

# TEORÍA DE ALGORITMOS 1

## Guía de ejercicios: Clases de complejidad

Por: ING. VÍCTOR DANIEL PODBEREZSKI  
vpodberezski@fi.uba.ar

---

### Enunciados

#### Referencias

- ★ Fácil
- ★★ Medio
- ★★★ Difícil

1. ★ Nos brindan una caja negra  $A$  que, dado un grafo no dirigido  $G = (V, E)$  y un número  $k$  se comporta de la siguiente manera:
  - Si  $G$  es no conexo devuelve "no conexo".
  - Si  $G$  es conexo y tiene un conjunto independiente de tamaño al menos  $k$  devuelve "Sí".
  - Si  $G$  es conexo y no tiene un conjunto independiente de tamaño al menos  $k$  devuelve "No".

Mostrar cómo podríamos resolver el problema del máximo conjunto independiente en tiempo polinomial, usando llamadas a  $A$  si suponemos que  $A$  corre en tiempo polinomial en el tamaño de  $G$  y  $k$ . Describir la solución. ¿Tiene sentido la hipótesis de que  $A$  corre en tiempo polinomial en el tamaño de  $G$  y  $k$ ? ¿Por qué?

2. ★ Problema del camino más largo en un grafo general con aristas sin peso: Dados  $G = (V, E)$  un grafo no dirigido y un natural  $k$ , determinar si existe un camino simple en  $G$  de longitud  $\geq k$ . Probar que es un problema NP-completo (Usar el problema del camino hamiltoniano para probarlo).
3. ★ La siguiente es una versión de Conjunto Independiente. Dado un grafo  $G = (V, E)$  y un entero  $k$ , decimos que  $I \subseteq V$  es fuertemente independiente si dados dos vértices  $u$  y  $v$  en  $I$ , la arista  $(v, u)$  no pertenece a  $E$  y además no hay ningún camino de tamaño 2 (con dos aristas) de  $u$  a  $v$ . El problema de Conjuntos Fuertemente Independientes consiste en decidir si  $G$  tiene un conjunto fuertemente independiente de tamaño al menos  $k$ . Probar que el problema de Conjuntos Fuertemente Independientes es NP completo. Utilizar para ello que Conjuntos Independientes es NP completo.

- 
4. ★ Una agencia de marketing coloca publicidad en la Web. Se han ilusionado con vender publicidad con la siguiente idea, que llamaremos el problema de la Publicidad Estratégica: Un sitio Web se puede modelar como un grafo  $G = (V, E)$ . Las acciones habituales de los usuarios que visitan un sitio se pueden modelar mediante "t" recorridos posibles  $P_1, P_2, \dots, P_t$  (donde cada  $P_i$  es un camino dirigido en  $G$ ). Dado un número  $k$ , se quieren elegir a lo sumo  $k$  vértices en  $G$  para poner publicidad, de modo tal que todos los "t" recorridos habituales pasen por al menos uno de esos vértices. Tenemos que mostrarle a esta empresa que su idea no es realizable por el momento ya que el problema de la Publicidad Estratégica es NP-completo. Sugerencia: relacionarlo con cubrimiento de vértices.
  5. ★ Un almacén registra en una matriz qué productos compra cada uno de sus clientes. Un conjunto de clientes es diverso si cada uno de ellos compra cosas diferentes (tiene intersección vacía con lo que compran los demás). Definimos al problema de los clientes diversos como: Dada una matriz de registro, de tamaño  $m$  (clientes)  $\times$   $n$  (productos), y un número  $k \leq m$ , ¿existe un subconjunto de tamaño al menos  $k$  de los clientes que sea diverso? Probar que el problema es NP-completo. Sugerencia: Reducir polinomialmente conjuntos independientes a clientes diversos.
  6. ★ Nos piden que organicemos una jornada de apoyo de estudio para exámenes. Tenemos que poder dar apoyo a "n" materias y hemos recibido currículos de "m" postulantes para ser potenciales ayudantes. Cada ayudante puede ayudar en un determinado subconjunto de materias. Para cada una de las materias hay un subconjunto de postulantes que pueden dar apoyo en ella. La pregunta es: dado un número  $k < m$ , ¿es posible seleccionar a lo sumo "k" ayudantes de modo tal que siempre haya un ayudante que pueda dar consultas en alguna de las  $n$  materias? Este problema se llama Contratación Eficiente. Probar que "Contratación Eficiente" es NP-completo. Sugerencia: se puede tratar de usar Cubrimiento de Vértices.
  7. ★ Una de las parejas más ricas del mundo está pasando por un proceso de divorcio. Entre sus bienes cuentan con propiedades, autos, motos, estampillas raras y otros coleccionables. Como no se ponen de acuerdo en la manera de dividirlos, el juez ha dictaminado que un tasador ponga valor a cada bien y luego se haga una partición por valores iguales (el problema abstracto se conoce como 2-partition) El juez nos pide que elaboremos un algoritmo que en forma eficiente haga este trabajo. Demuestre que la solución pedida en NP-completa. Sugerencia: Pruebe con "subset sum".
  8. ★★ El juego "escaleras y serpientes" consiste en un tablero con celdas numeradas del 1 al  $n$ . Cada jugador inicia en la casilla 1 y cada turno arroja un dado de 6 caras para determinar cuántas casillas avanza. En algunas casillas existen escaleras que permiten automáticamente ascender desde su pie hasta la cima. Al caer en ellas el jugador asciende a la casilla donde se apoya la cima de la escalera. En otras casillas existen serpientes que obligan al jugador a descender de su cabeza a cola. Al caer en una casilla donde se encuentra la cabeza de la serpiente el jugador desciende hasta la casilla donde se encuentra la cola de la misma. Diferentes empresas generan diferentes tableros (valor de  $n$  y ubicación y cantidad de serpientes y escaleras). El creador de una nueva versión nos muestra su prototipo y quiere que le digamos cuantos turnos durará como mínimo el juego. Se pide:
    - Resolver el problema reduciéndolo a un problema de grafos.
    - Indicar detalladamente todos los pasos de la reducción.

