Modellering en simulatie
Practicum 2: Monte Carlo-simulaties

Dirk Nuyens en Nick Vannieuwenhoven

22 november 2019

1 Praktische informatie

Het practicum wordt individueel opgelost. Je maakt een *gestructureerd* verslag met duidelijk **onderscheiden** componenten waarin je elk van de opgaven individueel beantwoordt, ook wanneer deze bestaat uit het schrijven van broncode. *De broncode neem je op in het verslag.*

Het verslag wordt uiterlijk **vrijdag 20 december 2019** om **16u00** ingediend. Een papieren versie van het verslag dient zich ten laatste op dat moment in de studentenbrievenbus in gebouw 200A te bevinden. Bovendien stuur je per elektronische post naar `nick.vannieuwenhoven@kuleuven.be` een gecomprimeerde map met daarin een elektronische versie van je verslag (in het pdf-formaat) alsook je Matlabbronbestanden. De elektronische versie geldt als de ingediende versie.

Zorg ervoor dat je bronbestanden de **opgelegde naamgeving** respecteren (zie verder) want de codes zullen automatisch geverifieerd worden. De naam van het verslag en de gecomprimeerde map dient overeen te stemmen met je studentennummer wanneer de bestandsextensie buiten beschouwing wordt gelaten; bijvoorbeeld "s0123456.pdf" voor je verslag en "s0123456.zip," "s0123456.tar.gz," enzoverder voor de gecomprimeerde map.

Veel succes!

> **In wat volgt vervang je elk voorkomen van "SN" met jouw studentennummer (r-nummer)—bijvoorbeeld "r0123456". Elk van de functies dien je in een afzonderlijk bestand met dezelfde naam als de functie (met extensie ".m") te implementeren. Je codes zullen automatisch geverifieerd worden. Indien de opgelegde naamgeving niet gerespecteerd wordt, dan wordt dit beschouwd als het niet oplossen van de betrokken vraag.**
>
> Voor het oplossen van de opgaven mag je **alle** ingebouwde Matlabfuncties gebruiken. Naast de verplichte functies die de opgelegde naamgeving dienen te respecteren, mag je ook nog zelf extra hulpfuncties implementeren indien je dit nodig acht. Zorg ervoor dat deze hulproutines, voor zover ze in een eigen Matlabbronbestand geïmplementeerd worden, een naam dragen die start met "SN_".
>
> Houd **de tijd** die je aan dit practicum besteedt bij; zie opdracht 13.

2 Checklist bij het indienen

1. Broncode in het verslag opgenomen.
2. Elke opdracht afzonderlijk beantwoord.
3. Alle geïmplementeerde functies starten met je studentennummer.
4. De hoofding van elke functie zoals beschreven in de opdrachten wordt gerespecteerd.

*Niets in deze publicatie mag beschouwd worden als een aanzet of uitnodiging tot het investeren in financiële instrumenten in het algemeen of in de specifieke instrumenten waarvan dit document gewag maakt. In het bijzonder mag deze publicatie niet beschouwd worden als beleggingsadvies. Alle simulaties en geschatte gegevens die in dit document verschijnen, zijn louter voor educatieve doeleinden bestemd.

3 Context en terminologie

Volgens een recent artikel dat op 23 oktober 2019 in *De Morgen* verscheen, blijkt de Belg erg pessimistisch over zijn latere pensioen.

> **'Belg verliest hoop op pensioen'**
>
> Meer dan de helft van de Belgen rekent niet op een wettelijk pensioen van de overheid. Zes op de tien verwachten zelfs dat ze geen comfortabel leven meer zullen leiden. Het Nationaal Pensioenonderzoek bij 1.059 landgenoten in opdracht van verzekeraar NN toont dat we nooit zo weinig vertrouwen hadden op het einde van onze loopbaan een pensioen te krijgen van de overheid. Slechts 44 procent rekent daarop. In een vergelijkbaar onderzoek uit 2014 was dat nog 51 procent. Amper 6 procent meent dat het wettelijke pensioen zal volstaan om de gewenste levensstandaard te bewaren.
>
> Om zijn pensioendromen waar te maken **denkt de Belg gemiddeld 1.790 euro per maand nodig te hebben**. Slechts een minderheid (43 procent) acht het waarschijnlijk dat ze die financiële reserve opgebouwd zullen hebben wanneer ze met pensioen gaan. 38 procent vreest zelfs volledig zonder geld te vallen. De grote meerderheid (81 procent) wil niet afhankelijk zijn van de kinderen.
>
> De meeste Belgen (63 procent) verwachten dan ook niet dat ze een comfortabel leven zullen hebben op hun oude dag. Bijna de helft (44 procent) van de jonge Belgen onder de 35 gelooft dat ze tot na hun 67 zullen moeten werken voor ze met pensioen kunnen gaan. En zelfs dan verwachten zes op de tien jonge Belgen dat ze zullen moeten bijverdienen.
>
> Onderzoeker Marjan Maes van de KU Leuven: "De overheid heeft te lang gewacht om de pensioenen te hervormen. Ze had dat in de jaren 90 moeten doen, zoals de meeste EU-landen. We zitten nu met een demografische golf die we al vele jaren zien aankomen. Er is niet op geanticipeerd en nu is er geen budget meer om de pensioenen substantieel te verhogen."
>
> Bron: De Morgen, p. 9, 23 oktober 2019.

Een van de meest toegankelijke en populaire vormen (vooral in de Verenigde Staten van Amerika) om goedkoop en gediversifieerd te beleggen op lange termijn zijn zogenaamde *beursgenoteerde (passieve) (index)fondsen*, ofwel *Exchange-Traded Fund (ETF)* in de Engelstalige nomenclatuur. Wereldwijd[1] is zowat \$5 960 miljard geïnvesteerd in ETFs; ongeveer 70% hiervan is ondergebracht in ETFs die op de Amerikaanse markt gericht zijn en slechts 16% in ETFs die op Europese beurzen genoteerd staan.

In dit practicum zullen we het verschil tussen een spaarrekening en beleggen in een ETF simuleren. Het is daarom noodzakelijk om wat extra terminologie over beleggen toe te lichten.[2]

