

Tarea 3 - Sistemas No Lineales

Gonzalez Bruno

2025

Datos del sistema físico

El sistema bajo análisis es un péndulo simple con fricción viscosa, sometido a un torque externo T . Se trabaja con los siguientes parámetros definidos:

Parámetro	Descripción	Valor
m	Masa del cuerpo	1 kg
l	Longitud del brazo	1 m
b	Coef. de fricción viscosa	0,4 N·s
g	Aceleración gravitatoria	10 m/s ²
δ	Ángulo de referencia	$\frac{\pi}{2}$ rad (90°)

Table 1: Parámetros del modelo físico

Torque de equilibrio estático

Para mantener el sistema en equilibrio cuando $\theta = \delta$, se considera el régimen estático ($\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$). La ecuación dinámica se reduce a:

$$0 + 0 + mgl \sin(\theta) = T \quad \Rightarrow \quad T = mgl \sin(\delta)$$

Reemplazando con los valores del sistema:

$$T = 1 \cdot 10 \cdot 1 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 10 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Por lo tanto, el torque estático necesario para sostener el péndulo en equilibrio en $\theta = \delta$ es:

$$T = 10 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Modelado en variables de estado

La dinámica del sistema está dada por:

$$ml^2\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + mgl \sin(\theta) = T$$

Se define el estado como:

$$x_1 = \theta - \delta, \quad x_2 = \dot{\theta}, \quad u = T$$

Entonces el sistema en variables de estado queda:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -0.4x_2 - 10 \sin(x_1 + \frac{\pi}{2}) + u \end{cases}$$

Punto de equilibrio

El equilibrio ocurre en $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Se busca el torque u_f tal que:

$$\dot{x}_2 = -0.4(0) - 10 \sin\left(0 + \frac{\pi}{2}\right) + u_f = -10 + u_f = 0 \Rightarrow u_f = 10$$

Linealización del sistema y análisis de estabilidad

Usando el modelo desarrollado en Matlab y el comando `linmod`, se obtuvo la representación linealizada del sistema alrededor del punto de equilibrio $x = 0$, $u = 10$. Nótese que se ha desplazado el punto de equilibrio al origen tomando como salida al error, por esto $x=0$.

```
%% Linealización del modelo en el punto de equilibrio
try
    [A, B, C, D] = linmod('pendulo_mod_tarea', [0; 0], uf); %vector X=[0;0] ya que se xl desplaza el equilibrio al origen
catch
    error('No se pudo linealizar el modelo. Verifica que "pendulo_mod_tarea.slx" esté correctamente configurado.');
```

Las matrices resultantes fueron:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -0.4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

Los autovalores de la matriz A se calcularon como:

```
--- Autovalores del sistema linealizado ---
-0.2000 + 3.1559i
-0.2000 - 3.1559i
```

$$\lambda_{1,2} = -0.2 \pm 3.156i$$

Ambos tienen parte real negativa, por lo tanto, el sistema linealizado es **localmente asintóticamente estable** según el criterio de Lyapunov indirecto.

Se ha desarrollado el modelo en variables de estado del péndulo con fricción, se determinó el torque necesario para mantener el equilibrio estático, se linealizó el sistema alrededor del equilibrio y se analizó su estabilidad mediante el método indirecto de Lyapunov. Este análisis constituye la base para el posterior diseño de un controlador estabilizante.

Diseño del Controlador con Acción Integral

A partir del modelo linealizado del sistema alrededor del punto de equilibrio $\delta = 90^\circ$, se procede a diseñar un controlador que incluya acción integral para garantizar rechazo de perturbaciones y error en régimen permanente nulo.

Modelo extendido con acción integral

Se define el sistema original en variables de estado como:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -0.4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0]$$

Para incorporar la acción integral, se construye el sistema extendido:

$$A_a = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix}, \quad B_a = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$$

Asignación de polos

Se desea que el sistema tenga una respuesta dominada por un polo real triple en $p = -2$. Para ello, se utiliza la técnica de *acker* (colocación de polos), obteniéndose la ganancia del controlador:

```
% Diseño del controlador por asignación de polos
p = -2;                                % Polo deseado triple
K = acker(Aa, Ba, [p p p]);           % Cálculo de la ganancia
```

$$K = [k_1 \quad k_2 \quad k_3]$$

con los valores calculados:

$$k_1 = 2, \quad k_2 = 5.6, \quad k_3 = 8$$

La dinámica del sistema en lazo cerrado queda definida por la matriz $A_a - B_a K$, cuyos autovalores son reales negativos y confirman la estabilidad del sistema controlado.

