

```

clear all;           % Elimina todas las variables
close all;           % Cierra todas las figuras abiertas
clc;                 % Limpia la ventana de comandos
tic;                 % Inicia la medición del tiempo de ejecución

%-----
% Declaración de variables simbólicas
%-----
syms th1(t)          % Ángulo de la articulación (péndulo)
syms th1p(t)          % Velocidad angular de la articulación
syms th1pp(t)         % Aceleración angular de la articulación

syms m1              % Masa del eslabón (péndulo)
syms Ixx1 Iyy1 Izz1  % Momentos de inercia del eslabón en los ejes x, y y z
syms l1 lcl          % l1: longitud total; lcl: distancia al centro de masa
syms pi g a cero     % Constantes físicas y auxiliares

%-----
% Definición de vectores articulares
%-----
Q   = [th1];          % Vector de coordenadas articulares
Qp  = [th1p];          % Vector de velocidades articulares
Qpp = [th1pp];         % Vector de aceleraciones articulares

%-----
% Configuración del robot
%   0 = junta rotacional; 1 = junta prismática
%-----
RP = [0];              % Robot de 1 GDL con una junta rotacional

% Número de grados de libertad
GDL = size(RP, 2);

%-----
% Cinemática directa: posición y orientación de la articulación
%-----
% Posición de la articulación 1 respecto al marco base
P(:, :, 1) = [l1*cos(th1); % Componente x
              l1*sin(th1);  % Componente y
              0];           % Componente z

% Matriz de rotación de la articulación 1 respecto al marco base
R(:, :, 1) = [ cos(th1), -sin(th1), 0;
               sin(th1),  cos(th1), 0;
               0,         0,         1];

%-----
% Construcción de las matrices de transformación homogénea
%-----
Vector_Zeros = zeros(1,3); % Vector para completar la fila [0 0 0 1]

```

```

% Inicialización de las matrices locales y globales
A(:,:,GDL) = simplify([R(:,:,GDL), P(:,:,GDL); Vector_Zeros, 1]);
T(:,:,GDL) = simplify([R(:,:,GDL), P(:,:,GDL); Vector_Zeros, 1]);
PO(:,:,GDL) = P(:,:,GDL); % Posición final del eslabón
RO(:,:,GDL) = R(:,:,GDL); % Orientación final del eslabón

% Cálculo de las matrices de transformación globales (en este caso, solo una)
for i = 1:GDL
    A(:,:,i) = simplify([R(:,:,i), P(:,:,i); Vector_Zeros, 1]);
    try
        T(:,:,i) = T(:,:,i-1) * A(:,:,i);
    catch
        T(:,:,i) = A(:,:,i);
    end
    T(:,:,i) = simplify(T(:,:,i));
    RO(:,:,i) = T(1:3, 1:3, i);
    PO(:,:,i) = T(1:3, 4, i);
end

%-----
% Cálculo del Jacobiano (velocidades) para el único eslabón
%-----
% Inicialización del Jacobiano lineal y angular
Jv_a1(:,GDL) = PO(:,:,GDL);
Jw_a1(:,GDL) = PO(:,:,GDL);

% Para cada junta (aquí solo hay 1) se calcula su contribución
for k = 1:GDL
    if RP(k) == 0 % Junta rotacional
        try
            % Producto cruzado: eje de rotación x (punto final - punto
previo)
            Jv_a1(:,k) = cross(RO(:,3, k-1), PO(:,:,GDL) - PO(:,:,k-1));
            Jw_a1(:,k) = RO(:,3, k-1);
        catch
            % Caso base: no hay matriz previa, se usa [0;0;1]
            Jv_a1(:,k) = cross([0;0;1], PO(:,:,GDL));
            Jw_a1(:,k) = [0;0;1];
        end
    else % Junta prismática (no se utiliza en este ejemplo)
        try
            Jv_a1(:,k) = RO(:,3, k-1);
        catch
            Jv_a1(:,k) = [0;0;1];
        end
        Jw_a1(:,k) = [0;0;0];
    end
end
end

