Árvores

Heaps binárias

Prof. Edson Alves - UnB/FGA

2019

Sumário

1. Definição

2. Inserção

3. Identificação e extração do elemento máximo

4. Construção de uma heap binária em $O(N)$

Definição

Definição de heap binária

- A *heap* binária é uma estrutura de dados que mantém um conjunto de elementos, ordenados por meio de uma chave, que permite a identificação rápida do menor dentro todos estes elementos
- Uma variante comum da *heap* binária é a troca da identificação do menor elemento para a identificação do maior dentre seus elementos
- As duas operações principais de uma *heap* binária é a inserção de novos elementos ou a identificação (e extração) do menor elemento
- Outra operação importante é a construção de uma *heap* a partir de uma sequência de elementos dados

Propriedade fundamental de uma heap binária

- Uma *heap* binária pode ser implementada a partir de uma árvore binária ou de um vetor
- A primeira alternativa tem como vantagem a visualização mais natural da propriedade fundamental das *heaps*
- A segunda permite uma implementação eficiente em termos de memória

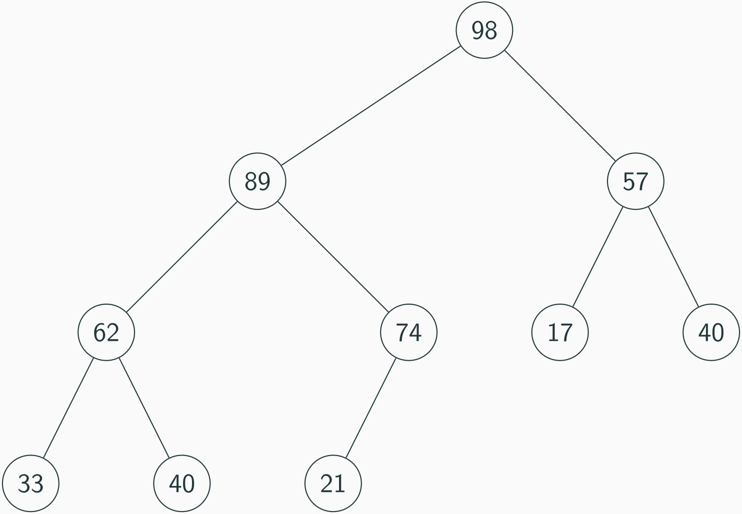
Propriedade fundamental da heap binária

Para qualquer elemento x contido na *heap*, a chave de x é maior ou igual as chaves de todos os seus descendentes.

Heaps como árvores

- A visualização de uma *heap* como uma árvore binária permite a identificação de propriedades consequentes da propriedade fundamental
- Primeiramente, a raiz da árvore será o menor dentre todos os elementos
- Em segundo lugar, a representação da *heap* não é única
- Além disso, a travessia de uma folha até a raiz leva a um caminho cujas chaves estão em ordem decrescente
- Esta propriedade é fundamental para a implementação das operações de inserção e remoção de elementos de um elemento

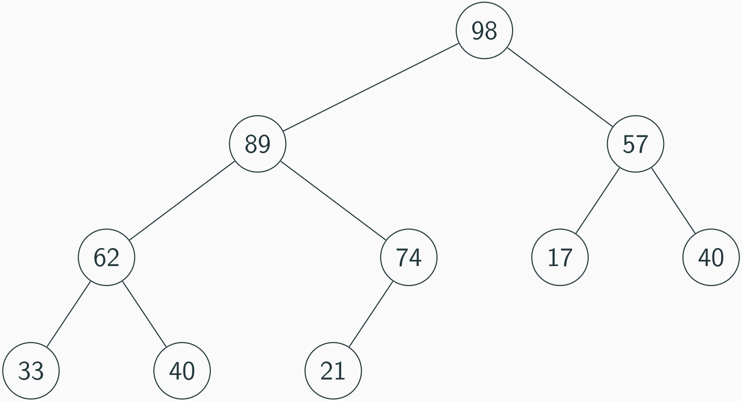
Exemplo de max heap binária



Heaps binárias como vetores

- Uma *heap* binária pode ser armazenada como uma árvore cheia
- Esta propriedade permite o armazenamento de seus elementos em um vetor
- Se a raiz for armazenada no índice 1 (e não no zero), as relações de parentesco ficam simplificadas, através de operações binárias simples
- O pai de um elemento x que ocupa o índice i está no índice $p = \lfloor i/2 \rfloor$
- O filho à esquerda de x tem índice $l = 2i$
- O filho à direita de x tem índice $r = 2i + 1$
- Mesmo que o índice zero fique inutilizado, a economia de memória em relação à representação com árvore é notável: com os parentes podem ser localizado em $O(1)$, não é necessário armazenar ponteiros
- Observe a relação entre a representação como vetor e uma travessia por largura da árvore binária

Exemplo de heap binária como árvore e como vetor



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
98	89	57	62	74	17	40	33	40	21

Exemplo de implementação de uma heap usando vector

```
#include <vector>
#include <iostream>
#include <stdexcept>

template<typename T>
class Heap {
private:
    std::vector<T> xs;
    size_t N;

    size_t parent(int i) { return i/2; }
    size_t left(int i) { return 2*i; }
    size_t right(int i) { return 2*i + 1; }

public:
    Heap() : xs(1), N(0) {}

    size_t size() const { return N; }

```

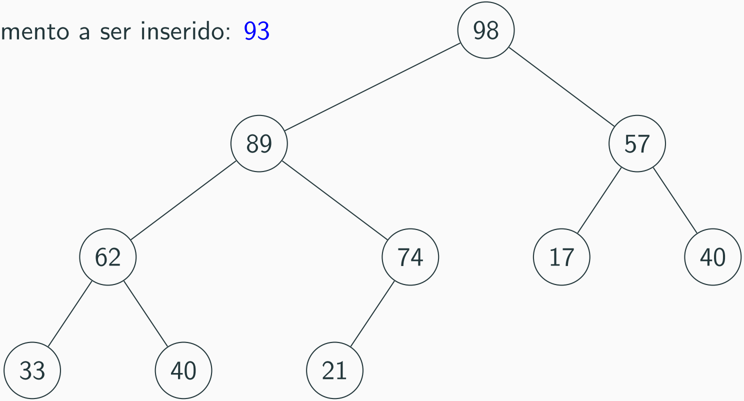
Inserção

Inserção em $O(\log N)$

- A inserção de um elemento em um *heap* binária pode ser feita em $O(\log N)$, onde N é o número de elementos armazenados na *heap*
- A inserção deve preservar a árvore cheia e a propriedade fundamental
- Manter a árvore cheia é simples: basta inserir o elemento na primeira posição desocupada do vetor, isto é, na posição do filho nulo mais à esquerda do último nível
- Isto pode violar a propriedade fundamental
- Para restaurar a propriedade da *heap*, basta trocar as informações do novo nó com o seu pai
- Esta troca pode levar a uma nova violação, entre o pai e o avô
- A violação sobe um nível por vez, de modo que são necessárias, no máximo, $O(\log N)$ correções

