

Teoría de control avanzado



Necesito ayuda con teoría de sistemas de control avanzado



¡Claro! ¿Qué tema específico necesitas abordar dentro de la teoría de sistemas de control avanzado? Algunos de los temas comunes incluyen:

- **Control óptimo** (por ejemplo, LQR, LQG)
- **Control no lineal**
- **Control robusto** (H^∞ , μ -análisis)
- **Observadores avanzados** (filtros de Kalman extendido y no lineal)
- **Control adaptativo**
- **Control predictivo basado en modelo (MPC)**
- **Control basado en datos**

Si me das un poco más de contexto sobre el tema, el problema o el tipo de sistema que estás estudiando, puedo ayudarte con la teoría, ejemplos o aplicaciones.



Explica esto: "el sistema dinámico debe incorporar elementos que memoricen los valores de las entradas para $t \geq t_1$, siendo los integradores dispositivos con capacidad de memoria. Así, las salidas de los integradores sirven como variables de estado. "



Esta afirmación se refiere a la representación de un sistema dinámico y cómo los **integradores** desempeñan un papel crucial en la definición de las **variables de estado** en la teoría de control.

Desglose de la afirmación:

1. Sistema dinámico y memoria de entradas:

- Un sistema dinámico es aquel en el que la salida no solo depende de las entradas actuales, sino también del historial de estas entradas.
- Incorporar elementos que memoricen los valores de las entradas significa que el sistema debe ser capaz de "recordar" cómo las entradas evolucionaron en el tiempo $t \geq t_1$. Esto es esencial para describir su comportamiento dinámico.

2. Integradores como dispositivos con memoria:

- Un **integrador** es un componente que acumula la entrada a lo largo del tiempo. Matemáticamente, realiza la operación:

$$y(t) = \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau$$

Aquí, $y(t)$ (la salida del integrador) depende de todo el historial de $u(t)$ (la entrada). Por esta razón, se considera que los integradores tienen **capacidad de memoria**.

3. Variables de estado como salidas de los integradores:

- En la representación de un sistema dinámico en el espacio de estados, las **variables de estado** ($x(t)$) son aquellas que describen completamente el estado del sistema en un momento dado.
- Los integradores cumplen un rol crucial porque sus salidas $x_i(t)$ representan el estado acumulado del sistema. Estas salidas contienen toda la información necesaria para predecir el comportamiento futuro del sistema junto con las entradas futuras.

Ejemplo:

Considera un sistema mecánico simple, como un carro con masa m sobre una superficie lisa, actuado por una fuerza $F(t)$. La ecuación de movimiento (segunda ley de Newton) es:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(t)$$

Aquí, $x(t)$ es la posición del carro. Para representar este sistema en espacio de estados, definimos:

1. $x_1(t) = x(t)$ (posición, salida del primer integrador)
2. $x_2(t) = \frac{dx}{dt}$ (velocidad, salida del segundo integrador)

El integrador transforma $\frac{dx_2}{dt} = \frac{F(t)}{m}$ en el estado acumulado (velocidad y posición). Estas salidas (x_1 y x_2) son las **variables de estado**, ya que describen completamente el estado del sistema dinámico en cualquier instante.

Conclusión:

En los sistemas dinámicos, los integradores son esenciales porque su capacidad de memoria permite registrar el historial de entradas. Las salidas de estos integradores forman las variables de estado, las cuales encapsulan toda la información necesaria para analizar, controlar y predecir el comportamiento del sistema.



Explica linealización de sistemas no lineales por serie de Taylor en un punto de operación



La **linealización de sistemas no lineales** mediante la serie de Taylor es una técnica matemática que aproxima el comportamiento de un sistema no lineal cerca de un punto de operación por un sistema lineal. Esto es útil porque los sistemas lineales son más fáciles de analizar y controlar.

Proceso de Linealización

Supongamos un sistema no lineal descrito por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}),$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}),$$

donde:

- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados,
- $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entradas,
- \mathbf{f} y \mathbf{h} son funciones no lineales que describen la dinámica del sistema y la salida, respectivamente.

