Diseño de Controladores de Estado Lineales

Diseño mediante Asignación de Polos

Se definen los polos de lazo cerrado deseados para cumplir con los requerimientos del sistema y a partir de allí se calcula la matriz del controlador "K".

Ec. característica de lazo cerrado:

$$\underbrace{(s-\mu_1)(s-\mu_2)\cdots(s-\mu_n)}_{\text{Polos deseados}} = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}s + \alpha_n = 0 \qquad (0)$$

Coeficientes de lazo cerrado contienen como información la ubicación de los polos de lazo cerrado

Se debe representar al sistema en su forma canónica controlable, para esto se define:

matriz de transformación $T = M.W$

$$W = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a: coeficientes del polinomio característico de la matriz A. → matriz del sistema de lazo abierto

$$|sI - A| = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n.$$

→ matriz de controlabilidad

$$M = \left[B \mid AB \mid \cdots A^{n-1}B\right]$$

⇒ vector de estado forma canónica controlable = $\hat{x} = T^{-1}.x$ ⇒ $x = T.\hat{x}$ ⇒ $u = -K.T.\hat{x}$ (1)

→ controlador: $KT = [\delta_n \ \delta_{n-1} \cdots \delta_1]$

⇒ ecuación del sistema: $\dot{\hat{x}} = T^{-1}.A.T.\hat{x} + T^{-1}.B.u$ (2)

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \ldots & -a_1 \end{bmatrix}, \qquad T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ 1 \end{bmatrix}.$$

⇒ Reemplazando (1) en (2): $\dot{\hat{x}} = \left(T^{-1}AT - T^{-1}BKT\right)\hat{x}$ (3)

Se trata siempre del mismo sistema por lo tanto la ecuación característica de (3) debe ser igual a (0):

$$\left|sI - \left(T^{-1}AT - T^{-1}B \cdot KT\right)\right| = 0.$$

$$\|$$

$$\left| sI - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \ldots & -a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_n & \delta_{n-1} & \cdots & \delta_1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\|$$

$$\begin{vmatrix} s & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & s & -1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & -1 \\ a_n + \delta_n & a_{n-1} + \delta_{n-1} & & \ldots & s + a_1 + \delta_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\|$$

$$s^n + (a_1 + \delta_1)s^{n-1} + \cdots + (a_{n-1} + \delta_{n-1})s + (a_n + \delta_n) = 0 = (s-\mu_1)(s-\mu_2)\cdots(s-\mu_n) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}s + \alpha_n = 0$$

Despejando los δ se obtiene la matriz del controlador:

$$KT = \left[\alpha_n - a_n \quad \alpha_{n-1} - a_{n-1} \quad \cdots \quad \alpha_1 - a_1\right]$$

$$K = \left[\alpha_n - a_n \quad \alpha_{n-1} - a_{n-1} \quad \cdots \quad \alpha_1 - a_1\right]T^{-1}.$$

Desventajas del método: No tiene en cuenta magnitudes de la acción de control

Diseño mediante la fórmula de Ackerman

Sea el sistema de lazo abierto:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

Sea el controlador:

$$\mathbf{u}(t) = -\mathrm{K}\mathbf{x}(t),$$

Sistema de lazo cerrado:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathrm{K})\mathbf{x}(t).$$

⇒ La ecuación característica de lazo cerrado es:

$$\prod_{i=1}^{n}(s + \mu_i) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1}s + \alpha_n = 0$$

Polos deseados para cumplir con los requerimientos

⇒ Por Cayley-Hamilton:

$$\phi(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}) = \phi(\widetilde{\mathbf{A}}) = \widetilde{\mathbf{A}}^n + \alpha_1\widetilde{\mathbf{A}}^{n-1} + \alpha_2\widetilde{\mathbf{A}}^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1}\widetilde{\mathbf{A}} + \alpha_n \mathrm{I} = \hat{0}$$

$\tilde{A} = A - BK$

ϕ = operador que aplica a su argumento los coeficientes del polinomio característico $|sI - \tilde{A}|$

Por lo tanto:

$$\left.\begin{array}{l}\phi(\tilde{A}) = 0 \\ \phi(A) \neq 0\end{array}\right\}\quad \phi(\tilde{A}) = \phi(A) + \text{Términos dependientes de } K = 0$$

$$\phi(\widetilde{\mathbf{A}}) = \phi(\mathbf{A}) + \alpha_{n-1}(-\mathbf{B}\mathbf{K}) + \alpha_{n-2}(-\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{K} - \mathbf{B}\mathbf{K}\widetilde{\mathbf{A}}) + \cdots = 0.$$

$$\Downarrow$$

$$\phi(\mathbf{A}) = \alpha_{n-1}\mathbf{B}\mathbf{K} + \alpha_{n-2}\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{K} + \alpha_{n-2}\mathbf{B}\mathbf{K}\widetilde{\mathbf{A}} + \cdots + .$$

$$\Downarrow$$

$$\phi(\mathbf{A}) = \underbrace{[\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B}}_{\text{Matriz de controlabilidad}}\ ] \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{n-1}\mathbf{K} + \alpha_{n-2}\mathbf{K}\widetilde{\mathbf{A}} \\ \mathbf{K} \\ \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

Fórmula de Ackermann: $\boxed{K = [0 \quad 1] \cdot [B \quad AB]^{-1} \cdot \Phi(A)}$

K: Matriz del Controlador

En $\phi(A)$ está la información de los polos deseados al inicio del planteo.

