Clase 3
Parte 1

▶ Modelación de un sistema mono-variable de orden n

$u(t) \rightarrow \boxed{\text{orden } n} \rightarrow y(t)$

$$(1)\quad y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{(n-1)}\dot{y} + a_n . y = u(t)$$

↳ ecuación diferencial de orden n

⇒ Asignación directa de variables de estado:

$$x_1 = y \qquad x_2 = \dot{y} \quad \dots \quad x_n = y^{(n-1)}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{x}_1 = x_2 \; ; \; \dot{x}_2 = x_3 \dots ; \dots \dot{x}_n = y^n = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 \dots - a_1 x_n + u(t) \qquad (2)$$

⇒ Logré convertir una única ecuación diferencial de orden "n" (1) en n ecuaciones diferenciales de primer orden (2). Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ -a_n & \dots & & & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} [u] \Rightarrow \dot{x} = A . x(t) + b . u(t)$$

$$y = [1\ 0\ 0 \dots 0] . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \Rightarrow y = C . x(t)$$

⇒ extendiendo para el caso en donde aparecen las derivadas de la función excitación "u(t)":

$$y^n + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = b_0 u^n + b_1 u^{(n-1)} + \dots + b_{n-1}\dot{u} + b_n u$$

Se asigna las variables de estado restando una fracción de u (β) para luego poder anular las derivadas temporales de u a partir de los β:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= y - \beta_0 u \\ x_2 &= \dot{y} - \beta_0 \dot{u} - \beta_1 u = \dot{x}_1 - \beta_1 u \\ x_3 &= \ddot{y} - \beta_0 \ddot{u} - \beta_1 \dot{u} - \beta_2 u = \dot{x}_2 - \beta_2 u \\ &\vdots \\ x_n &= y^{(n-1)} - \beta_0 u^{(n-1)} - \beta_1 u^{(n-2)} \dots - \beta_{n-1} u = \dot{x}_{n-1} - \beta_{n-1} u \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + \beta_1 u \\ \dot{x}_2 &= x_3 + \beta_2 u \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n + \beta_{n-1} u \\ \dot{x}_n &= -a_n . x_1 - a_{n-1} x_2 - \dots - a_1 x_n + \beta_n u(t) \end{aligned}$$

Para eliminar aquí la dependencia con las derivadas de u(t) se debió seleccionar convenientemente los parámetros β.

Resultando

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix} u$$

$$y = [1\ 0\ 0 \dots 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u$$

¿b_0 ó β_0?

~~Ejemplo:~~

$$\cancel{\ddot{y} + y + y = u + \dot{u}}$$

$$\cancel{x_1 = y - \beta_0 u \Rightarrow \dot{x}_1 = \dot{y} - \beta_0 u}$$

$$\cancel{x_2 = \dot{y} - \beta_0 \dot{u} - \beta_1 u \Rightarrow \dot{x}_2 = \dot{x}_1 \; \beta_1 u} \Rightarrow$$

Ejemplo:

$$\ddot{y} + \dot{y} + y = u + \dot{u} \quad (1)$$

Asignación de variables con β:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= y - \beta_0 u \\ x_2 &= \underbrace{\dot{y} - \beta_0 \dot{u}}_{\dot{x}_1} - \beta_1 u \end{aligned}\right\} \boxed{\dot{x}_1 = x_2 + \beta_1 u}$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{y} - \beta_0 \ddot{u} - \beta_1 \dot{u} \quad (2)$$

Introduciendo (1) en (2):

$$\dot{x}_2 = u + \dot{u} - \dot{y} - y - \beta_0 \ddot{u} - \beta_1 \dot{u} \longrightarrow \text{Depende de } \dot{u} \text{ y } \ddot{u}$$

$$= u + \dot{u} - (x_2 + \beta_0 \dot{u} + \beta_1 u) - (x_1 + \beta_0 u) - \beta_0 \ddot{u} - \beta_1 \dot{u}$$

$$\boxed{\dot{x}_2 = u \cdot (1 - \beta_1 - \beta_0) + \dot{u} \cdot (1 - \beta_0 - \beta_1) + \ddot{u} \cdot (-\beta_0) - x_2 - x_1}$$

