é capaz de representar retas verticais
- A equação geral, como o próprio nome diz, pode representar qualquer reta do plano

# Equação reduzida da reta

- A equação reduzida da reta é dada por

$$y = mx + b,$$

onde  $m$  é o coeficiente angular da reta e  $b$  é o coeficiente linear da reta

# Equação reduzida da reta

- A equação reduzida da reta é dada por

$$y = mx + b,$$

onde  $m$  é o coeficiente angular da reta e  $b$  é o coeficiente linear da reta

- O primeiro coeficiente representa a taxa de variação da reta: o quanto  $y$  varia para cada unidade de variação de  $x$  no sentido positivo do eixo horizontal

# Equação reduzida da reta

- A equação reduzida da reta é dada por

$$y = mx + b,$$

onde  $m$  é o coeficiente angular da reta e  $b$  é o coeficiente linear da reta

- O primeiro coeficiente representa a taxa de variação da reta: o quanto  $y$  varia para cada unidade de variação de  $x$  no sentido positivo do eixo horizontal
- O coeficiente linear  $b$  é o valor no qual a reta intercepta o eixo  $y$

# Equação reduzida da reta

- A equação reduzida da reta é dada por

$$y = mx + b,$$

onde  $m$  é o coeficiente angular da reta e  $b$  é o coeficiente linear da reta

- O primeiro coeficiente representa a taxa de variação da reta: o quanto  $y$  varia para cada unidade de variação de  $x$  no sentido positivo do eixo horizontal
- O coeficiente linear  $b$  é o valor no qual a reta intercepta o eixo  $y$

```
1 template<typename T>
2 struct Line {
3     T m, b;
4 };
```

## Equação reduzida a partir de dois pontos dados

- Dados dois pontos  $P = (x_p, y_p)$  e  $Q = (x_q, y_q)$  tais que  $x_p \neq x_q$ , a inclinação da reta é dada por

$$m = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p}$$

## Equação reduzida a partir de dois pontos dados

- Dados dois pontos  $P = (x_p, y_p)$  e  $Q = (x_q, y_q)$  tais que  $x_p \neq x_q$ , a inclinação da reta é dada por

$$m = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p}$$

- Deste modo, a equação reduzida da reta será dada por

$$y = m(x - x_p) + y_p = mx + (y_p - mx_p)$$



## Equação reduzida a partir de dois pontos dados

- Dados dois pontos  $P = (x_p, y_p)$  e  $Q = (x_q, y_q)$  tais que  $x_p \neq x_q$ , a inclinação da reta é dada por

$$m = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p}$$

- Deste modo, a equação reduzida da reta será dada por

$$y = m(x - x_p) + y_p = mx + (y_p - mx_p)$$

- Se  $x_p = x_q$ , a reta é vertical

## Equação reduzida a partir de dois pontos dados

- Dados dois pontos  $P = (x_p, y_p)$  e  $Q = (x_q, y_q)$  tais que  $x_p \neq x_q$ , a inclinação da reta é dada por

$$m = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p}$$

- Deste modo, a equação reduzida da reta será dada por

$$y = m(x - x_p) + y_p = mx + (y_p - mx_p)$$

- Se  $x_p = x_q$ , a reta é vertical
- Retas verticais podem ser identificadas por meio de uma variável booleana que indica se a reta é vertical ou não

## Equação reduzida a partir de dois pontos dados

- Dados dois pontos  $P = (x_p, y_p)$  e  $Q = (x_q, y_q)$  tais que  $x_p \neq x_q$ , a inclinação da reta é dada por

$$m = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p}$$

- Deste modo, a equação reduzida da reta será dada por

$$y = m(x - x_p) + y_p = mx + (y_p - mx_p)$$

- Se  $x_p = x_q$ , a reta é vertical
- Retas verticais podem ser identificadas por meio de uma variável booleana que indica se a reta é vertical ou não
- Neste caso, o coeficiente  $b$  indicará o ponto onde a reta intercepta o eixo horizontal

# Implementação da reta através da equação reduzida

```
1 template<typename T>
2 struct Line {
3     bool vertical;
4     T m, b;
5
6     Line(const Point<T>& P, const Point<T>& Q) : vertical(false)
7     {
8         if (equals(P.x, Q.x))
9         {
10             vertical = true;
11             b = P.x;
12         } else
13         {
14             m = (Q.y - P.y)/(Q.x - P.x)
15             b = P.y - m * P.x
16         }
17     }
18 };
```

