Geometria Computacional

Polígonos

Prof. Edson Alves

Faculdade UnB Gama

Sumário

Definição

Definição de polígono

- Polígonos são figuras planas delimitadas por caminhos fechados (o vértice de partida é o vértice de chegada), compostos por segmentos de retas que unem vértices consecutivos

Definição de polígono

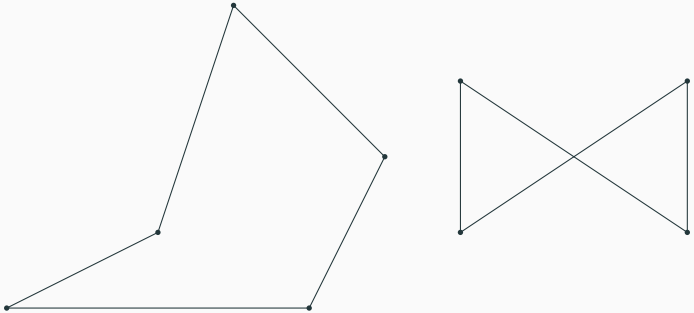
- Polígonos são figuras planas delimitadas por caminhos fechados (o vértice de partida é o vértice de chegada), compostos por segmentos de retas que unem vértices consecutivos
- Os segmentos que unem os vértices são denominados arestas

Definição de polígono

- Polígonos são figuras planas delimitadas por caminhos fechados (o vértice de partida é o vértice de chegada), compostos por segmentos de retas que unem vértices consecutivos
- Os segmentos que unem os vértices são denominados arestas
- Embora alguns polígonos (triângulos, quadriláteros) possam ter tratamento especial, os algoritmos de polígonos podem ser aplicados igualmente a estes entes geométricos

Definição de polígono

- Polígonos são figuras planas delimitadas por caminhos fechados (o vértice de partida é o vértice de chegada), compostos por segmentos de retas que unem vértices consecutivos
- Os segmentos que unem os vértices são denominados arestas
- Embora alguns polígonos (triângulos, quadriláteros) possam ter tratamento especial, os algoritmos de polígonos podem ser aplicados igualmente a estes entes geométricos



Representação de polígonos

- A representação mais comum de um polígono é a listagem de seus vértices, sendo que as arestas ficam subentendidas (há sempre uma aresta unindo dois vértice consecutivos)

Representação de polígonos

- A representação mais comum de um polígono é a listagem de seus vértices, sendo que as arestas ficam subentendidas (há sempre uma aresta unindo dois vértice consecutivos)
- Para facilitar a implementação de algumas rotinas, pode ser conveniente inserir, ao final da lista, o ponto de partida

Representação de polígonos

- A representação mais comum de um polígono é a listagem de seus vértices, sendo que as arestas ficam subentendidas (há sempre uma aresta unindo dois vértice consecutivos)
- Para facilitar a implementação de algumas rotinas, pode ser conveniente inserir, ao final da lista, o ponto de partida
- É preciso tomar cuidado: ao fazer isso, o número de vértices do polígono passa a ser o número de elementos da lista subtraído de uma unidade

Representação de polígonos

- A representação mais comum de um polígono é a listagem de seus vértices, sendo que as arestas ficam subentendidas (há sempre uma aresta unindo dois vértice consecutivos)
- Para facilitar a implementação de algumas rotinas, pode ser conveniente inserir, ao final da lista, o ponto de partida
- É preciso tomar cuidado: ao fazer isso, o número de vértices do polígono passa a ser o número de elementos da lista subtraído de uma unidade

```
template<typename T>
using Polygon = vector<Point<T>>;
```

Representação de polígonos

- A representação mais comum de um polígono é a listagem de seus vértices, sendo que as arestas ficam subentendidas (há sempre uma aresta unindo dois vértice consecutivos)
- Para facilitar a implementação de algumas rotinas, pode ser conveniente inserir, ao final da lista, o ponto de partida
- É preciso tomar cuidado: ao fazer isso, o número de vértices do polígono passa a ser o número de elementos da lista subtraído de uma unidade

```
template<typename T>
using Polygon = vector<Point<T>>;
```

- Esta implementação é a mais compacta possível, mas requer atenção a questão do número de vértices, conforme já comentado

Representação de polígonos

- A representação mais comum de um polígono é a listagem de seus vértices, sendo que as arestas ficam subentendidas (há sempre uma aresta unindo dois vértice consecutivos)
- Para facilitar a implementação de algumas rotinas, pode ser conveniente inserir, ao final da lista, o ponto de partida
- É preciso tomar cuidado: ao fazer isso, o número de vértices do polígono passa a ser o número de elementos da lista subtraído de uma unidade

```
template<typename T>
using Polygon = vector<Point<T>>;
```