Exemplo de inserção em uma heap binária

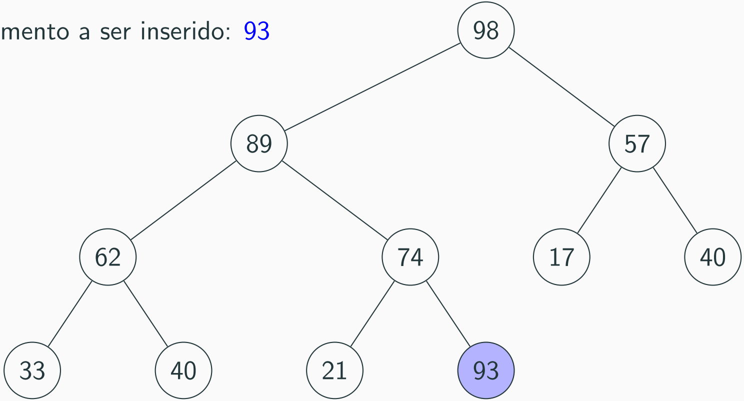
Elemento a ser inserido: 93



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
98	89	57	62	74	17	40	33	40	21	

Exemplo de inserção em uma heap binária

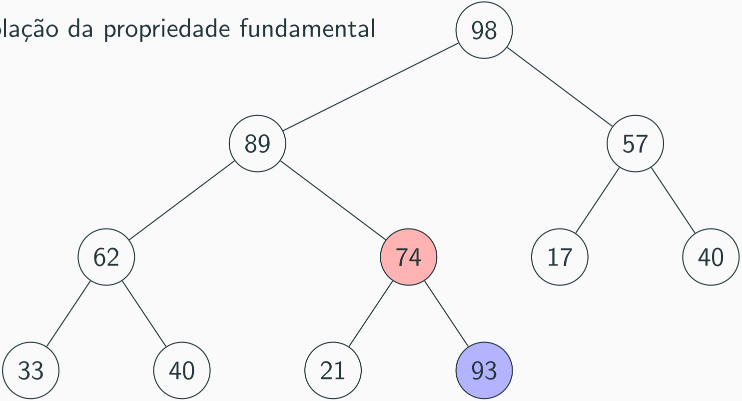
Elemento a ser inserido: 93



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
98	89	57	62	74	17	40	33	40	21	93

Exemplo de inserção em uma heap binária

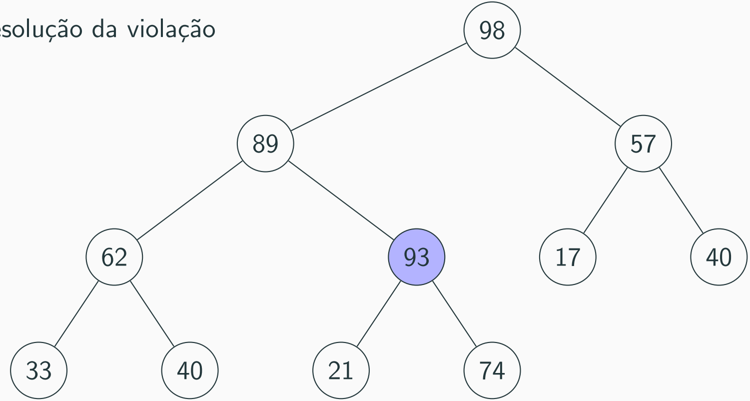
Violação da propriedade fundamental



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
98	89	57	62	74	17	40	33	40	21	93

Exemplo de inserção em uma heap binária

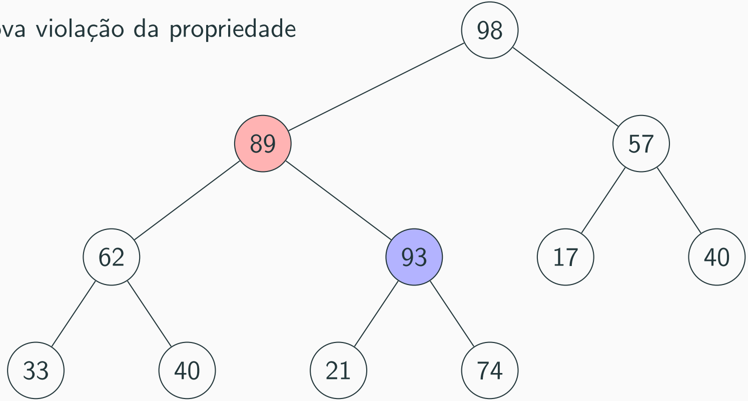
Resolução da violação



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
98	89	57	62	93	17	40	33	40	21	74

Exemplo de inserção em uma heap binária

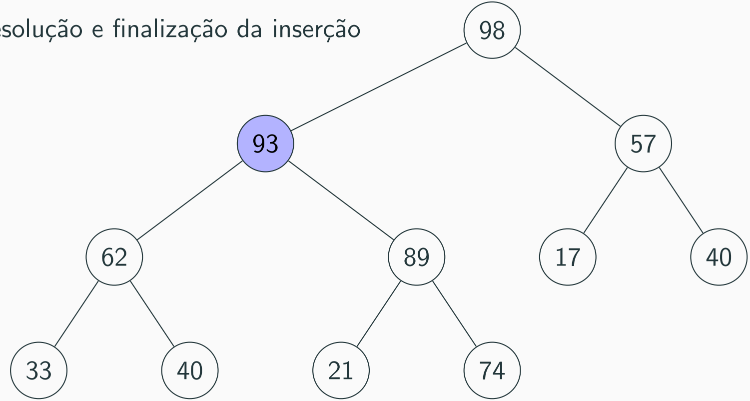
Nova violação da propriedade



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
98	89	57	62	93	17	40	33	40	21	74

Exemplo de inserção em uma heap binária

Resolução e finalização da inserção



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
98	93	57	62	89	17	40	33	40	21	74

Implementação da inserção em heap binária

```cpp
    void insert(int x)
    {
        if (N + 1 == xs.size())
            xs.push_back(x);
        else
            xs[N + 1] = x;

        int i = N + 1, p = parent(i);

        while (p and xs[p] < xs[i])
        {
            std::swap(xs[p], xs[i]);
            i = p;
            p = parent(i);
        }

        ++N;
    }
```