3.1 Obligaties

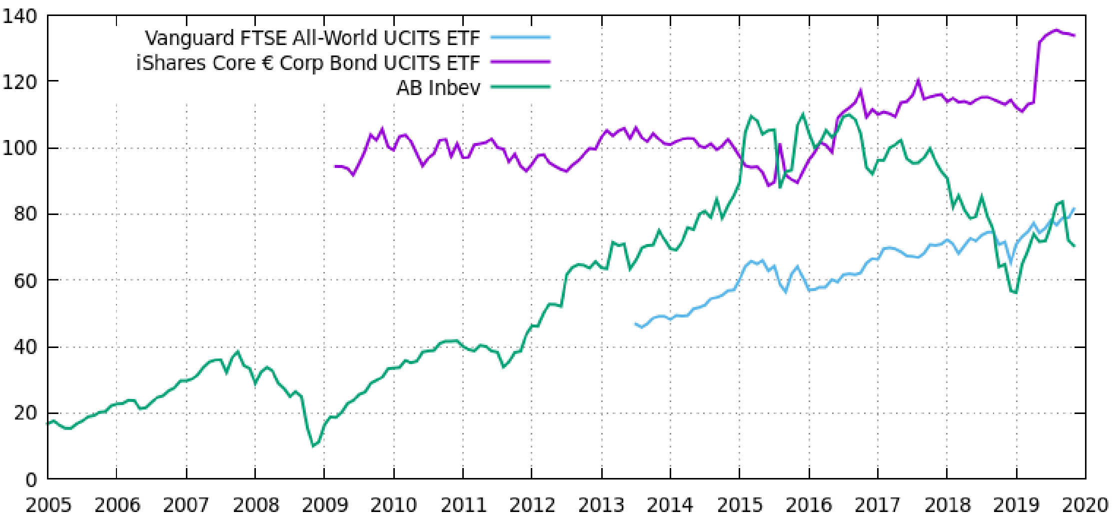
Een *schuldpapier* of *obligatie* is een financieel product dat wordt uitgegeven door een bedrijf of overheid (de emittent). Men kan obligaties op de primaire markt kopen rechtstreeks van de emittent bij uitgifte of op de secundaire markt ("de beurs"). Een obligatie heeft drie kenmerken: een hoofdsom, een jaarlijkse interestvoet en een maturiteitsdatum. De emittent belooft om op de maturiteitsdatum de hoofdsom aan de houder van het schuldpapier—de schuldeiser genaamd—te betalen. Daarnaast ontvangt de schuldeiser ook jaarlijks een interest op de hoofdsom. Op de interest die men ontvangt van een obligatie betaalt men 30% roerende voorheffing.

Obligaties zijn relatief veilige beleggingen, daar de schuldeiser een wettelijke bescherming geniet. Wanneer de emittent zich bankroet laat verklaren dan staan de obligatiehouders als eersten in de rij om hun schuld te vereffenen. Zij worden in elk geval vóór de aandeelhouders vergoed.

Tot slot een kort rekenvoorbeeld. Veronderstel dat je op 1 november 2017 een bedrijfsobligatie kocht met een hoofdsom van €1000, een jaarlijkse interestvoet van 2.0% en als maturiteitsdatum 1 november 2021. Je zou dan op 1 november 2018 een bruto interest van $0.02 \cdot 1000 = 20$ euro ontvangen hebben; na aftrek van de roerende voorheffing (30%) houd je netto €14 over. Ditzelfde bedrag ontvang je ook op 1 november 2019 en 2020. Tenslotte ontvang je op 1 november 2021 zowel de laatste interestbetaling van €14 alsook de uitbetaling van de hoofdsom, namelijk €1000. De schuldeiser ontvangt dus in het totaal €1056 over de ganse looptijd van de obligatie.

[1] Zie `http://www.etfgi.com/`

[2] Indien je nog meer wil weten over ETFs, kan je de volgende pagina raadplegen `http://www.etf.com/etf-education-ce.html`.



Figuur 1: De prijsevolutie (in EUR) van twee beursgenoteerde fondsen en het aandeel van Anheuser–Busch Inbev SA/NV.

3.2 Aandelen

Een *aandeel* is een financieel instrument dat een deelname in het eigen vermogen van een bedrijf bewijst. Een aandeelhouder is dus een mede-eigenaar van een bedrijf naar verhouding van het aantal aandelen dat hij bezit. Vele aandelen zijn vrij verhandelbaar op verschillende beurzen, alwaar het spel tussen vraag en aanbod—beïnvloed door economische en bedrijfsmatige ontwikkelingen—de prijs van het aandeel bepaalt. De gemiddelde prijs van een aandeel over een langere periode zal vaak de waarde van het bedrijf benaderen, hoewel op een gemiddeld tijdstip de prijs van het aandeel zal afwijken van de waarde van het bedrijf.[3]

Een voorbeeld van de fluctuaties van de prijs van een aandeel wordt in fig. 1 geïllustreerd voor het aandeel van Anheuser–Busch Inbev SA/NV. Dit aandeel wordt op de beurs van Brussel aangeduid met de *ticker* ABI, een handige afkorting waaraan je het aandeel kan herkennen.[4] Indien je één aandeel van AB Inbev had gekocht bij de opening van het academiejaar 2016–2017, namelijk op maandag 26 september 2016, voor een marktprijs van €116.15 per aandeel en dit aandeel aan de start van dit academiejaar had verkocht tegen de marktprijs van €87.47, dan zou je 28.68 euro verlies maken. Dit stemt overeen met een rendement van -24.7% in 3 jaar tijd, ofwel een jaarlijks cumulatief rendement van ongeveer -9.02% (want $116.15 \cdot (1 - 0.0902)^3 \approx 87.47$). Dit illustreert een van de voornaamste nadelen van het beleggen in individuele aandelen: de koerschommelingen kunnen significant zijn en belangrijke negatieve rendementen behoren tot de mogelijkheden. Had je daarentegen een aandeel van AB Inbev aangekocht op 30 september 2011 voor de toen geldende marktprijs van €40.22 en het op 13 november 2018 verkocht voor €65.36, dan had je een jaarlijks cumulatief rendement van ongeveer 7.18% gerealiseerd. Dit is meteen ook de voornaamste reden om in aandelen te beleggen: de mogelijkheid om een significante *meerwaarde* (d.w.z. het verschil tussen de aankoopprijs en de verkoopsprijs) te realiseren. België belast de gerealiseerde meerwaarde op aandelen (nog) niet.

Een bedrijf kan soms een *dividend* uitkeren aan de aandeelhouders om hen te laten delen in de bedrijfswinst. Dit dividend is een vast bedrag per aandeel waarvan de hoogte bepaald wordt door het directiecomité. In België betaal je 30% roerende voorheffing op dividenden van Belgische bedrijven.[5] Voor aandelen van bedrijven die op een andere beurs dan de Brusselse beurs genoteerd staan, betaal je eerst een extra bronbelasting aan het land waar de beurs gevestigd is. Zo betaal je eerst 15% bronbelasting op alle dividenden van aandelen die op Amerikaanse beurzen noteren, daarna gaat er nog eens 30% roerende voorheffing af. AB Inbev staat op de Brusselse beurs genoteerd en keerde in het verleden regelmatig een

[3] Een discrepantie tussen de prijs en waarde kan soms enige tijd aanhouden, zoals bijvoorbeeld tijdens de huisprijzenzeepbel in de Verenigde Staten van Amerika in 2006–2007 die bij het barsten aanleiding gaf tot de *subprime mortgages* crisis en resulteerde in de ernstige financiële crisis van 2007–2009. Afgezien van zulke speculatieve zeepbellen zal de prijs van een voldoende liquide aandeel binnen een beperkt interval rond de waarde van het bedrijf blijven schommelen.

[4] Op verschillende Aziatische beurzen gebruikt men een numerieke code om aandelen aan te duiden. Zo wordt het aandeel van Samsung op de Zuid-Koreaanse beurs aangegeven door 005930.