- Esta implementação é a mais compacta possível, mas requer atenção a questão do número de vértices, conforme já comentado
- Uma implementação mais extensa evita os problemas já mencionados

Exemplo de implementação de um polígono em C++

```cpp
#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;

template<typename T>
struct Point { T x, y; };

template<typename T>
class Polygon {
private:
    vector<Point<T>> vs;
    int n;

public:
    // O parâmetro deve conter os n vértices do polígono
    Polygon(const vector<Point<T>>& ps) : vs(ps), n(vs.size())
    {
        vs.push_back(vs.front());
    }
```

Polígonos côncavos e convexos

- Um polígono é dito convexo se, para quaisquer dois pontos P e Q localizados no interior do polígono, o segmento de reta PQ não intercepta nenhuma das arestas do polígono

Polígonos côncavos e convexos

- Um polígono é dito convexo se, para quaisquer dois pontos P e Q localizados no interior do polígono, o segmento de reta PQ não intercepta nenhuma das arestas do polígono
- Caso contrário, o polígono é dito côncavo

Polígonos côncavos e convexos

- Um polígono é dito convexo se, para quaisquer dois pontos P e Q localizados no interior do polígono, o segmento de reta PQ não intercepta nenhuma das arestas do polígono
- Caso contrário, o polígono é dito côncavo
- É possível determinar se um polígono é ou não convexo sem recorrer à busca completa, isto é, testar todos os possíveis pares de pontos interiores ao polígono

Polígonos côncavos e convexos

- Um polígono é dito convexo se, para quaisquer dois pontos P e Q localizados no interior do polígono, o segmento de reta PQ não intercepta nenhuma das arestas do polígono
- Caso contrário, o polígono é dito côncavo
- É possível determinar se um polígono é ou não convexo sem recorrer à busca completa, isto é, testar todos os possíveis pares de pontos interiores ao polígono
- A orientação D, entre pontos e reta, pode ser utilizada para tal fim

Polígonos côncavos e convexos

- Um polígono é dito convexo se, para quaisquer dois pontos P e Q localizados no interior do polígono, o segmento de reta PQ não intercepta nenhuma das arestas do polígono
- Caso contrário, o polígono é dito côncavo
- É possível determinar se um polígono é ou não convexo sem recorrer à busca completa, isto é, testar todos os possíveis pares de pontos interiores ao polígono
- A orientação D, entre pontos e reta, pode ser utilizada para tal fim
- Basta checar se, para quaisquer três pontos consecutivos do polígono, eles tem a mesma orientação: ou sempre à esquerda, ou sempre à direita

Implementação da rotina de verificação de convexidade

```
21 private:
22     T D(const Point<T>& P, const Point<T>& Q, const Point<T>& R) const
23     {
24         return (P.x * Q.y + P.y * R.x + Q.x * R.y) - (R.x * Q.y + R.y * P.x + Q.x * P.y);
25     }
26
27 public:
28     bool convex() const {
29         // Um polígono deve ter, no minimo, 3 vértices
30         if (n < 3) return false;
31
32         int P = 0, N = 0, Z = 0;
33
34         for (int i = 0; i < n; ++i) {
35             auto d = D(vs[i], vs[(i + 1) % n], vs[(i + 2) % n]);
36             d ? (d > 0 ? ++P : ++N) : ++Z;
37         }
38
39         return P == n or N == n;
40     }
```

Algoritmos envolvendo polígonos

Perímetro

- O perímetro de um polígono consiste na medida de seu contorno, isto é, a soma dos comprimentos de suas aresta

Perímetro

- O perímetro de um polígono consiste na medida de seu contorno, isto é, a soma dos comprimentos de suas aresta
- Ele pode ser calculado diretamente a partir da representação do polígono por meio de seus vértices

Perímetro

- O perímetro de um polígono consiste na medida de seu contorno, isto é, a soma dos comprimentos de suas aresta
- Ele pode ser calculado diretamente a partir da representação do polígono por meio de seus vértices

```
43      double distance(const Point<T>&P, const Point<T>& Q)
44      {
45          return hypot(P.x - Q.x, P.y - Q.y);
46      }
47  public:
48      double perimeter() const
49      {
50          auto p = 0.0;
51
52          for (int i = 0; i < n; ++i)
53              p += distance(vs[i], vs[i + 1]);
54
55          return p;
56      }
```

