OJ 10297

Beavergnaw

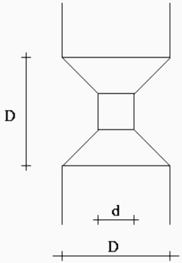
Prof. Edson Alves

Faculdade UnB Gama

OJ 10297 – Beavergnaw

Problema

When chomping a tree the beaver cuts a very specific shape out of the tree trunk. What is left in the tree trunk looks like two frustums of a cone joined by a cylinder with the diameter the same as its height. A very curious beaver tries not to demolish a tree but rather sort out what should be the diameter of the cylinder joining the frustums such that he chomped out certain amount of wood. You are to help him to do the calculations.



Problema

We will consider an idealized beaver chomping an idealized tree. Let us assume that the tree trunk is a cylinder of diameter D and that the beaver chomps on a segment of the trunk also of height D. What should be the diameter d of the inner cylinder such that the beaver chmped out V cubic units of wood?

Entrada e saída

Input

Input contains multiple cases each presented on a separate line. Each line contains two integer numbers D and V separated by whitespace. D is the linear units and V is in cubic units. V will not exceed the maximum volume of wood that the beaver can chomp. A line with $D = 0$ and $V = 0$ follows the last case.

Output

For each case, one line of output should be produced containing one number rounded to three fractional digits giving the value of d measured in linear units.

Exemplo de entradas e saídas

Sample Input

```
10 250
20 2500
25 7000
50 50000
0 0
```

Sample Output

```
8.054
14.775
13.115
30.901
```

Solução $O(T \log D)$

- Um cone reto com diâmetro D tem volume igual a

$$V_C = D\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 = \frac{\pi D^3}{4}$$

Solução $O(T \log D)$

- Um cone reto com diâmetro D tem volume igual a

$$V_C = D\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 = \frac{\pi D^3}{4}$$

- Após o castor roer um volume igual a V, restará um volume $L = V_c - V$

Solução $O(T \log D)$

- Um cone reto com diâmetro D tem volume igual a

$$V_C = D\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2 = \frac{\pi D^3}{4}$$

- Após o castor roer um volume igual a V, restará um volume $L = V_c - V$
- Este volume deve ser composto por dois troncos de cone com altura $(D - d)/2$ e bases com diâmetro D e d, mais um cone reto de altura e diâmetros iguais a d

Solução $O(T \log D)$

- Um cone reto com diâmetro D tem volume igual a

$$V_C = D\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 = \frac{\pi D^3}{4}$$

- Após o castor roer um volume igual a V, restará um volume $L = V_c - V$
- Este volume deve ser composto por dois troncos de cone com altura $(D - d)/2$ e bases com diâmetro D e d, mais um cone reto de altura e diâmetros iguais a d
- Em notação matemática

$$L = 2\left[\frac{1}{3}\pi\left(\frac{D-d}{2}\right)\left(\frac{D^2}{4} + \frac{Dd}{4} + \frac{d^2}{4}\right)\right] + \frac{\pi d^3}{4}$$

Solução $O(T \log D)$

- Caso o castor não coma nada, d deve ter valor máximo igual a D

Solução $O(T \log D)$

- Caso o castor não coma nada, d deve ter valor máximo igual a D
- Caso o castor coma toda a região, d assume o valor mínimo igual a zero

Solução $O(T \log D)$

- Caso o castor não coma nada, d deve ter valor máximo igual a D
- Caso o castor coma toda a região, d assume o valor mínimo igual a zero
- Assim, dado o valor V, é possível determinar o valor de d por meio de uma busca binária

Solução $O(T \log D)$

- Caso o castor não coma nada, d deve ter valor máximo igual a D
- Caso o castor coma toda a região, d assume o valor mínimo igual a zero
- Assim, dado o valor V, é possível determinar o valor de d por meio de uma busca binária
- A complexidade desta solução é $O(T \log D)$, onde T é o número de casos de teste

Solução com complexidade $O(T \log D)$

```cpp
#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;

const double PI { acos(-1.0) }, EPS { 1e-6 };

double solve(double D, double V)
{
    auto L = (PI * D * D * D)/4.0 - V;
    auto a = 0.0, b = D, d = 0.0;

    while (a <= b)
    {
        d = (a + b)/2;
        auto R = 2*((PI/3.0)*((D - d)/2.0)*(D*D + D*d + d*d)/4.0) + PI*(d * d * d)/4.0;
```

Solução com complexidade $O(T \log D)$

```
        if (fabs(L - R) < EPS)
            break;
        else if (L > R)
            a = d;
        else
            b = d;
    }

    return d;
}
```

Solução $O(T)$

- Para resolver cada caso de teste com complexidade $O(1)$, é preciso interpretar o volume restante no tronco de forma ligeiramente diferente

Solução $O(T)$

- Para resolver cada caso de teste com complexidade $O(1)$, é preciso interpretar o volume restante no tronco de forma ligeiramente diferente
- Observe que este volume pode ser visto como a união de dois cones retos de altura $D/2$ e bases com diâmetro D e um sólido S, composto por um cone reto de altura e diâmetros iguais a d, subtraído de dois cones retos de altura e raio iguais a $d/2$.

Solução $O(T)$

- Para resolver cada caso de teste com complexidade $O(1)$, é preciso interpretar o volume restante no tronco de forma ligeiramente diferente
- Observe que este volume pode ser visto como a união de dois cones retos de altura $D/2$ e bases com diâmetro D e um sólido S, composto por um cone reto de altura e diâmetros iguais a d, subtraído de dois cones retos de altura e raio iguais a $d/2$.
- Em notação matemática

$$L = 2\left[\frac{1}{3}\pi\left(\frac{D}{2}\right)\left(\frac{D}{2}\right)^2\right] + \left\{\pi d\left(\frac{d}{2}\right)^2 - 2\left[\frac{1}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)\left(\frac{d}{2}\right)^2\right]\right\}$$

Solução $O(T)$

- Esta expressão pode ser reescrita como

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{1}{12}\pi D^3 + \frac{1}{4}\pi d^3 - \frac{1}{12}\pi d^3 \\
\frac{1}{4}\pi D^3 - V &= \frac{1}{12}\pi D^3 + \frac{1}{6}\pi d^3 \\
\frac{1}{6}\pi D^3 - V &= \frac{1}{6}\pi d^3
\end{aligned}
$$

Solução $O(T)$

- Esta expressão pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
L &= \frac{1}{12}\pi D^3 + \frac{1}{4}\pi d^3 - \frac{1}{12}\pi d^3 \\
\frac{1}{4}\pi D^3 - V &= \frac{1}{12}\pi D^3 + \frac{1}{6}\pi d^3 \\
\frac{1}{6}\pi D^3 - V &= \frac{1}{6}\pi d^3
\end{aligned}$$

- Assim,

$$d = \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}\left(\frac{1}{6}\pi D^3 - V\right)} = \sqrt[3]{D^3 - \frac{6V}{\pi}}$$

Solução com complexidade $O(T)$

```
double solve(double D, double V)
{
    return cbrt(D*D*D - 6.0*V/PI);
}
```