[5] Voor het aanslagjaar 2019 wordt de eerste schijf van €640 aan (bruto)dividenden uit gewone aandelen vrijgesteld van de roerende voorheffing bij aangifte in de personenbelasting.

dividend uit. In de periode tussen 26 september 2016 en eind september 2019 keerde AB Inbev in het totaal €9.0 uit aan brutodividenden. Netto hield je hier dan (ongeveer) €6.75 van over.

Aandelen zijn relatief risicovolle beleggingen omdat er geen enkele kapitaalbescherming is. Wanneer een bedrijf dreigt failliet te gaan dan zullen de aandelen doorgaans ook waardeloos worden. Een voorbeeld hiervan is het aandeel van Nyrstar NV. Van 2011 tot 2013 was de zinksmelter een onderdeel van de Bel20 index—een korf van aandelen van de 20 belangrijkste beursgenoteerde Belgische bedrijven. Op haar hoogtepunt na de financiële crisis van 2008 kon je op 9 februari 2011 een Nyrstar-aandeel kopen voor €71.14. Sindsdien heeft het bedrijf veel van haar waarde verloren door een combinatie van een hoge schuldgraad, slechte investeringen en een gefaalde reconversie van een zinksmelter naar een verticaal geïntegreerde zinkverwerker. Het afgelopen jaar belandde het bedrijf in een technisch bankroet op een deel van haar uitstaande schuld, werden de particuliere aandeelhouders de facto uit hun belang ontzet door een herkapitalisatie waarbij Nyrstar 98% van zichzelf verkocht (door een massale uitgifte van nieuwe aandelen) aan meerderheidsaandeelhouder Trafigura, werd de publicatie van de (half)jaarcijfers uitgesteld en stapte de CEO op. Het effect op de aandeelprijs was navenant: die daalde met zo'n 74% van €0.58 op 2 januari tot €0.15 op 18 november. Het aandeel verloor al 99.79% van zijn prijs sinds het hoogtepunt in februari 2011.

3.3 Beursgenoteerde fondsen

Een *beleggingsfonds* is een grote korf van aandelen en obligaties. De *assets under management* (AUM) van een fonds is de marktwaarde van alle aandelen en obligaties in de korf. Deze korf wordt in kleinere eenheden aan beleggers verkocht. Een fonds dat bij creatie 10 miljoen euro aan AUM zou bezitten, kan bijvoorbeeld opgedeeld worden in 1 miljoen *eenheden*. Elke eenheid is dan 10 euro waard. Sommige fondsen zijn beursgenoteerd, de voornoemde ETFs; in dit geval zijn de eenheden aandelen en kan je ze exact zoals aandelen verhandelen op de beurs. De *nettoinventariswaarde* (afgekort als NAV in de Engelstalige nomenclatuur) per eenheid van een fonds is de AUM gedeeld door het aantal eenheden. Dit is tevens de prijs waarvoor men een eenheid van het fonds kan aankopen (in een efficiënte markt). In fig. 1 zie je een voorbeeld van de evolutie van de prijs per aandeel voor twee ETFs, namelijk de *iShares Core € Corp Bond UCITS ETF* en de *Vanguard FTSE All-World UCITS ETF*. Ze staan respectievelijk op de Duitse en Nederlandse beurs genoteerd als gewone aandelen met de respectievelijke tickers EUN5 en VWRL. Fondsen die enkel uit aandelen (en wat cash) bestaan noemt men ook wel *aandelenfondsen*. Indien een fonds enkel uit obligaties bestaat dan spreekt men van een *obligatiefonds*. Een fonds dat zowel aandelen als obligaties bevat wordt een *gemengd fonds* genoemd. EUN5 is een (bedrijfs)obligatiefonds en VWRL is een aandelenfonds.

Stel bijvoorbeeld dat er een aandelenfonds zou bestaan dat is opgedeeld in 5 miljoen eenheden en waarbij de korf bestaat uit telkens 1 miljoen aandelen van AB Inbev, Proximus, Engie, Solvay en Colruyt. De marktprijzen van deze aandelen op 13 november 2018 waren respectievelijk €65.44, €23.09, €12.55, €103.35 en €54.82. De nettoinventariswaarde van een eenheid van dit fonds bedroeg dan op 13 november 2018

$$\frac{10^6 \cdot 65.44 + 10^6 \cdot 23.09 + 10^6 \cdot 12.55 + 10^6 \cdot 103.35 + 10^6 \cdot 51.85}{5 \cdot 10^6} = 60.816$$

euro. Als we veronderstellen dat de samenstelling van de aandelenkorf drie jaar eerder op 16 november 2015 hetzelfde was dan was de nettoinventariswaarde op die dag, rekening houdende met de uitbetaalde dividenden,

$$\frac{10^6 \cdot 114.00 + 10^6 \cdot 31.23 + 10^6 \cdot 16.07 + 10^6 \cdot 94.50 + 10^6 \cdot 44.66}{5 \cdot 10^6} = 60.092$$

euro. De nettoinventariswaarde van het fonds is dus in 3 jaar tijd gestegen met 1.20%.

De aandelen waaruit het fonds bestaat kunnen dividenden uitkeren en de obligaties zullen een rente uitbetalen. Het cash dat op deze manier vergaard wordt, kan door het fonds op twee manieren gebruikt worden, afhankelijk van de structuur van het fonds. Bij een *distributiefonds* zullen de dividenden en interesten pro rata uitgekeerd worden aan de houders van het fonds. Op deze uitkering betaal je dan de gebruikelijke 30% roerende voorheffing. Een *kapitalisatiefonds* daarentegen zal het extra cash gebruiken om meer van de onderliggende waarden aan te kopen in dezelfde verhoudingen. Het effect hiervan is dat AUM per eenheid van het fonds stijgt.

Stel dat het bovenstaande fonds in een gegeven jaar netto 1 miljoen euro aan dividenden zou ontvangen van de onderliggende aandelen (AB Inbev, Proximus, Engie, Solvay en Colruyt). Indien het fonds een distributiefonds is dan wordt dit bedrag pro rata verdeeld over de eenheden: voor elke eenheid van het fonds dat je bezit krijg je 1000000/5000000 = 0.2 euro bruto dividend. Na inhouding van de 30% roerende voorheffing houd je hier €0.14 van over. Indien het fonds een kapitalisatiefonds is dan kopen de beheerders van het fonds met dit geld nieuwe aandelen, gebruikelijk volgens hetzelfde gewicht. In dit voorbeeld zouden ze dus voor €200000 aan nieuwe aandelen kopen van zowel AB Inbev als Proximus als Engie als Solvay als Colruyt. Het gevolg is dat de AUM stijgt met 1 miljoen euro. De nettoinventariswaarde per eenheid stijgt dan met €0.2.

