

Bruno Scaglione - 10335812
Pedro Henrique Martelli Marzagão - 10333612

**Mecânica Computacional Para Mecatrônica -
PMR3401
Exercício Programa 2**

Brasil

3 de fevereiro de 2021

Lista de ilustrações

Figura 1 – Nós da EDP do escoamento	4
Figura 2 – Nós da EDP da Temperatura	4
Figura 3 – Distribuição de Ψ no plano xy em 3D para $\Delta x = \frac{h}{8}$	17
Figura 4 – Distribuição de Ψ no plano xy em 3D para $\Delta x = \frac{h}{4}$	18
Figura 5 – Distribuição de Ψ no plano xy em 3D para $\Delta x = \frac{h}{16}$	18
Figura 6 – Componente i da velocidade (u [m/s]) no plano xy em 2D	21
Figura 7 – Componente j da velocidade (v [m/s]) no plano xy em 2D	21
Figura 8 – Vetores de Velocidade no plano xy	22
Figura 9 – Velocidade absoluta [m/s] no plano xy	22
Figura 10 – Distribuição da Pressão [Pa] no plano xy em 2D	23
Figura 11 – Distribuição da Pressão no plano xy em 3D	23
Figura 12 – Distribuição da variação de pressão ao longo do telhado	26
Figura 13 – Distribuição da Temperatura [$^{\circ}C$] no plano xy em 2D	28
Figura 14 – Distribuição da Temperatura no plano xy em 3D	28

Sumário

1	SETUP	3
2	EQUACIONAMENTOS	7
2.1	Função de Corrente Ψ do Escoamento	7
2.2	Distribuição de Temperatura	11
3	DISTRIBUIÇÃO DO ESCOAMENTO	17
4	CAMPO DE VELOCIDADES E PRESSÃO	20
5	DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURA	28
6	TAXA DE CALOR RETIRADA DO PRÉDIO	30
7	CONCLUSÃO	33

1 Setup

No início do programa, foi feito um setup que serve de base para o resto do código.

Primeiramente foi criado o grid de pontos.

Tanto para a EDP de ψ quanto para a EDP da Temperatura foram feitas três matrizes, além das pedidas.

- **Matriz dos nós no grid** : valores diferentes para os diferentes tipos de nós

Foram atribuídos números diferentes para cada tipo de nó:

- pontos internos -> 1 -> (azul claro nas figuras 1 e 2): nós internos da malha, onde será possível aplicar apenas diferenças centrais.
 - predio (galpão) -> 0 -> (azul escuro nas figuras 1 e 2): nós dentro do prédio ou galpão, que estarão dentro da condição de contorno de dirichelet, com valor fixo
 - borda de dirichelet -> 0 -> (azul escuro nas figuras 1 e 2) : nós das bordas do grid que estarão dentro da condição de dirichelet também.
 - borda de dirichelet em cheio -> 0.5 -> (azul médio nas figuras 1 e 2) : quando o ponto coincide exatamente com a curva do semicírculo, e portanto tá na borda de dirichelet, porém o ponto acima dele não vai ser pré irregularidade.
 - borda de newmann -> 3 -> (amarelo escuro nas figuras 1 e 2): nós que estão sobre uma borda com condição de contorno de Newmann. Ou seja a derivada é conhecida
 - pontos pré irregularidade -> 4 -> (amarelo claro nas figuras 1 e 2) : nós que estão ao lado de uma irregularidade no grid, ou seja está à uma distância menor que dx da borda em algum eixo ou nos dois eixos
- **Matriz de condições de contorno**: se o ponto for uma borda, terá o valor da condição de contorno desse ponto, seja de Dirichelet ou Newmann. Se for um nó interno, é simplesmente atribuído -1, indicando que não faz sentido nesse caso.
 - **Matriz inicial da variável de interesse**: É a matriz com os valores iniciais que vai ser iterada no algoritmo de Liebmann. Nos pontos onde tem condição de Dirichelet, ela assume o valor da condição de contorno, nos outros assume um valor inicial. No caso do ψ , foi iniciada com zeros, no caso da temperatura foi iniciada à 20 graus Celsius para acelerar a convergência.

Figura 1 – Nós da EDP do escoamento

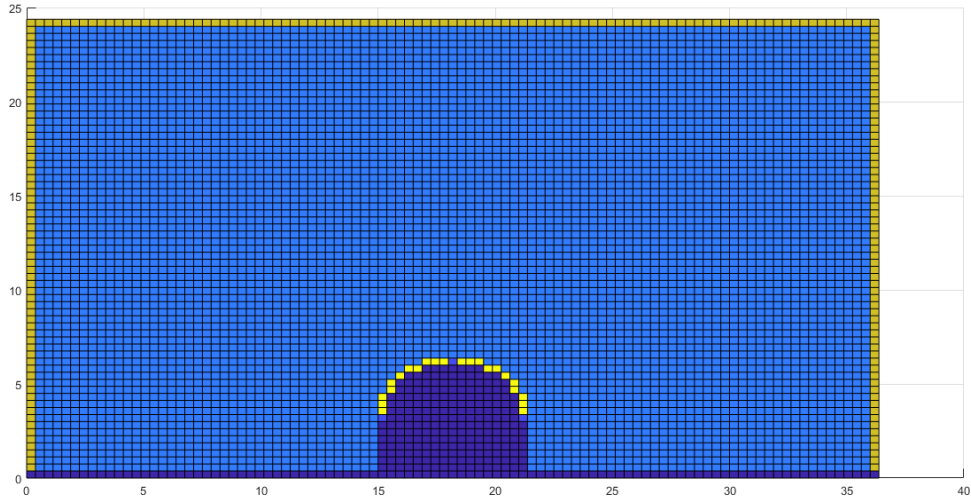
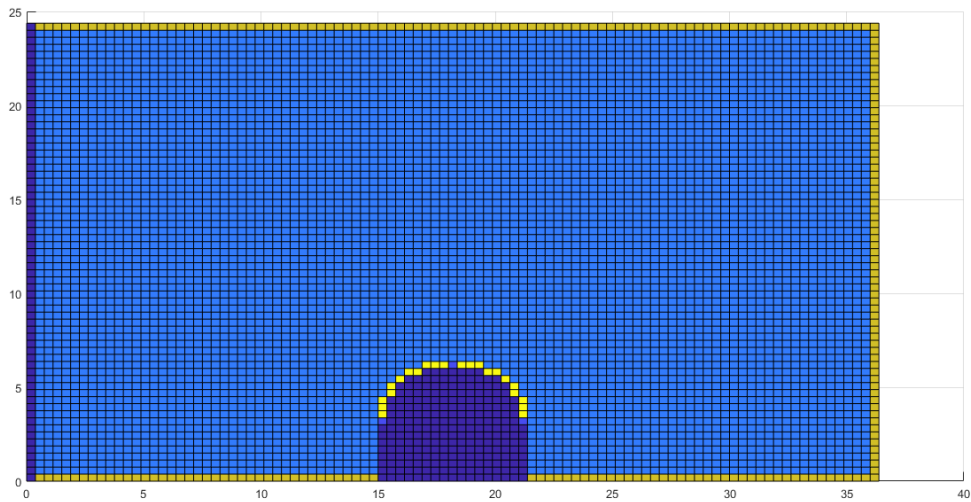


Figura 2 – Nós da EDP da Temperatura



Função Condições: A função Condições vai identificar os tipos de nós na malha através do grid, e atribuir valores fornecidos aos nós de mesma posição em outra matriz, também fornecida para ela. Então ela é usada na criação das três matrizes citadas acima.

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES:

1. **Convenções Adotadas:** Foi adotada uma convenção de direção para a utilização da função que calcula o valor no ponto de uma parede de Neumann, ou seja, que faz expansão de Taylor em um eixo e diferença central no outro. A direção == 1 é quando o Taylor vai ser feito para ponto posterior, e 0 quando é pra ponto interior. A notação de direção também foi utilizada na função que calcula derivada num

ponto pré irregularidade, e nesse caso direção == 1 significa qe o Taylor que se faz para chegar na condição de contorno da borda é para ponto posterior (pontos à esquerda do prédio), enquanto para direcao == 0 é para ponto anterior (pontos à direita do prédio).

