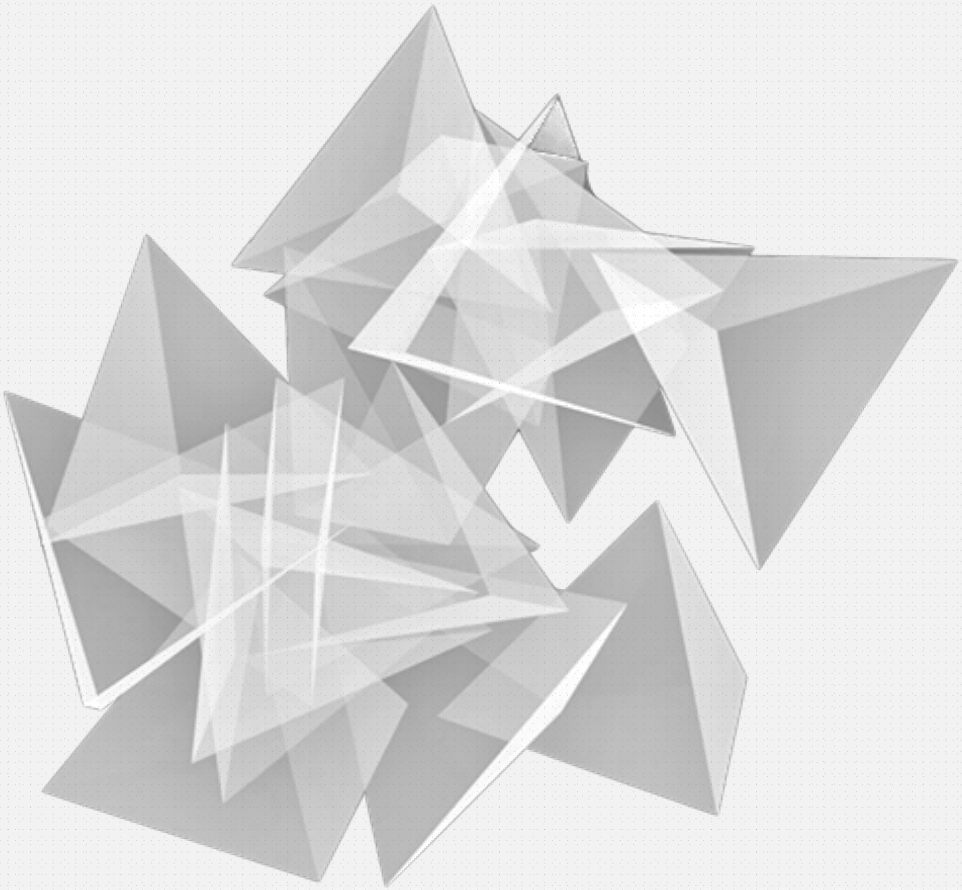
Practicum 1 - Lagerangbenaderingen

Bruno Vandekerkhove



Academisch Jaar 2019

G0Q57A: Modellering & Simulatie

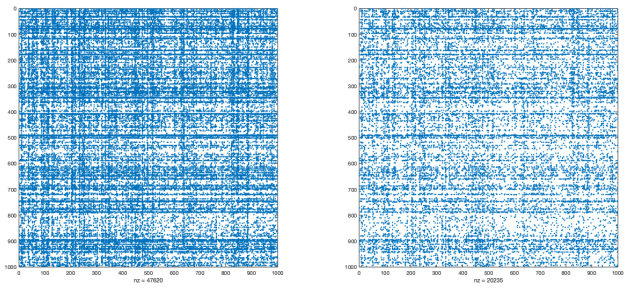
Inhoudsopgave

Een Aanbevelingssysteem voor Films

De broncode bevindt zich in de `src` *folder. Het algemene script (*`src/s0216676_script`*) is opgedeeld in secties, één per opgave. Elke opgave wordt hieronder afzonderlijk beantwoord. Aan het einde van elk antwoord wordt (indien nodig) de broncode weergegeven.*

Opdracht 1

We laden de dataset in met de `load` functie. De uitvoer staat weergegeven in figuur 1.