# Equação geral da reta

- A equação geral da reta é dada por

$$ax + by + c = 0$$

# Equação geral da reta

- A equação geral da reta é dada por

$$ax + by + c = 0$$

- Como dito, a equação geral pode representar retas verticais ( $b = 0$ )

# Equação geral da reta

- A equação geral da reta é dada por

$$ax + by + c = 0$$

- Como dito, a equação geral pode representar retas verticais ( $b = 0$ )
- Nos demais casos, é possível obter a equação reduzida a partir da equação geral

# Equação geral da reta

- A equação geral da reta é dada por

$$ax + by + c = 0$$

- Como dito, a equação geral pode representar retas verticais ( $b = 0$ )
- Nos demais casos, é possível obter a equação reduzida a partir da equação geral

```
1 template<typename T>
2 struct Line {
3     T a, b, c;
4 };
```



## Equação geral da reta a partir de dois pontos

- Dados dois pontos distintos  $P = (x_p, y_p)$  e  $Q = (x_q, y_q)$ , é possível obter os coeficientes da equação geral da seguinte maneira:

## Equação geral da reta a partir de dois pontos

- Dados dois pontos distintos  $P = (x_p, y_p)$  e  $Q = (x_q, y_q)$ , é possível obter os coeficientes da equação geral da seguinte maneira:
  1. Substitua as coordenadas de um dos dois pontos na equação geral

## Equação geral da reta a partir de dois pontos

- Dados dois pontos distintos  $P = (x_p, y_p)$  e  $Q = (x_q, y_q)$ , é possível obter os coeficientes da equação geral da seguinte maneira:
  1. Substitua as coordenadas de um dos dois pontos na equação geral
  2. Encontrado o valor de  $c$ , substitua as coordenadas de ambos pontos na equação geral, obtendo um sistema linear

## Equação geral da reta a partir de dois pontos

- Dados dois pontos distintos  $P = (x_p, y_p)$  e  $Q = (x_q, y_q)$ , é possível obter os coeficientes da equação geral da seguinte maneira:
  1. Substitua as coordenadas de um dos dois pontos na equação geral
  2. Encontrado o valor de  $c$ , substitua as coordenadas de ambos pontos na equação geral, obtendo um sistema linear
  3. Os valores de  $a$  e  $b$  são a solução deste sistema linear

## Equação geral da reta a partir de dois pontos

- Dados dois pontos distintos  $P = (x_p, y_p)$  e  $Q = (x_q, y_q)$ , é possível obter os coeficientes da equação geral da seguinte maneira:
  1. Substitua as coordenadas de um dos dois pontos na equação geral
  2. Encontrado o valor de  $c$ , substitua as coordenadas de ambos pontos na equação geral, obtendo um sistema linear
  3. Os valores de  $a$  e  $b$  são a solução deste sistema linear
- Este processo pode ser simplificado através do uso de Álgebra Linear: se três pontos  $P = (x_p, y_p)$ ,  $Q = (x_q, y_q)$  e  $R = (x, y)$  são colineares (isto é, pertencem a uma mesma reta), então

$$\det \begin{bmatrix} x_p & y_p & 1 \\ x_q & y_q & 1 \\ x & y & 1 \end{bmatrix} = 0$$

## Equação geral da reta a partir de dois pontos

- Dados dois pontos distintos  $P = (x_p, y_p)$  e  $Q = (x_q, y_q)$ , é possível obter os coeficientes da equação geral da seguinte maneira:
  1. Substitua as coordenadas de um dos dois pontos na equação geral
  2. Encontrado o valor de  $c$ , substitua as coordenadas de ambos pontos na equação geral, obtendo um sistema linear
  3. Os valores de  $a$  e  $b$  são a solução deste sistema linear
- Este processo pode ser simplificado através do uso de Álgebra Linear: se três pontos  $P = (x_p, y_p)$ ,  $Q = (x_q, y_q)$  e  $R = (x, y)$  são colineares (isto é, pertencem a uma mesma reta), então

$$\det \begin{bmatrix} x_p & y_p & 1 \\ x_q & y_q & 1 \\ x & y & 1 \end{bmatrix} = 0$$

- A solução da equação acima é

$$a = y_p - y_q, b = x_q - x_p, c = x_p y_q - x_q y_p$$

# Implementação da reta através da equação geral

```
1 template<typename T>
2 struct Line {
3     T a, b, c;
4
5     Line(const Point<T>& P, const Point<T>& Q)
6         : a(P.y - Q.y), b (Q.x - P.x), c(P.x * Q.y - Q.x * P.y)
7     {
8     }
9 };
```