2. **Notação Utilizada:** i indica as linhas e o j indica as colunas, a notação matricial, para a manipulação das matrizes. È diferente da notação utlizada nas contas e nos equacionamentos, no papel, das equações. Na matrizes de coordenadas do grid, x cresce para direita e y cresce para baixo, ou seja ela está espelhada em relação ao que se vê nas figuras.
3. **Generalizações:** Todos os equacionamentos, com excessão dos pontos internos, foram implementados em funções para poderem ser reutilizados. Além disso, foram implementados para um eixo genérico, então as funções ficam gerelamente em função de um eixo principal, que é referido no código como ‘eixo’ apenas, e de um eixo secundário, que no código é referido como ‘outro eixo’.

O ‘eixo’ é o eixo em que se aplica a expansão de Taylor, e o outro eixo é o qual se aplica diferença central. Seguindo a generalização, é utilizado ‘ponto ao lado do eixo’, ‘valor borda cc’(será chamada no relatório de VB), ‘ponto antes outro eixo’ e ‘ponto depois outro eixo’ bastante nas condições de contorno, e significam respectivamente: o ponto ao lado do ponto analisado, que não faz parte de uma borda de dirichelet; o valor da condição de contorno de dirichelet (que é usado como valor do ponto ao lado do ponto analisado que está sobre a borda); ponto com a coordenada do eixo secundário - 1 , e ponto com a coordenada do eixo secundário +1 em relação ao ponto analisado.

Ao final do Setup, foram concatenadas todas as matrizes que seriam utilizadas no programa em uma única matriz chamada **malha**. Esta matriz tem 3 dimensões e 12 matrizes empacotadas. A seguir a correspondência de cada índice da 3ª dimensão com a sua matriz:

índices:

1. coordenada x
2. coordenada y
3. tipo de nó no grid, do ψ
4. condição de contorno de nó se tiver, do ψ
5. matriz inicial de ψ
6. componente vertical da velocidade no nó
7. componente horizontal da velocidade no nó
8. velocidade absoluta no nó
9. variação de pressão do nó
10. tipo de nó no grid, da Temperatura
11. condição de contorno de nó se tiver, da Temperatura
12. matriz inicial de Temperatura

2 Equacionamentos

2.1 Função de Corrente Ψ do Escoamento

Ao usar o MDF, para pontos internos, onde podemos aplicar segunda diferença central para os dois eixos:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{\Psi_{i-1,j} - 2\Psi_{i,j} + \Psi_{i+1,j}}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{\Psi_{i,j-1} - 2\Psi_{i,j} + \Psi_{i,j+1}}{\Delta y^2}$$

Nos casos em que os pontos $i+1$, $i-1$, $j+1$ ou $j-1$ não puderem ser obtidos, é necessário usar Taylor, sendo específico para cada situação.

As equações de ψ obtidas foram as seguintes:

Para um ponto qualquer do espaço, sem condição de contorno:
Neste caso será usada a segunda diferença central nos dois eixos.

$$\Psi_{i,j} = \frac{\Psi_{i+1,j} + \Psi_{i-1,j} + \Psi_{i,j+1} + \Psi_{i,j-1}}{4}$$

Parede do topo da região:

Para o eixo x , usaremos a segunda diferença central, mas para y será necessário usar Taylor.

$$\Psi_{i,j} = \frac{\Psi_{i+1,j} + \Psi_{i-1,j} + 2\Delta_y V + 2\Psi_{i,j-1}}{4}$$

Parede da direita da região:

No eixo y é possível usar a segunda diferença central, mas em x é usado Taylor.

$$\Psi_{i,j} = \frac{2\Psi_{i-1,j} + \Psi_{i,j+1} + \Psi_{i,j-1}}{4}$$

Parede da esquerda da região:

No eixo y é possível usar a segunda diferença central, mas em x é usado Taylor.

$$\Psi_{i,j} = \frac{2\Psi_{i+1,j} + \Psi_{i,j+1} + \Psi_{i,j-1}}{4}$$

Os 3 últimos casos foram generalizados, para que fosse utilizada apenas uma função que calcula o ψ no ponto. Foram definidos os valores em relação à um eixo genérico principal (que é o eixo em que se faz a expansão de Taylor), e um eixo secundário (que é o outro eixo em que é realizada segunda diferença central).

Para isso, foi definida uma variável chamada ‘direção’ que vale 1 quando o Taylor é realizado para frente (para ponto posterior); e vale 0 quando realizado para trás (ponto anterior). Pois a cara da equação depende desse fator.

Intersecção parede da esquerda com topo da região:

Para as intersecções, é necessário o uso de Taylor em ambas as direções.

$$\Psi_{i,j} = \frac{\Psi_{i+1,j} + \Delta_y V + \Psi_{i,j-1}}{2}$$

Intersecção parede da direita com topo da região:

Para as intersecções, é necessário o uso de Taylor em ambas as direções.

$$\Psi_{i,j} = \frac{\Psi_{i-1,j} + \Delta_y V + \Psi_{i,j-1}}{2}$$

Esses dois casos, foram denominados casos de ‘forquilha’ dentro do código e também foram generalizados com uma mesma função, a função recebe a variável ‘direção’ que vale 1 quando o Taylor no eixo x é realizado para frente (ponto posterior); e 0 quando realizado para trás (ponto anterior). A direção do Taylor no eixo y é sempre para trás (ponto anterior) e por isso não interfere na cara da equação.

Em Y=0, por Dirichlet:

$$\Psi_{i,j} = 0$$

Os últimos casos a serem analisados são os em que há condição irregular. Eles são mais delicados e requerem uma análise mais aprofundada. Considerando **a** como o fator que multiplica Δ_y (eixo y) e b como fator que multiplica Δ_x (eixo x) na irregularidade:

$$a = \left| \frac{(Y(x) - y)}{\Delta y} \right|,$$

onde $Y(x)$ é a função do telhado do galpão aplicado no ponto x analisado

Para os pontos à esquerda do prédio:

$$b = |((centro_{circ} - \frac{\sqrt{((r^2) - ((y - h)^2))} - x_{ponto})}{\Delta x})|,$$

Para os pontos à direita do prédio:

$$b = |((-centro_{circ} - \frac{\sqrt{((r^2) - ((y - h)^2))} + x_{ponto})}{\Delta x})|,$$

onde $centro_{circ}$ corresponde a coordenada x do centro da circunferência

Irregularidade em apenas um eixo

Tomando por exemplo, a irregularidade no eixo x, para pontos à esquerda do prédio, onde é necessário realizar expansão de Taylor para o ponto posterior para chegar na borda, ficamos com a equação:

$$\Psi_{i,j} = \Psi_{i,j-1} + \Psi_{i,j+1} + \frac{2VB}{b^2 + b} + \frac{\frac{2\Psi_{i-1,j}}{b+1}}{\frac{2}{b} + 2}$$

Sendo VB o valor de Ψ na borda. Se o ponto observado fosse à direita do prédio, teríamos $\Psi_{i+1,j}$ ao invés de $\Psi_{i-1,j}$.

Isto está incluído na generalização também, estes dois termos recebem o mesmo nome para a função, correspondem à $\Psi_{pontoaolado}$ que denomina o ponto ao lado do eixo principal (que se faz Taylor) que não é da borda. Como também, se irregularidade estivesse no eixo y, seria **a** no lugar de **b**. A cara da equação é a mesma sempre, pois foram eliminados os termos correspondentess às primeiras derivadas no desenvolvimento dela.

Irregularidade em ambos os eixos

Tomando como exemplo o ponto à direita do prédio:

$$\Psi = \frac{\frac{VB}{b(b+1)} + \frac{\Psi_{i+1,j}}{b+1} + \frac{VB}{a(a+1)} + \frac{\Psi_{i,j+1}}{a+1}}{\frac{1}{b} + \frac{1}{a}}$$

Assim, como no exemplo anterior, se o ponto fosse à esquerda do prédio, teríamos $\Psi_{i-1,j}$ ao invés de $\Psi_{i+1,j}$.

