

# Tarea 2 - Sistemas de Control II

Gonzalez Bruno

2025

## Especificaciones

Se desea diseñar un controlador digital tal que la respuesta del sistema cerrado cumpla con las siguientes especificaciones:

- Sobrepaso máximo: 5%
- Tiempo de establecimiento (2%): 2 segundos
- Error en régimen permanente frente a entrada escalón: 0

Se parte de la siguiente planta en tiempo continuo:

$$G(s) = \frac{5}{s(s+3)}$$

Tiempo de muestreo:  $T = 0.15$  s.

## Cálculo de parámetros de diseño

### Constantes de diseño

A partir del sobrepaso y el tiempo de establecimiento, se calculan:

- Relación de amortiguamiento:

$$\xi = \frac{-\ln(0.05)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(0.05)}} \approx 0.6901$$

- Frecuencia natural no amortiguada:

$$\omega_n = \frac{4}{t_s} = \frac{4}{2} = 2 \text{ rad/s}$$

- Frecuencia amortiguada:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \approx 1.447 \text{ rad/s}$$

## Ubicación de los polos deseados en el plano $z$

$$r = e^{-\xi\omega_n T} = e^{-0.207} \approx 0.813$$

$$\theta = \omega_d T = 1.447 \cdot 0.15 \approx 0.2171 \text{ rad}$$

$$z_{1,2} = 0.813 \cdot e^{\pm j0.2171} \Rightarrow z_{1,2} \approx 0.794 \pm j0.175$$

Estos serán los polos deseados del sistema discreto a lazo cerrado.

## Discretización de la planta

La planta se discretiza mediante un retentor de orden cero con el comando:

```
G = tf(5, [1 3 0]);  
Gd = c2d(G, 0.15, 'zoh');
```

Esto da como resultado:

$$G_d(z) = \frac{0.04868z + 0.04191}{z^2 - 1.6376z + 0.6376}$$

## Selección de estrategias de control

Para cumplir con las especificaciones de desempeño establecidas, se diseñaron tres tipos de controladores: un PI (fallido), un PID (parcialmente exitoso) y un PD (adoptado como solución final). Fueron implementados y ajustados utilizando la herramienta `sisotool` de MATLAB, y su función principal es modificar la dinámica de la planta discretizada para que el sistema cerrado cumpla con las especificaciones.

## Controlador PD

El controlador proporcional derivativo (PD) en tiempo discreto tiene la forma general:

$$C(z) = K \cdot \frac{z + c}{z}$$

Donde:

- $K$  es la ganancia total del controlador
- $z = -c$  es el cero del controlador, el cual se puede ubicar libremente para modificar el comportamiento dinámico
- El controlador posee un **polo fijo en el origen**, que actúa como un retardo y asegura que el controlador sea realizable en tiempo discreto

Esta estructura proporciona dos grados de libertad: uno mediante la ubicación del cero, que puede usarse para modificar la geometría del lugar de raíces, y otro mediante la ganancia  $K$ , que permite desplazar el LR a través del plano  $z$ .

El cero móvil contribuye con **ángulo positivo** al lugar de raíces, ya que el argumento del cero es mayor al del polo fijo. Esto curva el LR hacia la izquierda, incrementando el amortiguamiento y mejorando la estabilidad del sistema.

El controlador PD es especialmente útil cuando la planta ya es tipo 1, como en este caso, ya que no requiere agregar un integrador explícito para eliminar el error en régimen permanente frente a entradas tipo escalón.

## Controlador PI (intento fallido)

El controlador proporcional-integral tiene la forma:

$$C(z) = K_P + K_I \cdot \frac{T}{z - 1}$$

Este tipo de compensador incorpora un integrador puro (polo en  $z = 1$ ), lo que garantiza error nulo en régimen permanente ante entradas escalón. Además, posee un cero ajustable cuya ubicación puede utilizarse para mejorar la respuesta transitoria.