Obligatiefondsen zijn relatief veilige beleggingen daar ze enkel bestaan uit obligaties. Aangezien een fonds uit een grote korf van verschillende obligaties zal bestaan, is het risico zelfs lager dan wanneer je belegt in een individuele obligatie (met een gelijke kredietrating). Een aandelenfonds is een eerder risicovolle belegging, die echter minder risico draagt dan het investeren in een individueel aandeel. Wanneer een individueel bedrijf failliet gaat dan heeft dit doorgaans slechts een kleine invloed op de waarde van obligatiefondsen en aandelenfondsen die respectievelijk in de obligaties en aandelen van het bedrijf beleggen. Het risico van een gemend fonds zit ergens tussen obligatie- en aandelenfondsen; het hangt af van het percentage van de AUM die in obligaties belegd is (en de kredietrating van die obligaties).

Een *indexfonds* is een passief beheerd beursgenoteerd aandelenfonds waarbij de korf van aandelen bestaat uit de aandelen uit een specifieke index. Een index is een verzameling van aandelen die dienen als een representatieve afspiegeling van een onderliggende aandelenmarkt. Een welbekende index voor Amerikaanse beursgenoteerde bedrijven is de zogenaamde Standard & Poor's 500 Index dewelke bestaat uit 500 grote Amerikaanse bedrijven die genoteerd staan op de New York Stock Exchange of de NASDAQ-technologiebeurs. Een ander voorbeeld is de Bel20-index die 20 belangrijke beursgenoteerde Belgische bedrijven bevat. Zulke indices worden door een onafhankelijk orgaan samengesteld op basis van eenvoudige en objectieve criteria zoals bijvoorbeeld de marktkapitalisatie of boekwaarde van de bedrijven. Er zijn indexfondsen van verschillende fondsaanbieders die eenzelfde onderliggende index volgen.

Een specifiek kenmerk van fondsen betreft de *lopende kosten*. Elk jaar op 1 januari wordt een klein percentage van de AUM door de fondsbeheerder (de instantie die het fonds heeft samengesteld en de nodige aankopen van aandelen en obligaties regelt) ingehouden. Hierdoor daalt de nettoinventariswaarde per eenheid dus met dit percentage. Een fonds waarvan de fondsbeheerder heel veel acties onderneemt omdat het bijvoorbeeld belegt volgens een specifieke strategie die veel onderzoek vergt, wordt een *actief beheerd fonds* genoemd. De lopende kosten van een actief beheerd fonds zijn vaak hoog en kunnen oplopen tot enkele procentpunten. Daartegenover staat een *passief beheerd fonds* waarbij de aandelen en obligaties volgens een eenvoudig en geautomatiseerd principe aangekocht worden. De ETFs zijn doorgaans van het laatste type. De lopende kosten zijn hierbij veel lager en variëren van 0.03% tot 1%. *Deze lopende kosten zijn reeds verwerkt in de prijzen van de fondsen die je zal inladen in opdracht 3.*

Twee voorbeelden van indexfondsen zijn *iShares Core € Corp Bond UCITS ETF* (EUN5) en *Vanguard FTSE All-World UCITS ETF* (VWRL). Hun koersen (prijsevolutie) worden weergegeven in fig. 1. VWRL is een aandelenfonds dat de prestaties van de wereldaandelenmarkt volgt. Op 1 januari 2019 bestond VWRL uit 3184 aandelen van beursgenoteerde bedrijven over de hele wereld en had het €42.8 miljard AUM met een nettoinventariswaarde van €195 per eenheid. In tabel 1 worden de 10 posities met de grootste marktwaarde in het VWRL-fonds weergegeven.[6] De lopende kosten van VWRL bedragen 0.22%. EUN5 is een obligatiefonds dat in 2009 opgestart werd. Momenteel heeft het €7.43 miljard AUM en is daarmee het grootste Europese obligatiefonds. De lopende kosten bedragen slechts 0.20%. De nettoinventariswaarde bedraagt vandaag €128.35 per aandeel.

4 Simuleren van sparen en beleggen

In de simulaties veronderstellen we dat de spaarder net is afgestudeerd en nog geen kapitaal bezit. Hij bezit wel een (gratis) beleggersrekening bij een online broker waar hij maandelijks geld op stort. Afhankelijk van het bestudeerde scenario wordt het gestortte geld op de beleggersrekening ofwel overgeschreven naar een spaarrekening, ofwel geïnvesteerd in een van de fondsen *Vanguard FTSE All-World UCITS ETF* (VWRL) of *iShares Core € Corp Bond UCITS ETF* (EUN5). We veronderstellen dat we steeds op de eerste dag van elke maand geld storten de beleggersrekening en dat **de simulatie start op 1 januari**. Het budget dat we hiervoor per maand uittrekken is steeds gelijk voor alle maanden van eenzelfde jaar. Elk jaar op 1 januari verhogen we het maandelijkse spaarbudget met 2%—de inflatiedoelstelling op lange termijn van de Europese Centrale Bank (ECB). Wanneer we dus starten met een maandelijks spaarbudget van €100 dan zullen we in de eerste twaalf maanden van de simulatie €100 per maand investeren, in de volgende twaalf maanden investeren we dan €102 per maand, daarna €104.04, enzoverder.

[6] Meer gedetailleerde informatie vind je op `https://www.ishares.com/nl/particuliere-belegger/nl/producten/251931/#/`.

Bedrijf	Gewicht
Microsoft Corp.	1.9%
Apple Inc.	1.8%
Alphabet Inc.	1.5%
Amazon.com Inc.	1.5%
Berkshire Hathaway Inc.	1.0%
Johnson & Johnson Pharmaceuticals	0.8%
JPMorgan Chase & Co.	0.8%
Facebook Inc.	0.8%
Exxon Mobil Corp.	0.7%
Pfizer Inc. Pharmaceuticals	0.6%

Tabel 1: De 10 bedrijven met het grootste gewicht in de samenstelling van de *Vanguard FTSE All-World UCITS ETF* volgens Vanguard op 1 januari 2019.

4.1 Simulatie van een spaarrekening

We zullen een eenvoudige gereglementeerde spaarrekening simuleren waarbij enkel een basisrente wordt uitbetaald. Op 18 november 2019 bedroeg de hoogste totale rente op een Belgische spaarrekening (zonder spaardoel en zonder minimum of maximum maandelijkse of jaarlijkse inlage) een fabuleuze 0.60% per jaar bij Santander Consumer Bank.[7] Ter duiding: bij de introductie van de eerste iPhone in de zomer van 2007, boden verschillende banken nog 4.00% basisrente. In de context van dit practicum veronderstellen we dat er nooit geld zal worden afgehaald van een spaarrekening. We veronderstellen tevens dat alle stortingen op de eerste dag van de maand plaatsvinden.