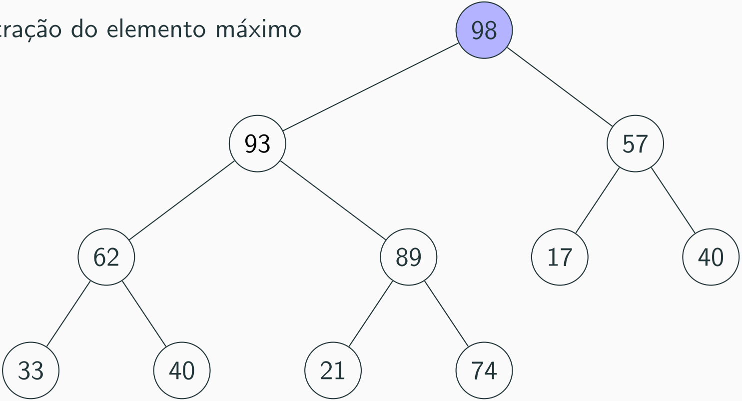
Identificação e extração do elemento máximo

Identificação e extração do elemento máximo

- O elemento máximo de um *heap* está localizado na raiz da árvore
- Portanto a identificação deste elemento pode ser feita em $O(1)$
- A extração deste elemento é o processo reverso da inserção
- A raiz deve ser substituída pela folha mais à direita do último nível
- Esta substituição pode gerar uma violação da propriedade fundamentação do nó em relação aos seus filhos
- As possíveis violações devem ser resolvidas da raiz para as folhas
- Se a violação ocorrem com ambos filhos, deve-se escolher o que possui a maior informação para prosseguir com as trocas
- Esta extração tem complexidade $O(\log N)$

Exemplo de extração em uma heap binária

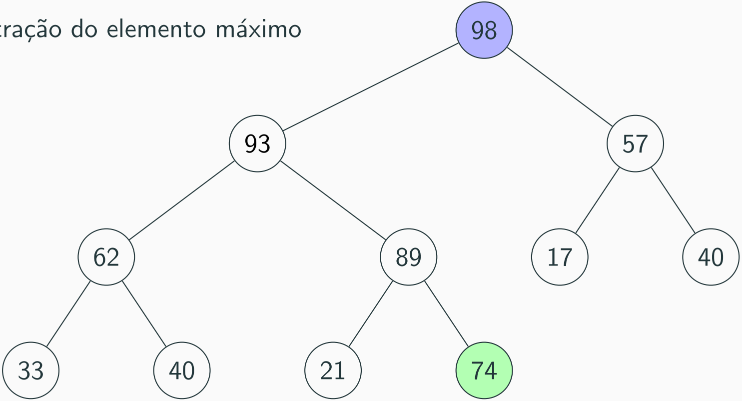
Extração do elemento máximo



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
98	93	57	62	89	17	40	33	40	21	74

Exemplo de extração em uma heap binária

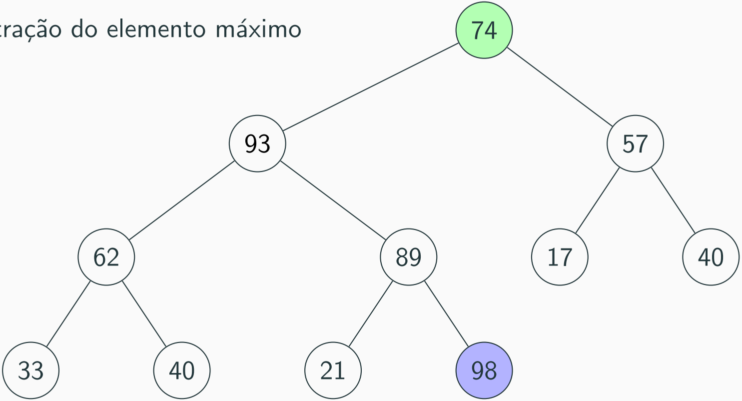
Extração do elemento máximo



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
98	93	57	62	89	17	40	33	40	21	74

Exemplo de extração em uma heap binária

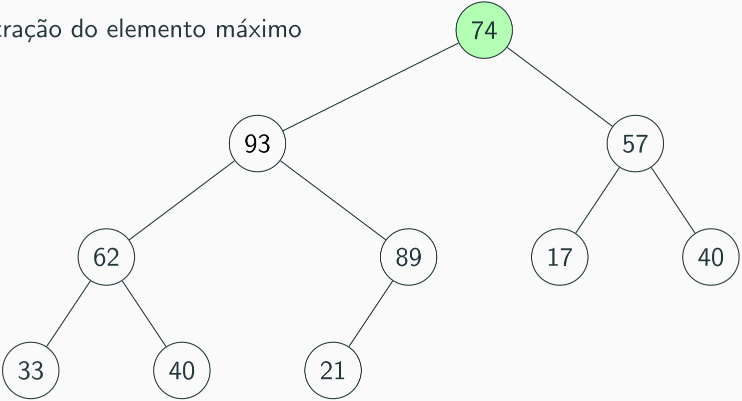
Extração do elemento máximo



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
74	93	57	62	89	17	40	33	40	21	98

Exemplo de extração em uma heap binária

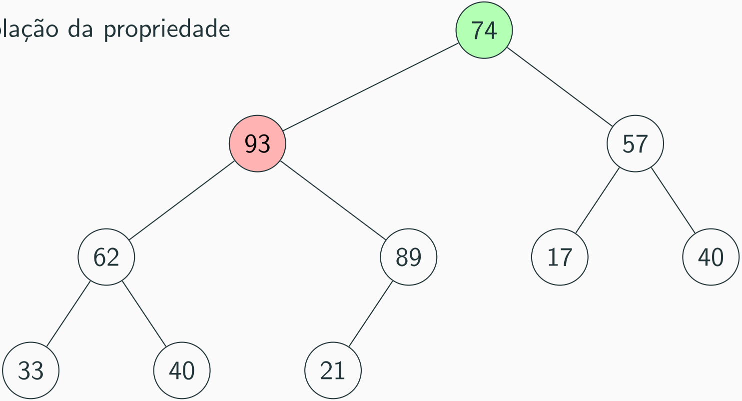
Extração do elemento máximo



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
74	93	57	62	89	17	40	33	40	21	

