Diseño de controladores de estado lineales

Controlador en esquema Entrada-Salida

Se realimenta/sensa solo la salida

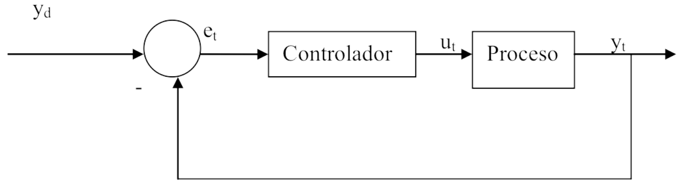
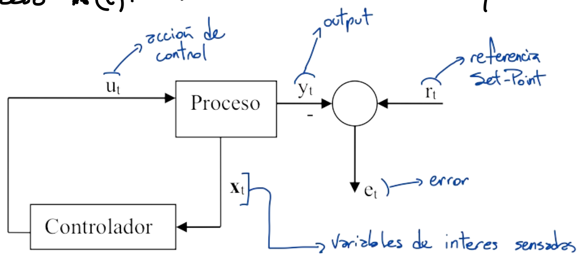


Fig. 5-1. Esquema de control en la representación de sistemas Entrada-Salida.

Controlador en esquema de Espacio de Estados

Se realimenta el estado del proceso $x(t)$. $\Rightarrow$ sensa una variable y sus derivadas de interés



$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t)$

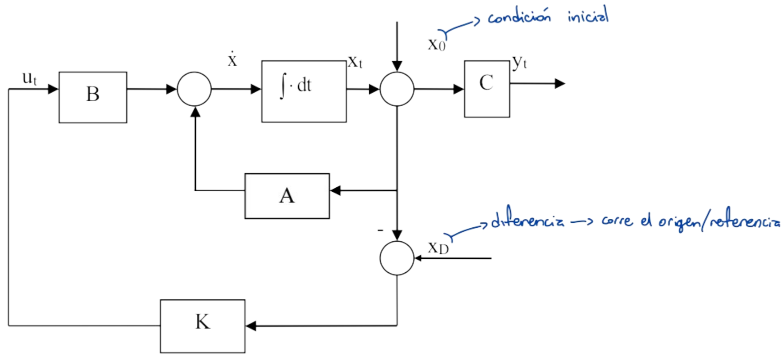
$Y(t) = C\,x(t) + D\,u(t)$

$\boxed{u(t) = -K.x(t)}$ $\rightarrow$ matriz del controlador

$\dot{x}(t) = A\,x(t) - BK\,x(t) \longrightarrow \boxed{\dot{x}(t) = (A - BK)\,x(t)}$ $\Rightarrow x_t = e^{(A-BK)t}\,x_0$ $\Rightarrow$ Solución

$Y(t) = Cx(t) - DKx(t)$ $\rightarrow$ Ec del sistema de lazo abierto

Ecuación del sistema de lazo cerrado



- **Controlabilidad:**

Indica si es posible transferir el proceso desde una condición inicial al origen a través de una acción de control $u(t)$.

Verificación de la condición de controlabilidad: Verificar que exista una $u(t)$ posible

Se asume que el estado final será el origen a un tiempo t_1 y que t_0 será 0.

$$x(t) = e^{At}\,x(t_0) + \int_0^t e^{A(t-s)}\,B\,u(s)\,ds \longrightarrow \text{Solución del sistema}$$

$$\underbrace{x(t_1)}_{0} - e^{At}\,x(t_0) = e^{At} \cdot \int_0^{t_1} e^{-As} \cdot B\,u(s)\,ds$$

$$-e^{-At} \cdot e^{At} \cdot x(t_0) = e^{-At} \cdot e^{At} \cdot \int_0^{t_1} e^{-As}\,B\,u(s)\,ds$$

$$x(t_0) = -\int_0^{t_1} e^{-As}\,B\,u(s)\,ds$$

Por Cayley-Hamilton: $e^{-At} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)\,A^k$

$$\Rightarrow x(0) = -\sum_{k=0}^{n-1} A^k B \int_0^{t_1} a_k(s)\,u(s)\,ds$$

$$\int_0^{t_1} a_k(s)\,u(s)\,ds = \beta_k$$

$$x(0) = -\sum_{k=0}^{n-1} A^k B\,\beta_k$$

Los β_k están compuestos por $u(t)$

Matricialmente:

$$x(0) = -\underbrace{\left[B \mid AB \mid \dots A^{n-1}B\right]}_{\text{Matriz de controlabilidad } M} \cdot \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_K \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Los } \beta_K \text{ contienen la información de } u(t)$$

$\Rightarrow$ Para que sea controlable debe existir una solución para $x(0)$

$\Downarrow$

M debe tener rango n y ser invertible

$\Downarrow$

existen los $\beta_K \Rightarrow$ existe $u(t) \Rightarrow$ El sistema es controlable