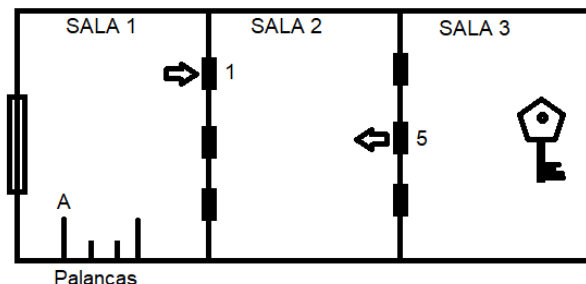
- 
- Plantee el problema como un problema de decisión. ¿Puede afirmar que el problema pertenece a la clase P? ¿Puede afirmar que pertenece a NP?
9. ★ Se conoce Bin-Packing al problema de decisión donde se cuenta con “N” elementos de diferentes pesos y con “M” contenedores de cierta capacidad. Queremos saber si es posible acomodar todos los elementos en no más de k contenedores. Se pide demostrar que el problema es NP-Completo. Sugerencia utilizar 2-partition.
  10. ★ Un grupo de amigos que conviven están mudándose a un departamento nuevo. Han juntado sus pertenencias en cajas de diferentes volúmenes que recolectaron en supermercados y tiendas. Al llegar la compañía de mudanza les informan que por normativa únicamente transportarán utilizando como contenedores sus recipientes de volumen V. Por lo tanto, los amigos deben ingresar sus cajas en los contenedores autorizados. En el camión entran como máximo “r” recipientes. Al llenarse realiza el trayecto para descargar y regresar a cargar otros contenedores. Antes de proceder quieren saber si podrán acomodar todas sus cajas de tal forma que puedan realizar menos de k viajes. Demostrar que es un problema NP-Completo. Sugerencia: Este problema es fácilmente relacionable con Bin Packing.
  11. ★★ Hemos visto como cualquier instancia de SAT se puede reducir polinomialmente a una instancia de 3SAT. Nos concentramos en la variante 2SAT. En esta se cuenta con dos (ni más ni menos) literales por cada cláusula de la expresión booleana. Queremos demostrar que 2SAT pertenece a la clase de complejidad P. Plantee teóricamente que debería realizar para demostrar su pertenencia a la clase P mediante una reducción polinomial. Considere los siguientes sugerencias y elabore la reducción utilizando un problema de grafos:
    - Repensar una cláusula (A o B) como: (“no B” entonces A) y (“no A” entonces B).
    - Pensar en encadenamiento de implicancias y una situación que podría ocasionar un absurdo lógico que impida satisfacer las expresión booleana.
  12. ★★ Definimos el problema Subgrafo denso de la siguiente manera: Dado un grafo  $G=(V,E)$  y dos parámetros a y b. Existe en G un subconjunto S de al menos “a” vértices con al menos “b” ejes entre ellos. Demostrar que este problema es NP-Completo. Sugerencia: Utilizar el problema del Clique.
  13. ★ Definimos al problema de Set Packing como: Dado “n” conjuntos  $S_1, S_2, \dots, S_n$  y un parámetro k. Queremos saber si existe una colección de tamaño k de los subconjuntos tales que ningún elemento contenido en ellos está repetido en estos “k” conjuntos? Demostrar que este problema es NP-Completo. Sugerencia: Utilizar Conjunto independiente.
  14. ★ Dado un grafo  $G=(V,E)$  no dirigido se denomina como Feedback set a un subconjunto  $X \subseteq V$  de vértices tal que el grafo resultante de eliminar los vértices de X y los ejes adyacentes a estos no tiene ciclos. El problema de decisión de Undirected Feedback Set quiere responder si dado un grafo G no dirigido existe un feedback set de tamaño k o menor. Demostrar que este problema es NP-Completo. Sugerencia: Utilizar Vertex Cover.
  15. ★★ Definimos el problema DOBLE-SAT como: dado una fórmula booleana determinar si existen dos asignaciones de variables que satisfacen a la misma. Probar que DOBLE-SAT pertenece a NP-C. Sugerencia: Utilizar 3SAT