Isto está incluído na generalização também, estes dois termos recebem o mesmo nome para a função, correspondem à $\Psi_{pontoaolado_x}$ que denomina o ponto ao lado no eixo x, que não é da borda. Neste caso, não temos um eixo principal e secundário, então a função recebe simplesmente os dois pontos ao lado (no eixo x e no eixo y). A cara da equação é a mesma sempre, pois foram eliminados os termos correspondentes às primeiras derivadas no desenvolvimento dela.

Derivada na irregularidade

Esta função é válida para qualquer variável de interesse, ela também é utilizada para outro propósito na EDP da Temperatura.

Para descobrir as componentes de velocidade na borda irregular da superfície, é necessário descobrir as derivadas na borda. O processo é parecido com o de descobrir a segunda derivada (no qual se faz uma combinação linear de uma expansão de Taylor para frente e outra para trás, para se livrar do termo de primeira derivada). Só que nesse caso, o objetivo é se livrar o termo de segunda derivada, e é possível fazer isso multiplicando a expansão de Taylor, para o ponto que não é da borda, por $-letra^2$, onde letra corresponde à **a** ou **b**.

Tomando como exemplo, a obtenção da derivada em x de um ponto à direita do prédio (direção == 0):

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{(VB - (b^2)\Psi_{i+1,j} + (((b^2) - 1)\Psi_{i,j}))}{((b + b^2)\Delta x)},$$

agora, à esquerda do prédio (direção == 1)

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{(VB - (b^2)\Psi_{i+1,j} + (((b^2) - 1)\Psi_{i,j}))}{((b + b^2)\Delta x)},$$

Esta função também está generalizada no código, e pode ser aplicada à derivada no eixo y, para os índices correspondentes, e **a** no lugar de **b**.

2.2 Distribuição de Temperatura

Para obter a distribuição de temperatura do ambiente, nos foi dada a seguinte equação:

$$k\nabla^2 T - \rho c_p U \nabla T = 0$$

A fim de garantir que o sistema continue estável, é necessário realizar um passo extra, utilizando diferenças finitas para trás. Neste caso, devemos analisar se u e v , que são os vetores de velocidade, são positivos e negativos. Sendo assim, os casos são separados da seguinte forma:

Para $u > 0$:

$$\delta_x T = \frac{(T_{i,j} - T_{i-1,j})}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

Para $u < 0$:

$$\delta_x T = \frac{(T_{i+1,j} - T_{i,j})}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

Para $v > 0$:

$$\delta_y T = \frac{(T_{i,j} - T_{i,j-1})}{\Delta y} + O(\Delta y)$$

Para $v < 0$:

$$\delta_y T = \frac{(T_{i,j+1} - T_{i,j})}{\Delta y} + O(\Delta y)$$

Para facilitar os cálculos, foram criadas duas constantes:

$$C_1 = \frac{\rho c_p}{\Delta x}$$

$$C_2 = \frac{k}{\Delta x^2}$$

Foram feitos os cálculos para o equacionamento nos diferentes pontos do domínio, sendo divididos em diferentes casos. Além disso, com análise prévia dos resultados obtidos no item B da primeira tarefa, foi estabelecido que $u > 0$ em todos os pontos observados no sistema, o que reduz o número total de equações.

A função é definida para um eixo genérico (no qual é aplicado a expansão de Taylor) principal e um eixo secundário (no qual é realizado diferença central). Quando realiza-se expansão de Taylor nos dois eixos, a função apenas recebe os valores correspondentes à cada eixo.

Pontos internos:

Para estes pontos foi utilizada a segunda diferença central nos dois eixos.

$$w = \frac{k}{\Delta x^2} (T_{i-1,j} + T_{i+1,j} + T_{i,j-1} + T_{i,j+1})$$

Se $u > 0$ e $v > 0$:

$$T_{i,j} = \frac{w - C_1(-uT_{i-1,j} - vT_{i,j-1})}{2C_2 + C_1(u + v)}$$

Se $u > 0$ e $v < 0$:

$$T_{i,j} = \frac{w - C_1(-uT_{i-1,j} + vT_{i,j+1})}{2C_2 + C_1(u - v)}$$

Borda de Neumann nas paredes:

Em um dos eixos é necessário fazer expansão de Taylor, enquanto no outro é usada a segunda diferença central. Tomando como exemplo a parede inferior e as duas componentes da velocidade positivas, temos a seguinte equação:

$$z = C_2(T_{i-1,j} + T_{i+1,j} + 2T_{i,j+1} - \Delta x \frac{\partial T}{\partial y})$$

$$T_{i,j} = \frac{z - C_1(-uT_{i-1,j} + v\frac{\partial T}{\partial y})}{4C_2 + C_1u}$$

Utilizando a Generalização aplicada:

O eixo principal (no qual se realiza a expansão em Taylor) é y.

$$\frac{\partial T}{\partial eixo} = \frac{\partial T}{\partial y}$$

$$T_{ponto} = T_{i,j}$$

$$T_{ponto_aolado_eixo} = T_{i,j+1}$$

$$ponto_antes_outroeixo = T_{i-1,j}$$

$$T_{ponto_depois_outroeixo} = T_{i+1,j}$$

$$comp_velocidade_eixo = v$$

$$comp_velocidade_outroeixo = u$$

A equações generalizadas:

$$z = C_2(T_{ponto_antes_outroeixo} + T_{ponto_depois_outroeixo} + 2T_{ponto_aolado_eixo} - \Delta x \frac{\delta T}{\delta y})$$

$$T_{ponto} = \frac{z - C_1(-uT_{ponto_antes_outroeixo} + comp_velocidade_eixo \frac{\partial T}{\partial eixo})}{4C_2 + C_1 comp_velocidade_outroeixo}$$

A cara dessa função muda dependendo da componente da velocidade no outro eixo e a da direção da expansão de Taylor:

Se direção == 0 (Taylor para trás no eixo principal, eixo no qual é feito Taylor):

$$z = C_2(T_{ponto_antes_outroeixo} + T_{ponto_depois_outroeixo} + 2T_{ponto_aolado_eixo} + \Delta x \frac{\delta T}{\delta y})$$

Se a compoenente de volicidade no outro eixo for < 0 (observação: no caso do ep nunca poderá ser u, pois u é sempre positiva):

$$T_{ponto} = \frac{z - C_1(uT_{ponto_antes_outroeixo} + comp_velocidade_eixo \frac{\partial T}{\partial eixo})}{4C_2 - C_1 comp_velocidade_outroeixo}$$

Newmann nos dois eixos (forquilha ou quina):

É necessário usar a expansão de Taylor nos dois eixos, particularmente no caso dessa equação a expansão em Taylor no eixo x sempre vai ser para trás (ponto anterior). Se direção == 1, a expansão em y será para ponto posterior (quina inferior direita), e se direção == 0, a expansão em y será para ponto anterior (quina superior direita).

Tomando como exemplo a quina inferior direita, (direção == 1) temos:

$$F = 2C_2(T_{i-1,j} + \Delta x \frac{\partial T}{\partial x} + T_{i,j+1} - \Delta x \frac{\partial T}{\partial y})$$

Para a quina superior direita, (direção == 0) temos:

$$F = 2C_2(T_{i-1,j} + \Delta x \frac{\delta T}{\delta x} + T_{i,j+1} + \Delta x \frac{\partial T}{\partial y})$$

E a equação final:

$$T_{i,j} = \frac{F - C_1[u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y}]}{4C_2}$$

Irregularidade em apenas um eixo:

Será usado Taylor no eixo em que há irregularidade e segunda diferença central no outro.