Área

- A área delimitada por um polígono pode ser também determinada diretamente a partir de seus vértices

Área

- A área delimitada por um polígono pode ser também determinada diretamente a partir de seus vértices
- Ela corresponde à metade do valor absoluto do "determinante" abaixo (as aspas significam que a notação remete a um determinante, mas não é um determinante de fato, uma vez que a matriz não é quadrada)

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \dots & \dots \\ x_{n-1} & y_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} |x_0 y_1 + x_1 y_2 + \ldots + x_{n-1} y_0 - x_1 y_0 - x_2 y_1 - \ldots - x_0 y_{n-1}|$$

Implementação da área do polígono

```
58      double area() const
59      {
60          auto a = 0.0;
61
62          for (int i = 0; i < n; ++i)
63          {
64              a += vs[i].x * vs[i + 1].y;
65              a -= vs[i + 1].x * vs[i].y;
66          }
67
68          return 0.5 * fabs(a);
69      }
```

Área de polígonos regulares

- Um polígono é dito regular se todos os seus lados têm a mesma medida

Área de polígonos regulares

- Um polígono é dito regular se todos os seus lados têm a mesma medida
- A área também pode ser computada através do conhecimento do número de lados n e um dos três valores abaixo:

Área de polígonos regulares

- Um polígono é dito regular se todos os seus lados têm a mesma medida
- A área também pode ser computada através do conhecimento do número de lados n e um dos três valores abaixo:
  1. o comprimento de um dos lados (s)

Área de polígonos regulares

- Um polígono é dito regular se todos os seus lados têm a mesma medida
- A área também pode ser computada através do conhecimento do número de lados n e um dos três valores abaixo:
  1. o comprimento de um dos lados (s)
  2. a apótema, isto é, o raio do círculo inscrito (r)

Área de polígonos regulares

- Um polígono é dito regular se todos os seus lados têm a mesma medida
- A área também pode ser computada através do conhecimento do número de lados n e um dos três valores abaixo:
  1. o comprimento de um dos lados (s)
  2. a apótema, isto é, o raio do círculo inscrito (r)
  3. o raio do círculo circunscrito (R)

Área de polígonos regulares

- Um polígono é dito regular se todos os seus lados têm a mesma medida
- A área também pode ser computada através do conhecimento do número de lados n e um dos três valores abaixo:
  1. o comprimento de um dos lados (s)
  2. a apótema, isto é, o raio do círculo inscrito (r)
  3. o raio do círculo circunscrito (R)
- As expressões abaixo relacionam a área do polígono regular com as medidas supracitadas:

$$A = \frac{1}{2}nrs = \frac{1}{4}ns^2 \cot\frac{\pi}{n} = nr^2 \tan\frac{\pi}{n} = \frac{1}{2}nR^2 \sin\frac{2\pi}{n}$$

Relação entre pontos e polígonos

- Para se verificar se um ponto P está localizado, ou não, no interior de um polígono, basta computar a soma dos ângulos formados por P e cada par de vértices do polígono

Relação entre pontos e polígonos

- Para se verificar se um ponto P está localizado, ou não, no interior de um polígono, basta computar a soma dos ângulos formados por P e cada par de vértices do polígono
- Esta soma deve adicionar o ângulo se o ponto está na mesma orientação do polígono, e subtrair em caso contrário

Relação entre pontos e polígonos

- Para se verificar se um ponto P está localizado, ou não, no interior de um polígono, basta computar a soma dos ângulos formados por P e cada par de vértices do polígono
- Esta soma deve adicionar o ângulo se o ponto está na mesma orientação do polígono, e subtrair em caso contrário
- Se o total for igual a 2π, o ponto está no interior do polígono

Relação entre pontos e polígonos

- Para se verificar se um ponto P está localizado, ou não, no interior de um polígono, basta computar a soma dos ângulos formados por P e cada par de vértices do polígono
- Esta soma deve adicionar o ângulo se o ponto está na mesma orientação do polígono, e subtrair em caso contrário
- Se o total for igual a 2π, o ponto está no interior do polígono
- Esta verificação vale tanto para polígonos convexos quanto côncavos

Implementação da relação entre pontos e polígonos

```
72      // Ângulo APB, em radianos
73      double angle(const Point<T>& P, const Point<T>& A, const Point<T>& B)
74      {
75          auto ux = P.x - A.x;
76          auto uy = P.y - A.y;
77
78          auto vx = P.x - B.x;
79          auto vy = P.y - B.y;
80
81          auto num = ux * vx + uy * vy;
82          auto den = hypot(ux, uy) * hypot(vx, vy);
83
84          // Caso especial: se den == 0, algum dos vetores é degenerado: os
85          // dois pontos são iguais. Neste caso, o ângulo não está definido
86
87          return acos(num / den);
88      }
```