Definiendo los parámetros β para eliminar las dependencias con $\dot{u}$ y $\ddot{u}$:

$$\left.\begin{aligned} (1 - \beta_0 - \beta_1) &= 0 \\ (-\beta_0) &= 0 \Rightarrow \boxed{\beta_0 = 0} \end{aligned}\right\} \Rightarrow (1 - 0 - \beta_1) = 0 \Rightarrow \boxed{\beta_1 = 1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \overset{1}{\beta_1} u \\ \ddot{x}_1 = -x_2 - x_1 \end{cases} \qquad y = x_1 + \overset{0}{\beta_0} u$$

$$\Downarrow$$

Matricialmente:

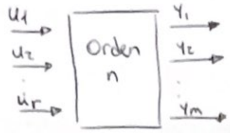
$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} \cdot \underbrace{u}_{u} \qquad \underbrace{y}_{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x} + [0] \cdot u$$

▶ Cálculo FdT:

$$\ddot{y} + \dot{y} + y = u + \dot{u} \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} s^2 Y + sY + Y = U + sU \Rightarrow \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(s+1)}{(s^2 + s + 1)}$$

▸ Representación de sistemas multivariables

Considerando un sistema con varias entradas y varias salidas que interactúan simultáneamente:



r entradas
m salidas } sistema de r x m ecuaciones diferenciales

n = orden del sistema = número mínimo de variables de estado necesarias para describir el comportamiento del sistema.

m x r ecuaciones diferenciales $\xleftrightarrow{\mathcal{L}}$ $y(s) = G(s)\, u(s)$

→ $u(s)$: vector de entrada (dimensión r)

→ $G(s)$: Matriz de transferencia (dimensión m x r)

→ $y(s)$: vector de salida (dimensión m)

Cada G_{ij} representa la FdT de la entrada $u_j(s)$ y la salida $y_i(s)$

⟹ identificación de variables de estado ⟶ conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden

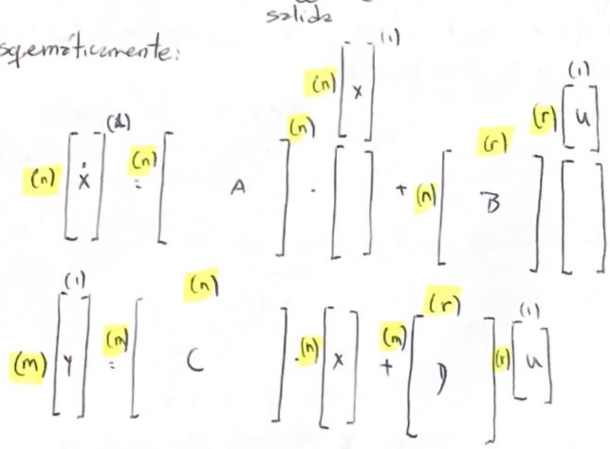
matriz del sistema: A — matriz de entrada: B

$$\dot{x}(t) = A\, x(t) + B\, u(t)$$

$$y(t) = C\, x(t) + D\, u(t)$$

matriz de salida: C — matriz de transferencia directa: D

esquemáticamente:



$\dot{x} = Ax + Bu$

$y = Cx + Du$

• Ejemplo:

$$\ddot{Y}_1 + \dot{Y}_1 + Y_2 = u_1 + \dot{u}_2 \quad (1)$$
$$\dot{Y}_2 = Y_1 + \dot{u}_1 \quad (2)$$

Consideraciones:

- → Aparecen derivadas de las entradas ⇓ α y β
- → Y_1 → 2 integradores ⇒ orden 2
- → Y_2 → 1 integrador ⇒ orden 1

} Total = 3 ⇒ sistema orden 3

Modelado en Variables de estado:

▶ Asignación de variables de estado: → **Asignación Manual**

• $x_1 = Y_1 - \alpha_0 u_1 - \beta_0 u_2 \quad (3)$

$$x_2 = \underbrace{\dot{Y}_1 - \alpha_0 \dot{u}_1 - \beta_0 \dot{u}_2}_{\dot{x}_1} - \alpha_1 u_1 - \beta_1 u_2 = \dot{x}_1 - \alpha_1 u_1 - \beta_1 u_2 \Rightarrow \boxed{\dot{x}_1 = x_2 + \alpha_1 u_1 + \beta_1 u_2}$$

• $\dot{x}_2 = \underbrace{\ddot{Y}_1 - \alpha_0 \ddot{u}_1 - \beta_0 \ddot{u}_2}_{\ddot{x}_1} - \alpha_1 \dot{u}_1 - \beta_1 \dot{u}_2 \quad (2)$