- 
16. ★★ Definimos el problema del Hitting Set como: dado un conjunto finito  $S$  de " $n$ " elementos, una colección  $C$  de subconjuntos de  $S$ , un número positivo  $K \leq n$ , ¿existe un subconjunto  $S' \subseteq S$  tal que  $S'$  contiene al menos un elemento de cada subconjunto de  $C$  y  $|S'| \leq K$ ? Demostrar que este problema es NP-Completo. Sugerencia: utilizar Vertex Cover.
17. ★ Una compañía multinacional desea contratar cobertura satelital para sus " $n$ " sedes repartidas por el mundo. Han averiguado entre varias empresas que proveen el servicio pero ninguna de ellas tiene cobertura total. Les gustaría poder contratar a " $k$ " o menos empresas. Pero tienen una condición adicional: al menos una de sus sedes debe tener cobertura de todas las empresas que la ofrecen. Con eso pueden iniciar una certificación de calidad que necesitan. Se pide: Demostrar que el problema es NP-Completo. Sugerencia: Utilizar Set Cover
18. ★★ El problema del Ciclo Hamiltoniano dirigido corresponde a una variante del problema de Ciclo Hamiltoniano con la diferencia que la instancia corresponde a un grafo dirigido. Demostrar que este problema pertenece a NP-C. Sugerencia: Puede utilizar Ciclo Hamiltoniano.
19. ★ La elaboración de una flota de " $n$ " minisatélites requiere la integración de 4 componentes cuyos códigos de identificación son pA, pB, pC y pD. Contamos con " $n$ " piezas de cada uno de ellos. Un estudio de compatibilidad informa que no cualquier cuadrupla de piezas es viable para ensamblar el satélite. Nos proveen un listado de las cuadruplas que si pueden conformarlos. Queremos saber si es posible seleccionar de forma adecuada las piezas para armar los " $n$ " satélites. Se pide: Demostrar que el problema es NP-Completo. Sugerencia: Se puede utilizar 3 Dimensional Matching
20. ★★ Un artesano puede contratar  $x$  máquinas de impresión 3D. Se ha comprometido en realizar un conjunto de " $N$ " pedidos. Cada pedido " $i$ " cuenta con un tiempo " $t_i$ " en horas de realización. Dentro de  $D$  días debe entregarlas. Nos solicita que encontremos un procedimiento que le indique si es posible realizarlo en el tiempo disponible y programar que pedido realizar en cada máquina. Demostrar que el problema es NP-C. Sugerencia: Puede utilizar 2-partition
21. ★ Un departamento dentro de una universidad adquirió " $n$ " proyectores para dar clases durante el cuatrimestre. Envío un formulario a los docentes de las distintas materias para conocer si los necesitaban como complemento para sus clases. Un subconjunto de docentes respondió afirmativamente. Sabiendo que cada materia tiene clases 1 o más veces por semana en un horario establecido. Y sabiendo que los horarios de varias de esas materias se superponen. Nos solicitan determinar si la cantidad comprada alcanza o si se tiene que dejar a docentes sin acceso a esas cuentas. Demostrar que lo solicitado es NP-COMPLETO. Sugerencia: Tal vez le resulte útil " $k$ " coloreo de grafos.
22. ★ Para elaborar una película de detectives un grupo de escritores se ha juntado para elaborar una trama atrapante y que tenga coherencia. En largas jornadas han propuesto un gran conjunto de premisas, giros argumentales y eventos claves. Lamentablemente algunas de ellas no son compatibles entre sí. Por cada situación han anotado con cual no es compatible. Desean poder seleccionar un conjunto de  $N$  premisas compatibles para