De basisrente wordt steeds op 1 januari uitbetaald. Voor stortingen die minstens $k \geq 12$ maanden op de spaarrekening staan wordt de volledige basisrente uitbetaald. Voor stortingen die maar $1 \leq k < 12$ maanden op de spaarrekening staan wordt slechts $\frac{k}{12}$ van de volledige basisrente uitbetaald. Wanneer je €100 stortte op 1 april 2019 op een rekening met 0.6% basisrente, dan krijg je op 1 januari 2020 dus $\frac{9}{12}$ van €$0.6 = \frac{0.6}{100} \cdot 100$ uitbetaald, zijnde €0.45. Indien je nog eens €200 zou storten op 1 januari 2020, dan ontvang je op 1 januari 2021 0.6% rente op je eerste storting van €100, op de €0.45 rente uit 2019 en op de €200 van je tweede storting op 1 januari 2020. Je ontvangt dan op 1 januari 2021 het bedrag van €$1.8027 = \frac{0.6}{100}(100 + 0.45 + 200)$.

Gestort in April betekent dat het er 9 maanden lang zit => k = 9

De eerste schijf van €980 interest die je ontvangt op een spaarrekening is fiscaal vrijgesteld van roerende voorheffing. Op interesten boven dit bedrag betaal je wel 15% roerende voorheffing; deze wordt door je bank automatisch ingehouden. Wanneer je in een kalenderjaar €1000 aan interesten hebt ontvangen (bijvoorbeeld omdat je €100000 op je rekening hebt staan bij een basisrente van 1%), dan betaal je 0% roerende voorheffing op de eerste schijf van €980 en 15% op €20; op 1 januari wordt er dus €3 ingehouden van je €1000 brutorente en je ontvangt netto €997.

Opdracht 1. Schrijf een functie met de hoofding

```
function [yield, invested, value] = SN_simulateSavingInvesting(budget, rate, months)
```

die een spaarrekening met bovenstaande kenmerken simuleert. De startdag van de simulatie is steeds 1 januari en het initiële bedrag op de rekening is €0.

Het argument `budget` is het spaarbudget per maand (in €) in de eerste maand van de simulatie. Herinner dat elk jaar het maandelijkse spaarbudget met 2% stijgt. Het argument `rate` is de netto basisrente, uitgedrukt in procentpunten; `rate = 5` duidt dus een jaarlijkse rentevoet van 5% aan. Deze blijft gedurende de ganse simulatie constant. Het aantal maanden dat gesimuleerd moet worden is `months`.

Het uitvoerargument `value` is een vector van lengte `months` die op de i^{de} positie het gespaarde vermogen (inclusief interesten) bevat in de i^{de} maand van de simulatie. `value(1)` is dus per definitie gelijk aan de eerste storting `budget`. Alle interesten die tijdens de simulatie verdiend worden, blijven steeds op de spaarrekening staan. De uitvoer `invested` dient de totale waarde van alle stortingen (exclusief de ontvangen interesten) te bevatten. Het uitvoerargument `yield` is het eindrendement: de relatieve toename in waarde van `value(end)` ten opzichte van de totale waarde van de stortingen `invested`. ⧫

Merk op dat het eindrendement 0.5 (50%) is wanneer `value(end) = 1500` en de totale stortingen €1000 bedroegen.

[7] Zie `https://www.spaargids.be/sparen/spaartarieven.html`.

Opdracht 2. Voer de volgende code uit en neem de figuur op in het verslag.

```
yield = zeros(1,4);
figure; hold all;
for k = 1 : 4
  [yield(k), invested, value] = SN_simulateSavingInvesting(250, 2^(-2+k), 300);
  plot(value);
end
legend('0.5%', '1%', '2%', '4%', 'Location', 'NorthWest');
```

Hoeveel bedragen de eindrendementen `yield` uitgedrukt in % in deze 4 scenario's? Hoeveel geld heb je in elk van deze scenario's zelf gestort, exclusief de ontvangen interesten, i.e., `invested`? ♦

4.2 Simulatie van een beursgenoteerd indexfonds

Om de vermogensopbouw bij het beleggen in een ETF accuraat te simuleren zullen we de prijs van een ETF voor verschillende jaren in de toekomst moeten kunnen voorspellen. Gelukkig zijn er in de financiële wiskunde reeds stochastische modellen opgesteld voor de evolutie van de nettoinventariswaarde van fondsen en aandelen (waaronder ook ETFs vallen). Een populair model dat—al dan niet met uitbreidingen—gebruikt wordt door handelaars, fondsbeheerders en financiële instellingen veronderstelt dat het logaritme van de prijsstijging van het fonds voldoet aan een Brownse beweging met constante drift μ en constante *volatiliteit* σ. Zo'n stochastisch model voor de evolutie van de prijs van een fonds noemt men een *geometrische Brownse beweging.* We hebben

$$S_t = S_0 \exp\left((\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\sqrt{t}N(0,1) \right), \tag{1}$$

waarin S_0 de initiële prijs is van het fonds, S_t is de prijs van het fonds na t maanden, μ is de gemiddelde maandelijkse driftfactor, σ is de maandelijkse volatiliteit van het fonds en $N(0,1)$ is de standaard normale verdeling. We kunnen dit model herschrijven als

$$t\rho \approx \log((1+\rho)^t) = \log\left(\frac{S_t}{S_0}\right) = (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\sqrt{t}N(0,1),$$

waarbij het maandelijkse cumulatieve rendement ρ voldoende klein moet zijn opdat de Maclaurinreeksontwikkeling $x + \mathcal{O}(x^2) = \log(1+x)$ nauwkeurig is. Een interpretatie van model (1) is dus dat het maandelijkse cumulatieve rendement na t maanden bij benadering verdeeld is als

$$\rho \approx \frac{1}{t}\log\left(\frac{S_t}{S_0}\right) \sim N\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2, \frac{\sigma^2}{t}\right), \tag{2}$$

waarin $X \sim N(m, s^2)$ aanduidt dat de random variabele X normaal verdeeld is met gemiddelde m en standaardafwijking s. Deze uitdrukking leert ons dat model (1) stelt dat het maandelijkse cumulatieve rendement ρ, bij benadering, normaal verdeeld is rond de driftfactor μ min een correctieterm $\frac{1}{2}\sigma^2$ en met een variantie die lineair afneemt met het verstrijken van de tijd t. Beschouwd over lange termijnen $t \to \infty$ stelt dit model dus dat het maandelijkse rendement $\rho \to \mu - \frac{1}{2}\sigma^2$.

Om de prijs van een fonds te simuleren voor de komende t maanden zullen we gebruik maken van model (1). Om dit model aan te wenden, moeten we nog de driftfactor μ en de volatiliteit σ bepalen. Aangezien deze waarden betrekking hebben op de toekomst en deze per definitie ongekend is, zullen we deze parameters schatten op basis van historische data. Wanneer we de prijs van het fonds gedurende bijvoorbeeld de laatste 100 maanden kennen dan gaat men als volgt te werk. We weten uit vergelijking (2) dat *voor elke twee opeenvolgende maanden* $i+1$ en i steeds geldt dat

$$\log\left(\frac{S_{i+1}}{S_i}\right) \sim N\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2, \sigma^2\right).$$

We kunnen dan de log-rendementen $\log(S_{i+1}/S_i)$ berekenen voor alle 99 paren van opeenvolgende maanden, wetende dat elk van deze metingen verdeeld zijn zoals in bovenstaande vergelijking. Het steekproefgemiddelde van deze 99 geobserveerde log-rendementen is dan een schatter voor het populatiegemiddelde $\mu - \frac{1}{2}\sigma^2$ terwijl de standaardafwijking van de geobserveerde log-rendementen een schatter is voor de populatiestandaardafwijking σ (hetgeen tevens de volatiliteit van de geometrische Brownse beweging voorstelt).