Queremos encontrar una aproximación lineal del sistema alrededor de un **punto de operación** $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$, que es el estado estacionario en el que $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) = 0$.

1. Expansión en Serie de Taylor

Expandimos $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ y $\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ en serie de Taylor alrededor del punto de operación $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0).$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \approx \mathbf{h}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) + \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0).$$

Dado que estamos considerando $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) = 0$ (en el punto de operación), la expresión se simplifica.

2. Representación Linealizada

Definimos perturbaciones alrededor del punto de operación:

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \quad \Delta \mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_0, \quad \Delta \mathbf{y} = \mathbf{y} - \mathbf{h}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0).$$

El sistema linealizado queda:

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = A \Delta \mathbf{x} + B \Delta \mathbf{u},$$

$$\Delta \mathbf{y} = C \Delta \mathbf{x} + D \Delta \mathbf{u},$$

donde las matrices A, B, C, D se calculan como:

$$A = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)}, \quad B = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)},$$

$$C = \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)}, \quad D = \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)}.$$

Estas derivadas parciales son las **matrices jacobianas** de las funciones \mathbf{f} y \mathbf{h} .

Ejemplo Práctico

Considera un péndulo no lineal con la ecuación de movimiento:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin(\theta) = u,$$

donde:

- θ es el ángulo,
- u es la entrada de control,
- g es la aceleración gravitacional,
- L es la longitud del péndulo.

1. Definimos las variables de estado:

$$x_1 = \theta, \quad x_2 = \dot{\theta}.$$

La dinámica en forma de estado es:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\frac{g}{L} \sin(x_1) + u.$$

2. Punto de operación: Supongamos $x_1 = 0, x_2 = 0, u = 0$.

3. Linealización:

- Derivamos las matrices A y B :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

El sistema linealizado es:

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L} & 0 \end{bmatrix} \Delta \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Delta \mathbf{u}.$$

Conclusión

La linealización por serie de Taylor aproxima el sistema no lineal como un sistema lineal cerca de un punto de operación. Este enfoque es válido solo en un entorno cercano al punto de operación y facilita el análisis y diseño de controladores para sistemas inicialmente no lineales.



Agrega a la explicación por qué no desarrollaste los demás términos de la serie de Taylor



No desarrollé los demás términos de la serie de Taylor (los términos de orden superior) porque:

1. Aproximación de primer orden:

La linealización se basa en la idea de aproximar el sistema no lineal con un sistema lineal cerca del punto de operación. Esto se logra tomando únicamente los términos de primer orden de la expansión de Taylor, es decir, las derivadas parciales de las funciones respecto a los estados (\mathbf{x}) y entradas (\mathbf{u}). Esto es suficiente para capturar el comportamiento local del sistema en las cercanías del punto de operación.

2. Contribución de los términos de orden superior:

Los términos de segundo orden y superiores ($\mathcal{O}((\Delta \mathbf{x})^2, (\Delta \mathbf{u})^2, \dots)$) representan las no linealidades más complejas del sistema, que tienen un impacto significativo solo si las

perturbaciones $\Delta \mathbf{x}$ y $\Delta \mathbf{u}$ son grandes. Sin embargo, en la práctica, las estrategias de control se diseñan para mantener al sistema cerca del punto de operación, donde estas perturbaciones son pequeñas, y los términos de orden superior pueden ser despreciados.

3. Simplificación y aplicabilidad:

Mantener solo los términos lineales simplifica el análisis y diseño del sistema de control, ya que las herramientas clásicas (controladores PID, diseño en espacio de estados, lugar de raíces, etc.) están formuladas para sistemas lineales. Incluir términos de orden superior introduce complejidad innecesaria para aplicaciones donde el modelo linealizado es suficientemente preciso.

4. Validez de la aproximación:

La aproximación lineal es válida en un entorno reducido alrededor del punto de operación. Mientras las perturbaciones sean pequeñas, los términos de orden superior tienen un efecto insignificante en la precisión del modelo.