## Observações sobre a equação geral da reta

- Um mesma reta pode ter infinitas equações gerais associadas: basta multiplicar toda a equação por um número real diferente de zero



## Observações sobre a equação geral da reta

- Um mesma reta pode ter infinitas equações gerais associadas: basta multiplicar toda a equação por um número real diferente de zero
- Para normalizar a representação, associando uma única equação a cada reta, é necessário dividir toda a equação pelo coeficiente  $a$  (ou por  $b$ , caso  $a$  seja igual a zero)

## Observações sobre a equação geral da reta

- Um mesma reta pode ter infinitas equações gerais associadas: basta multiplicar toda a equação por um número real diferente de zero
- Para normalizar a representação, associando uma única equação a cada reta, é necessário dividir toda a equação pelo coeficiente  $a$  (ou por  $b$ , caso  $a$  seja igual a zero)
- Esta estratégia permite a simplificação de algoritmos de comparação entre retas

## Observações sobre a equação geral da reta

- Um mesma reta pode ter infinitas equações gerais associadas: basta multiplicar toda a equação por um número real diferente de zero
- Para normalizar a representação, associando uma única equação a cada reta, é necessário dividir toda a equação pelo coeficiente  $a$  (ou por  $b$ , caso  $a$  seja igual a zero)
- Esta estratégia permite a simplificação de algoritmos de comparação entre retas
- Por outro lado, não uniformizar a representação permite manter os coeficientes inteiros, caso as coordenadas dos pontos sejam inteiras

## Observações sobre a equação geral da reta

- Um mesma reta pode ter infinitas equações gerais associadas: basta multiplicar toda a equação por um número real diferente de zero
- Para normalizar a representação, associando uma única equação a cada reta, é necessário dividir toda a equação pelo coeficiente  $a$  (ou por  $b$ , caso  $a$  seja igual a zero)
- Esta estratégia permite a simplificação de algoritmos de comparação entre retas
- Por outro lado, não uniformizar a representação permite manter os coeficientes inteiros, caso as coordenadas dos pontos sejam inteiras
- Importante notar que, em ambas representações, pode acontecer da reta resultante ser degenerada

## Observações sobre a equação geral da reta

- Um mesma reta pode ter infinitas equações gerais associadas: basta multiplicar toda a equação por um número real diferente de zero
- Para normalizar a representação, associando uma única equação a cada reta, é necessário dividir toda a equação pelo coeficiente  $a$  (ou por  $b$ , caso  $a$  seja igual a zero)
- Esta estratégia permite a simplificação de algoritmos de comparação entre retas
- Por outro lado, não uniformizar a representação permite manter os coeficientes inteiros, caso as coordenadas dos pontos sejam inteiras
- Importante notar que, em ambas representações, pode acontecer da reta resultante ser degenerada
- Isto ocorre quando os pontos  $P$  e  $Q$  são idênticos: neste caso, a reta se reduz a um único ponto

## Observações sobre a equação geral da reta

- Um mesma reta pode ter infinitas equações gerais associadas: basta multiplicar toda a equação por um número real diferente de zero
- Para normalizar a representação, associando uma única equação a cada reta, é necessário dividir toda a equação pelo coeficiente  $a$  (ou por  $b$ , caso  $a$  seja igual a zero)
- Esta estratégia permite a simplificação de algoritmos de comparação entre retas
- Por outro lado, não uniformizar a representação permite manter os coeficientes inteiros, caso as coordenadas dos pontos sejam inteiras
- Importante notar que, em ambas representações, pode acontecer da reta resultante ser degenerada
- Isto ocorre quando os pontos  $P$  e  $Q$  são idênticos: neste caso, a reta se reduz a um único ponto
- O tratamento deste caso especial nos demais algoritmos aumenta o tamanho e a sofisticação dos códigos

## Observações sobre a equação geral da reta

- Um mesma reta pode ter infinitas equações gerais associadas: basta multiplicar toda a equação por um número real diferente de zero
- Para normalizar a representação, associando uma única equação a cada reta, é necessário dividir toda a equação pelo coeficiente  $a$  (ou por  $b$ , caso  $a$  seja igual a zero)
- Esta estratégia permite a simplificação de algoritmos de comparação entre retas
- Por outro lado, não uniformizar a representação permite manter os coeficientes inteiros, caso as coordenadas dos pontos sejam inteiras
- Importante notar que, em ambas representações, pode acontecer da reta resultante ser degenerada
- Isto ocorre quando os pontos  $P$  e  $Q$  são idênticos: neste caso, a reta se reduz a um único ponto
- O tratamento deste caso especial nos demais algoritmos aumenta o tamanho e a sofisticação dos códigos
- Porém o não tratamento de casos especiais pode levar ao WA