Opdracht 3. Laad het bestand `Funds.mat` in. Dit bestand bevat de twee kolomvectoren `EUN5` en `VWRL`. Die eerste bevat de prijs (in €) gedurende de 129 opeenvolgende maanden van maart 2009 t.e.m. november 2019 van het obligatiefonds genaamd *iShares Core € Corp Bond UCITS ETF* (EUN5). De tweede vector bevat de prijzen van het aandelenfonds *Vanguard FTSE All-World UCITS ETF* (VWRL) voor de 77 opeenvolgende maanden van juli 2013 t.e.m. november 2019. De laatste rijen bevatten de meest recente prijzen. ♦

Opdracht 4. Schrijf een functie met de volgende hoofding

```
function [mu, sigma] = SN_estimateParameters(s)
```

die als uitvoer de driftfactor μ en de volatiliteit σ geeft van het fonds waarvan de prijsevolutie gegeven wordt door de kolomvector `s`; in principe is `s` steeds een van de vectoren die je hebt ingeladen uit het `Funds.mat` bestand. De meest recente prijzen staan achteraan in `s`.

Bereken de driftfactor μ en de volatiliteit σ voor de twee fondsen die je hebt ingeladen in opdracht 3 en neem deze op in je verslag. Gebruik de wetenschappelijke notatie voor deze getallen. ♦

Op basis van het statistische model (1) kunnen we het verloop van de prijs van een fonds voor opeenvolgende maanden simuleren door middel van een Monte Carlo-simulatie.

Opdracht 5. Schrijf een functie met de hoofding

```
function [path] = SN_simulateFundPath(initialPrice, mu, sigma, months)
```

die een geometrische Brownse beweging met driftfactor `mu` en volatiliteit `sigma` gedurende `(months-1)` *opeenvolgende* maanden simuleert.

Het uitvoerargument `path` is een willekeurig pad van de prijs; de lengte van `path` is `months`. Het eerste element van `path` bevat steeds de initiële prijs `initialPrice` van het fonds (in €) op de eerste dag van de eerste maand. Het i^{de} element van de vector `path` is het resultaat van een simulatie van de geometrische Brownse beweging in verg. (1) met driftfactor `mu`, volatiliteit `sigma`, $t = 1$ maand en als S_0 de prijs van het fonds op de eerste dag van de vorige maand, zijnde `path(i-1)`. ♦

Opdracht 6. Simuleer 10 willekeurige paden van het aandelenfonds VWRL. Als invoer geef je de μ en σ die je in opdracht 4 berekende op basis van de kolomvector `VWRL`, als `initialPrice` neem je de meest recente marktprijs die je op `https://finance.yahoo.com/quote/VWRL.AS` kunt raadplegen en als lengte van de simulatie `months` kies je 60 maanden. Plot deze 10 paden op eenzelfde grafiek en neem ze op in het verslag. Welke initiële prijs heb je gebruikt voor de 10 paden? Vermeld ook de datum. Zien de paden die je gegenereerd hebt er uit zoals de koers van VWRL van de afgelopen 5 jaar zoals in fig. 1? Motiveer indien je meent van niet. ♦

Opdracht 7. Vergelijk de empirische cumulatieve distributiefunctie van de log-rendementen van opeenvolgende maanden van VWRL met de cumulatieve distributiefunctie van het model, i.e., $N(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2, \sigma^2)$. Als modelparameters μ en σ kies je de overeenkomstige populatiestatistieken die je in opdracht 4 hebt berekend. *Hint:* de functies `ecdf` en `cdf` kunnen nuttig zijn.

Maak een figuur van deze twee cumulatieve distributiefuncties en neem deze op in het verslag. Kan je op basis van deze figuur besluiten dat de geobserveerde log-rendementen van VWRL gedurende de laatste 77 maanden inderdaad bij benadering voldoen een normale verdeling met gemiddelde $\mu - \frac{1}{2}\sigma^2$ en standaardafwijking σ? ♦

Zoals bij de spaarrekening zullen we maandelijks een bedrag storten op de beleggersrekening. Dit bedrag gebruiken we vervolgens om in bepaalde verhoudingen eenheden van het fonds EUN5 en VWRL aan te kopen. We moeten er natuurlijk rekening mee houden dat het kopen en verkopen van aandelen op de beurs ook geld kost. De fiscaliteit voor het beleggen in beursgenoteerde indexfondsen is vrij voordelig. De kosten die je maakt bedragen 0.35% beurstaks op de aankoopprijs. Daarnaast betaal je ook steeds transactiekosten aan je beursmakelaar. We zullen (realistisch) veronderstellen dat deze precies €6 bedragen. Als je spaarbudget €100 bedraagt, kan je dus door de transactiekosten en beurstaks maximaal voor $(100 - 6) \cdot \frac{1}{1.0035} = 93.6721$ euro aan aandelen kopen, want $93.6721 + \frac{0.35}{100} \cdot 93.6721 + 6 \approx 100$. Er is geen meerwaardebelasting in België. Op eender welk moment zou je dus al je aandelen kunnen verkopen waarbij enkel 0.35% beurstaks en wat transactiekosten aangerekend worden. In deze simulatie worden nooit aandelen verkocht.

Om verdere complicaties te vermijden zullen we (onrealistisch) veronderstellen dat het mogelijk is om fractionele aandelen te kopen op de beurs. Op deze manier kunnen we steeds 100% van het beschikbare spaarbudget aanwenden. Als de nettoinventariswaarde van een eenheid van het VWRL-fonds €35.75 bedraagt, dan kopen we met een bruto spaarbudget van €100 (en dus een netto spaarbedrag van €93.6721) dus ongeveer 2.6202 eenheden (niet afronden in je implementatie!).

Beide fondsen VWRL en EUN5 zijn uitkerende fondsen. Om de complexiteit van de simulatie te beperken, zullen we de simulaties uitvoeren alsof VWRL en EUN5 kapitaliserende fondsen zijn. Hiervoor moet je niets extra doen; de koersen van de fondsen die je hebt ingeladen in opdracht 3 zijn reeds zodanig aangepast dat de dividenduitkeringen erin verwerkt zitten.