Sin embargo, al intentar ubicar los polos dominantes del sistema en  $z \approx 0.794 \pm j 0.175$ , se observó que el lugar de raíces del sistema compensado con PI no intersectaba la región deseada, sin importar la posición del cero ni el ajuste de la ganancia. Esto se debe a que el integrador en  $z = 1$  atrae al LR hacia el borde del círculo unitario,

## Controlador PID

El controlador proporcional-integral-derivativo (PID) digital utilizado se implementó según la forma denominada **algoritmo de posición**, que calcula la señal de control en función directa del error actual y sus diferencias pasadas. Su expresión en el dominio  $z$  es:

$$\frac{M(z)}{E(z)} = \left( K_P + \frac{K_I}{1 - z^{-1}} + K_D(1 - z^{-1}) \right)$$

Donde:

- $K_P$ : ganancia proporcional
- $K_I$ : ganancia integral
- $K_D$ : ganancia derivativa

Esta estructura suma directamente las tres acciones de control (P, I y D) para generar la señal de mando  $M(z)$  a partir del error  $E(z)$ . Es especialmente clara de interpretar y fácil de implementar en sistemas digitales mediante bloques básicos.

En este trabajo, el PID fue implementado en Simulink. Posteriormente se evaluó el comportamiento completo del PID incluyendo todas las ganancias activas.

## Diseño del controlador PD

Se diseña un **proporcional-derivativo (PD)** utilizando `sisotool` de MATLAB, de manera que el lugar de raíces del sistema pase por los polos deseados.

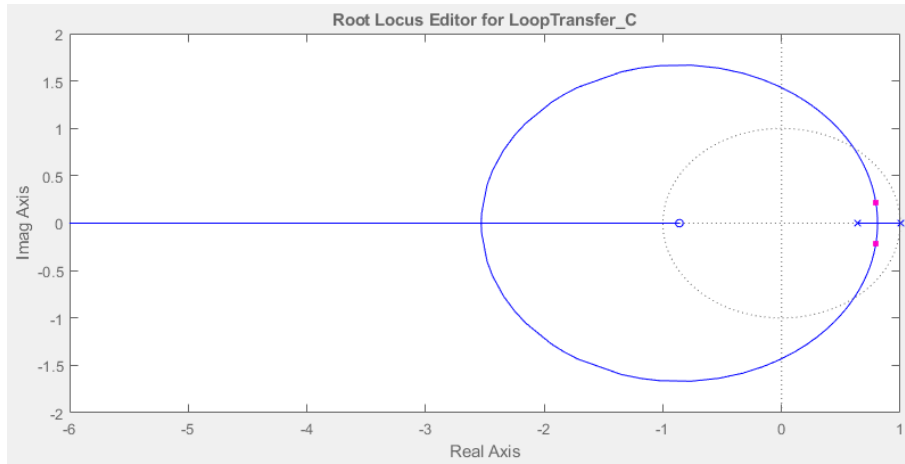


Figure 1: Respuesta de la planta discretizada

## Ingreso de especificaciones en Sisotool

Se utilizó `sisotool` para diseñar un controlador de adelanto teniendo como objetivo la posición de los polos deseados. Primero se ingresaron las restricciones de diseño:

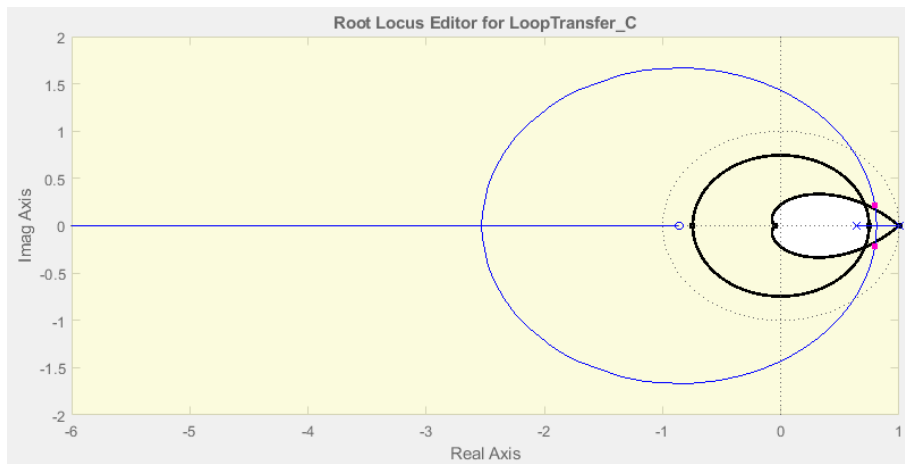


Figure 2: Restricciones de diseño:  $\xi > 0.6901$ ,  $t_s < 2$  s

Luego se colocó un cero y se ajustó la ganancia hasta que el lugar de raíces pasó a cumplir con las restricciones de diseño:

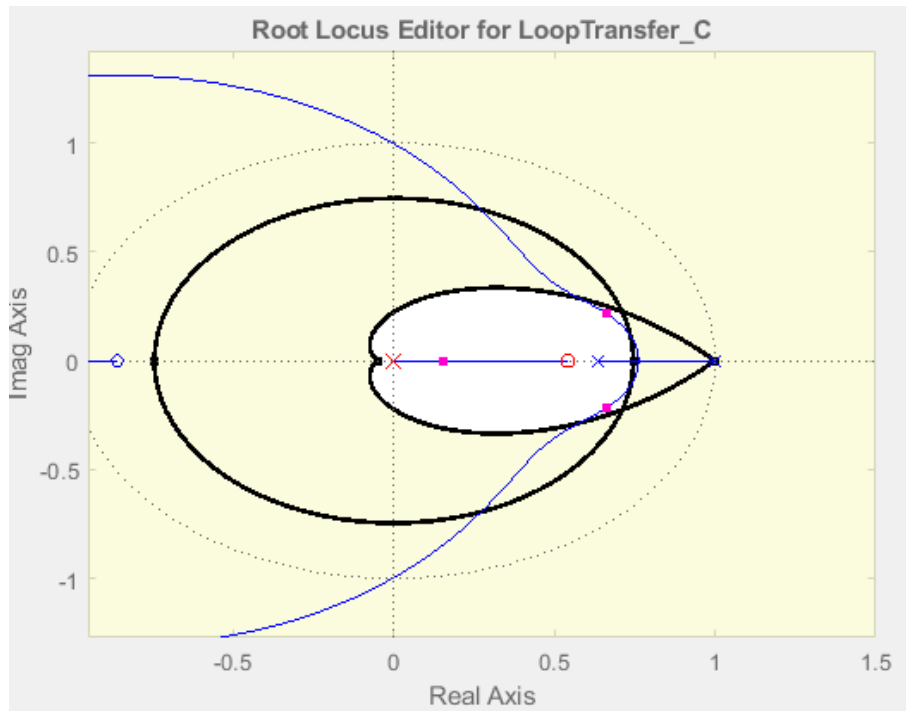


Figure 3: Agregado del cero y ajuste de la ganancia

## Verificación del sistema a lazo cerrado

El sistema cerrado obtenido fue:

$$F = \frac{0.16137 (z-0.5417) (z+0.8609)}{(z-0.1556) (z^2 - 1.321z + 0.4837)}$$

Se verificó que los polos a lazo cerrado se encuentran en los valores deseados:

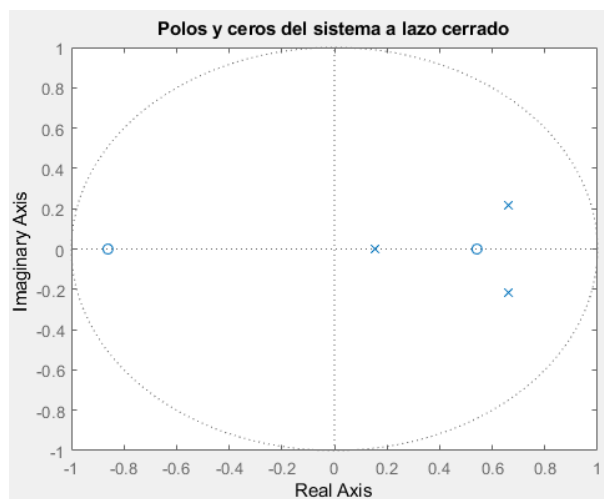


Figure 4: Mapa de polos y ceros del sistema en lazo cerrado

<b>Polos del sistema cerrado:</b>		<b>Ceros del sistema cerrado:</b>
0.1556 + 0.0000i		0.5417
0.6603 + 0.2182i		-0.8609
0.6603 - 0.2182i		