Exemplo de extração em uma heap binária

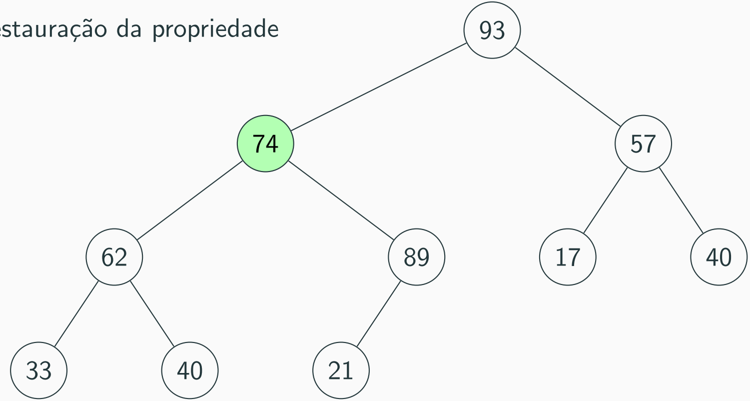
Violação da propriedade



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
74	93	57	62	89	17	40	33	40	21	

Exemplo de extração em uma heap binária

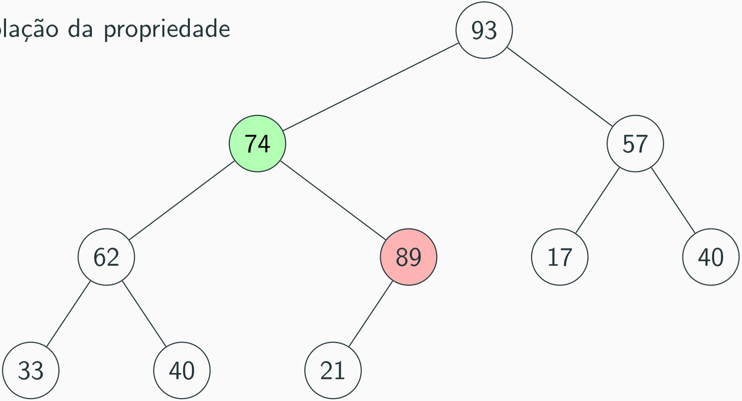
Restauração da propriedade



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
93	74	57	62	89	17	40	33	40	21	

Exemplo de extração em uma heap binária

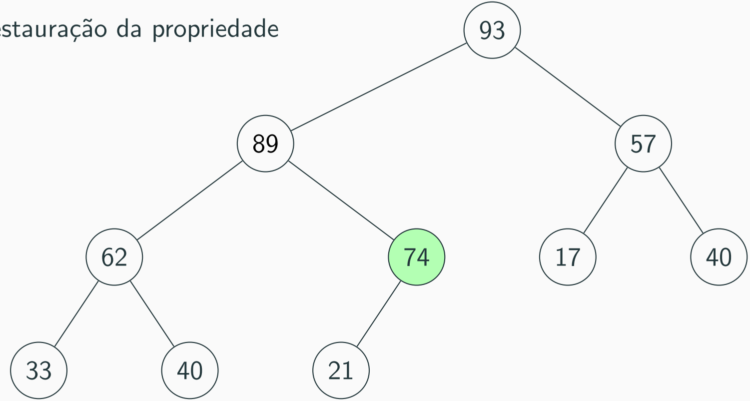
Violação da propriedade



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
93	74	57	62	89	17	40	33	40	21	

Exemplo de extração em uma heap binária

Restauração da propriedade



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
93	89	57	62	74	17	40	33	40	21	

Implementação da extração em heap binária

```
    bool empty() const { return N == 0; }

    T max() const
    {
        if (empty())
            throw std::out_of_range("Empty heap");

        return xs[1];
    }

    T extract_max()
    {
        if (empty())
            throw std::out_of_range("Empty heap");

        auto x = xs[1];
        std::swap(xs[1], xs[N]);
        --N;

        int i = 1, n = left(i) > N ? 0 : left(i);

```

Implementação da extração em heap binária

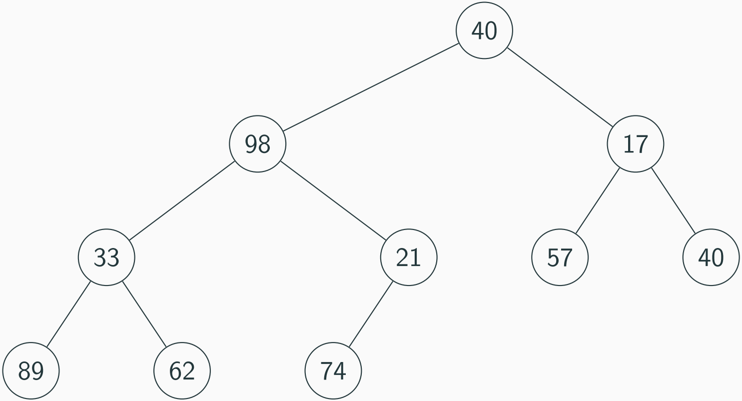
```
    while (n)
    {
        auto r = right(i) > N ? 0 : right(i);

        if (r and xs[r] > xs[n])
            n = r;

        if (xs[i] < xs[n])
        {
            std::swap(xs[i], xs[n]);
            i = n;
            n = left(i) > N ? 0 : left(i);
        } else
            n = 0;
    }

    return x;
}
```

Construção de uma heap binária em $O(N)$

Heapify

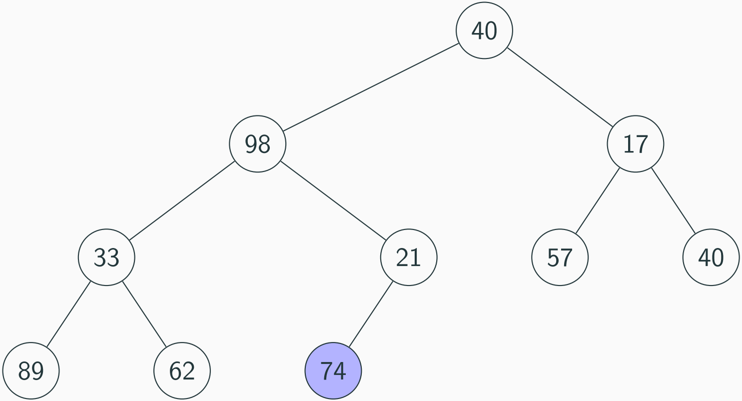
- Dado um vetor de elementos `xs`, uma *heap* binária pode ser construída em $O(N \log N)$ através de N inserções
- Porém é possível construir a mesma *heap* em $O(N)$
- Esta rotina, denominada *heapify*, foi proposta por Floyd
- Ela consiste em preencher uma árvore binária com os elementos de `xs`, na ordem em que foram informados
- Em seguida, em ordem reversa (da última folha para a raiz), as violações da propriedade fundamental devem ser corrigidas, utilizado a mesma estratégia da extração do elemento máximo

Exemplo de execução da rotina heapify()