Figuur 1: Grafische voorstelling van ijle matrices R en T.

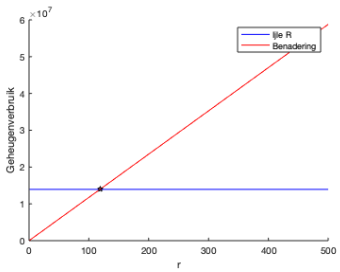
```
set(0, 'defaultFigurePosition', get(0, 'Screensize')); % Figuren vullen scherm
load('MovieLens_Subset.mat');
subplot(1,2,1)
spy(R(1:1000,1:1000))
subplot(1,2,2)
spy(T(1:1000,1:1000))
```

Opdracht 2

Stel dat gehele getallen 4 - en reële getallen 8 bytes innemen. De volle matrix `full(R)` zou dan 220388224 bytes ($\approx$ 210MB) in beslag nemen ; 1 reëel getal per element. Voor de ijle matrix `sparse(R)` lijkt het op het eerste gezicht 18525728 bytes ($<$ 18MB) te zijn ; 2 gehele getallen en 1 reëel getal per element dat niet nul is. MatLab verbruikt echter iets meer dan dat. Als men de juiste formule toepast voor het geheugenverbruik van ijle matrices [1] :

$$12 \times nnz + 4 \times n$$

dan komt men uit op bijna 14 miljoen bytes. Op mijn computer was het totaal meer dan 18,6 miljoen omdat gehele getallen daar met 8 bytes worden voorgesteld.



Figuur 2: Geheugenverbruik voor ijle matrix R en lagerangsbenadering. Het snijpunt bevindt zich in $r \approx 119$.

```
[m,n] = size(R);
ratings = nnz(R);
int_mem = 4;
double_mem = 8;
max_r = 500;
%
fprintf('Geheugenruimte full(R) : %i\n', m * n * double_mem)
%
size_sparse_naive = ratings * (int_mem * 2 + double_mem);
size_sparse = 12 * ratings + 4 * n;
fprintf('Geheugenruimte sparse(R) : %i\n', size_sparse)
%
fullR = full(R);
fprintf('Matlab zelf gebruikt respectievelijk %i en %i bytes.\n', whos('fullR').bytes, ...
    whos('R').bytes)
%
r = 1:max_r;
size_approx = (m + n) * double_mem * r;
snijpunt_r = size_sparse / ((m + n) * double_mem);
fprintf('Snijpunt in r = %i\n\n', snijpunt_r)
%
hold on
plot(r, repmat(size_sparse,1,max_r), 'b-')
plot(r, size_approx, 'r-')
plot(snijpunt_r, size_sparse, 'kp')
xlabel('r')
ylabel('Geheugenverbruik')
legend('Ijle R', 'Benadering', 'Location', 'northeast')
```

[1] ***MATLAB*** *gebruikt het* ***CSC*** *formaat voor ijle matrices : "Even though* ***MATLAB*** *is written in* ***C****, it follows its* ***LINPACK*** *and* ***Fortran*** *predecessors and stores full matrices by columns. This organization has been carried over to sparse matrices. A sparse matrix is stored as the concatenation of the sparse vectors representing its columns. Each sparse vector consists of a floating point array of nonzero entries (or two such arrays for complex matrices), together with an integer array of row indices. A second integer array gives the locations in the other arrays of the first element in each column. Consequently, the storage requirement for an $m \times n$ reals parse matrix with nnz nonzero entries is nnz reals and $nnz + n$ integers. On typical machines with 8-byte reals and 4-byte integers, this is $12nnz + 4n$ bytes."* [1]