En resumen, no incluí los términos de orden superior porque el objetivo de la linealización es obtener un modelo lineal simple que capture el comportamiento local del sistema cerca del punto de operación, ignorando las no linealidades que solo son significativas para perturbaciones grandes o lejos del punto de operación.



Explica el método de integración de Euler



El método de integración de **Euler** es una técnica numérica simple y directa para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) de la forma:

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)),$$

donde $y(t)$ es la función desconocida que queremos aproximar, $\dot{y}(t)$ es su derivada respecto al tiempo, y $f(t, y)$ describe la dinámica del sistema.

Idea Básica

El método de Euler se basa en la aproximación de la derivada usando diferencias finitas. Partiendo de la definición de la derivada:

$$\dot{y}(t) \approx \frac{y(t+h) - y(t)}{h},$$

donde h es un pequeño incremento temporal, podemos reescribir:

$$y(t+h) \approx y(t) + h \cdot f(t, y(t)).$$

Esto da una fórmula iterativa para aproximar $y(t)$ a lo largo del tiempo:

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(t_k, y_k),$$

donde:

- y_k es la aproximación de $y(t_k)$,
- $t_k = t_0 + k \cdot h$ es el tiempo en el paso k ,
- h es el tamaño del paso (también llamado **paso de integración**).

Pasos del Método de Euler

1. **Definir las condiciones iniciales:** Comienza con un valor inicial $y_0 = y(t_0)$ en el instante inicial t_0 .
2. **Elegir el paso de integración h :** Selecciona un valor pequeño para h , que determina la precisión de la aproximación.
3. **Iterar:** Usa la fórmula iterativa:

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(t_k, y_k),$$

para calcular y_{k+1} en cada paso, avanzando en el tiempo.

4. **Repetir hasta el tiempo deseado:** Continúa calculando los valores de y_k hasta llegar al tiempo final t_f .

Ejemplo Práctico

Resolver la ecuación diferencial:

$$\dot{y} = -2y, \quad y(0) = 1,$$

usando el método de Euler con $h = 0.1$.

Solución:

1. **Ecuación diferencial:** $f(t, y) = -2y$.
2. **Condiciones iniciales:** $t_0 = 0, y_0 = 1$.
3. **Iteración:** Usamos la fórmula $y_{k+1} = y_k + h \cdot f(t_k, y_k)$:

$$y_{k+1} = y_k + 0.1 \cdot (-2y_k) = y_k(1 - 0.2).$$

4. Cálculos paso a paso:

- Paso 0: $y_0 = 1$.
- Paso 1: $y_1 = y_0 \cdot 0.8 = 1 \cdot 0.8 = 0.8$.
- Paso 2: $y_2 = y_1 \cdot 0.8 = 0.8 \cdot 0.8 = 0.64$.
- Paso 3: $y_3 = y_2 \cdot 0.8 = 0.64 \cdot 0.8 = 0.512$.
- ...

De forma iterativa, obtenemos una aproximación para $y(t)$ en pasos de 0.1.

Ventajas del Método de Euler

1. **Simplicidad:** Es fácil de implementar y entender.
2. **Costo computacional bajo:** Solo requiere operaciones aritméticas simples.

Limitaciones del Método de Euler

1. **Precisión limitada:** Es un método de primer orden, lo que significa que el error global es proporcional a h . Si h no es suficientemente pequeño, las aproximaciones pueden ser inexactas.
 2. **Estabilidad:** En problemas rígidos (donde las soluciones cambian rápidamente), el método puede ser inestable, y es necesario usar pasos h extremadamente pequeños o métodos más avanzados.
 3. **Error acumulado:** En sistemas que requieren cálculos durante largos intervalos de tiempo, los errores de redondeo y truncamiento se acumulan.
-

Conclusión

El método de Euler es una herramienta básica para resolver EDOs de forma numérica. Es ideal para obtener aproximaciones rápidas y entender la dinámica básica del sistema, pero para problemas más complejos, generalmente se prefieren métodos más precisos y estables como **Euler mejorado**, **Runge-Kutta** o métodos adaptativos.