Tomando como exemplo, um ponto à esquerda do prédio ($v > 0$) que sofre apenas irregularidade em x:

$$H = C_2(\frac{2T_{i+1,j}}{b^2 + b} + \frac{2T_{i-1,j}}{b + 1} + T_{i,j-1} + T_{i,j+1})$$

$$T_{i,j} = \frac{H - C_1(-uT_{i+1,j} - vT_{i,j-1})}{2C_2(1 + b) + C_1(u + v)}$$

Utilizando a Generalização aplicada:

O eixo principal (no qual se realiza a expansão em Taylor) é x.

$$valor_borda_cc = T_{i+1,j} = T_{i,j-1}$$

$$T_{ponto} = T_{i,j}$$

$$T_{ponto_aolado_eixo} = T_{i-1,j}$$

$$T_{\text{ponto_antes_outroeixo}} = T_{i,j-1}$$

$$T_{\text{ponto_depois_outroeixo}} = T_{i,j+1}$$

$$\text{comp_velocidade_eixo} = u$$

$$\text{comp_velocidade_outroeixo} = v$$

$$\text{letra} = b$$

As equações generalizadas:

$$H = C_2 \left(\frac{2\text{valor_borda_cc}}{\text{letra}^2 + \text{letra}} + \frac{2T_{\text{ponto_aolado_eixo}}}{\text{letra} + 1} + T_{\text{ponto_antes_outroeixo}} + T_{\text{ponto_depois_outroeixo}} \right)$$

$$T_{\text{ponto}} = \frac{H - C_1(-\text{comp_velocidade_eixo} \cdot \text{valor_borda_cc} - \text{comp_velocidade_outroeixo} \cdot T_{\text{ponto_antes_outroeixo}})}{2C_2(1 + \text{letra}) + C_1(\text{comp_velocidade_eixo} + \text{comp_velocidade_outroeixo})}$$

A cara da equação muda, se $v > 0$ ou $v < 0$. Mas como função está definida genérica-mente, não sabemos qual componente da velocidade é v , pois pode ser feito nos dois eixos. Então é preciso verificar os dois casos:

Se $v == \text{comp_velocidade_eixo} < 0$:

$$T_{\text{ponto}} = \frac{H - C_1(\text{comp_velocidade_eixo} \cdot T_{\text{ponto_aolado_eixo}} - \text{comp_velocidade_outroeixo} \cdot T_{\text{ponto_antes_outroeixo}})}{2C_2(1 + \text{letra}) + C_1(-\text{comp_velocidade_eixo} + \text{comp_velocidade_outroeixo})}$$

Se $v == \text{comp_velocidade_outroeixo} < 0$:

$$T_{\text{ponto}} = \frac{H - C_1(-\text{comp_velocidade_eixo} \cdot \text{valor_borda_cc} + \text{comp_velocidade_outroeixo} \cdot T_{\text{ponto_depois_outroeixo}})}{2C_2(1 + \text{letra}) + C_1(\text{comp_velocidade_eixo} - \text{comp_velocidade_outroeixo})}$$

Irregularidade em ambos os eixos:

Deve ser feita a expansão em Taylor nos dois eixos.

Tomando como exemplo um ponto à direita do prédio ($v < 0$)

$$I = 2C_2 \left[\frac{VB}{b^2 + b} + \frac{T_{i+1,j}}{b + 1} + \frac{VB}{a^2 + a} + \frac{T_{i,j+1}}{a + 1} \right]$$

Para $u > 0$ e $v < 0$:

$$T_{i,j} = \frac{I - C_1(-uVB + vT_{i,j+1})}{2C_2(\frac{1}{b} + \frac{1}{a}) + C_1(u - v)}$$

Para $u > 0$ e $v > 0$:

$$T_{i,j} = \frac{I - C_1(-uVB - vVB)}{2C_2(\frac{1}{b} + \frac{1}{a}) + C_1(u + v)}$$

As equações acima também estão generalizadas numa única função. Os valores $T_{i+1,j}$ e $T_{i,j+1}$ correspondem à $T_{\text{ponto_aolado_eixo_x}}$ e $T_{\text{ponto_aolado_eixo_y}}$ respectivamente. Se por exemplo, o ponto estivesse do lado esquerdo do prédio (que na verdade é o segundo caso acima), seria $T_{i-1,j}$ ao invés de $T_{i+1,j}$.

3 Distribuição do Escoamento

Foi utilizado o algoritmo de Liebmann com os seguintes parâmetros:

- Δx : $h/8 == 3/8$
- tolerância de convergência: 0.0005
- λ de sobrerelaxação: 1.85

Resultados:

Figura 3 – Distribuição de Ψ no plano xy em 3D para $\Delta x = \frac{h}{8}$

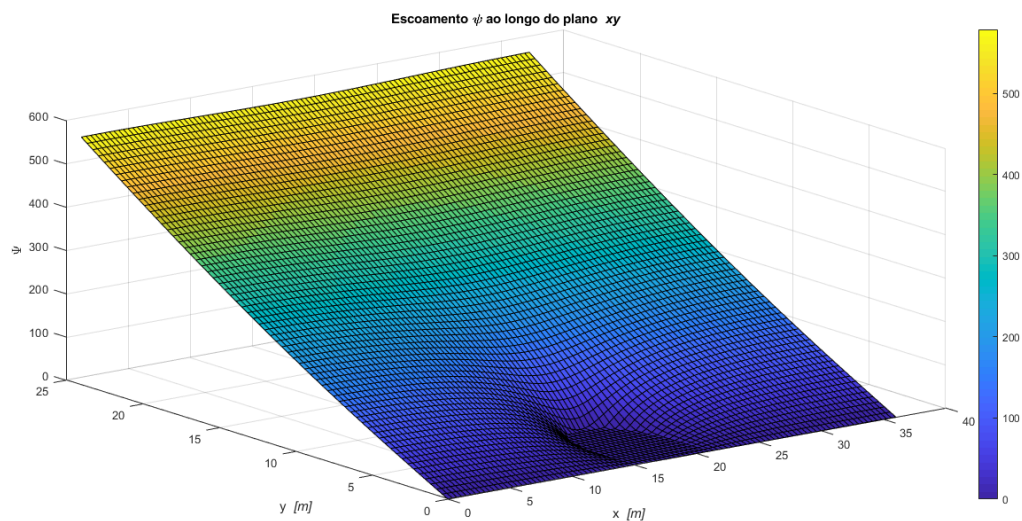


Figura 4 – Distribuição de Ψ no plano xy em 3D para $\Delta x = \frac{h}{4}$

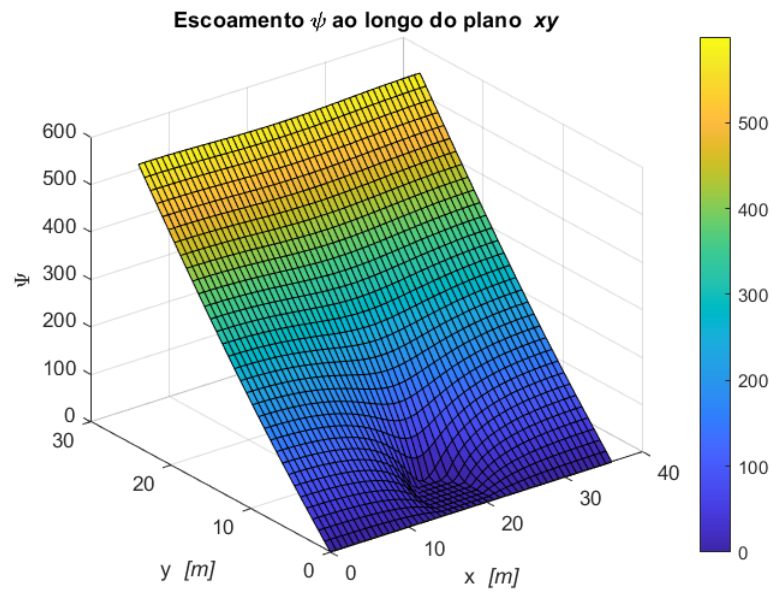
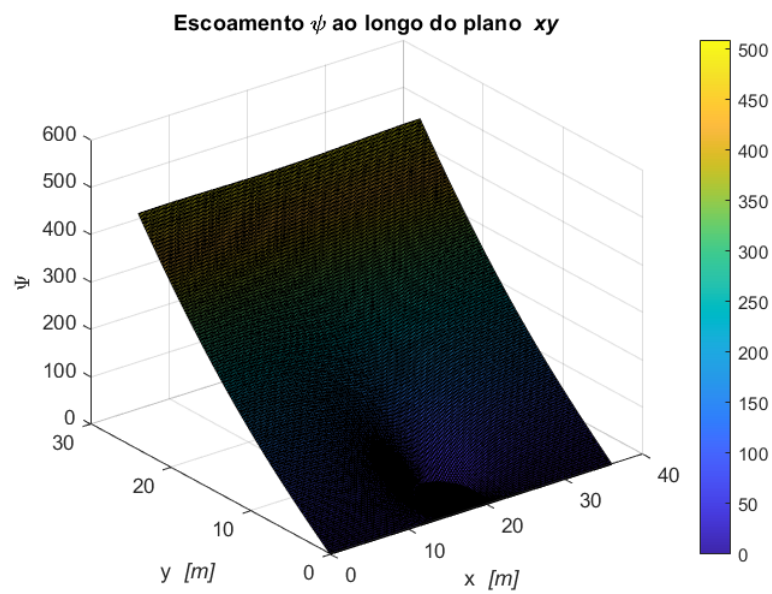