Figure 5: Ubicación de polos (izq.) y ceros (der.) del sistema en lazo cerrado

Y que la respuesta al escalón cumple:

- Sobrepaso = 4.96
- Tiempo de establecimiento = 1.65s
- Error en régimen permanente ante escalón:  $e_{ss} = 0$

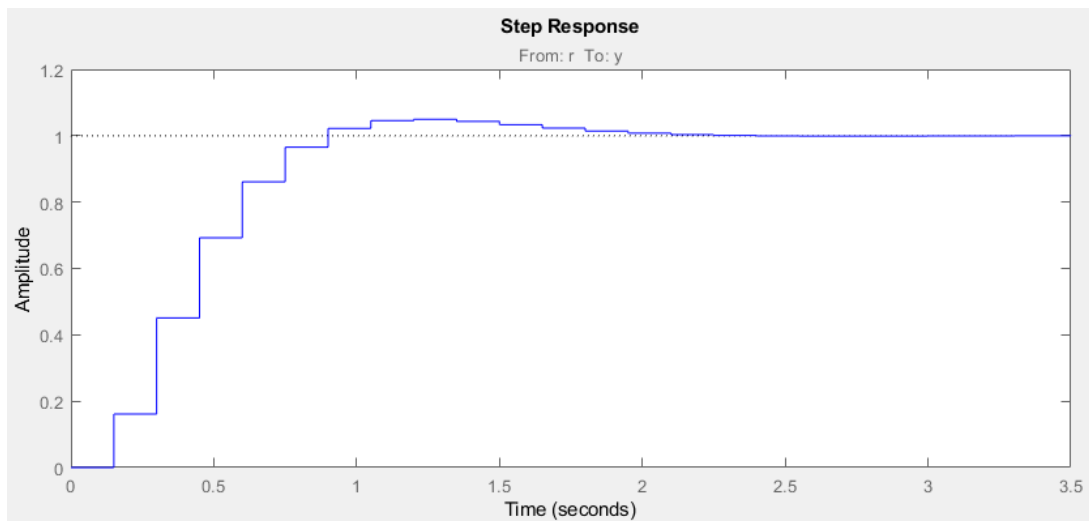


Figure 6: Respuesta al escalón del sistema a lazo cerrado

## Diseño del controlador PID

Esta estructura proporciona tres grados de libertad: la acción proporcional para modificar la ganancia, la acción integradora para garantizar error nulo en régimen permanente ante entrada escalón, y la acción derivativa para mejorar el comportamiento transitorio, agregando amortiguamiento y velocidad al sistema.

## Diseño en Sisotool

Se utilizó la herramienta `sisotool` para diseñar el compensador PID.

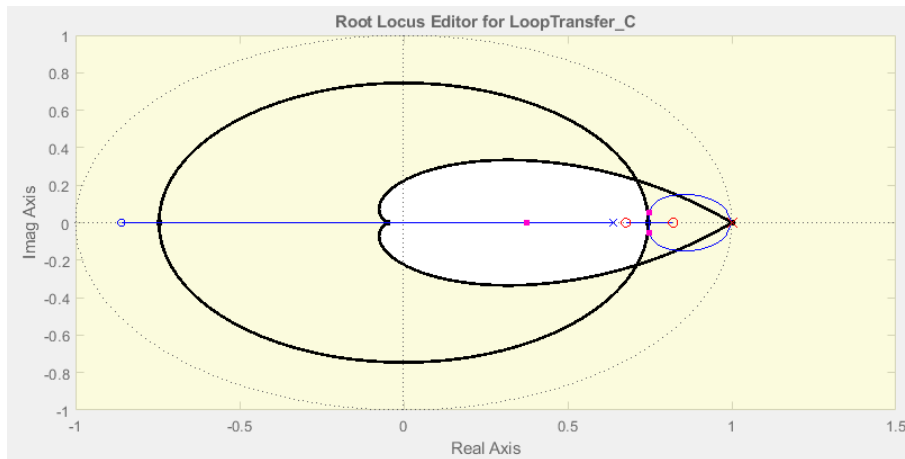


Figure 7: Lugar de raíces con controlador PID ajustado

## Verificación del sistema a lazo cerrado

El sistema cerrado obtenido con el controlador PID fue:

Función de transferencia del sistema cerrado con PID:

$$F = \frac{0.3821 (z+0.8609) (z-0.8209) (z-0.6766)}{(z-0.3742) (z^2 - 1.499z + 0.5647)}$$

Figure 8: Función de transferencia del sistema con PID

Se analizaron los polos y ceros del sistema:

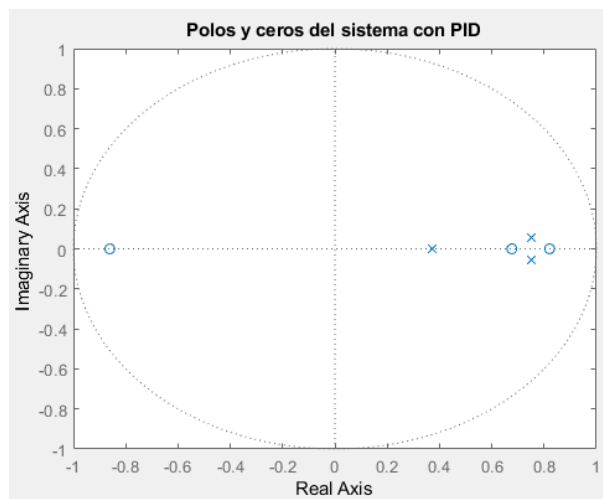


Figure 9: Mapa de polos y ceros del sistema a lazo cerrado con PID

Polos del sistema cerrado:	Ceros del sistema cerrado:
0.3742 + 0.0000i	-0.8609
0.7494 + 0.0550i	0.6766
0.7494 - 0.0550i	0.8209

Figure 10: Polos (izquierda) y ceros (derecha) del sistema cerrado con PID

## Respuesta temporal

Se verificó que el sistema no cumple conjuntamente con las especificaciones de diseño:

- Sobrepaso: 9.91% Viola especificación.
- Tiempo de establecimiento: 1.8 segundos
- Error en régimen permanente ante escalón:  $e_{ss} \approx 0$

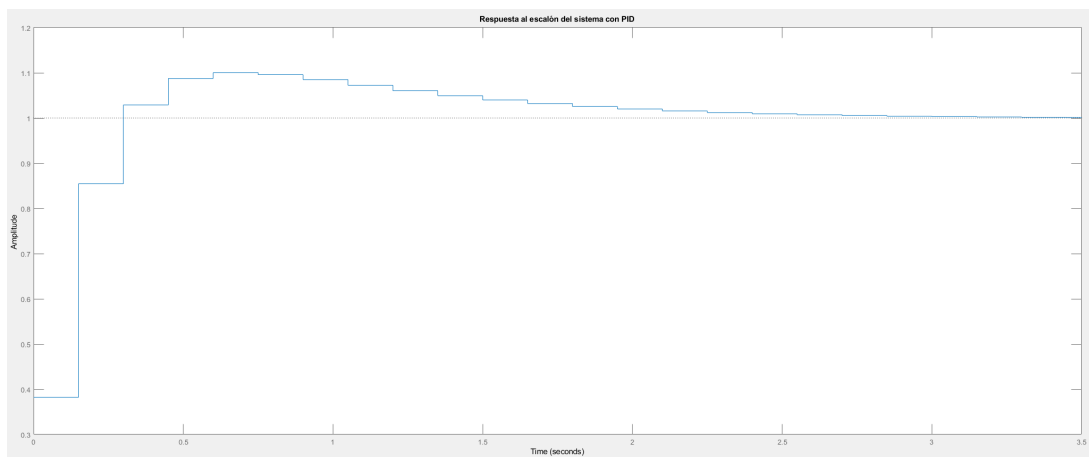


Figure 11: Respuesta al escalón del sistema con controlador PID

## Simulación en Simulink del controlador PD

Para validar el comportamiento del sistema en lazo cerrado con el controlador PD diseñado, se implementó el modelo completo en Simulink utilizando bloques básicos