⇒ Pasos para el diseño:

0. Defino polos deseados de la ecuación característica del sistema de lazo cerrado
1. Calculo ec. característica de lazo cerrado
2. Calculo $\phi(A)$
3. Calculo la matriz de controlabilidad y su inversa
4. Aplico Fórmula de Ackermann

▶ Regulador con referencia distinta de cero

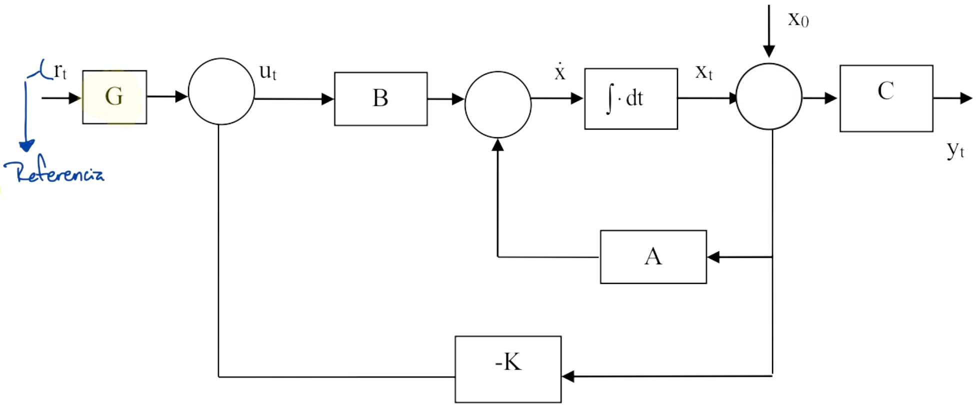
• Con Ganancia de Prealimentación

Puede usarse el mismo controlador pero se modifica a la acción de control en una medida relativa:

$$u_t = -Kx_t + G\,r_t$$

r_t → referencia

G → Ganancia de prealimentación de la referencia



Aplicando Laplace:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \\ u &= -Kx + Gr \end{aligned} \quad \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \quad \left.\begin{aligned} sX_s &= Ax_s + Bu_s \\ Y_s &= C\,X_s \\ U_s &= -KX_s + Gr_s \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} sX_s &= AX_s - BKX_s + BGr_s \\ sX_s &= (A-BK)X_s + BGr_s \end{aligned}$$

$$sX_s - (A-BK)X_s = BGr_s$$

$$[sI - (A-BK)]X_s = BGr_s$$

$$\underbrace{Y_s = C.[sI-(A-BK)]^{-1}.BG}_{H_s}r_s \longleftarrow X_s = [sI-(A-BK)]^{-1}.BGr_s$$

$$\Downarrow$$

$$Y_s = H_s \cdot r_s$$

Teniendo en cuenta r_s escalón unitario y Teorema del Valor Final:

$$\lim_{s\to 0} s.Y_s = \lim_{t\to\infty} y(t)$$

$$\Rightarrow \boxed{G = -\left[C(A-BK)^{-1}B\right]^{-1}}$$

• Incorporando un integrador

Se agrega un término de integración en el diseño en tiempo continuo $\Rightarrow$ Agrego una variable de estado

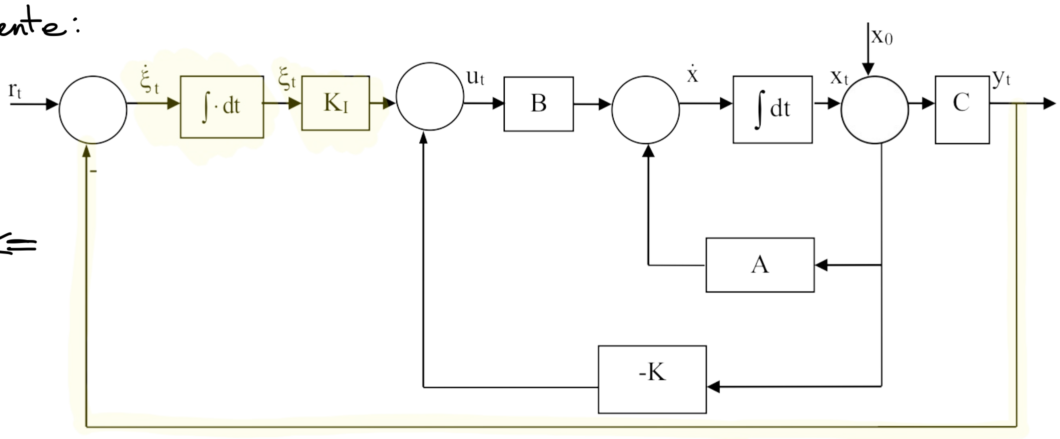
$$u_t = -Kx_t + K_I.\xi_t = -[K \;\; -K_I].\begin{bmatrix} x_t \\ \xi_t \end{bmatrix}$$

ξ_t → nuevo estado

→ salida de un integrador cuando a la entrada está presente el error de control $e_t = r_t - y_t$

$$\boxed{\dot{\xi}_t = r_t - y_t = r_t - Cx_t}$$

Gráficamente:



Ahora también $\Leftarrow$
realimento la
salida y_t