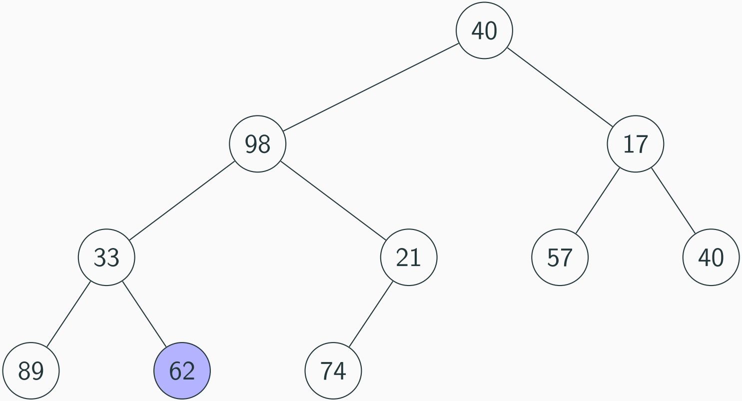
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
40	98	17	33	21	57	40	89	62	74

Exemplo de execução da rotina heapify()



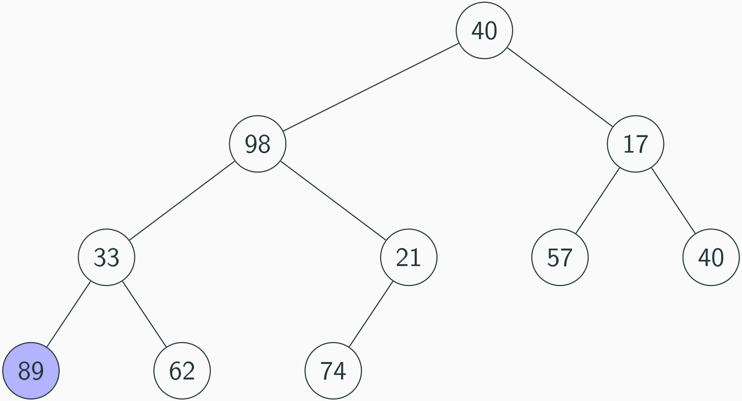
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
40	98	17	33	21	57	40	89	62	74

Exemplo de execução da rotina heapify()



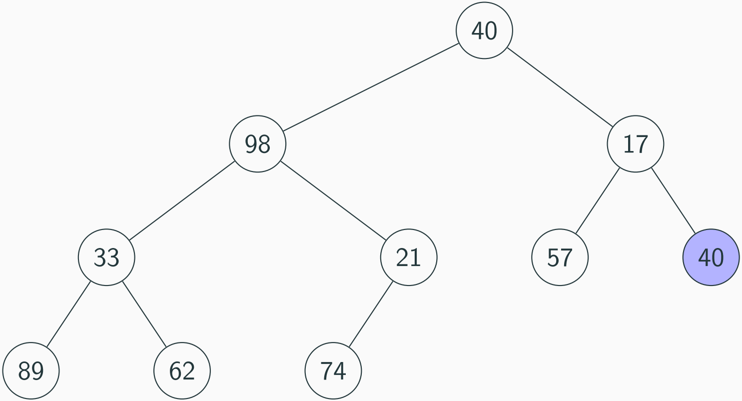
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
40	98	17	33	21	57	40	89	62	74

Exemplo de execução da rotina heapify()



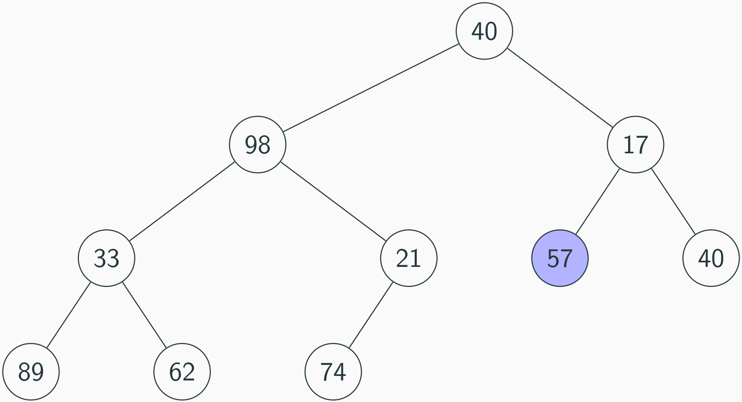
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
40	98	17	33	21	57	40	89	62	74

Exemplo de execução da rotina heapify()



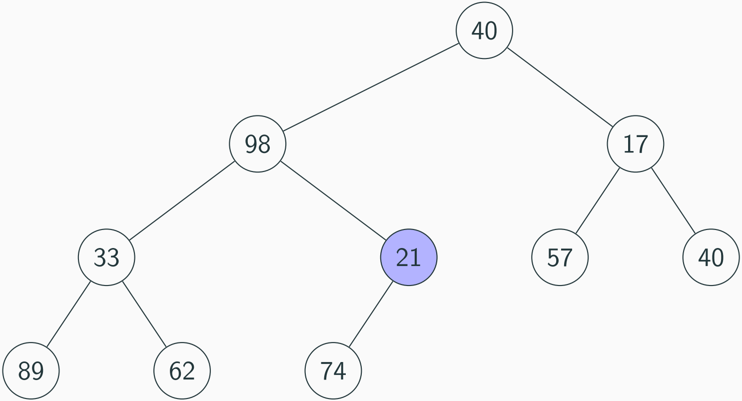
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
40	98	17	33	21	57	40	89	62	74

Exemplo de execução da rotina heapify()



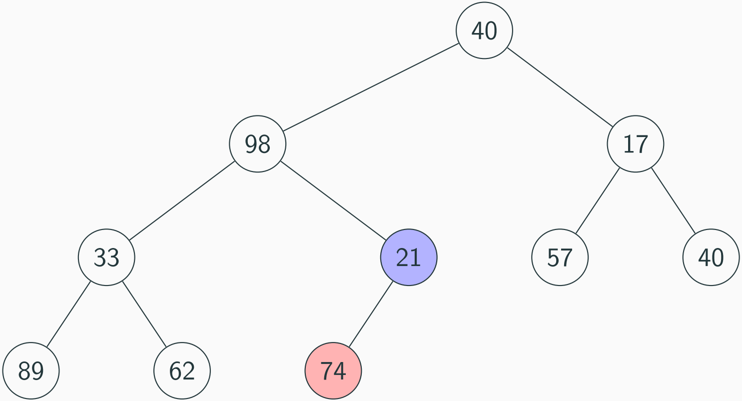
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
40	98	17	33	21	57	40	89	62	74

Exemplo de execução da rotina heapify()



