Observabilidad

No puedo medir/sensar directamente las variables de estado

$\Downarrow$

A partir de mediciones de la salida $y(t)$ reconstruyo un vector de estado

$\Downarrow$

vector de estado observado

$\Downarrow$

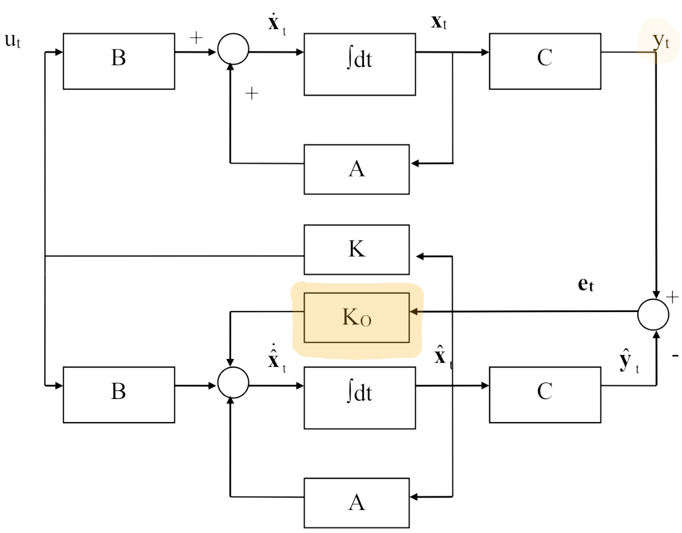
Observabilidad

$\Rightarrow$ Un "sistema observador" me permite conocer el "estado" sin la necesidad de sensar las n variables de estado. $\Rightarrow$ Ahorro en sensores

Ademas, un sistema observador puede ser útil para detectar fallas en el sensado del estado.

$$\text{Observador} = K_o : \underbrace{\mathbb{R}^m}_{\text{espacio de la salida}} \longrightarrow \underbrace{\mathbb{R}^n}_{\text{espacio de } x}$$

Esquemáticamente:



Problema posible: presencia de ruido a la salida

* No tiene sentido que el acoplamiento directo sea observado ya que se anularía en el detector de error del sistema observador

$\Rightarrow$ Tenemos dos sistemas:

$$\text{Sistema Original} \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases}$$

Ritmo de cambio del x observado

Error de observación

$$\text{Sistema Observador} \begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{K}_O(\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t)) \\ \hat{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ El sistema total pasa de un orden n a un orden $2n$ porque necesito el doble de integradores

Error de observación: $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t) \Rightarrow \dot{\tilde{x}}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) \longrightarrow$ Dinámica del error de observación

$\Rightarrow$ objetivo del observador:

error de observacion $\tilde{x}(t) = 0 \Rightarrow x(t) = \hat{x}(t) \Rightarrow \hat{y}(t) = C\,x(t)$ en un tiempo finito

⇒ Analizando la dinámica del error de observación:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) = \left[A\,x(t) - \cancel{Bu(t)}\right] - \left[A\,\hat{x}(t) + \cancel{Bu(t)} + K_o.\left(y(t) - \hat{y}(t)\right)\right]$$

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) = A.\underbrace{\left[x(t) - \hat{x}(t)\right]}_{\tilde{x}(t)} - K_o\left[C\,\underbrace{\left(x(t) - \hat{x}(t)\right)}_{\tilde{x}(t)}\right]$$

$$\boxed{\dot{\tilde{x}}(t) = \underbrace{\left[A - K_o C\right]}_{\text{matriz de observación}} . \tilde{x}(t)}$$

⇒ $[A - K_o C]$ debe tener autovalores en el semiplano izquierdo para que el error de observación sea 0.

Es deseable que el error de observación sea cero lo más rápido posible.

K_o existe solo si el sistema es observable

- **Condición de Observabilidad**

Es observable si cualquier x_t del sistema puede ser determinado a partir de la salida y_t en un tiempo finito.

