

Modelos matemáticos para otimizar rotações de culturas

Modèles mathématiques pour l'optimisation des rotations. C. R. Acad. Agric. France 89 – 3(2003), p.52

Nicolas Bacaër

Institut de Recherche pour le Développement
32 avenue Henri Varagnat, 93143 Bondy cedex, France
nicolas.bacaer@ird.fr

resumo

Este artigo apresenta a ligação entre a escolha de uma rotação de culturas, levando em consideração o “efeito anterior” e os modelos matemáticos pertencentes à teoria dos grafos. Em um primeiro modelo, a renda do ano n depende apenas das colheitas dos anos n e $n-1$. Em um segundo modelo, a renda do ano n depende das colheitas dos anos n , $n-1$ e $n-2$. O problema é escolher uma rotação de culturas que otimize a renda média anual.

1. História

Modelos matemáticos para a otimização de sistemas de cultivo foram introduzidos na década de 1960 por economistas. Eles formularam vários problemas tradicionais, por exemplo, a escolha da porcentagem da superfície agrícola a ser atribuída às várias culturas, como problemas de “programação linear”, uma teoria matemática desenvolvida por Danzig (1963). A teoria é acompanhada por um algoritmo chamado “método simplex”, que requer o uso de um computador. Aplicações agrícolas são encontradas, por exemplo, no livro de Boussard e Daudin (1988). O software para agricultores foi desenvolvido por CEMAGREF (1992).

Nestas referências, o problema de escolher a rotação de culturas é insuficientemente estudado. Portanto, apresentamos neste artigo modelos matemáticos para a otimização dessas rotações de culturas, levando essencialmente em consideração o “efeito anterior”. As rotações de culturas correspondem a ciclos em gráficos matemáticos. Até agora, eles foram estudados para aplicações muito diferentes: problemas de transporte, problemas de automação em linhas de montagem (Baccelli et al. 1992), etc. Existe um algoritmo muito eficiente para resolver esses problemas, chamado algoritmo de Howard, que também é implementado no software INRIA.

2. Primeiro modelo

Considere um agricultor que queira cultivar uma parcela e para o qual ele possa escolher a cada ano P diferentes culturas: trigo, cevada, nabo, pousio, etc. Suponha que a renda do ano n dependa apenas das colheitas dos anos n e $n-1$. x_n é a cultura do ano n . $K(x_{n-1}, x_n)$ é o rendimento do ano n . Agora considere um gráfico com nós P , cada nó correspondente a uma cultura, com arestas orientadas conectando todos os nós juntos (incluindo as arestas conectando um nó a ele mesmo). A aresta que vai do nó i ao nó j está associada a um peso: $K(i, j)$. Uma rotação de culturas, isto é, uma série periódica de culturas, corresponde então a um ciclo no gráfico matemático. A melhor rotação de culturas será a que otimiza a renda média anual

$$\frac{K(x_0, x_1) + K(x_1, x_2) + \dots + K(x_{L-1}, x_0)}{L}.$$

Percebe-se com bastante facilidade que basta restringir-se aos ciclos elementares, ou seja, àqueles que não passam duas vezes pelo mesmo nó. Os outros ciclos são de fato compostos por ciclos elementares e não podem gerar uma renda média anual mais alta. Essa propriedade já mostra os limites desse modelo, porque, na prática, muitas rotações de culturas contêm a mesma cultura várias vezes. Na região de Noyonnais, na França, por exemplo, foram identificadas uma dúzia de diferentes rotações de culturas (Sébillotte, 1989). Alguns, como a rotação de culturas de beterraba, batata e trigo, são compatíveis com o nosso primeiro modelo. Outros, como a rotação de culturas de beterraba - trigo - trigo, não são. Essa crítica será levantada no segundo modelo.

Vamos voltar ao primeiro modelo. Uma maneira de encontrar a rotação ideal de culturas é listar todas as rotações básicas de culturas. $P(P-1) \dots (P-L+1)/L$ rotações de culturas são de comprimento L , com $1 \leq L \leq P$. Para $P=3$ culturas, existem

- 3 rotações de culturas de comprimento 1 (monoculturas),
- 3 rotações de culturas de comprimento 2 (rotações bienais de culturas 1-2, 1-3 e 2-3)
- 2 rotações de culturas de comprimento 3 (as rotações trienais de culturas 1-2-3 e 1-3-2).

Existem, portanto, 8 rotações de culturas no total. De fato, o número total de rotações de culturas elementares aumenta muito rapidamente com P (existem 24 para $P=4$, 89 para $P=5$, ...), o que torna esse método bastante trabalhoso. Os especialistas em teoria dos grafos perceberam que o seguinte sistema de equações é mais rápido de resolver com o algoritmo de Howard

$$\max_{j=1 \dots P} \{K(i, j) + u(j)\} = R + u(i), \quad 1 \leq i \leq P. \quad (1)$$

As incógnitas são os números $u(1), \dots, u(P)$ e R . O algoritmo é implementado em uma caixa de ferramentas disponível em

ftp.inria.fr/INRIA/Projects/Meta2/Scilab/contrib/MAXPLUS.