---

presentar a los productores como idea inicial. Se pide: Demostrar que el problema es NP-Completo. Sugerencia: Tal vez le resulte útil clique

23. ★★ El plan de evacuación ante ataques zombies/alienígenas de la ciudad implica poder trasladar a los más importantes científicos, militares y políticos designados a refugios. Diferentes ramas y organizaciones gubernamentales presentaron diferentes rutas de evacuación. Cada una corresponde un punto de encuentro, un recorrido y un refugio. En total existen  $N$  rutas presentadas. Es importante que ninguna ruta comparta o se cruce en su recorrido con otra para maximizar la posibilidad de supervivencia. Debemos responder si con las propuestas se pueden seleccionar al menos  $K$  caminos de tal forma que cumpla estas restricciones. Demuestre que lo solicitado es NP-COMPLETO. Sugerencia: Se puede realizar con 3 Dimensional Matching o INDEPENDENT-SET
24. ★ Un país está modificando su red radiofónica. Existen muchas estaciones de radios cada una con su propia frecuencia de transmisión. Desean reasignarlas de tal forma de no usar más de  $N$  frecuencias. El problema es que ciertas radios por su ubicación geográfica y potencia pueden interferir con otras. Un estudio informa cuántas radios hay, y para cada radio con cuáles hay riesgo de interferencia. Quisieran determinar si es posible realizar la reasignación. Demuestre que el problema planteado es NP-COMPLETO. HINT!: Tal vez le resulte útil coloreo de grafos.
25. ★★ Para un evento a realizar se requiere conformar una selección musical entre el conjunto  $A$  de " $n$ " canciones. Podemos enumerar a los elementos de  $A$  como  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Por otra parte, contamos con un conjunto " $B$ " de " $m$ " personas. Cada una de ellas con un subconjunto de esas canciones que le gustan. Deseamos saber si podemos seleccionar un subconjunto de no más de " $k$ " canciones, de tal forma que existe al menos 1 canción que le guste a cada uno. Se pide: Demostrar que el problema es NP-Completo. Sugerencia: Se puede utilizar Vertex Cover.
26. ★★★ Presentamos una variante de SAT conocida como NAE-SAT. En este, se busca satisfacer una expresión en forma normal conjuntiva con la condición adicional de que en cada cláusula al menos un literal tenga valor "false". Nos centraremos en la variante NAE-4-SAT. En esta cada cláusula tiene 4 literales. Demostrar que corresponde a un problema NP-Completo. Sugerencia: Partir de 3-SAT.
27. ★★ Habiendo demostrado previamente que el problema NAE-4-SAT es np-completo, demostrar que NAE-3-SAT también. Utilizar para la demostración el primero.
28. ★ Un nivel de un videojuego "escape room" consiste en un conjunto de salas contiguas. Todas las salas son iguales, excepto la primera y la última. Las salas intermedias tienen 2 sets de 3 puertas cada una. El primer trío conduce a la habitación anterior. Y el segundo trío la habitación siguiente. La particularidad de estas puertas es que son de 1 solo sentido. Dependen de una palanca que



---

puede permitir únicamente entrar o salir (pero no las dos). La última sala tiene un cofre con una llave que abre la puerta de salida de la primera habitación. En la primera habitación se encuentra un panel con un conjunto de palancas de 2 posiciones y un diagrama que muestra qué puertas están controladas por cada palanca. Una puerta sólo está controlada por una palanca. Pero una palanca puede controlar 1 o más puertas. Otra particularidad de este ingenio es que una misma palanca puede hacer que una puerta permita acceder a cuartos siguientes y otra puerta a cuartos anteriores. Ejemplo: Activar la palanca A, permite ingresar desde la puerta 1 de la "sala 1" a la "sala 2". Además permite regresar de la "sala 3" a la "sala 2". Si se desactiva la palanca se invierten los sentidos de las puertas. Se desea encontrar una configuración de palancas de tal manera que se pueda acceder a la sala del cofre, retirar la llave y luego regresar a la sala inicial para escapar por la puerta. Demostrar que es un problema NP-Completo. Sugerencia: Utilizar NAE-3-SAT.