Sea el sistema:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

⇒ Solución del sistema:

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds$$

$$\Downarrow$$

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + \int_0^t Ce^{A(t-s)}Bu(s)ds + Du(t)$$

En el sistema completo con observador los $D.u(t)$ se anulan:

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + \int_0^t Ce^{A(t-s)}Bu(s)ds.$$

$$y(t) - \int_0^t C\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k(t-s)A^kBu(s)ds =$$
$$C\left(\alpha_0(t)\mathbf{I} + \alpha_1(t)\mathbf{A} + \alpha_2(t)\mathbf{A}^2 + \cdots + \alpha_{n-1}(t)\mathbf{A}^{n-1}\right)\mathbf{x}(0)$$

$$\left\{\begin{array}{l} y(t) - \int_0^t C\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k(t-s)A^kBu(s)ds = \\ \left[\alpha_0(t) \quad \alpha_1(t) \quad \alpha_2(t) \quad \cdots \quad \alpha_{n-1}(t)\right]\cdot\begin{bmatrix}\mathbf{C}\\ \mathbf{CA}\\ \mathbf{CA}^2\\ \vdots\\ \mathbf{CA}^{n-1}\end{bmatrix}\cdot\mathbf{x}(0).\end{array}\right.$$

⇒ Se define matriz de Observabilidad:

$$P = \begin{bmatrix}\mathbf{C}\\ \mathbf{CA}\\ \mathbf{CA}^2\\ \vdots\\ \mathbf{CA}^{n-1}\end{bmatrix}$$

caso múltiples salidas

La matriz de observabilidad debe ser $nm \times n$ para que el sistema sea observable

↪ Condición necesaria y suficiente

Dualidad de los procesos lineales:

Se define al sistema S_1:

$$S_1 := \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases} \qquad \mathbf{M} = [\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \cdots \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \qquad P = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}$$

Se define al sistema S_2:

$$S_2 := \begin{cases} \dot{z}(t) = \mathbf{A}^T z(t) + \mathbf{C}^T v(t) \\ \eta(t) = \mathbf{B}^T z(t) \end{cases} \qquad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & \cdots & (\mathbf{A}^{n-1})^T C^T \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} B^T \\ B^T A^T \\ B^T (A^T)^2 \\ \vdots \\ B^T (A^T)^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Entonces, el sistema S_1 es completamente controlable (observable) si y solo si el sistema S_2 es completamente observable (controlable).

El sistema S_1 es estable si y sólo si sistema dual S_2 es estable.

=> Para obtener el controlador usamos asignación de polos en S_1. Para obtener el observador de S_1 usamos asignación de polos en S_2

Efecto de controlar un sistema con un observador

Principio de certeza equivalente de los sistemas lineales:

Me permite calcular el controlador como si no hubiera observador y puedo controlar el observador independientemente del controlador

* Observador vs Controlador:

Los polos del observador deben ser más rápidos que los polos del controlador para asegurar que las estimaciones del estado proporcionadas por el observador converjan rápidamente a los valores reales del estado del sistema. Aquí te explico por qué:

Razones para Polos Más Rápidos del Observador

1. **Convergencia Rápida del Observador**:
   - Los polos del observador determinan la dinámica de cómo el error de estimación del estado (la diferencia entre el estado real y el estimado) se reduce con el tiempo.
   - Si los polos del observador son más rápidos (es decir, tienen partes reales más negativas), el error de estimación se reducirá más rápidamente, permitiendo que el observador siga de cerca el estado real del sistema.
2. **Desempeño del Sistema de Control**:
   - Un controlador utiliza la estimación del estado para calcular la señal de control. Si el observador no proporciona estimaciones precisas y rápidas, el controlador actuará sobre información incorrecta, lo que puede degradar el desempeño del sistema de control.
   - Con un observador más rápido, las estimaciones del estado serán precisas en un tiempo más corto, lo que mejora la precisión y estabilidad del control.

Impacto en el Desempeño del Sistema

1. **Estabilidad**: Si los polos del observador no son lo suficientemente rápidos, el error de estimación del estado puede ser significativo, lo que podría desestabilizar el sistema de control.
2. **Precisión**: Polos del observador más rápidos aseguran que las estimaciones del estado sean precisas rápidamente, mejorando la precisión del sistema de control.
3. **Robustez**: Un observador rápido puede compensar perturbaciones y errores en la estimación de manera más efectiva, contribuyendo a la robustez del sistema de control.