Introduciendo (1) en (2)

$$\dot{x}_2 = \underbrace{u_1 + \dot{u}_2 - \dot{Y}_1 - Y_2}_{(1)} - \alpha_0 \ddot{u}_1 - \beta_0 \ddot{u}_2 - \alpha_1 \dot{u}_1 - \beta_1 \dot{u}_2$$
$$\dot{Y}_1 = x_2 + \alpha_0 \dot{u}_1 + \beta_0 \dot{u}_2 + \alpha_1 u_1 + \beta_1 u_2$$
$$Y_2 = x_3 + \alpha_2 u_1 + \beta_2 u_2$$

$$\dot{x}_2 = u_1 + \dot{u}_2 - \overbrace{(x_2 + \alpha_0 \dot{u}_1 + \beta_0 \dot{u}_2 + \alpha_1 u_1 + \beta_1 u_2)}^{\dot{Y}_1} - \overbrace{(x_3 + \alpha_2 u_1 + \beta_2 u_2)}^{Y_2} - \alpha_1 \dot{u}_1 - \beta_1 \dot{u}_2 - \alpha_0 \ddot{u}_1 - \beta_0 \ddot{u}_2$$

$$\dot{x}_2 = u_1 + \dot{u}_2 - x_2 - \alpha_0 \dot{u}_1 - \beta_0 \dot{u}_2 - \alpha_1 u_1 - \beta_1 u_2 - x_3 - \alpha_2 u_1 - \beta_2 u_2 - \alpha_1 \dot{u}_1 - \beta_1 \dot{u}_2 - \alpha_0 \ddot{u}_1 - \beta_0 \ddot{u}_2$$

$$\boxed{\dot{x}_2 = u_1 \cdot (1 - \alpha_1 - \alpha_2) + u_2(-\beta_1 - \beta_2) + \dot{u}_1(-\alpha_0 - \alpha_1) + \dot{u}_2 \cdot (1 - \beta_0 - \beta_1) - x_2 - x_3 - \ddot{u}_1 \alpha_0 - \ddot{u}_2 \beta_0}$$

→ $\alpha_0 = 0$ → $\beta_0 = 0$ → $-\alpha_0 - \alpha_1 = 0$ → $1 - \beta_0 - \beta_1 = 0$

• $x_3 = Y_2 - \alpha_2 u_1 - \beta_2 u_2$

$\dot{x}_3 = \dot{Y}_2 - \alpha_2 \dot{u}_1 - \beta_2 \dot{u}_2 \quad (4)$

Introduciendo (3) en (4).

$$\dot{x}_3 = \underbrace{(Y_1 + \dot{u}_1)}_{(3)} - \alpha_2 \dot{u}_1 - \beta_2 \dot{u}_2$$
$$Y_1 = x_1 + \alpha_0 u_1 + \beta_0 u_2 \quad (5)$$

$$\dot{x}_3 = \overbrace{x_1 + \alpha_0 u_1 + \beta_0 u_2}^{(5)} + \dot{u}_1 - \alpha_2 \dot{u}_1 - \beta_2 \dot{u}_2$$

$$\boxed{\dot{x}_3 = x_1 + u_1 \cdot \alpha_0 + u_2 \cdot \beta_0 + \dot{u}_1 \cdot (1 - \alpha_2) + \dot{u}_2 \cdot (-\beta_2)}$$

→ $\beta_2 = 0$

→ $(1 - \alpha_2) = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 1$

▶ Cálculo de α y β:

$\alpha_0 = 0$

$\beta_0 = 0$

$-\alpha_0 - \alpha_1 = 0 = 0 - \alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 = 0$

$1 - \cancel{\beta_0} - \beta_1 = 0 \Rightarrow -\beta_1 = -1 \Rightarrow \beta_1 = 1$

$\alpha_2 = 1$

$\beta_2 = 0$

$$\boxed{\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 - x_3 - u_2 \\ \dot{x}_3 = x_1 \end{cases}}$$

▶ Selección de la salida:

$Y_1 = x_1 + \cancel{\alpha_0 u_1} + \cancel{\beta_0 u_2} \Rightarrow$

$Y_2 = x_3 + \underbrace{\alpha_2}_{1} u_1 + \cancel{\beta_2 u_2} \Rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} Y_1 &= x_1 \\ Y_2 &= x_3 + u_1 \end{aligned}}$$