Figura 5 – Distribuição de Ψ no plano xy em 3D para $\Delta x = \frac{h}{16}$



Discussão:

Em relação ao Δx , optamos por $\frac{h}{8}$ por duas razões. A primeira é que na Parte 2 foi recomendado o uso de $\frac{h}{8}$ pelo próprio enunciado, e como a Parte 2 utiliza valores nos pontos (velocidades) obtidos na Parte 1, a dimensão das matrizes precisam coincidir. A segunda razão é que $\frac{h}{8}$ é um valor intermediário entre [interpretabilidade do gráfico e custo computacional] e [precisão]. O gráfico com $\Delta x = \frac{h}{4}$ embora apresenta boa interpretabilidade e pouco custo computacional, apresenta maior imprecisão; e com $\Delta x = \frac{h}{16}$ embora temos uma precisão maior, também temos um gráfico menos interpretável e maior custo computacional. Assim $\Delta x = \frac{h}{8}$ foi um valor adequado para compatibilização com a Parte 2, interpretabilidade do gráfico, precisão dos resultados e realização de testes sucessivos.

Em relação à tolerância de convergência, tivemos que utilizar um valor diferente do recomendado pelo enunciado. Inicialmente utilizamos o valor de 0,01 recomendado pelo enunciado; porém verificamos que com esse valor os pontos em $j=1$ (j referente às colunas, notação matricial) não estavam convergindo corretamente. Os valores da função deveriam ser estritamente decrescente ao longo do eixo x até a metade da malha, porém nesse ponto específico o valor aumentava. Então dividimos por 10 a tolerância de convergência, o erro diminuiu, mas continuou; em seguida dividimos por 2 e observamos que já estava convergindo corretamente.

Em relação aos resultados obtidos, estes parecem estar de acordo com as expectativas. É possível notar que as condições de contorno do problema são satisfeitas e a cara do gráfico faz sentido. O gráfico é aproximadamente linear para pontos longe do prédio, e quanto mais perto do prédio, mais curvatura a superfície adquire e menor o valor do ponto devido à curvatura imposta.

4 Campo de Velocidades e Pressão

Primeiro é preciso obter as componentes i e j da velocidade, que são u e v respectivamente.

As componentes u e v estão relacionadas à distribuição de Ψ da seguinte maneira:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -v \quad e \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = u$$

Após obtidas as componentes, utilizando a fórmula abaixo, é possível obter a variação de pressão em cada ponto.

$$p(x, y) - p_{atm} = \rho \frac{\gamma_{ar} - 1}{\gamma_{ar}} \left(-\frac{(\sqrt{(u(x+y))^2 + v(x+y)^2})^2}{2} \right)$$

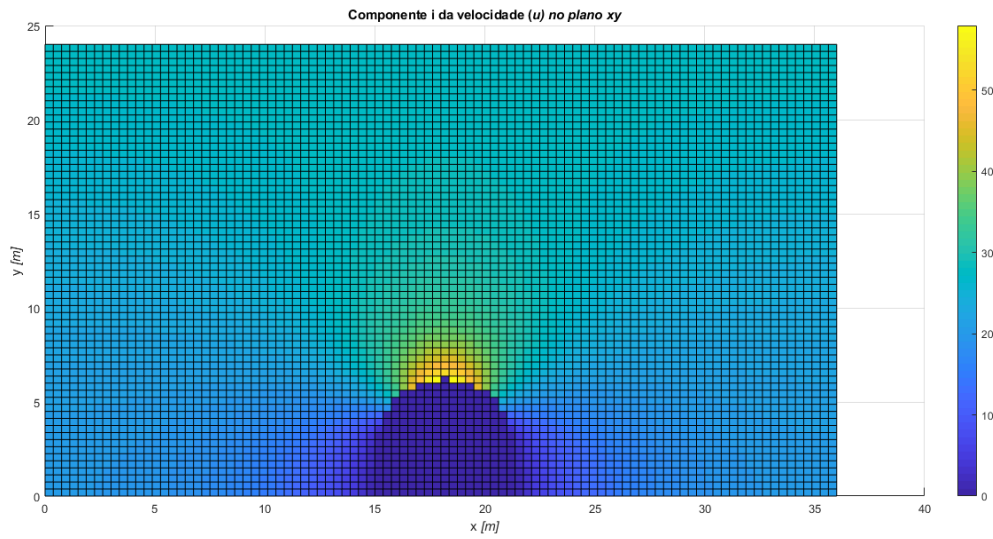
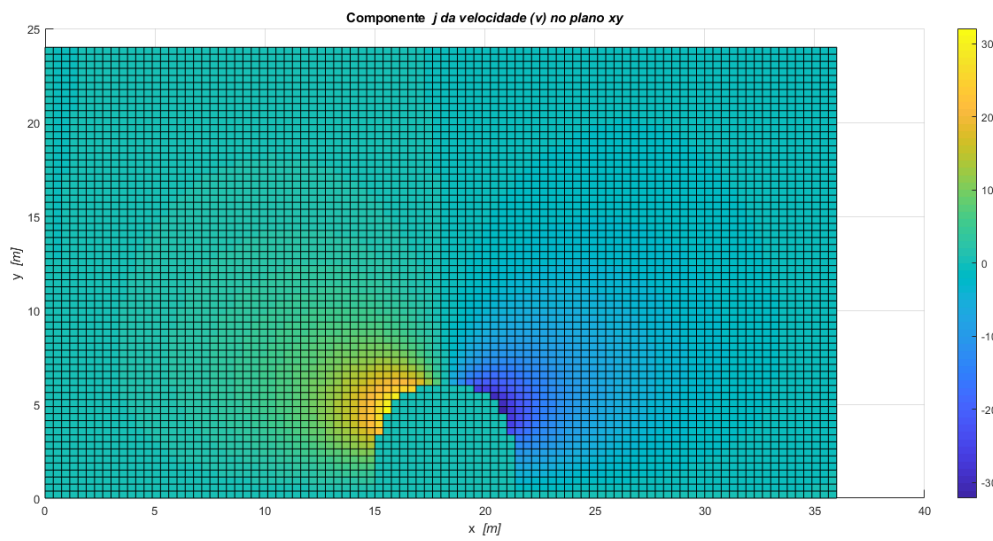
Resultados:Figura 6 – Componente i da velocidade (u [m/s]) no plano xy em 2DFigura 7 – Componente j da velocidade (v [m/s]) no plano xy em 2D