Naarmate men ouder wordt is het aan te raden om de samenstelling van een beleggingsportefeuille gaandeweg meer defensief in te delen. Beleggingen die je nu maakt om pas op je pensioenleeftijd van te genieten hebben bijna een halve eeuw de tijd om te renderen. Voor zulke investeringen kan men een hoog risico nemen. Op jonge leeftijd mag een beleggingsportefeuille dus voornamelijk bestaan uit aandelen(fondsen). Naarmate je pensioenleeftijd dichterbij komt, hebben nieuwe investeringen minder tijd om te renderen. Daarom is het voor nieuwe beleggingen dicht bij de pensioenleeftijd aan te raden om in obligaties te beleggen die een veel beperkter neerwaarts risico hebben. Om dit te simuleren zullen we in de $i$de maand van de simulatie ons beschikbaar (bruto)spaarbudget b_i opdelen: $\alpha_i b_i$ wordt het brutobudget voor VWRL en $(1-\alpha_i)b_i$ wordt het brutobudget voor EUN5, waarbij $0 \leq \alpha_i \leq 1$ de fractie van het budget voorbestemd voor VWRL is. Stel bijvoorbeeld dat $b_i = 100$ euro en $\alpha_i = 0.4$. Dan hebben we netto respectievelijk $(60-6)/1.0035 \approx 53.8117$ en $(40-6)/1.0035 \approx 33.8814$ euro beschikbaar voor respectievelijk VWRL en EUN5. *Wanneer het nettobudget voor een fonds negatief zou zijn, dan worden geen eenheden aangekocht. Het voorbestemde brutobudget wordt dan toegevoegd bij het brutobudget voor het andere fonds.* Stel bijvoorbeeld dat $b_i = 100$ en $\alpha_i = 0.05$, dan zou het nettobudget voor het VWRL $(\alpha_i b_i - 6)/1.0035 \approx -0.9965$ euro zijn. In dit geval wordt 100% van het budget b_i aangewend om eenheden van EUN5 aan te kopen. Je betaalt in dit geval dus ook maar eenmalig de transactiekosten.

Opdracht 8. Schrijf een functie met hoofding

```
function [yield, invested, value, units] = SN_simulateFundInvestingPath(...
                               budget, pricePath, alpha ...
                             )
```

die het periodiek beleggen in twee beursgenoteerde fondsen (bijvoorbeeld EUN5 en VWRL) simuleert met de bijbehorende fiscaliteit (0.35% beurstaks en €6 transactiekosten voor elke aankoop) zoals hierboven beschreven. De startdag van de simulatie is steeds 1 januari.

Het argument `budget` is een reëel getal dat het spaarbudget per maand (in €) in de eerste maand van de simulatie voorstelt. Herinner dat elk jaar het maandelijkse spaarbudget met 2% stijgt. De $m \times 2$ matrix `pricePath` bevat in elke kolom de (voorspelde) nettoinventariswaarde van één eenheid (in €) van het fonds. Het element `pricePath(i,j)` bevat de voorspelde prijs van het j^{de} fonds in de i^{de} maand van de simulatie. In principe is elk van de kolommen van `pricePath` dus de uitvoer van de functie uit opdracht 5. De vector `alpha` van lengte m bevat op positie i de fractie van het (bruto)budget dat beschikbaar is in de i^{de} maand van de simulatie voor het aankopen van (fractionele) eenheden van het eerste fonds wiens prijsevolutie gegeven wordt door de eerste kolom van `pricePath`. Het brutobudget dat beschikbaar is voor het tweede fonds is `1-alpha`. Herinner dat bij een negatief nettobudget voor een fonds, we steeds 100% van het beschikbare brutobudget gebruiken om eenheden van het *andere* fonds aan te kopen (en dus geen eenheden van het eerstgenoemde fonds aankopen).

De uitvoer `value` is een $m \times 2$ matrix wiens aantal rijen overeenkomt met het aantal rijen van `pricePath`. `value(i,j)` dient het gespaarde vermogen (d.w.z. de totale nettoinventariswaarde van alle fractionele eenheden) te bevatten van het j^{de} fonds in de i^{de} maand van de simulatie. `value(1,1)` bevat dus per definitie `budget * alpha(1)`, verminderd met de betaalde beurstaks en transactiekosten (voorwaar dit positief zou zijn; anders is de waarde 0). De uitvoer `units` is een $m \times 2$ matrix; `units(i,j)` dient het aantal fractionele eenheden te bevatten van het j^{de} fonds in de i^{de} maand van de simulatie. Let op dat `sum(units(1,:)) > 0`. De uitvoer `invested` is een reëel getal dat de totale waarde van alle stortingen (het brutobudget) dient te bevatten. Het uitvoerargument `yield` is het eindrendement: de relatieve toename in waarde van `sum(value(end,:))` ten opzichte van de totale waarde van de stortingen `invested`. We hebben steeds dat `invested * (1+yield) == sum(value(end,:))`. ♦

Opdracht 9. Voer de code uit en neem de twee gegenereerde figuren op in het verslag.

```
for jj = 1 : 2
  figure; hold all;
  weights = [1 0.5 0];
```

```
  pathVWRL = SN_simulateFundPath(37.78, 7.8578e-03, 3.2775e-02, 120);
  pathEUN5 = SN_simulateFundPath(128.25, 3.0856e-03, 3.0704e-02, 120);
  P = [pathVWRL pathEUN5];
  for k = 1 : 3
    [~,~,value] = SN_simulateFundInvestingPath(400, P, weights(k)*ones(120,1));
    plot( sum(value,2) )
  end
  [~, ~, value] = SN_simulateSavingInvesting(400, 2, 120);
  plot(value, '.-');
  legend('100% Aandelen', '50% Aandelen', '100% Obligaties', 'Spaarrekening', ...
    'Location', 'NorthWest')
  grid on;
end
```

Voer daarna de volgende code uit en neem de figuur op in het verslag.

```
figure; hold all;
[~,~,value,units] = SN_simulateFundInvestingPath(400, P, (1 - (1:120)/240).^2 );
plot( (units(2:end,:)-units(1:end-1,:)).*P(2:end,:) );
plot( sum((units(2:end,:)-units(1:end-1,:)).*P(2:end,:),2) )
title('Waarde van de incrementele investeringen');
legend( 'VWRL', 'EUN5', 'Totaal', 'Location', 'NorthWest' );
grid on;
```

In tegenstelling tot de deterministische simulatie van de spaarrekening is de simulatie van het beleggen in VWRL stochastisch. Om een beter inzicht te verwerven in de prestaties van het beursbeleggen zullen we nuttige statistieken berekenen door een groot aantal Monte Carlo-simulaties uit te voeren.

Opdracht 10. Schrijf een functie met hoofding

```
  function [yields, invested] = SN_simulateFundInvesting(...
                                  budget, priceHistory, alpha, N ...
                                )
```

die de functie uit opdracht 8 gebruikt om het periodiek beleggen in een fonds te simuleren met een Monte Carlo-simulatie. De startdag van de simulatie is steeds 1 januari.