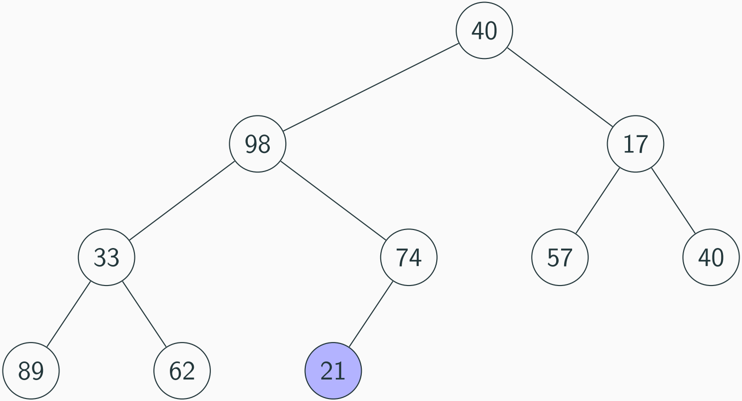
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
40	98	17	33	21	57	40	89	62	74

Exemplo de execução da rotina heapify()



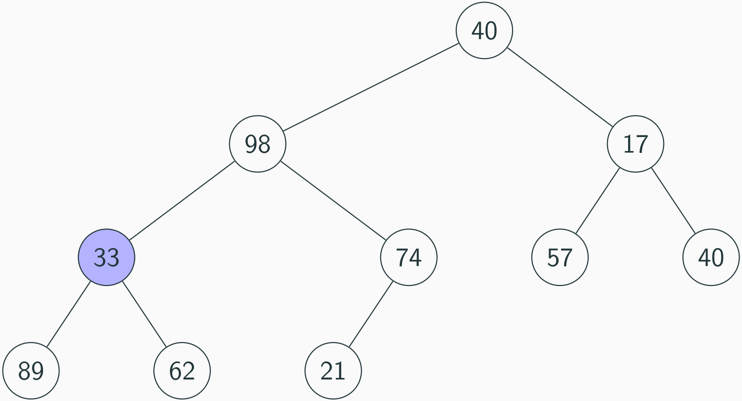
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
40	98	17	33	21	57	40	89	62	74

Exemplo de execução da rotina heapify()



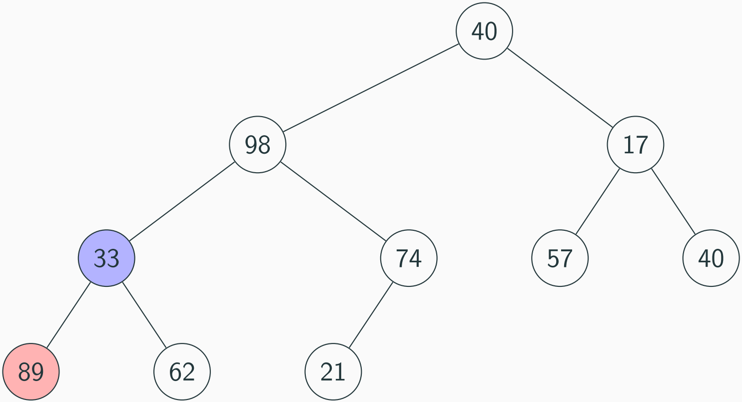
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
40	98	17	33	74	57	40	89	62	21

Exemplo de execução da rotina heapify()



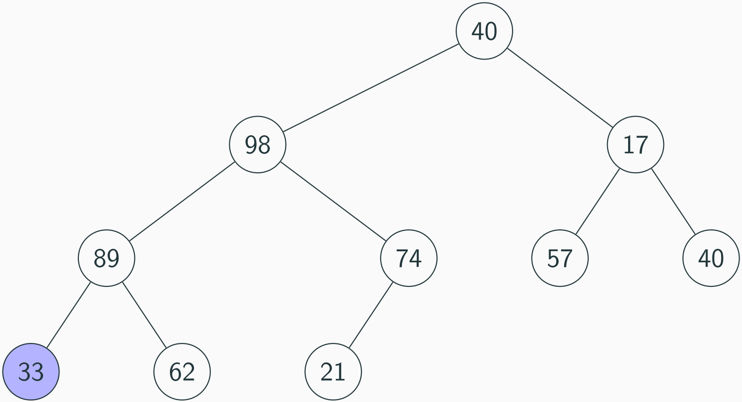
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
40	98	17	33	74	57	40	89	62	21

Exemplo de execução da rotina heapify()



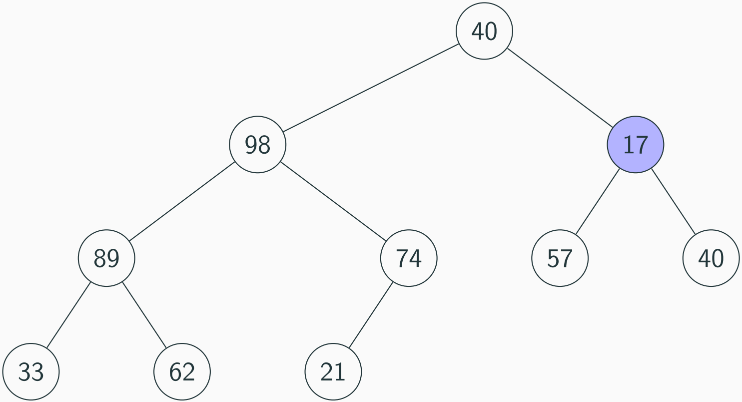
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
40	98	17	33	74	57	40	89	62	21

Exemplo de execução da rotina heapify()



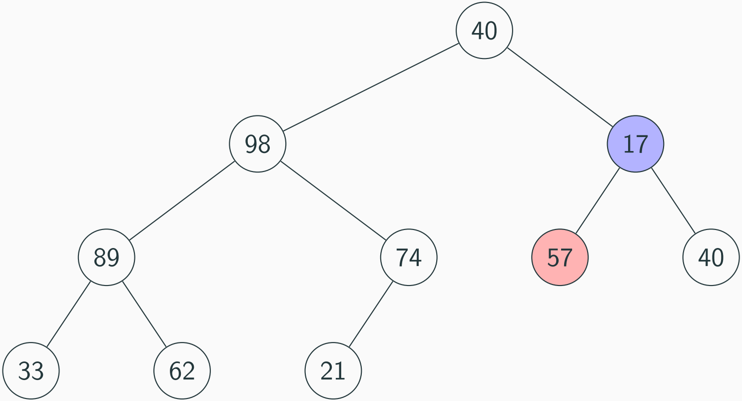
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
40	98	17	89	74	57	40	33	62	21

Exemplo de execução da rotina heapify()