O algoritmo pode ser usado dentro do software scilab

<http://www-rocq.inria.fr/scilab>.

A teoria mostra que R só pode ter um valor bem definido, que é de fato a renda média anual máxima. Em seguida, escolhemos para cada $i = 1 \dots P$ um número $j = c(i)$. Este número fornece o máximo no lado esquerdo da equação número i acima. Para obter uma rotação ideal da

colheita, escolhamos qualquer x_0 , então tomamos por indução $x_n = c(x_{n-1})$. A sequência se torna periódica após algumas iterações e a rotação de culturas obtida é ideal.

$u(1), \dots, u(P)$ são números que têm uma interpretação. Eles formam um sistema de preços para a compra e venda do lote. Se a cultura i cresceu antes da transação, então $u(i)$ é o preço justo para esta transação. De fato, esse sistema de preços garante que a renda média anual máxima permaneça a mesma de um operador para outro. Em outras palavras, a receita ao longo de n anos levando em consideração a compra $-u(x_0)$ e venda $+u(x_n)$,

$$\frac{\max_{x_1, \dots, x_n} \{K(x_0, x_1) + K(x_1, x_2) + \dots + K(x_{n-1}, x_n) + u(x_n)\} - u(x_0)}{n},$$

é independente de x_0 e n . Finalmente, vamos apontar o link com o problema de rotação e programação linear. Suponha que a parcela possa ser dividida para acomodar diferentes culturas. $r_n(i, j)$ é a porcentagem da área cultivada com j no ano n e com i no ano $n-1$. Supomos que x_0, x_1, \dots, x_{L-1} é uma rotação ideal de culturas. Pode-se demonstrar que a renda média anual máxima R também pode ser obtida escolhendo-se cada ano $r_n(i, j) = r(i, j) = 1/L$ se $i = x_{k-1}$ e $j = x_k$ para um valor de k (com $x_L = x_0$), ou seja, cortando a parcela em L parcelas menores da mesma superfície, acomodando as culturas da rotação cultural ideal. Portanto, R também é o valor do problema de programação linear

$$\max \sum_{i,j} K(i, j) r(i, j)$$

com restrições

$$r(i, j) \geq 0, \quad \sum_i \sum_j r(i, j) = 1, \quad \sum_j r(j, i) = \sum_j r(i, j).$$

3. Segundo modelo

Agora, suponha que a renda do ano n dependa das colheitas dos anos $n, n-1$ e $n-2$. $K(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)$ é o rendimento do ano n . Considere um gráfico matemático com P^2 nós. Cada nó corresponde a duas culturas. Este casal representa as culturas de dois anos consecutivos. As arestas conectam apenas os nós, de modo que a segunda cultura do nó de partida seja igual à primeira cultura do nó de chegada. Se a aresta passa de (i, j) a (j, k) , então seu peso é $K(i, j, k)$. Uma rotação de culturas, isto é, uma série periódica de culturas, corresponde então a um ciclo no gráfico matemático. A melhor rotação de culturas será a que otimizar a renda média anual. Percebe-se, como no primeiro modelo, que basta restringir-se a ciclos elementares, ou seja, àqueles que não passam duas vezes pelo mesmo nó.

Tomemos, por exemplo, $P = 2$. Existem 4 nós: $(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)$. A partir de $(1,1)$, existem 2 arestas:

- uma aresta em direção a $(1,1)$ de peso $K(1, 1, 1)$,
- a outra borda em direção a $(1,2)$ de peso $K(1, 1, 2)$.

O ciclo elementar $(1,1) - (1,2) - (2,1)$ corresponde à rotação trienal de culturas 1-1-2, que não é elementar no sentido do primeiro modelo. Para modelar rotações de culturas como a rotação de seis anos de beterraba-trigo-beterraba-trigo-batata-mash, que não é elementar no sentido do segundo modelo, teríamos que usar um modelo com 3 anos de memória. Felizmente, o segundo modelo já permite explicar a maioria das rotações de culturas identificadas no livro de Sébillotte (1989).

Ao contrário do primeiro modelo, é bastante difícil contar o número de ciclos elementares. Com $P = 2$, existem 6, 1, 2, 1-2, 1-1-2, 1-2-2 e 1-1-2-2. Com $P = 3$, existem 148. Com $P = 4$, existem 120538. Esse número está crescendo extremamente rápido. Utilizamos um programa de computador baseado no algoritmo de Tiernan (1970) para contá-los. Para obter uma rotação ideal de culturas, é necessário usar o algoritmo de Howard para uma equação do mesmo tipo que a equação (1), mas um pouco mais complicada.