▶ Matricialmente:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}}_{\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}}_{Y = C \cdot x + D \cdot u}$$

Clase 3
Parte 2
Hoja 2

▶ Análisis Función de Transferencia:

$$\ddot{Y}_1 + \dot{Y}_1 + Y_2 = U_1 + \dot{U}_2 \xleftrightarrow{\mathcal{L}} s^2 Y_1 + sY_1 + Y_2 = U_1 + sU_2 \quad (1)$$

$$\dot{Y}_2 = Y_1 + \dot{U}_1 \xleftrightarrow{\mathcal{L}} sY_2 = Y_1 + sU_1 \Rightarrow Y_2 = \frac{Y_1}{s} + U_1 \quad (2)$$

$$\Rightarrow Y_1 = sY_2 - sU_1 \quad (3)$$

(2) en (1):

- $s^2 Y_1 + sY_1 + \frac{Y_1}{s} + U_1 = U_1 + sU_2$

$$Y_1 \cdot \left(s^2 + s + \frac{1}{s}\right) = sU_2 \Rightarrow \boxed{\left.\frac{Y_1}{U_2}\right|_{U_1=0} = \frac{s}{s^2+s+\frac{1}{s}} = \frac{s^2}{s^3+s^2+1} \qquad \left.\frac{Y_1}{U_1}\right|_{U_2=0} = 0}$$

- (3) en (1):

$$s^3 Y_2 - s^3 U_1 + s^2 Y_2 - s^2 U_1 + Y_2 = U_1 + sU_2$$

$$Y_2 \cdot (s^3 + s^2 + 1) - U_1 \cdot (s^3 + s^2) = U_1 + sU_2$$

$$Y_2 (s^3 + s^2 + 1) = U_1 \cdot (s^3 + s^2 + 1) + sU_2$$

$$\Rightarrow \boxed{\left.\frac{Y_2}{U_1}\right|_{U_2=0} = \frac{(s^3+s^2+1)}{(s^3+s^2+1)} \qquad \left.\frac{Y_2}{U_2}\right|_{U_1=0} = \frac{s}{(s^3+s^2+1)}}$$

ss2tf
=
state space to transfer function

FdT Sirve para verificar si calculé bien en el espacio de estados

Método con variable auxiliar - Forma Canónica Controlable

Clase 3
Parte 2
Hoja 3

Solo para sistemas monovariables?

Se propone una asignación en donde no aparezcan las derivadas de la entrada.

Sea la FdT:

estos indican presencia de las derivadas de $u(t)$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 \cdot s^n + b_1 \cdot s^{n-1} + \dots + b_{n-1} \cdot s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Con este método las evita

Se inserta variable auxiliar: "$X(s)$"

$$\Rightarrow G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \cdot \frac{X(s)}{X(s)} = \frac{b_0 s^n X(s) + \dots + b_{n-1} s \cdot X(s) + b_n X(s)}{s^n X(s) + a_1 s^{n-1} X(s) + \dots + a_{n-1} s X(s) + a_n X(s)} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Por lo tanto, en el dominio del tiempo $\mathcal{L}^{-1}$:

derivada enésima de la variable auxiliar

$$y = b_0 \cdot x^n + b_1 \cdot x^{n-1} + \dots + b_{n-1} \cdot x' + b_n \cdot x \quad (1)$$

$$u = x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot x' + a_n \cdot x \quad (2)$$

Asignación de variables de estado:

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= \dot{x}_1 = \dot{x} \qquad (3) \\ x_3 &= \dot{x}_2 = \ddot{x}_1 = \ddot{x} \\ x_n &= \dot{x}_{n-1} = x^{n-1} \end{aligned}$$

* índice inferior = variable de estado ej: x_n

* índice superior = derivada de la variable auxiliar ej: x^n

Reemplazando (3) en (2):

$$u(t) = x^n + a_1 x_n + \dots + a_{n-1} x_2 + a_n \cdot x_1 \Rightarrow \boxed{x^n = -a_1 x_n - \dots - a_{n-1} x_2 - a_n x_1 + u(t)} \quad (4)$$