Implementação da relação entre pontos e polígonos

```
90      bool equals(double x, double y) {
91          static const double EPS { 1e-6 };
92          return fabs(x - y) < EPS;
93      }
94  public:
95      bool contains(const Point<T>& P) const
96      {
97          if (n < 3) return false;
98
99          auto sum = 0.0;
100
101         for (int i = 0; i < n - 1; ++i) {
102             auto d = D(P, vs[i], vs[i + 1]);
103             auto a = angle(P, vs[i], vs[i + 1]);
104             sum += d > 0 ? a : (d < 0 ? -a : 0);
105         }
106
107         static const double PI = acos(-1.0);
108         return equals(fabs(sum), 2*PI);
109     }
```

Relação entre polígonos e retas

- Considere uma reta r, que passa pelos pontos A e B, e um polígono convexo P, com n vértices

Relação entre polígonos e retas

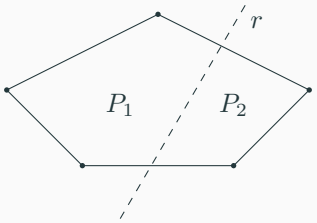
- Considere uma reta r, que passa pelos pontos A e B, e um polígono convexo P, com n vértices
- A reta r secciona o polígono em duas regiões, esquerda e direita, que podem ser ou uma vazias e outra contendo P integralmente, ou serem compostas de dois polígonos convexos P_1 e P_2, resultantes do corte de P por r

Relação entre polígonos e retas

- Considere uma reta r, que passa pelos pontos A e B, e um polígono convexo P, com n vértices
- A reta r secciona o polígono em duas regiões, esquerda e direita, que podem ser ou uma vazias e outra contendo P integralmente, ou serem compostas de dois polígonos convexos P_1 e P_2, resultantes do corte de P por r
- A rotina `cut_polygon()`, apresentada a seguir e adaptada de Competitive Programming 3, retorna a região a esquerda do corte, considerando que P está descrito no sentido anti-horário

Relação entre polígonos e retas

- Considere uma reta r, que passa pelos pontos A e B, e um polígono convexo P, com n vértices
- A reta r secciona o polígono em duas regiões, esquerda e direita, que podem ser ou uma vazias e outra contendo P integralmente, ou serem compostas de dois polígonos convexos P_1 e P_2, resultantes do corte de P por r
- A rotina `cut_polygon()`, apresentada a seguir e adaptada de Competitive Programming 3, retorna a região a esquerda do corte, considerando que P está descrito no sentido anti-horário



Implementação da relação entre pontos e retas

```
112     // Interseção entre a reta AB e o segmento de reta PQ
113     Point<T> intersection(const Point<T>& P, const Point<T>& Q,
114                           const Point<T>& A, const Point<T>& B)
115     {
116         auto a = B.y - A.y;
117         auto b = A.x - B.x;
118         auto c = B.x * A.y - A.x * B.y;
119         auto u = fabs(a * P.x + b * P.y + c);
120         auto v = fabs(a * Q.x + b * Q.y + c);
121 
122         // Média ponderada pelas distâncias de P e Q até a reta AB
123         return {(P.x * v + Q.x * u)/(u + v), (P.y * v + Q.y * u)/(u + v)};
124     }
125 
126 public:
127     // Corta o polígono com a reta r que passa por A e B
128     Polygon cut_polygon(const Point<T>& A, const Point<T>& B) const
129     {
130         vector<Point<T>> points;
131         const double EPS { 1e-6 };
```

Implementação da relação entre pontos e retas

```
132
133         for (int i = 0; i < n; ++i)
134         {
135             auto d1 = D(A, B, vs[i]);
136             auto d2 = D(A, B, vs[i + 1]);
137
138             // Vértice à esquerda da reta
139             if (d1 > -EPS)
140                 points.push_back(vs[i]);
141
142             // A aresta cruza a reta
143             if (d1 * d2 < -EPS)
144                 points.push_back(intersection(vs[i], vs[i + 1], A, B));
145         }
146
147         return Polygon(points);
148     }
```

Círculo circunscrito

- Um polígono regular (medidas dos lados iguais) de n lados possui um círculo circunscrito (cujos vértices pertencem ao círculo) e um círculo inscrito (cujos lados são tangentes ao círculo)