## Relação entre ponto e reta

- Seja  $r$  uma reta com equação geral  $ax + by + c = 0$  e  $P = (x_p, y_p)$  um ponto qualquer



## Relação entre ponto e reta

- Seja  $r$  uma reta com equação geral  $ax + by + c = 0$  e  $P = (x_p, y_p)$  um ponto qualquer
- $P \in r$  se, e somente se,  $ax_p + by_p + c = 0$

## Relação entre ponto e reta

- Seja  $r$  uma reta com equação geral  $ax + by + c = 0$  e  $P = (x_p, y_p)$  um ponto qualquer
- $P \in r$  se, e somente se,  $ax_p + by_p + c = 0$
- Esta relação pode ser verificada diretamente a partir da equação geral da reta, ou através do determinante apresentado anteriormente, conhecidos dois pontos  $Q$  e  $R$  da reta

## Relação entre ponto e reta

- Seja  $r$  uma reta com equação geral  $ax + by + c = 0$  e  $P = (x_p, y_p)$  um ponto qualquer
- $P \in r$  se, e somente se,  $ax_p + by_p + c = 0$
- Esta relação pode ser verificada diretamente a partir da equação geral da reta, ou através do determinante apresentado anteriormente, conhecidos dois pontos  $Q$  e  $R$  da reta

```
1 template<typename T>
2 struct Line {
3     // Membros e construtor
4
5     bool contains(const Point<T>& P) const
6     {
7         return equals(a*P.x + b*P.y + c, 0);
8     }
9 };
```

## Segmentos de reta

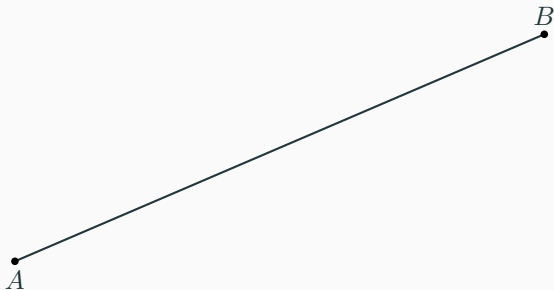
- Sejam  $A$  e  $B$  dois pontos pertencentes à reta  $r$ . O segmento de reta  $AB$  é o conjunto de pontos de  $r$  que estão entre os pontos  $A$  e  $B$

## Segmentos de reta

- Sejam  $A$  e  $B$  dois pontos pertencentes à reta  $r$ . O segmento de reta  $AB$  é o conjunto de pontos de  $r$  que estão entre os pontos  $A$  e  $B$
- O comprimento de um segmento de reta é a distância entre os pontos  $A$  e  $B$

## Segmentos de reta

- Sejam  $A$  e  $B$  dois pontos pertencentes à reta  $r$ . O segmento de reta  $AB$  é o conjunto de pontos de  $r$  que estão entre os pontos  $A$  e  $B$
- O comprimento de um segmento de reta é a distância entre os pontos  $A$  e  $B$



## Distância entre dois pontos

- A definição de distância depende da norma utilizada

## Distância entre dois pontos

- A definição de distância depende da norma utilizada
- A distância euclidiana entre dois pontos  $A = (x_a, y_a)$  e  $B = (x_b, y_b)$  é dada por

$$d(A, B) = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}$$



# Distância entre dois pontos

- A definição de distância depende da norma utilizada
- A distância euclidiana entre dois pontos  $A = (x_a, y_a)$  e  $B = (x_b, y_b)$  é dada por

$$d(A, B) = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}$$

- A distância do motorista de táxi é dada por

$$d(A, B) = |x_a - x_b| + |y_a - y_b|$$

## Distância entre dois pontos

- A definição de distância depende da norma utilizada
- A distância euclidiana entre dois pontos  $A = (x_a, y_a)$  e  $B = (x_b, y_b)$  é dada por

$$d(A, B) = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}$$

- A distância do motorista de táxi é dada por

$$d(A, B) = |x_a - x_b| + |y_a - y_b|$$

- Segundo a norma do máximo, a distância entre  $A$  e  $B$  é dada por

$$d(A, B) = \max\{|x_a - x_b|, |y_a - y_b|\}$$

## Observações sobre distância entre dois pontos

- Embora a distância euclidiana seja a mais comum, a raiz quadrada que aparece na sua definição leva a resultados em ponto flutuante