Figura 8 – Vetores de Velocidade no plano xy

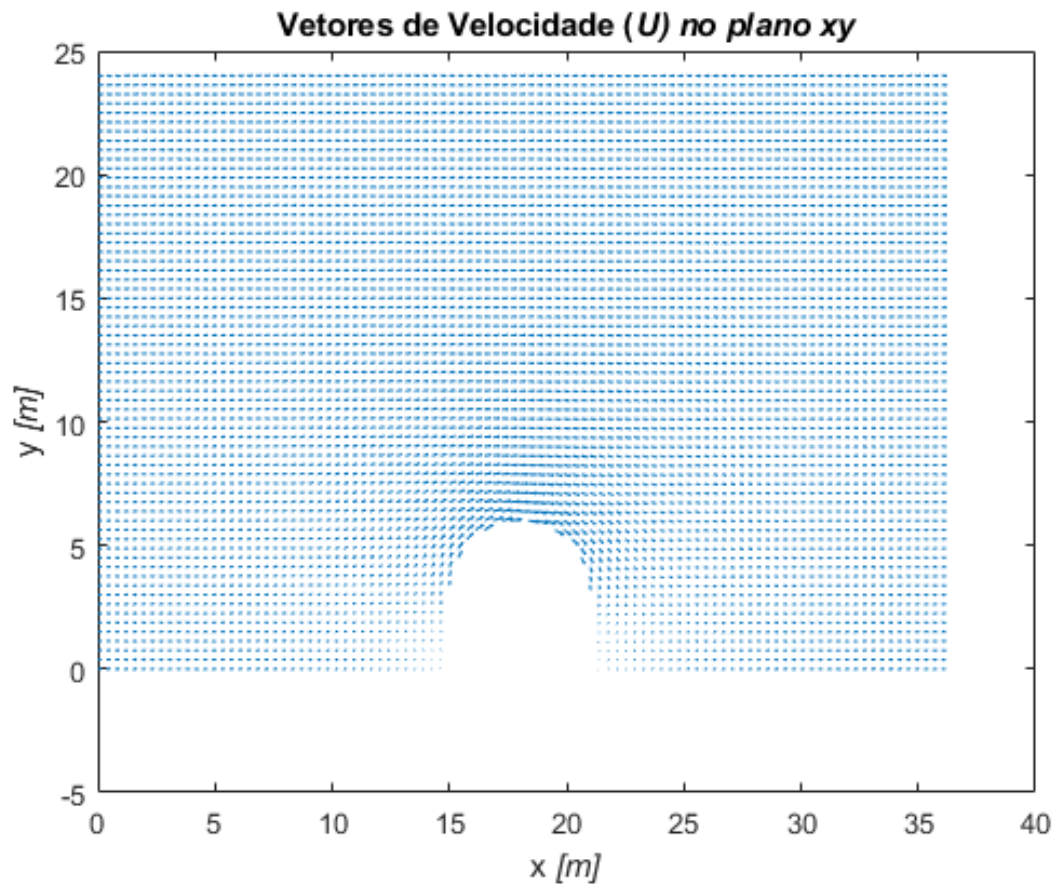


Figura 9 – Velocidade absoluta [m/s] no plano xy

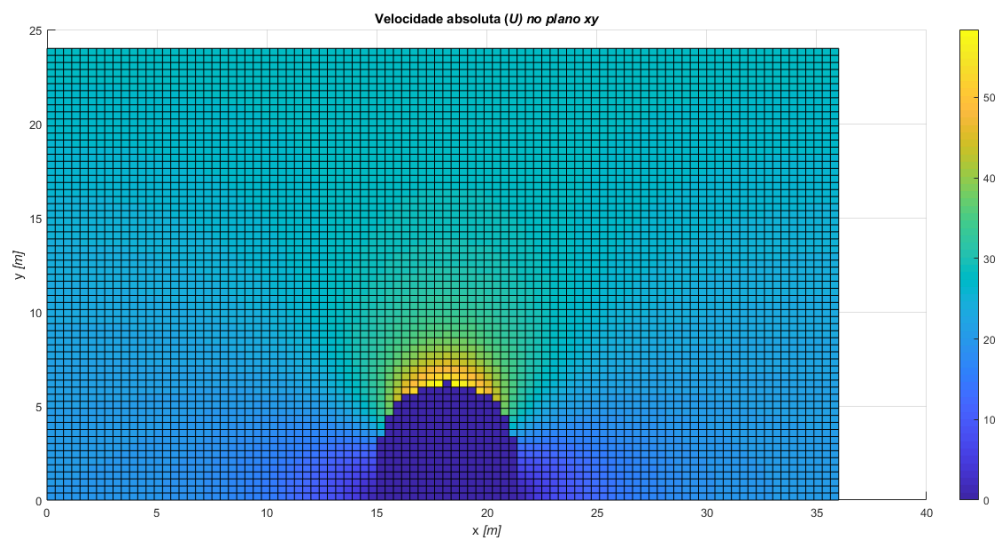


Figura 10 – Distribuição da Pressão [Pa] no plano xy em 2D

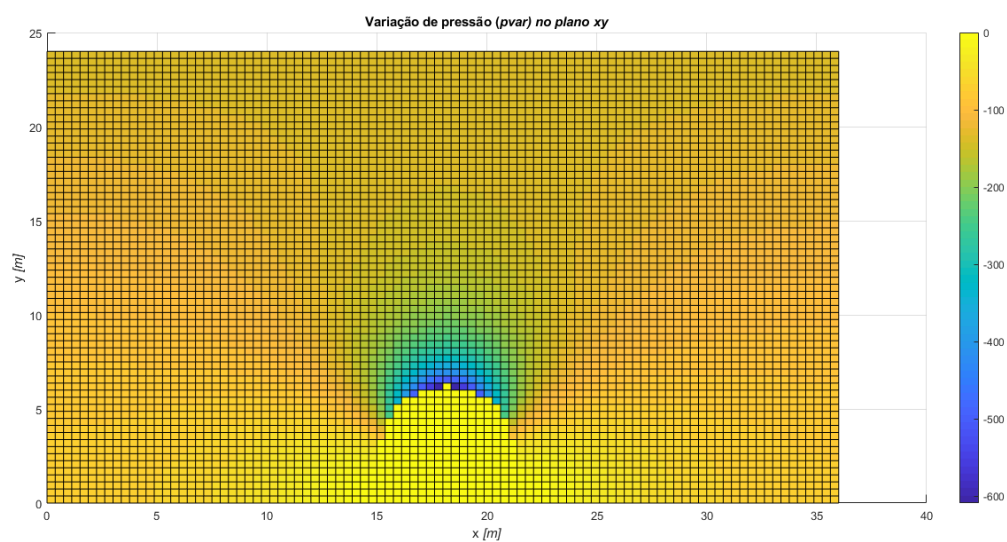
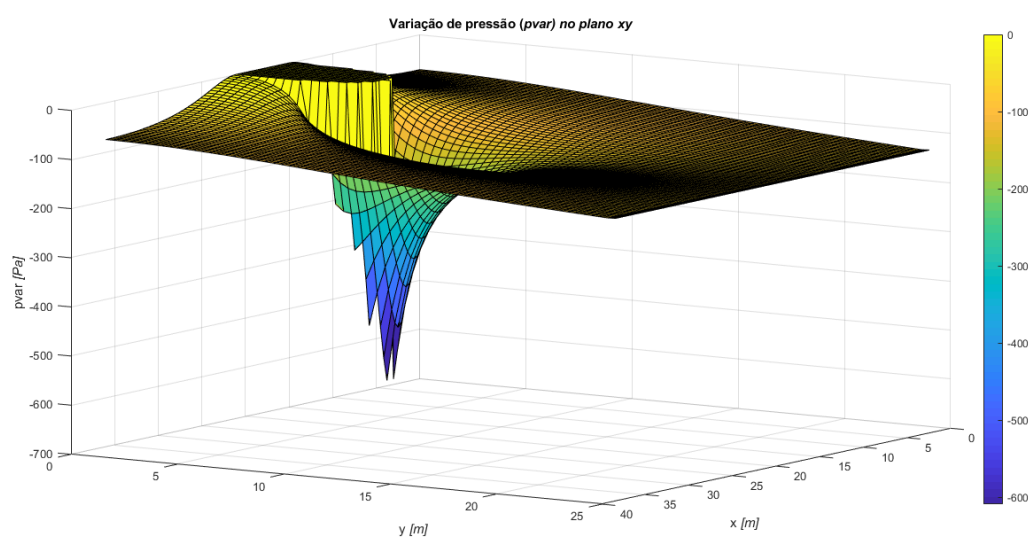


Figura 11 – Distribuição da Pressão no plano xy em 3D



Discussão:Velocidades

Quanto aos componentes da velocidade, sabemos que $\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -v$ e que $\frac{\partial \Psi}{\partial y} = u$, portanto, é de se esperar que estes componentes tenham valores mais acentuados quanto maior a variação do escoamento, tanto no eixo X, quanto no eixo Y. O encontrado em nossos resultados, é que as velocidades são maiores exatamente nos pontos próximos aos contornos irregulares, e não coincidentalmente é onde há a maior variação de corrente de escoamento. A grande variação ocorre pelo fato de que dentro da estrutura há a ausência da corrente de escoamento, portanto ela é sempre igual a 0, em contraste aos pontos ao redor, externos à estrutura, que tem valores superiores a 0.

