Clase 4
Parte 1

Representación en espacio de estados de función de transferencia de sistemas - Formas Canónicas

Sistema a analizar:

$$y^{n} + a_1 y^{n-1} + \dots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = b_0 u^{n} + b_1 u^{n-1} + \dots + b_{n-1}\dot{u} + b_n u$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^{n} + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1}s + b_n}{s^{n} + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n}$$

- **Forma Canónica Controlable**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ -a_n & \cdots & \cdots & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C = \left[(b_n - a_n b_0); (b_{n-1} - a_{n-1} b_0); \dots; (b_1 - a_1 b_0)\right]; \quad D = [b_0]$$

- **Forma Canónica Observable**

A es la transpuesta de A controlable — B es la transpuesta de C controlable

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n \\ 1 & 0 & 0 & & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & -a_1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ \vdots \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix}; \quad C = [0 \; 0 \cdots 1]; \quad D = [b_0]$$

C es la transpuesta de B controlable

- **Forma canónica Diagonal**

Es la más relacionada con la evolución temporal de las variables de estado
Factorizando la FdT:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^{n} + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1}s + b_n}{(s+p_1)\cdot(s+p_2)\cdot\ldots\cdot(s+p_n)} = b_0 + \frac{c_1}{s+p_1} + \frac{c_2}{s+p_2} + \dots + \frac{c_n}{s+p_n}$$

$$\frac{c_1}{s+p_1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-p_1 t}$$

Matricialmente:

$$A = \begin{bmatrix} -p_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -p_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -p_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -p_n \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C = [c_1, c_2 \dots c_n] \quad D = [b_0]$$

→ residuos del numerador y del denominador
residue([num],[den])

- **Forma Canónica Jordan**

Se presenta cuando existen polos múltiples. Suponiendo polo triple en p_1:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = b_0 + \frac{c_1}{(s+p_1)^3} + \frac{c_2}{(s+p_1)^2} + \frac{c_3}{(s+p_1)} + \frac{c_4}{(s+p_4)} + \dots + \frac{c_n}{(s+p_n)}$$

$$A = \begin{bmatrix} -p_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -p_1 & 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & -p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & -p_4 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -p_n \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C = [c_1, c_2 \dots c_n]; \quad D = [b_0]$$

Solución de la ecuación de estados

Solución $\Rightarrow$ conozco como evoluciona "y" para distintos "u" $\Rightarrow$ Conozco cómo debo diseñar el controlador/acción de control para que la salida "y" evolucione de manera deseada

Modelo genérico del sistema:

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t)$$
$$y(t) = C\,x(t) + D\,u(t)$$

Objetivo: encontrar x en función de u

- Para $u=0 \Rightarrow \dot{x}(t) = A.x(t)$ - EDO homogénea

$\Rightarrow$ Se propone solución $x(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots + b_n t^n \overset{(0)}{\Rightarrow} x(0) = b_0$ (3)

$$\left.\begin{array}{l}(1) \Rightarrow \dot{x}(t) = b_1 + 2b_2 t + \ldots + n b_n t^{n-1} \\ (2) \Rightarrow \dot{x}(t) = A.x(t) = Ab_0 + Ab_1 t + Ab_2 t^2 + \ldots + Ab_n t^n\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow$ Igualando (1) y (2), y reemplazando con (3):

$$b_1 = A.b_0 = A.x(0)$$
$$b_2 = \frac{1}{2}A.b_1 = \frac{1}{2}A^2 x(0)$$
$$b_3 = \frac{1}{3}A.b_2.x_0 = \frac{1}{6}A^3 x(0)$$
$$\vdots$$
$$b_n = \frac{1}{n}A\,b_{n-1} x_0 = \frac{1}{n!}A^n x(0)$$

$\Rightarrow$ Reemplazando los coeficientes b en (0):

$$x_t = x_0 + Ax_0 t + \frac{1}{2}A^2 x_0 t^2 + \ldots + \frac{1}{n!}A^n x_0 t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(At)^n . x_0 = e^{At}.x_0$$ = Solución de la EDO homogénea

$$x_t = \underbrace{e^{At}}_{\Phi_t}.\,x_0$$

Φ_t = función de transición de estado
Me indica ubicación del proceso para un determinado lugar

$$\Phi_{t-s} = e^{A(t-s)} \Rightarrow \boxed{x_t = \Phi_{t-t_0}\, x(t_0)}$$ (A) : Función de Transición de estados del vector x_t

- Para encontrar la solución de la EDO no homogénea:

$$\dot{x}(t) - A\,x(t) = B\,u(t)$$
$$\circ\; e^{-At}.\left(\dot{x}(t) - A\,x(t)\right) = e^{-At} B\,u(t)$$
$$\circ\; \frac{\partial\left(e^{-At}.x(t)\right)}{\partial t} = -e^{-At}.A.x(t) + e^{-At}.\dot{x}(t) = e^{-At}.\left(\dot{x}(t) - A.x(t)\right)$$
$$\Rightarrow \frac{\partial\left(e^{-At}.x(t)\right)}{\partial t} = e^{-At} B\,u(t)$$

$\Rightarrow$ Integrando a ambos miembros:

$$e^{-At} x(t) = \int_0^t e^{-As}.B.u(s)\,ds + \underbrace{x_0}_{\text{cte de integración}}$$

$$e^{At} \cdot e^{-At} \cdot x(t) = e^{At} \cdot x_0 + e^{At} \cdot \int_0^t e^{-As} B u(s) \, ds$$

$$\boxed{x(t) = e^{At} \cdot x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} \cdot B \cdot u(s) \, ds}$$

Conociendo la relación entre FdT y ecuaciones en el espacio de estados:

$$Y(s) = C \cdot (sI - A)^{-1} B \cdot U(s) + D \cdot U(s) \xleftrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} Y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{C(sI-A)^{-1} B \cdot U(s)\} + \mathcal{L}^{-1}\{D \cdot U(s)\}$$