Opdracht 3

Men weet dat

$$A = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^T \tag{1}$$

Het iteratief algoritme gaat bij elke stap σ_j, u_j en v_j bepalen zodat de Frobeniusnorm van $E_{j-1} - \sigma_j u_j v_j^T$ (de nieuwe E_j) minimaal is. Dit komt overeen met het bepalen van een afgeknotte singuliere waardenontbinding van graad 1. De σ_j dient daarbij de grootste singuliere waarde van E_{j-1} te zijn. Stel $j = 0$, dan :

$$E_1 = E_0 - \sigma_j u_j v_j^T = A - \sigma_j u_j v_j^T = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^T - \sigma_j u_j v_j^T = \sum_{i=2}^{r} \sigma_i u_i v_i^T$$

Na een aantal iteraties bekomt men uiteindelijk :

$$E_k = \sum_{i=k+1}^{r} \sigma_i u_i v_i^T$$

Want telkens wordt er een afgeknotte singuliere waardenontbinding bepaald van rang 1 en die komt overeen met de term horende bij de grootste singuliere waarde zodat deze term keer op keer verdwijnt na aftrekking. Totdat de laatste $r - k$ termen overblijven. Men kan opmerken dat dit niet verreist dat de u_j en v_j bekomen in stap 4 overeenstemmen met de u_i en v_i in (1). Het teken van u_j en v_j kan bijvoorbeeld verschillen.

Berekent men ten slotte $A - E_k$ dan bekomt men het gevraagde :

$$A - E_k = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^T - \sum_{i=k+1}^{r} \sigma_i u_i v_i^T = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i u_i v_i^T$$

Het algoritme stopt na k stappen (mits men veronderstelt dat $k \leq r$, want anders stop the algoritme vroeger dan dat).

Opdracht 4

Gezien mijn studentennummer $s0216676$ is, is c gelijk aan 6. Met $sizeof(double) = 8$ zal stap 4 een totaal aan $8 * (m + n + 1)$ bytes nodig hebben. Voor stap 5 krijgt men te maken met de matrix E die maar één keer wordt gealloceerd en $8 * n * m$ bytes nodig heeft. Stap 6 verbruikt 4 bytes (voor het geheel getal). Het aantal keren dat men de stappen uitvoert maakt niet uit.

Men heeft dus te maken met $((280000 + 58000 + 1) * 8 + (280000 * 58000 * 8) + 4)/1024^3 \approx 120$ GB wat op zich al meer is dan het optimistische $8 + 2 + (c + 1)^2 = 8 + 2 + 49 = 59$ GB. Als men met ijle voorstellingen blijft werken kan hier iets aan gedaan worden.

Opdracht 5

De drie vectoren `[i,j,x]` die teruggegeven worden door `find(A)` verbruiken elk $\mathcal{O}(\zeta)$ geheugen. In de implementatie van de functie `s0216676_sparseModel` wordt `[x]` zélf hergebruikt om de resultaten van de lineaire operator $P_\Omega(X)$ op te slaan. Elk element x_{ij} is gelijk aan de vermenigvuldiging van rij i van de matrix $Uk * diag(sk)$ en kolom j van Vk^T. Het volstaat dus elementsgewijs te vermenigvuldigen van rij i van Uk met sk^T en dit te vermenigvuldigen met de getransponeerde rij j van Vk.

```
1  function [P] = s0216676_sparseModel(Uk,sk,Vk,A)
2      [i,j,x] = find(A);
3      for idx = 1:nnz(A)
4          x(idx) = Uk(i(idx),:) .* sk' * Vk(j(idx),:)';
5      end
6      P = sparse(i, j, x);
7  end
```

Opdracht 6 TE VRAGEN AAN ASSISTENT

```
B = repmat(spones(R(:)), 1, 15);
spy(B(1:500,:))
```

Opdracht 7

Door op voorhand $\mathcal{O}(k\zeta)$ aan geheugen vrij te maken en dan stap voor stap de kolommen van B aan te vullen met de resultaten van de `sparseModel` functie (die op zijn beurt $\mathcal{O}(\zeta)$ geheugen gebruikt) blijft het geheugengebruik binnen de opgelegde limiet.

```
function [s] = s0216676_optimalCoefficients(Uk,Vk,A)
    [m,k] = size(Uk);
    [n,¬] = size(Vk);
    B = sparse([], [], [], m * n, k, k * nnz(A)); % Allocate space
    for j = 1:k
        B(:,j) = reshape(s0216676_sparseModel(Uk(:,j), 1, Vk(:,j), A), [], 1); %#ok
    end
    [s,¬] = lsqr(B, A(:));
end
```