La simulación fue realizada conectando los siguientes bloques:

- **Sumador de error**  $e[k] = r[k] - y[k]$
- **Bloques proporcionales y derivativos** implementados como operaciones discretas.
- **ZOH** Retentor de orden zero.
- **Planta**



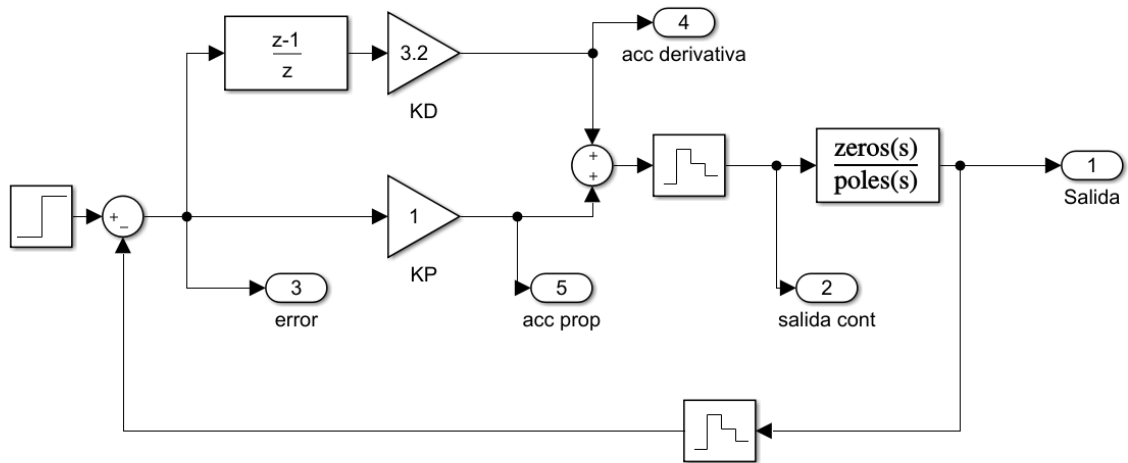


Figure 12: Diagrama de bloques en Simulink del sistema

Las señales de interés fueron registradas y visualizadas para análisis:

- Salida del sistema  $y[k]$
- Acción derivativa
- Control total aplicado  $u[k]$
- Error  $e[k]$