Reemplazando (4) y (3) en (1):

$$y(t) = b_0 \cdot \underbrace{\left[-a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \dots - a_1 x_n + u(t)\right]}_{(4) = x^n} + b_1 \cdot x_n + \dots + b_n \cdot x_1$$

$$\boxed{y(t) = (b_1 - b_0 a_1) x_n + \dots + (b_{n-1} - b_0 a_{n-1}) \cdot x_2 + (b_n - b_0 a_n) x_1 + b_0 u(t)}$$

Matricialmente

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & & \dots & & -a_1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 & b_{n-1} - a_{n-1} b_0 & \dots & b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} b_0 \end{bmatrix}$$

Forma Canónica Controlable

Método de Asignación anidada - Forma Canónica Observable

Objetivo = salida del sistema coincide con la enésima variable de estado x_n

Sea la FdT:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

$$Y(s) \cdot \left[s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n\right] = U(s) \cdot \left[b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n\right]$$

$$Y(s) \cdot s^n = U(s) b_0 s^n + \left[b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n\right] \cdot U(s) - \left[a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n\right] Y(s)$$

$$Y(s) \cdot s^n = b_0 U(s) s^n + \left[b_1 U(s) - a_1 Y(s)\right] \cdot s^{n-1} + \dots + \left[b_{n-1} U(s) - a_{n-1} Y(s)\right] s + b_n U(s) - a_n Y(s)$$

$$Y(s) = b_0 U(s) \cancel{\frac{s^n}{s^n}} + \underbrace{\left[b_1 U(s) - a_1 Y(s)\right] \cdot \frac{1}{s} + \dots + \left[b_{n-1} U(s) - a_{n-1} Y(s)\right] \cdot \frac{1}{s^{n-1}} + \left[b_n U(s) - a_n Y(s)\right] \cdot \frac{1}{s^n}}_{\text{Asignando la variable de estado } x_n}$$

$$\Rightarrow Y(s) = b_0 U(s) + X_n(s) \Rightarrow \boxed{Y(t) = b_0 u(t) + x_n(t)} \quad (1)$$

$$\Rightarrow X_n(s) = \frac{1}{s} \cdot \left[\left[b_1 U(s) - a_1 Y(s)\right] + \dots + \left[b_{n-1} U(s) - a_{n-1} Y(s)\right] \frac{1}{s^{n-2}} + \left[b_n U(s) - a_n Y(s)\right] \frac{1}{s^{n-1}}\right]$$

$$s X_n(s) = \left[b_1 U(s) - a_1 Y(s)\right] + \dots + \left[b_{n-1} U(s) - a_{n-1} Y(s)\right] \frac{1}{s^{n-2}} + \left[b_n U(s) - a_n Y(s)\right] \frac{1}{s^{n-1}}$$

$\updownarrow \mathcal{L}^{-1}$

$$\boxed{\dot{x}_n = b_1 u(t) - a_1 Y(t) + x_{n-1}}$$ → enésima ecuación de estado

→ asignación de una nueva variable de estado

$$\Rightarrow X_{n-1}(s) = \frac{1}{s} \left[b_2 U(s) - a_2 Y(s)\right] + \dots + \frac{1}{s^{n-2}} \left[b_{n-1} U(s) - a_{n-1} Y(s)\right] + \frac{1}{s^{n-1}} \left[b_n U(s) - a_n Y(s)\right]$$

$$s X_{n-1}(s) = \left[b_2 U(s) - a_2 Y(s)\right] + \dots + \underbrace{\frac{1}{s^{n-3}} \left[b_{n-1} U(s) - a_{n-1} Y(s)\right] + \frac{1}{s^{n-2}} \left[b_n U(s) - a_n Y(s)\right]}$$

$\updownarrow \mathcal{L}^{-1}$

$$\boxed{\dot{x}_{n-1} = b_2 u(t) - a_2 Y_t + x_{n-2}}$$ → n-1 ecuación de estado

→ Asignación de una nueva variable de estado

$$\Rightarrow \boxed{\dot{x}_2 = b_{n-1} u(t) - a_{n-1} Y_t + x_1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{x}_1 = b_n u(t) - a_n Y_t}$$

⇒ en todas las ecuaciones de estado está la función de salida Y_t

Reemplazando (1) en las ecuaciones de estado:

Forma Canónica Observable

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -a_n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} u \Rightarrow \dot{x} = A x + B \cdot u$$

$$Y = \left[0\ 0\ 0 \dots 1\right] \cdot x + b_0 u \Rightarrow Y = C x + D u \quad \text{(igual a (1))}$$