Opdracht 8

Om de gemiddelde beoordeling per gebruiker te bekomen wordt de som van al diens beoordelingen genomen en gedeeld door het aantal beoordelingen dat niet nul is. Vervolgens wordt de bekomen ijle vector omgevormd tot een kolomvector.

```
function [mu] = s0216676_userMeans(A)
    mu = (sum(A, 1) ./ sum(A ≠ 0))'
end
```

Opdracht 9

Er zijn `length(mu(mu == 5))` (dwz. 13) gebruikers die een gemiddelde beoordeling hebben van 5. De laagste drie gemiddelden bedragen 0.5100, 0.5727 en 0.8983 (`sort(mu); ans(1:3)`).

Opdracht 10

Men kan de `RMSE` als volgt berekenen :

```
function [err] = s0216676_RMSE(A,B)
    err = norm(A-B, 'fro') / sqrt(nnz(A));
end
```

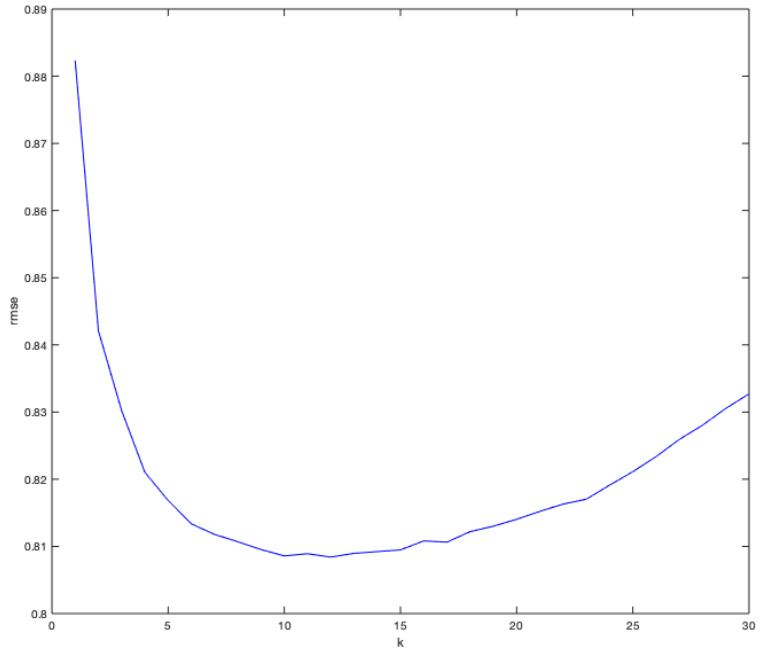
Opdracht 11 IS DIT WEL OKÉ???

De `RMSE` bedraagt iets meer dan 26 :

```
[i,j] = find(T);
mu = s0216676_userMeans(R);
err = s0216676_RMSE(T, repmat(mu', m, 1))
% Prints "err = 26.6238"
```

Opdracht 12 VRAGEN ASSISTENT : DIVERGENTIE OK?

De `RMSE` is te zien in figuur 3. De volle berekening duurde ongeveer 250 seconden.



Figuur 3: Resultaat van het algoritme voor $k = 30$, toegepast op de MovieLens dataset. Totale duur : 256 seconden.