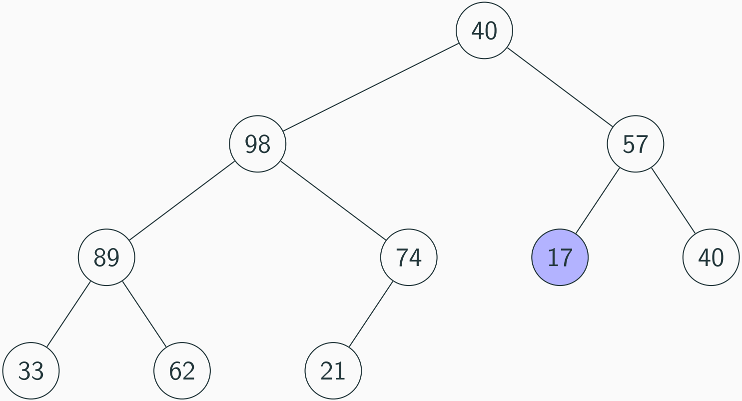
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
40	98	17	89	74	57	40	33	62	21

Exemplo de execução da rotina heapify()



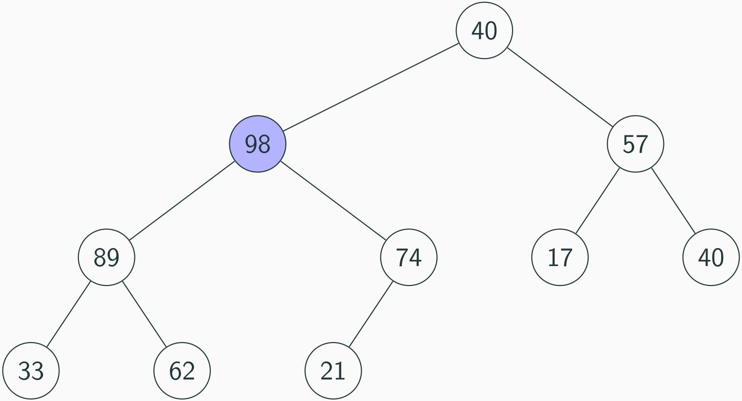
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
40	98	17	89	74	57	40	33	62	21

Exemplo de execução da rotina heapify()



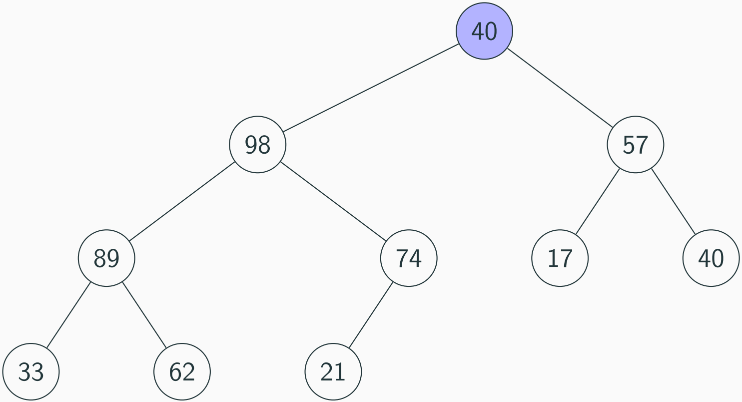
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
40	98	57	89	74	17	40	33	62	21

Exemplo de execução da rotina heapify()



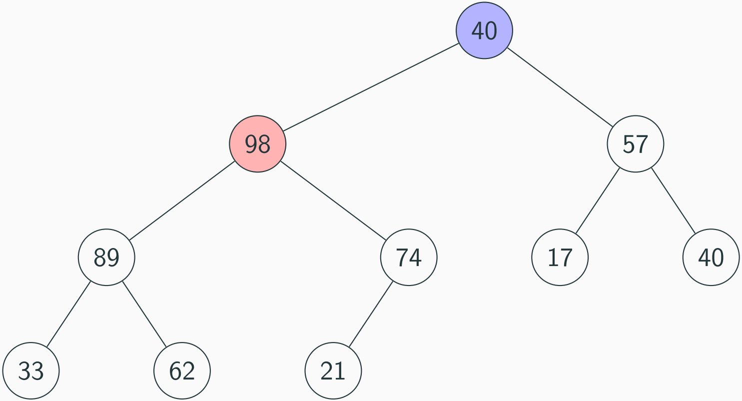
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
40	98	57	89	74	17	40	33	62	21

Exemplo de execução da rotina heapify()



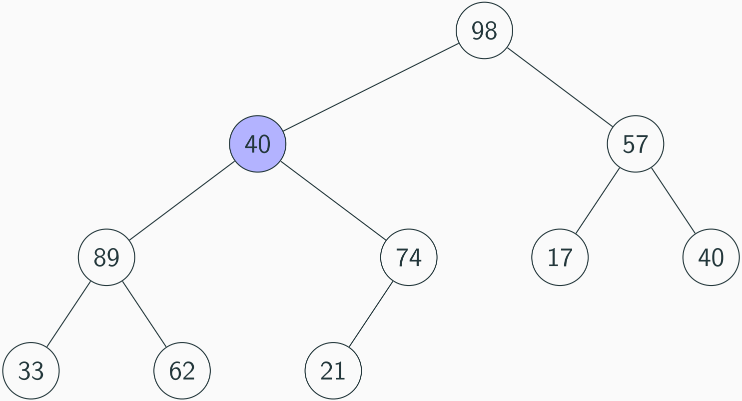
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
40	98	57	89	74	17	40	33	62	21

Exemplo de execução da rotina heapify()



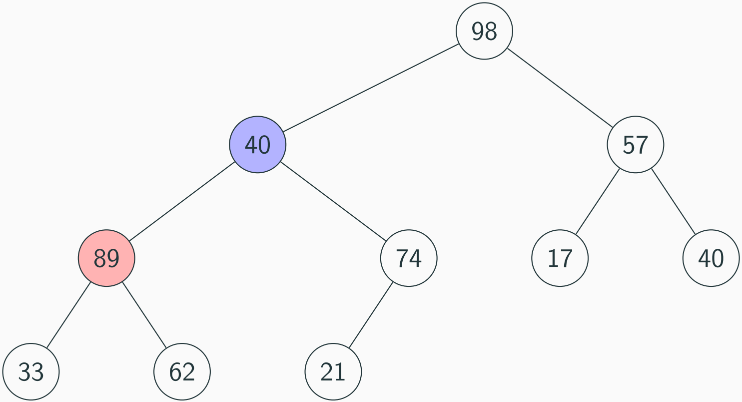
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
40	98	57	89	74	17	40	33	62	21

Exemplo de execução da rotina heapify()