## Observações sobre distância entre dois pontos

- Embora a distância euclidiana seja a mais comum, a raiz quadrada que aparece na sua definição leva a resultados em ponto flutuante
- Por este motivo, em geral é implementada a função que computa o quadrado da distância, o que elimina a raiz quadrada e permite a aritmética com números inteiros

## Observações sobre distância entre dois pontos

- Embora a distância euclidiana seja a mais comum, a raiz quadrada que aparece na sua definição leva a resultados em ponto flutuante
- Por este motivo, em geral é implementada a função que computa o quadrado da distância, o que elimina a raiz quadrada e permite a aritmética com números inteiros
- O quadrado da distância pode ser usado para comparar os pontos por distância, pois ela preserva esta relação

## Observações sobre distância entre dois pontos

- Embora a distância euclidiana seja a mais comum, a raiz quadrada que aparece na sua definição leva a resultados em ponto flutuante
- Por este motivo, em geral é implementada a função que computa o quadrado da distância, o que elimina a raiz quadrada e permite a aritmética com números inteiros
- O quadrado da distância pode ser usado para comparar os pontos por distância, pois ela preserva esta relação
- A distância do motorista de táxi considera que os movimentos no plano só podem ser feitos na horizontal e vertical

## Observações sobre distância entre dois pontos

- Embora a distância euclidiana seja a mais comum, a raiz quadrada que aparece na sua definição leva a resultados em ponto flutuante
- Por este motivo, em geral é implementada a função que computa o quadrado da distância, o que elimina a raiz quadrada e permite a aritmética com números inteiros
- O quadrado da distância pode ser usado para comparar os pontos por distância, pois ela preserva esta relação
- A distância do motorista de táxi considera que os movimentos no plano só podem ser feitos na horizontal e vertical
- Um exemplo prático da norma do máximo acontece no tabuleiro do xadrez: ela define o raio de ação do rei (todas as casas que estão a uma unidade de distância dele)

## Exemplo de implementação das distâncias

```
1 #include <bits/stdc++.h>
2
3 template<typename T>
4 struct Point {
5     T x = 0, y = 0;
6 };
7
8 template<typename T>
9 T absolute_value(T x)
10 {
11     if constexpr (std::is_floating_point_v<T>)
12         return fabs(x);
13     else
14         return llabs(static_cast<long long>(x));
15 }
16
```



## Exemplo de implementação das distâncias

```
17 template<typename T>
18 double dist(const Point<T>& P, const Point<T>& Q) {
19     return hypot(static_cast<double>(P.x - Q.x), static_cast<double>(P.y - Q.y));
20 }
21
22 template<typename T>
23 T dist2(const Point<T>& P, const Point<T>& Q) {
24     return (P.x - Q.x)*(P.x - Q.x) + (P.y - Q.y)*(P.y - Q.y);
25 }
26
27 template<typename T>
28 T taxicab(const Point<T>& P, const Point<T>& Q) {
29     return absolute_value(P.x - Q.x) + absolute_value(P.y - Q.y);
30 }
31
32 template<typename T>
33 T max_norm(const Point<T>& P, const Point<T>& Q) {
34     return std::max(absolute_value(P.x - Q.x), absolute_value(P.y - Q.y));
35 }
```

## Exemplo de implementação das distâncias

```
37 int main()
38 {
39     Point<int> P, Q { 2, 3 };
40
41     std::cout << "Euclidiana: " << dist(P, Q) << '\n';
42     std::cout << "Quadrado: " << dist2(P, Q) << '\n';
43     std::cout << "Motorista de táxi: " << taxicab(P, Q) << '\n';
44     std::cout << "Norma do máximo: " << max_norm(P, Q) << '\n';
45
46     return 0;
47 }
```

1. **HALIM**, Felix; **HALIM**, Steve. *Competitive Programming 3*, 2010.
2. **LAAKSONEN**, Antti. *Competitive Programmer's Handbook*, 2018.
3. **De BERG**, Mark; **CHEONG**, Otfried. *Computational Geometry: Algorithms and Applications*, 2008.
4. David E. Joyce. *Euclid's Elements*. Acesso em 15/02/2019<sup>1</sup>
5. Wikipédia. *Geometria Euclidiana*. Acesso em 15/02/2019<sup>2</sup>.

---

<sup>1</sup><https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/elements/book1/def12.html>

<sup>2</sup>[https://pt.wikipedia.org/wiki/Geometria\\_euclidiana](https://pt.wikipedia.org/wiki/Geometria_euclidiana)