Opdracht 13

De vector s_{20} ziet er als volgt uit :

[1.0 806.2 386.4 383.2 284.9 248.9 192.7 199.2 179.9 171.3 133.1 152.1 136.0 143.8 122.0 120.5 128.8 116.9 120.2 124.7]

Opdracht 14

De functie kan in één lijn geschreven worden :

```
function [movieIDs,score] = s0216676_actualBestMovies(R)
    [score,movieIDs] = sort(sum(R,2) ./ sum(R≠0,2), 'descend');
end
```

Opdracht 15

Deze keer moet de berekening iteratief gebeuren om het gevraagde maximum aan geheugencomplexiteit te respecteren. De gemiddelde score van elke film wordt apart berekent tot de lijst compleet is. Hierna wordt hij gesorteerd.

```
function [movieIDs,score] = s0216676_predictedBestMovies(Uk,sk,Vk)
    [m,¬] = size(Uk);
    [n,¬] = size(Vk);
    score = zeros(n, 1);
    for i = 1:m
        acc = 0;
        x = Uk(i,:) .* sk';
        for j = 1:n
            acc = x * Vk(j,:)' + acc;
        end
        score(i) = acc / n;
    end
    [score, movieIDs] = sort(score, 'descend');
end
```

Feitelijke beste films	# **beoordelingen**
Planet Earth II (2016)	387
Black Mirror: White Christmas (2014)	594
Won't You Be My Neighbor? (2018)	57
Sherlock - A Study in Pink (2010)	131
Blue Planet II (2017)	131
Over the Garden Wall (2013)	218
Whiplash (2013)	357
Human Planet (2011)	177
Inception (2010)	7631
The Night Of (2016)	184
The Jinx: The Life and Deaths of Robert Durst (2015)	401
Making a Murderer (2015)	113
Piper (2016)	631
Frozen Planet (2011)	198
Whiplash (2014)	3535
Bo Burnham: what. (2013)	95
The Handmaiden (2016)	544
Your Name. (2016)	605
Story of Film: An Odyssey, The (2011)	59
Laurence Anyways (2012)	77
Intouchables (2011)	3331
Spotlight (2015)	2264
Winter on Fire: Ukraine's Fight for Freedom (2015)	54
John Mulaney: New In Town (2012)	155
O.J.: Made in America (2016)	213
Totaal	22142
Mediaan	213

Tabel 1: Resultaten van de oproep van functie `s0216676_actualBestMovies`.

Voorspelde beste films	# **beoordelingen**
Inception (2010)	7631
Whiplash (2014)	3535
Intouchables (2011)	3331
Interstellar (2014)	6181
Django Unchained (2012)	5851
The Martian (2015)	5268
Arrival (2016)	3508
Gone Girl (2014)	4337
Shutter Island (2010)	5505
Grand Budapest Hotel, The (2014)	4444
Spotlight (2015)	2264
Dark Knight Rises, The (2012)	6182
King's Speech, The (2010)	4225
Ex Machina (2015)	4412
The Imitation Game (2014)	4614
Big Short, The (2015)	2886
Edge of Tomorrow (2014)	4807
Inside Out (2015)	4549
Prisoners (2013)	2360
Guardians of the Galaxy (2014)	5700
Her (2013)	3856
Nightcrawler (2014)	3139
Room (2015)	1674
Wolf of Wall Street, The (2013)	5141
Dallas Buyers Club (2013)	2747
Totaal	108147
Mediaan	4412

Tabel 2: Resultaten van de oproep van functie `s0216676_predictedBestMovies`.

Opdracht 16

De 'beste films' worden weergegeven in figuur 1 en 2. De mediaan voor het aantal beoordelingen bedraagt respectievelijk 213 en 4412. Dus niet alleen ziet de lijst van voorspelde beste films er heel wat realistischer uit, de films hebben ook heel wat meer beoordelingen. Dat maakt de lijst betrouwbaarder.

Opdracht 17

Opdracht 18

Referenties

[1] John R. Gilbert, Cleve Moler, and Robert Schreiber. Sparse matrices in MATLAB: Design and implementation. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 13(1):333–356, January 1992.

Evaluatie

Ik spendeerde gemiddeld zo'n 40-50 minuten per opgave (de laatste gingen wat sneller dan de eerste) voor een totaal aan ongeveer 14 uur. Het verslag schrijven nam ongeveer 2 uur. Het practicum leek me van gepaste moeilijkheid en best leerrijk.

De assumpties inherent aan het model gaan gepaard met wat nadelen.