La implementación del controlador y su simulación se realiza en el modelo `pendulo_pid_tarea.slx`, considerando tanto el modelo nominal como variaciones del parámetro de masa, para analizar robustez del diseño.

Análisis de Robustez frente a Variación de la Masa

Para evaluar la robustez del controlador diseñado, se analiza el desempeño del sistema ante variaciones del parámetro de masa del péndulo. Se simulan los siguientes tres casos:

- Masa nominal $m = 1.0$ kg
- Disminución del 10%: $m = 0.9$ kg
- Aumento del 10%: $m = 1.1$ kg

Para cada simulación se mantienen constantes el punto de operación ($\delta = 90^\circ$), el diseño del controlador y el modelo linealizado.

Simulación del Sistema Controlado

Para validar el diseño propuesto, se implementó en Simulink un modelo completo del sistema no lineal del péndulo bajo control con acción integral. A continuación, se presenta una captura del modelo desarrollado:

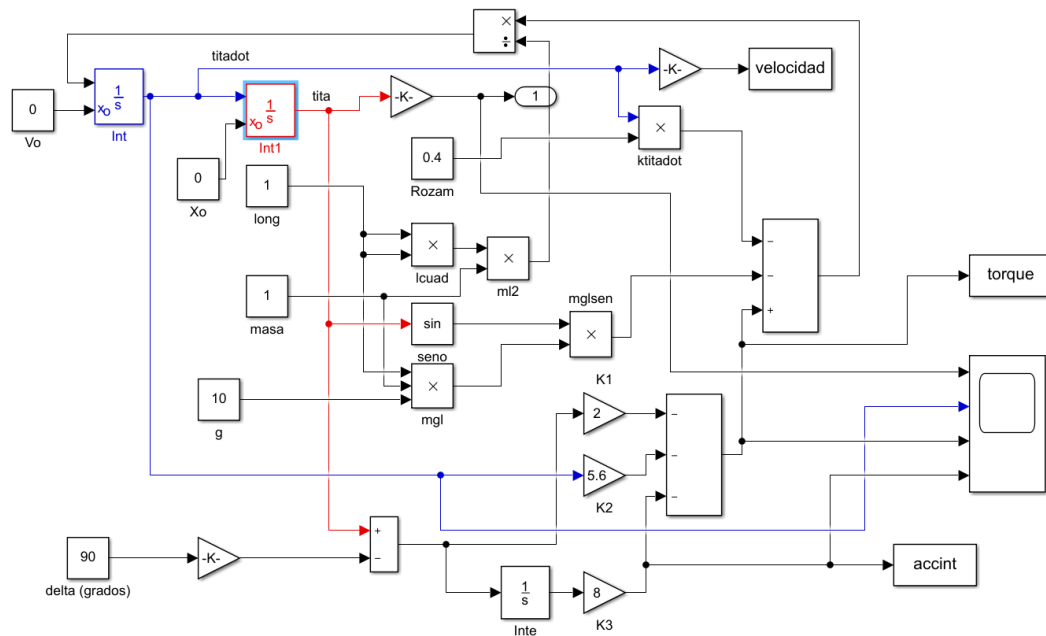


Figure 1: Modelo implementado en Simulink del sistema no lineal del péndulo controlado con acción integral.

A continuación, se muestran los resultados de la simulación para el caso nominal ($m = 1$ kg):

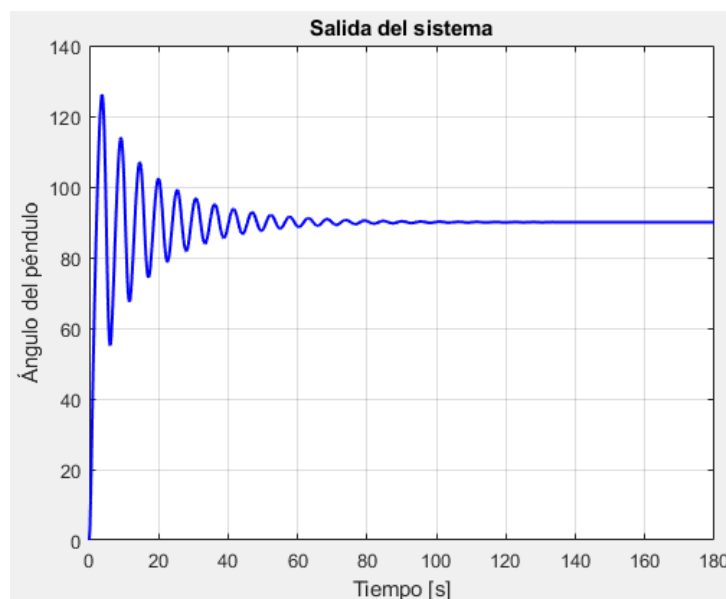


Figure 2: Evolución temporal de la salida del sistema.