O mais interessante está em como as velocidades aparecem, já que u depende da variação em Y, e este componente se apresenta com valores mais acentuados exatamente nos pontos acima do telhado. Já para v , este depende de X, e tem os maiores valores tanto à esquerda, quanto à direita da estrutura, porém, com valores opostos em cada lado. À esquerda, estes valores são positivos, já que o escoamento está reduzindo ao chegar perto da estrutura, enquanto os valores à direita são negativos, pelo fato de que o escoamento está aumentando.

Observando o gráfico da velocidade absoluta é possível notar que ele é muito parecido com o gráfico da componente j (u) da velocidade. Este era o resultado esperado, já que os pontos de maior componente j se concentram em cima, e os pontos de maior componente i , em módulo, se concentram ao lados simetricamente e com valor, em módulo, menor que da componente j .

A seguir, falaremos dos vetores de velocidade U obtidos no plano. O esperado em teoria seriam vetores que majoritariamente apontam para a direita, já que a componente j é quase sempre nula, e u é sempre positiva. Isto é o observado pelo gráfico gerado, com exceção dos pontos próximos ao contorno irregular, os quais já tiveram explicação sobre o porque das velocidades variarem.

Variação de pressão

Como determinado pela expressão da pressão dada no enunciado do problema, temos que ela se intensifica quanto maiores os valores de u e v , portanto o esperado é de se ver uma pressão maior exatamente nos pontos próximos à estrutura, nos quais as velocidades são mais intensas. Exatamente este comportamento é observado no gráfico de pressões, principalmente nos pontos mais ao topo da edificação. A variação de pressão é negativa pois, em Bernoulli, se um ponto de velocidade maior, sua pressão vai ser menor.

Variação de pressão no telhado e força vertical resultante

Para a variação pressão no telhado, pegamos todos os pontos logo acima dos pontos

da borda de dichelet do prédio, não pegamos os pontos da borda em si, onde a temperatura é fixa, mas sim da ‘primeira camada’ após a borda, composta basicamente por pontos que sofrem irregularidade. Pois, a borda em si, tem velocidade 0, e por isso os valores de pressão da primeira camada devem ser os mais condizentes.

Fizemos ainda, uma curva de 2º grau que se encaixa aos pontos obtidos, para verificar a tendência dos pontos, e a variância introduzida pela discretização.

O cálculo da força vertical resultante foi feito multiplicando a pressão média (pois os pontos estão igualmente espaçados em x) pela área telhado projetada no plano xz, da seguinte forma:

$$pressao_media = \frac{(sum(ptelhado))}{num_points}$$

$$forca_vertical = pressao_media \cdot area_telhado_projecaoxz$$

onde:

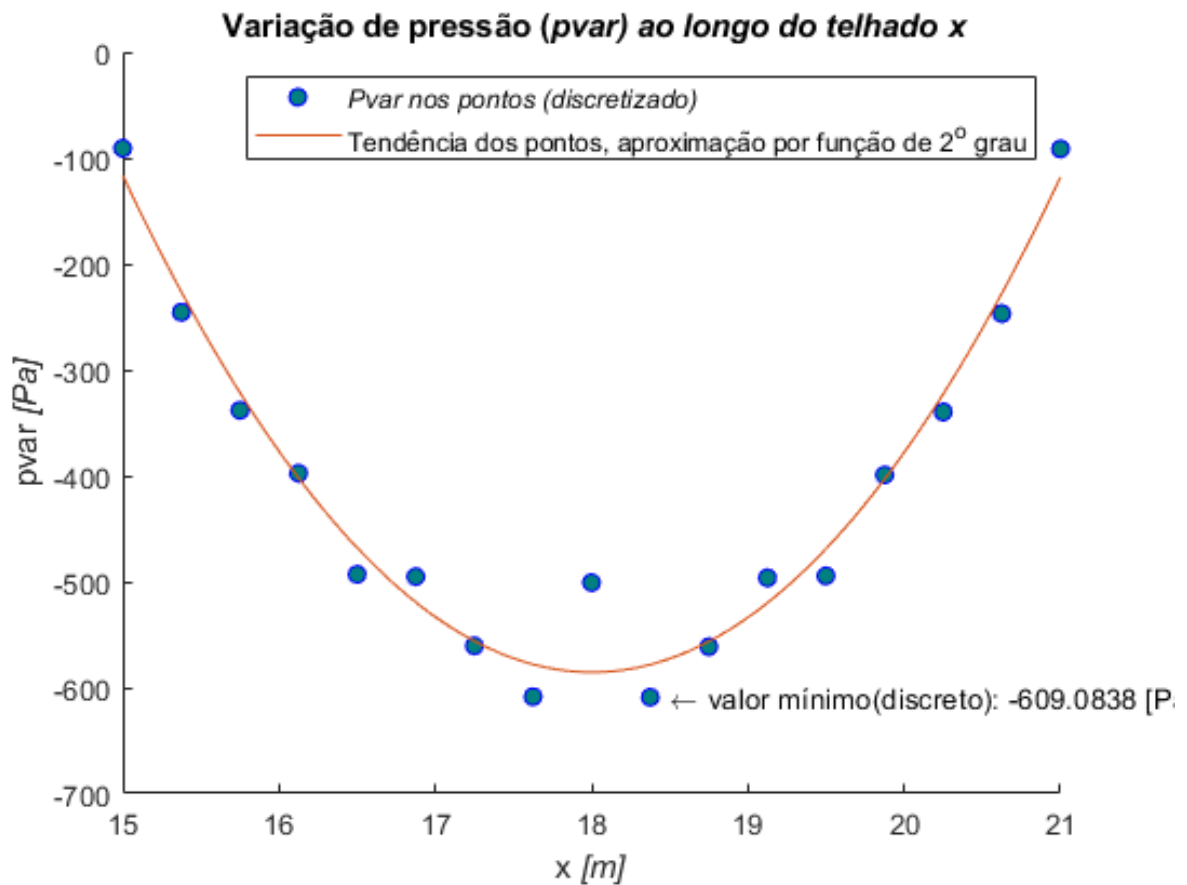
$sum(ptelhado)$ é a soma de todas as pressões ao longo do telhado;

num_points é o número de pontos de discretização no eixo x ao longo do telhado;

$area_telhado_projecaoxz$ é $l \cdot L$

Resultados:

Figura 12 – Distribuição da variação de pressão ao longo do telhado



Pressão mínima obtida: -609,0838 [Pa]

Força vertical obtida: -147590 [N]

Discussão: Assim como discutido anteriormente, a pressão é maior na região ao redor da estrutura, portanto é interessante vermos como ela se distribui ao longo do telhado. Como obtido pelo gráfico acima, há uma crescente na pressão em direção ao centro do telhado, compatível com os valores de velocidades absolutas. Foi plotado uma curva de 2º grau (considerando que a pressão é descrita por uma equação de 2º para avaliar a tendência dos pontos).