---

## Ejercicios resueltos

Cada ejercicio resuelto busca mostrar cómo se debe analizar, resolver y justificar la resolución del ejercicio, tanto en un trabajo práctico o en un parcial

1. ★ El directorio de una empresa realizará una cena de fin de año. En total son “n” directivos que se deben sentar alrededor de una mesa circular. Lamentablemente existen conflictos entre algunos de ellos que impiden que se sienten uno al lado del otro. Dado una instancia del problema, que incluye los n directivos y un listado donde se ven aquellos pares de directivos que están peleados entre sí, determinar si es posible sentarse en la mesa. Demostrar que el problema es NP-C. Sugerencia: Utilizar ciclo Hamiltoniano.

### Explicación de la solución

Para demostrar que el problema es NPC, procedemos a demostrar que el mismo pertenece a NP y NPH.

Llamaremos “Cena” al problema planteado en el enunciado

### Demostración de que el problema es NP

Planteamos un certificador del problema, donde se validará que en la solución hayan n elementos, no hayan directivos duplicados, sean directivos existentes y no rompan incompatibilidades.

Python

```
certificador (solucion, directivos, incompatibles):
    directivos_validados = []

    if solucion.lenght != n:
        return "solución no válida"

    for i = 0 to n:
        directivo = solucion[i]
        if directivo in directivos_validados:
            return "directivos duplicados"
        if not directivo in directivos:
            return "directivo no existe"
        if solucion[i-1] && solucion[i] in incompatibles:
            return "solución no válida"
        if solucion[i+1] && solucion[i] in incompatibles:
            return "solución no válida"

        directivos_validados.add(directivo)
```

```
Return "solución válida"
```

La complejidad del certificador es  $O(N^2)$ , dado que

- se recorren todos los elementos (directivos) de la solución, validando cada uno.
- por cada una de estas iteraciones se valida que los directivos sean compatibles con su anterior y posterior directivo y que no estén duplicados. Operación que implica en el peor de los casos, recorrer todos los directivos.

Dado que la complejidad del certificador es Polinomial, podemos afirmar que el problema es NP

### **Demostración de que el problema es NPH**

Para demostrar que el problema es NPH, procedemos a plantear una reducción al mismo. Utilizamos el problema de Ciclo Hamiltoniano para hacerlo.



*Transformación de una instancia de problema de Ciclo Hamiltoniano a una instancia del problema de "Cena"*

- Se transponen las aristas del grafo
- Se recorren todos los nodos del grafo
- En cada iteración,
  - por cada nodo se crea un directivo
  - por cada arista se crea una incompatibilidad entre nodos (directivos)

La complejidad de la transformación es  $O(V \cdot E)$  dado que se necesita transponer el grafo de la instancia. Luego se recorren las aristas y los nodos con complejidad  $O(E)$  y  $O(V)$  respectivamente, pero no afectan la complejidad final.



---

Dicha transformación va a permitir que al ejecutar el algoritmo de “Cena” se elija una combinación y orden de directivos tal que no haya incompatibilidades entre ellos (sean adyacentes en el problema de ciclo hamiltoneano), y puedan formar un orden en la mesa circular (lo cual luego servirá para hallar la solución del ciclo hamiltoniano)

*Transformación del resultado del problema de “Cena” al resultado de Ciclo Hamiltoniano*

Para obtener el resultado del problema de Ciclo Hamiltoniano se debe realizar la transformación de cada directivo de la solución en nodos nuevamente.

La complejidad de la segunda transformación es  $O(V)$  dado que se necesitan iterar todos los directivos de la solución.

De esta manera podemos justificar que el problema de Ciclo Hamiltoniano  $\leq$  “Cena”, y por lo tanto justificar que “Cena” es al menos tan difícil que Ciclo Hamiltoniano, por lo que es considerado NPH.

Al ser demostrado que “Cena” es NP y NPH, el mismo es considerado NPC.