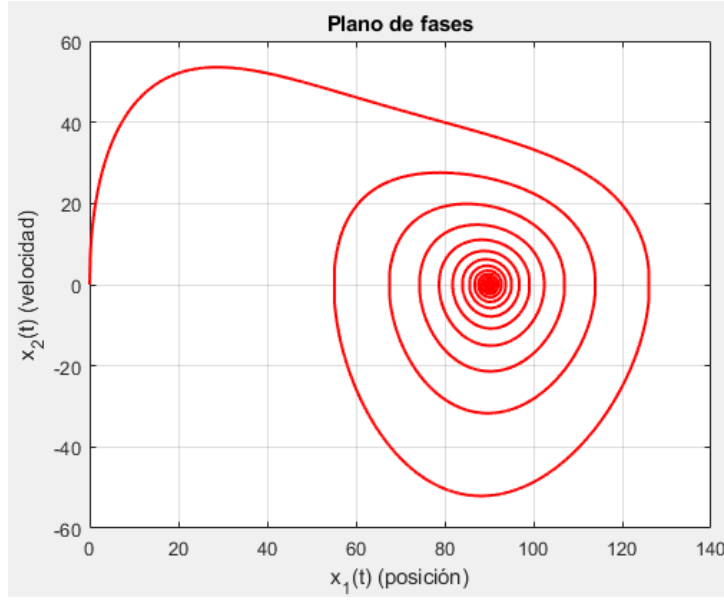


Figure 3: Plano de fases: posición vs velocidad angular.

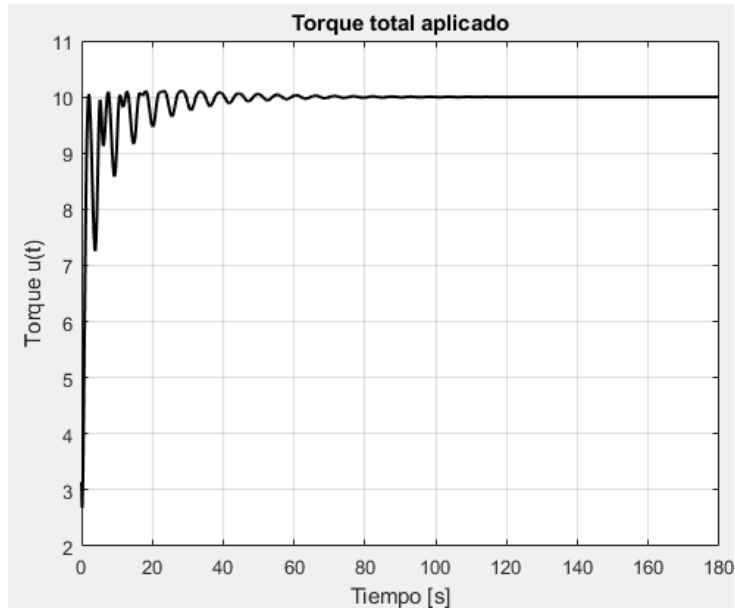


Figure 4: Torque total (accion de control) aplicado durante la simulación.

Resultados comparativos

Los indicadores de desempeño obtenidos se resumen en la siguiente tabla:

Masa [kg]	Sobrepaso [%]	t_s [s]	Salida a t_s [°]	Torque final [N·m]	Acción integral
0.9	44.36	47.10	91.80	9.02	8.97
1.0	40.14	55.14	88.20	10.02	9.91
1.1	36.02	58.57	91.80	11.03	10.81

Table 2: Comparación del desempeño del sistema para distintas masas del péndulo.

Del análisis se concluye que el controlador mantiene una buena respuesta ante perturbaciones del parámetro de masa. En particular:

- El sobrepaso disminuye con el aumento de masa y se incrementa con masas menores, en línea con el efecto de la inercia en la dinámica.
- El tiempo de establecimiento presenta variaciones menores, manteniéndose dentro de un rango aceptable en los tres casos.
- El torque final y la acción integral se ajustan según la nueva condición de equilibrio, mostrando consistencia con la variación del peso.

Enlaces y recursos

- Repositorio GitHub del estudiante: <https://github.com/BrunoUNC/Sistemas-De-Control-II-git>