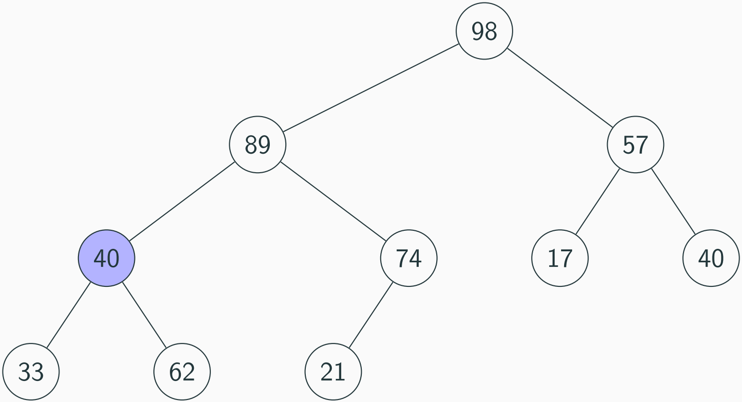
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
98	40	57	89	74	17	40	33	62	21

Exemplo de execução da rotina heapify()



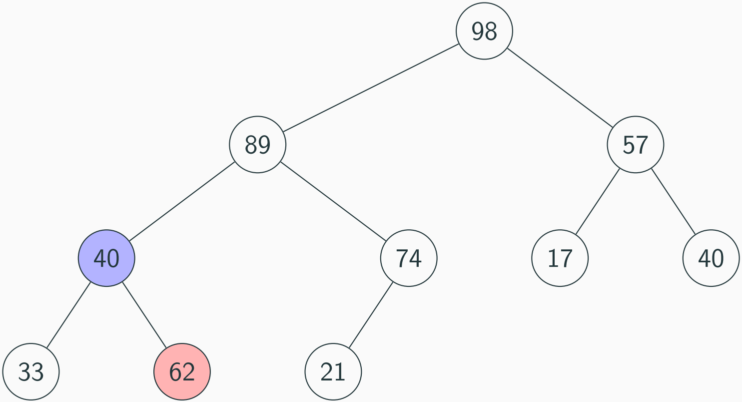
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
98	40	57	89	74	17	40	33	62	21

Exemplo de execução da rotina heapify()



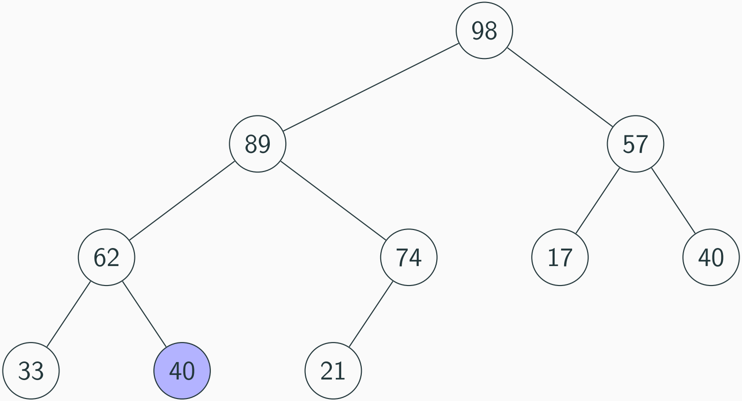
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
98	89	57	40	74	17	40	33	62	21

Exemplo de execução da rotina heapify()

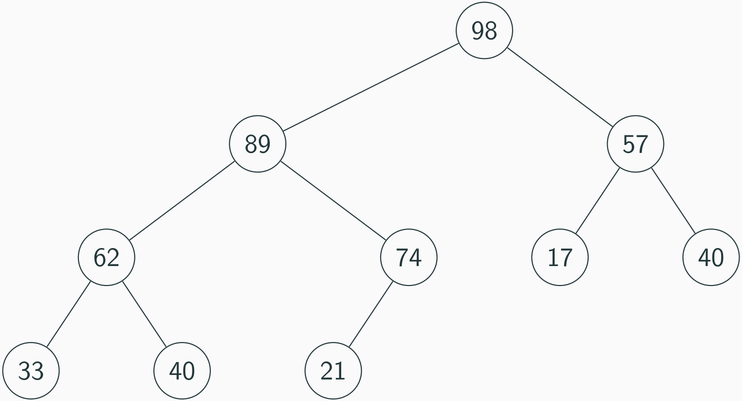


1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
98	89	57	40	74	17	40	33	62	21

Exemplo de execução da rotina heapify()



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
98	89	57	62	74	17	40	33	40	21



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
98	89	57	62	74	17	40	33	40	21

Implementação da rotina heapify()

```
    static Heap heapify(const std::vector<T>& xs)
    {
        Heap<T> h;

        h.xs.push_back(0);
        h.xs.insert(h.xs.begin() + 1, xs.begin(), xs.end());

        h.N = xs.size();

        for (int i = h.N; i >= 1; --i)
        {
            auto p = i;
            auto n = h.left(p) > h.N ? 0 : h.left(p);

            while (n)
            {
                auto r = h.right(p) > h.N ? 0 : h.right(p);

                if (r and h.xs[r] > h.xs[n])
                    n = r;

```

```
                if (h.xs[p] < h.xs[n])
                {
                    std::swap(h.xs[p], h.xs[n]);
                    p = n;
                    n = h.left(p) > h.N ? 0 : h.left(p);
                } else
                    n = 0;
            }
        }

        return h;
    }

```

Complexidade da rotina `heapify()`

- Seja $h = \lfloor \log N \rfloor$ a altura da *heap* binária
- O número de nós no nível $h - i$ é tal que

$$h - i \leq \frac{2^{\lfloor \log N \rfloor}}{2^{h-i}} \leq \frac{n}{2^{h-i}}$$

- O número de trocas máximas para cada nó é $O(h)$
- Assim, o total T de trocas feitas será dado por

$$\begin{aligned} T &= \sum_{h-i=0}^{\lfloor \log N \rfloor} \frac{n}{2^{h-i}} O(h-i) = \sum_{k=0}^{\lfloor \log N \rfloor} \frac{n}{2^k} O(k) \\ &= O\left(n \sum_{k=0}^{\lfloor \log N \rfloor} \frac{k}{2^k} \right) \leq O\left(n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^k} \right) = O(n), \end{aligned}$$

pois a série infinita $a_k = \sum k/2^k$ converge

Referências

1. **ROUGHGARDEN**, Tim. *Algorithms Illuminated (Part 2): Graph Algorithms and Data Structures*, LLC, 2018.
2. Visualgo. *Binary Heap*, acesso em 22/04/2019.
3. Wikipedia. Building a heap, acesso em 22/04/2019.