O ponto bem no meio do telhado é uma exceção. A pressão diminui devido ao fato do ponto abaixo dele coincidir perfeitamente com o contorno irregular da borda do telhado, que tem velocidade nula. Este ponto acaba sendo um ponto fora da curva de tendência dos pontos, pois representa um erro associado à discretização da malha.

Com respeito à força, ela foi calculada a partir da pressão média, multiplicada pela área do telhado projetada no plano xz. O valor de -147590 N, apesar de muito alto, está de acordo com o esperado de acordo com as equações utilizadas. Esta força provavelmente seria capaz de causar grandes danos à estrutura e arrancar o telhado. Em relação às

velocidades ao redor do telhado, o valor absoluto gira em torno de 50 e 60 [m/s], que se compara às velocidades de um tufão.

5 Distribuição de Temperatura

Foi utilizado o algoritmo de Liebmann com os parâmetros definidos pelo enunciado:

- $\Delta x : h/8 == 3/8$
- tolerância de convergência: 0.01
- λ de sobrerelaxação: 1.15

Resultados:

Figura 13 – Distribuição da Temperatura $[C^{\circ}]$ no plano xy em 2D

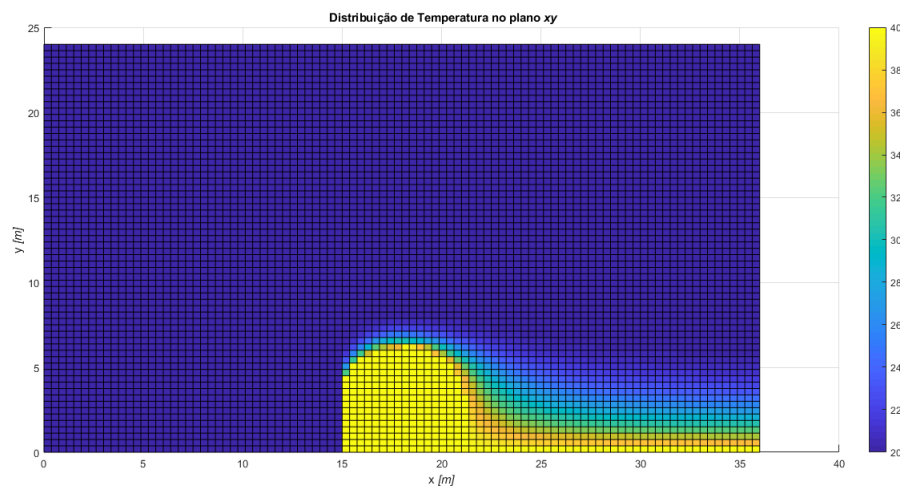
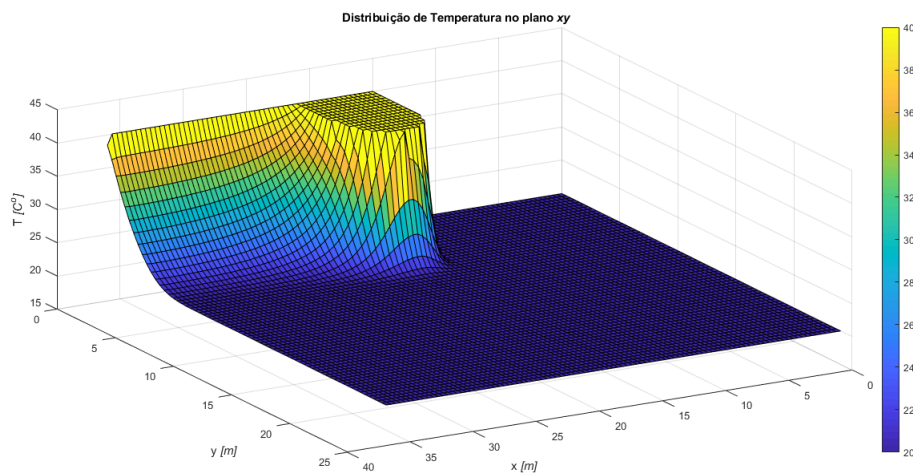


Figura 14 – Distribuição da Temperatura no plano xy em 3D



Discussão:

Foram utilizados os parâmetros recomendados no enunciado.

Pode-se observar que as condições de contorno estão satisfeitas.

A fim de explicar o observado, é necessário primeiro recordar como se comportava o vetor velocidade U do vento na região estudada. Como já visto, o vento vem da esquerda e vai para a direita, e com isso, acaba retirando calor do prédio, e o levado na direção a qual ele está indo. Isto causa o aumento na temperatura nos pontos à direita do prédio.

O calor também se mantém a níveis altos próximo do solo, o que faz sentido levando em consideração que ao contornar o prédio, o vento acaba sendo direcionado ao solo quando se desprende da camada limite próxima à superfície do prédio. Considerando que para o solo apenas foi imposta condição de contorno de Newmann.

6 Taxa de calor retirada do prédio

O cálculo da taxa de calor retirada do prédio se dá pela equação:

$$q = \int_A \vec{Q} \cdot \vec{n} dA = - \int_A k \frac{\partial T}{\partial n} dA = - \int_A k \nabla T \cdot \vec{n} dA$$

Foram utilizados os pontos que fazem parte da borda de Dirichelet e estão na iminência da borda.

A integração é feita somando a contribuição de cada ponto da borda, que tem as suas derivadas, versor normal e diferencial de área.

Foi somada a contribuição da taxa retirada das paredes do prédio com o telhado. O k foi retirado da integral, e, como o comprimento é constante, este também foi retirado da integral. Sobramos com:

Para as paredes

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y} \right) \cdot (normal_i, normal_j) dx$$

Para o telhado

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y} \right) \cdot (normal_i, normal_j) darco$$

onde darco é o diferencial de arco de circunferência, e $normal_i, normal_j$ são as componentes do versor normal à superfície no ponto.

Cálculo nas paredes

O versor normal é: $(-1i, 0j)$ ou $(1i, 0j)$

As derivadas são calculadas por primeira diferença central nos dois eixos.

Cálculo no telhado

O versor normal foi calculado da seguinte forma:

$$modulo_vetor = \sqrt{((x_ponto - centro_cir_x)^2 + (y_telhado - centro_cir_y)^2)}$$

$$normal_i = \frac{(x_ponto - centro_cir_x)}{modulo_vetor}$$

$$normal_j = \frac{(y_telhado - centro_cir_y)}{modulo_vetor}$$

onde:

- $y_telhado$ é o $Y(x_ponto)$ onde $Y(x)$ é a função que descreve o semicírculo;
- $centro_cir_x$ e $centro_cir_y$ são as coordenadas do centro da circunferência

As derivadas foram calculadas utilizando: a função de derivada na irregularidade (explicada na parte de equacionamentos) para o eixo que tem irregularidade e por 1ª diferença central em eixo que não tem irregularidade.

O cálculo de darco:

$$\theta = atan(|(normal_j/normal_i)|)$$

Para $x < d + L/2$:

$$arco_horario_atual = \theta \cdot r$$

Para $x > d + L/2$:

$$arco_horario_atual = (\pi - \theta) \cdot r$$

$$darco = arco_horario_atual - arco_horario_anterior$$

onde:

θ é sempre o ângulo com a horizontal;

$arco_horario_atual$ é o arco atual no sentido horário de ângulo θ ;

$arco_horario_anterior$ é arco do ponto anterior.

Resultados:

Calor Trocado = 890,15 W

Discussão:

7 Conclusão

Ao utilizar o Método das Diferenças Finitas em uma situação real, foi possível ter um melhor entendimento de dos algoritmos que resolvem numericamente equações diferenciais parciais de extrema relevância do nosso cotidiano.

Além disso, a análise e escolha dos parâmetros, como passo e tolerância de convergência, é de extrema importância, pois define o grau de discretização e precisão aplicados no problema, e conseqüentemente à sua correspondência com a realidade.

Por fim, é importante ressaltar que a situação obtida pelas condições de contorno impostas descrevem um evento catastrófico. Gostaríamos deixar nossas condolências para as famílias de quem mora na região desse prédio.