Het argument `budget` is het maandelijkse spaarbudget (in €) in de eerste maand van de simulatie. Het aantal maanden dat gesimuleerd moet worden is gelijk aan de lengte van de vector `alpha`. Om de prijsevolutie van fondsen te simuleren, veronderstellen we dat de prijzen voldoen aan geometrische Brownse bewegingen. De parameters van dit model bepaal je aan de hand van de $m \times 2$ prijsgeschiedenismatrix `priceHistory`, waarbij de meest recente prijzen onderaan in de matrix staan; `priceHistory(end,:)` bevat de meest recente prijzen. Elke kolom van de matrix stelt de prijsevolutie van één eenheid van een fonds voor, zoals bijvoorbeeld deze die je hebt ingeladen in opdracht 3. Gebruik de functie uit opdracht 4 om de parameters van de geometrische Brownse bewegingen te schatten. De kolomvector `alpha` bevat de fractie van het bruto spaarbudget dat aan het eerste fonds (d.w.z. het fonds beschreven door de prijsgeschiedenis in de eerste kolom van `priceHistory`) wordt besteed tijdens elk van de maanden van de simulatie. Als initiële prijs voor het fonds gebruik je `priceHistory(end,:)`. Het aantal bemonsteringen is `N`.

De uitvoer `yields` is een vector van lengte `N` die eindrendementen van de `N` bemonsteringen van je Monte Carlo-simulatie bevat. Gebruik de functie uit opdracht 8 om elk individueel eindrendement te berekenen. Het uitvoerargument `invested` is de totale waarde van alle stortingen in één simulatie. Dit getal is uiteraard hetzelfde in elk van de `N` simulaties. ♦

We kunnen vervolgens enkele scenario's met elkaar vergelijken. In alle volgende Monte Carlo-simulaties kiezen we $N = 10\,000$ bemonsteringspunten. Om het beleggen in combinaties van de VWRL en EUN5-fondsen te simuleren, gebruiken we als historische data steeds de data die je in opdracht 3 hebt ingelezen. Het beschikbare spaarbudget en het aantal maanden zullen we variëren.

Opdracht 11. We simuleren vervolgens het eindrendement voor enkele combinaties van de EUN5 en VWRL fondsen met behulp van de functie uit de voorgaande opdracht. Kies $n = 600$ maanden (50 jaar) bij een spaarbudget van €300 per maand. Voor de spaarrekening zullen we de gunstige basisrente van 2.0% hanteren. Als prijsgeschiedenis gebruiken we de laatste 60 maanden van VWRL en EUN5:

```
priceHistory = [VWRL(end-59:end) EUN5(end-59:end)];
```

Als fractie van het brutobudget dat in VWRL-eenheden moet geïnvesteerd worden, beschouwen we 3 strategieën:

```
n = 600;
alphaAggressive = ones(n,1);
alphaBalanced = (1 - (0:n-1)'/(2*n)).^2;
alphaDefensive = zeros(n,1);
```

De eerste stemt overeen met 100% beleggen in VWRL-eenheden, de tweede met een tijdsafhankelijke strategie waarbij eerst 100% belegd wordt in VWRL-aandelen en dan deze fractie kwadratisch daalt tot 25% na 300 maanden en de laatste strategie belegt 100% in EUN5-eenheden. Deze strategieën zou je respectievelijk agressief, gebalanceerd en defensief kunnen noemen. Duid de vector met bemonsterde eindrendementen van de bovenstaande drie strategieën aan met respectievelijk `yieldAggressive`, `yieldBalanced` en `yieldDefensive`:

```
yieldAggressive = SN_simulateFundInvesting( 600, priceHistory, alphaAggressive, 10000 );
yieldBalanced = SN_simulateFundInvesting( 600, priceHistory, alphaBalanced, 10000 );
yieldDefensive = SN_simulateFundInvesting( 600, priceHistory, alphaDefensive, 10000 );
```

Maak histogrammen van de gesimuleerde rendementen van de fondsen door de volgende code uit te voeren:

```
figure; hold all;
histogram(yieldAggressive, 'BinWidth', 0.5, 'Normalization', 'probability');
histogram(yieldBalanced, 'BinWidth', 0.5, 'Normalization', 'probability');
histogram(yieldDefensive, 'BinWidth', 0.5, 'Normalization', 'probability');
legend('Agressief', 'Gebalanceerd', 'Defensief');
```

Neem deze figuur op in het verslag en interpreteer de resulaten. Hoeveel bedraagt het rendement (uitgedrukt in %) van de spaarrekening? ♦

Opdracht 12. We beschouwen 4 strategieën: een spaarrekening met een basisrente van 3% en de combinaties van VWRL en EUN5 uit opdracht 11 (zoals bepaald door `alphaAggressive`, `alphaBalanced` en `alphaDefensive`). Simuleer het rendement voor elk van deze strategieën na $n = 300$ en $12 \cdot (70 - x)$ maanden, waarbij x je leeftijd in jaren is, bij een maandelijks spaarbudget dat $(300 + y)$ euro per maand bedraagt, waarbij y de laatste twee cijfers van je studentennummer zijn. Rapporteer x en y in het verslag.

Beantwoord de volgende vragen:

1. Maak een duidelijke tabel van de volgende kwantielen van de eindrendementen:[8] 0.1%, 2.5%, 25%, 50%, 75% en 97.5% voor elk van de 4 strategieën en de twee lengtes van de simulaties. Hint: de functie `quantile` kan handig zijn.

2. Hoe groot is de kans om een *negatief* eindrendement te behalen met de 4 strategieën en voor de twee verschillende lengtes van de simulatie? Geef je antwoord in een duidelijke tabel.

3. Hoeveel bedraagt de kans om een vermogen van minstens €750 000 opgebouwd te hebben in elk van deze 8 simulaties? Maak opnieuw een tabel.

4. Beschouw de mediaan van je totale vermogen na $12 \cdot (70 - x)$ maanden (dit is in je 70$^{\text{ste}}$ levensjaar); dit komt overeen met het geïnvesteerde bedrag vermenigvuldigd met $(1 + z)$ waarbij z de mediaan van het eindrendement is. Hoeveel bedraagt dit vermogen voor elk van de 4 strategieën? Stel dat we het ganse vermogen van v euro liquideren en hiermee een overheidsobligatie kopen die jaarlijks 3% nettorente (4.29% brutorente) uitkeert over het bedrag van v euro. Hoeveel bedraagt dan je gemiddelde maandelijkse inkomen (jaarlijkse rente gedeeld door 12) met elke strategie? Haal je de €1790 uit het motiverende krantenartikel?

♦

[8] Het 25% kwantiel wordt ook wel het eerste kwartiel genoemd, het 50% kwantiel is de mediaan en het 75% kwantiel komt overeen met het derde kwartiel.

5 Evaluatie

Opdracht 13. Hoeveel tijd heb je gespendeerd aan het oplossen van de opdrachten? Hoeveel tijd heb je gespendeerd aan het schrijven van het verslag? ♦

Opdracht 14. Denk je dat de resultaten van dit practicum realistisch zijn? Hebben de resultaten je verrast? Welke strategie zou je zelf verkiezen om een vermogen op te bouwen? ♦

Opdracht 15. Welke bedenkingen heb je bij dit practicum? Was de opgave (veel) te gemakkelijk, (veel) te moeilijk of van een gepaste moeilijkheidsgraad? Wat zou je zelf anders aangepakt hebben? Was de terminologie voldoende duidelijk? ♦