Círculo circunscrito

- Um polígono regular (medidas dos lados iguais) de n lados possui um círculo circunscrito (cujos vértices pertencem ao círculo) e um círculo inscrito (cujos lados são tangentes ao círculo)
- O raio R do círculo circunscrito é igual ao raio do polígono: a distância entre o seu centro e um de seus vértices

Círculo circunscrito

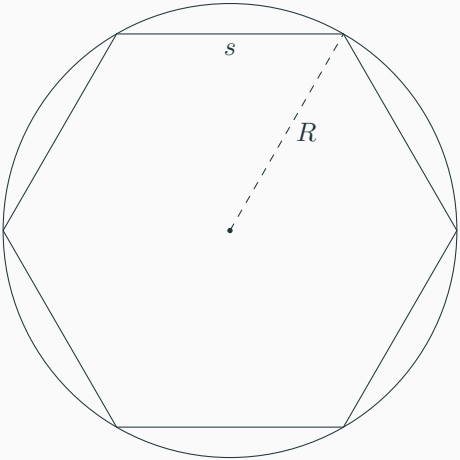
- Um polígono regular (medidas dos lados iguais) de n lados possui um círculo circunscrito (cujos vértices pertencem ao círculo) e um círculo inscrito (cujos lados são tangentes ao círculo)
- O raio R do círculo circunscrito é igual ao raio do polígono: a distância entre o seu centro e um de seus vértices
- Se s é a medida do lado do polígono, então

$$\sin \frac{\pi}{n} = \frac{(s/2)}{R},$$

isto é,

$$R = \frac{s}{2} \csc \frac{\pi}{n}$$

Visualização do círculo circunscrito



Implementação do cálculo do raio R do círculo circunscrito

```
150     double circumradius() const
151     {
152         auto s = distance(vs[0], vs[1]);
153         const double PI { acos(-1.0) };
154 
155         return (s/2.0)*(1.0/sin(PI/n));
156     }
```

Círculo inscrito

- O raio r do círculo inscrito pode ser determinado a partir da medida s de um dos lados do polígono regular, através da relação

$$\tan \frac{\pi}{n} = \frac{(s/2)}{r},$$

isto é,

$$r = \frac{s}{2} \cot \frac{\pi}{n}$$

Círculo inscrito

- O raio r do círculo inscrito pode ser determinado a partir da medida s de um dos lados do polígono regular, através da relação

$$\tan \frac{\pi}{n} = \frac{(s/2)}{r},$$

isto é,

$$r = \frac{s}{2} \cot \frac{\pi}{n}$$

- O raio r também é denominado apótema do polígono regular

Círculo inscrito

- O raio r do círculo inscrito pode ser determinado a partir da medida s de um dos lados do polígono regular, através da relação

$$\tan \frac{\pi}{n} = \frac{(s/2)}{r},$$

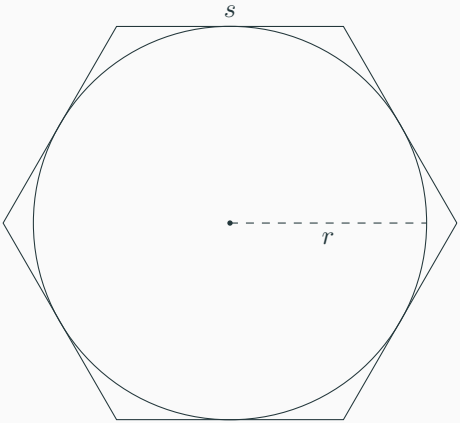
isto é,

$$r = \frac{s}{2} \cot \frac{\pi}{n}$$

- O raio r também é denominado apótema do polígono regular
- Os raios R e r se relacionam de modo que

$$r = R \cos \frac{\pi}{n}$$

Visualização do círculo inscrito



Implementação do cálculo do raio r do círculo inscrito

```
158     double apothem() const
159     {
160         auto s = distance(vs[0], vs[1]);
161         const double PI { acos(-1.0) };
162 
163         return (s/2.0)*(1.0/tan(PI/n));
164     }
```

Referências

1. **HALIM**, Felix; **HALIM**, Steve. *Competitive Programming 3*, 2010.
2. Math Open Reference. Incircle of a Polygon, acesso em 18/08/2016.
3. Mathwords. Area of a Regular Polygon, acesso em 20/09/2016.
4. Wikipédia. Regular Polygon, acesso em 18/08/2016.