4. Exemplo

Tomamos $P = 2$, com 1 representando o pousio e 2 representando um cereal. Suponha que a renda K possa ser dividida em

$$K(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) = b(x_{n-2}) a(x_{n-1}) Q(x_n).$$

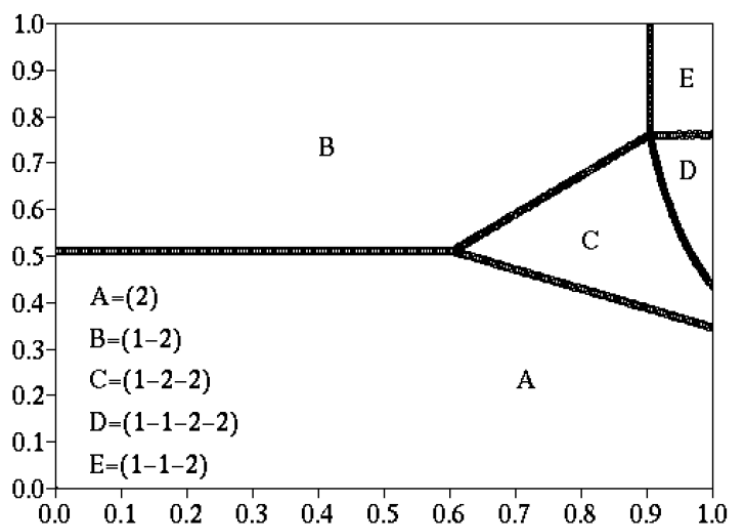
$Q(x_n)$ representa um tipo de renda máxima teórica associada à cultura x_n . Os dois números $a(x_{n-1})$ e $b(x_{n-2})$ estão entre 0 e 1 e representam o efeito anterior e o penúltimo efeito.

Como exemplo numérico, pegamos $Q(1) = 0$, como deveria ser para um pousio, $R(2) = 20$ (unidade não importa aqui), $a(2) = 0,25$ (o cereal esgota o solo) e $b(2) = 0,6$. Esses valores podem ser criticados. Deixamos os dois parâmetros $a(1)$ e $b(1)$ variarem entre 0 e 1. De fato, a fertilidade do solo após o pousio depende muito do trabalho do agricultor. Na antiguidade e durante a Idade Média (Mazoyer et al. 1997), foi somente durante o período de pousio que a fertilização com excrementos de animais foi possível. Se aumentarmos os dois parâmetros, a solução ótima da antiguidade (cereal-pousio) é substituída pela solução ótima da Idade Média (pousio-cereal-cereal). A figura mostra o resultado dos cálculos. O eixo vertical representa $a(1)$, o eixo horizontal $b(1)$. Para cada valor de $a(1)$ e $b(1)$ entre 0 e 1, calculamos a rotação ideal de culturas com o algoritmo de Howard. Para grandes áreas no diagrama, essa rotação de culturas é a mesma; é por isso que em nosso programa, estamos satisfeitos em buscar o limite dessas zonas por um método de dicotomia.

- Na zona A, a monocultura do cereal é ótima;
- na zona B, é a rotação de culturas (pousio / cereal);
- na zona C, é a rotação de culturas (pousio-cereal-cereal);
- na zona D, é a rotação de culturas (pousio-pousio-cereal-cereal);
- na zona E, é a rotação de culturas (pousio-pousio-cereal).

Podemos ver na figura que a transição dos sistemas de cultivo para a Idade Média corresponde à transição da zona B para a zona C. Dentro da estrutura deste modelo e vista na figura, parece que a transição se deve a um aumento do $b(1)$ mais que $a(1)$. Isso significa que a principal contribuição não é o efeito anterior, mas o penúltimo efeito. Além disso, observe que no contexto do primeiro modelo (que leva em consideração apenas o efeito anterior), não podemos explicar a transição. De fato, vamos distinguir um cereal de primavera 2 e um cereal de inverno 3, porque

são necessárias pelo menos três culturas no primeiro modelo para ter uma rotação trienal ideal. Não é possível que, aumentando $K(1, 2)$ e $K(1, 3)$, renda média $(K(1, 2) + K(2, 3))/3$ tornar-se maior que $K(1, 2)/2$.



Referências bibliográficas

- G. B. Dantzig (1963). Linear programming and extensions. Princeton University Press.
- J. M. Boussard et J. J. Daudin (1988). La programmation linéaire dans les modèles de production. Masson, Paris.
- CEMAGREF (1992). GEDE, logiciel d'aide à la décision stratégique pour l'exploitation agricole. Etudes du CEMAGREF, Série Production et économie agricoles no.1, Paris.
- F. Baccelli, G. Cohen, G. J. Olsder, J. P. Quadrat (1992). Synchronization and linearity. John Wiley, Chichester.
- M. Sébillotte (1989). Fertilité et systèmes de production. INRA, Paris.
- J. C. Tiernan (1970). An efficient search algorithm to find the elementary circuits of a graph. Communications of the ACM, vol.13, pp.722 – 726.
- M. Mazoyer et L. Roudart (1997). Histoire des agricultures du monde. Editions du Seuil, Paris.