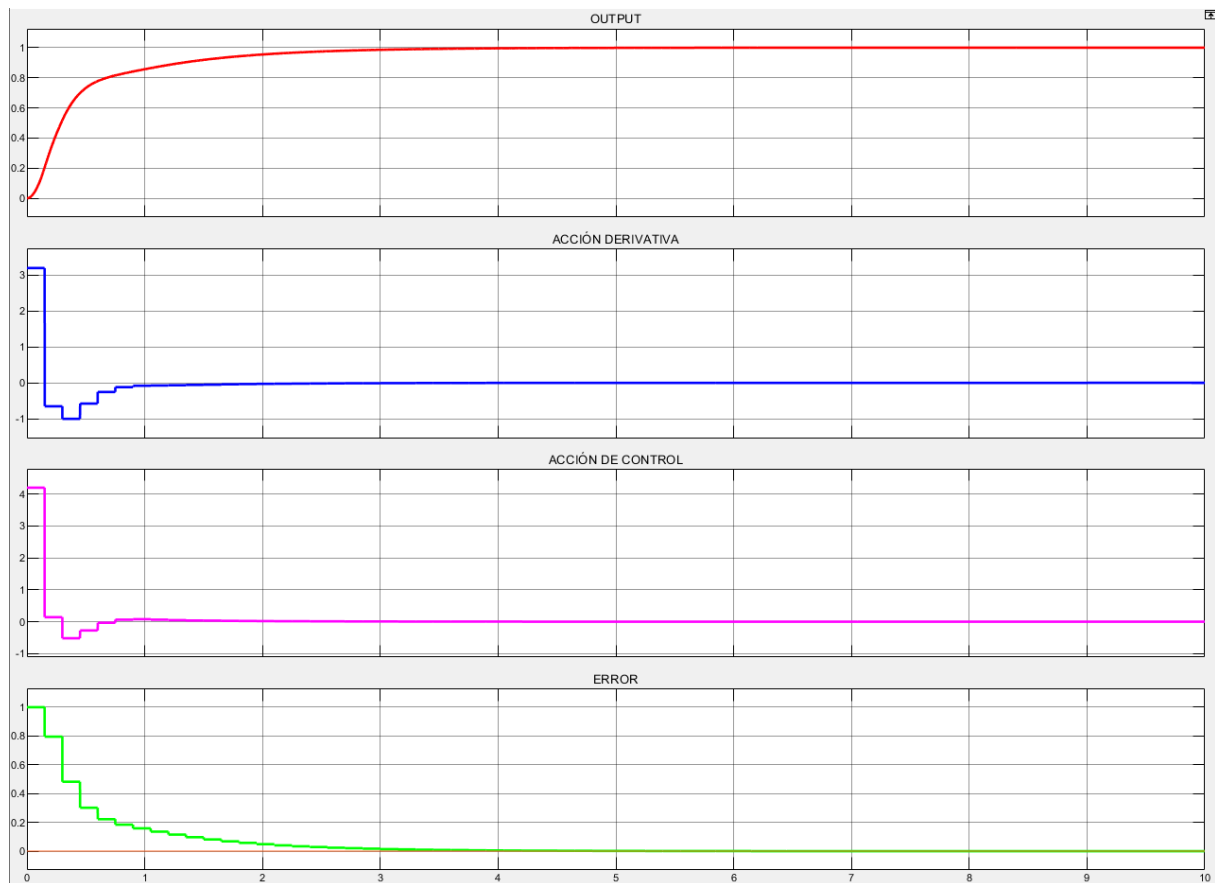


Figure 13: Resultados de la simulación: salida, error y acciones de control

## Análisis de resultados

La respuesta del sistema en lazo cerrado validó lo obtenido en el diseño previo:

- El sistema presenta un sobrepaso menor al 5% y un tiempo de establecimiento cercano a 2 s
- El error tiende a cero en régimen permanente
- Las acciones de control muestran una respuesta intensa inicial y estabilización en pocos segundos

## Conclusión

Se diseñaron y evaluaron tres controladores digitales diferentes para cumplir con las especificaciones del sistema: un controlador PD, un PI y un PID.

El controlador PD fue implementado agregando un cero y ajustando la ganancia del sistema, lo que permitió redirigir el lugar de raíces hacia una región con mayor amortiguamiento y menor tiempo de establecimiento. Esta estrategia fue eficaz debido a que la planta ya posee un integrador (polo en  $z = 1$ ), lo que asegura error nulo en régimen permanente ante una entrada escalón.

El controlador PI, si bien garantiza error nulo en régimen permanente al incorporar un integrador explícito, no permitió cumplir simultáneamente con las condiciones de so-

brepaso y tiempo de establecimiento debido a la rigidez que impone el polo fijo en  $z = 1$ . Por esta razón, fue descartado como solución viable.

Se diseñó también un controlador PID, que logró cumplir con el tiempo de establecimiento y el error en régimen permanente. Sin embargo, su respuesta presentó un sobrepaso del 9.91%, lo cual viola la especificación establecida del 5%. Si bien aportó una mejora parcial respecto al PI, no cumplió con la totalidad de los requerimientos.

En conclusión, el controlador PD fue la alternativa que cumplió con todas las especificaciones planteadas (sobrepaso, tiempo de establecimiento y error en régimen), siendo por lo tanto la estrategia de control adoptada para el sistema en estudio.

## Enlaces y recursos

- Repositorio GitHub del estudiante: <https://github.com/BrunoUNC/Sistemas-De-Control-II-git>