```

```
% Simplificamos las expresiones del Jacobiano
Jv_a1 = simplify(Jv_a1);
Jw_a1 = simplify(Jw_a1);

% Cálculo de las velocidades lineal y angular del eslabón
disp('Velocidad lineal obtenida mediante el Jacobiano lineal del Eslabón 1');
```

Velocidad lineal obtenida mediante el Jacobiano lineal del Eslabón 1

```
V1 = simplify(Jv_a1 * Qp);
pretty(V1)
```

```
/ -l1 sin(th1(t)) th1p(t) \
|      |      |
|  l1 cos(th1(t)) th1p(t) |
|      |      |
\      0      /
```

```
disp('Velocidad angular obtenida mediante el Jacobiano angular del Eslabón
1');
```

Velocidad angular obtenida mediante el Jacobiano angular del Eslabón 1

```
W1 = simplify(Jw_a1 * Qp);
pretty(W1)
```

```
/      0      \
|      |      |
|      0      |
|      |      |
\ th1p(t) /
```

```
%-----
% Cálculo de la Energía Cinética
%-----
% Se obtiene la posición del centro de masa sustituyendo la longitud total
por lc1
P01 = subs(P(:, :, 1), l1, lc1);

% Definición de la matriz de inercia del eslabón
I1 = [Ixx1, 0, 0;
      0, Iyy1, 0;
      0, 0, Izz1];

% Velocidad total del centro de masa: suma de la velocidad lineal y la
contribución de la rotación
V1_Total = V1 + cross(W1, P01);

% Cálculo de la energía cinética:
% Término traslacional: (1/2)*m1*(V1_Total^2)
% Término rotacional: (1/2)*W1'*I1*W1
K1 = (1/2 * m1 * (V1_Total))' * (V1_Total) + (1/2 * W1)' * (I1 * W1);
```

```
disp('Energía Cinética en el Eslabón 1');
```

Energía Cinética en el Eslabón 1

```
K1 = simplify(K1);
pretty(K1);
```

$$\frac{I_{zz1} |\dot{\theta}_1(t)|^2}{2} + \frac{|\dot{\theta}_1(t)|^2 \cos(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \overline{m_1} (l_1 + l_{c1}) (l_{c1} |l_1|^2 + l_1 |l_{c1}|^2)}{2 l_1 l_{c1}}$$

```
% Como se trata de un único eslabón, la energía cinética total es K1
K_Total = simplify(K1);
disp('Energía Cinética Total');
```

Energía Cinética Total

```
pretty(K_Total);
```

$$\frac{I_{zz1} |\dot{\theta}_1(t)|^2}{2} + \frac{|\dot{\theta}_1(t)|^2 \cos(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \overline{m_1} (l_1 + l_{c1}) (l_{c1} |l_1|^2 + l_1 |l_{c1}|^2)}{2 l_1 l_{c1}}$$

```
%-----
% Cálculo de la Energía Potencial
%-----
% Se toma la componente y (altura) para calcular la energía potencial
h1 = P01(2); % Altura respecto al eje y
U1 = m1 * g * h1; % Energía potencial del eslabón

U_Total = U1;

%-----
% Cálculo del Lagrangiano y Modelo de Energía
%-----
Lagrangiano = simplify(K_Total - U_Total); % L = K - U
disp('Lagrangiano L = K - U');
```

Lagrangiano L = K - U

```
pretty(Lagrangiano);
```

$$\frac{I_{zz1} |\dot{\theta}_1(t)|^2}{2} - g l_{c1} m_1 \sin(\theta_1(t)) + \frac{|\dot{\theta}_1(t)|^2 \cos(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \overline{m_1} (l_1 + l_{c1}) (l_{c1} |l_1|^2 + l_1 |l_{c1}|^2)}{2 l_1 l_{c1}}$$

```
H = simplify(K_Total + U_Total); % Función de energía total: H =
K + U
disp('Función de Energía Total H = K + U');
```

Función de Energía Total $H = K + U$

```
pretty(H);
```

$$\frac{I_{zz1} |\dot{\theta}_1|^2}{2} + g l_{c1} m_1 \sin(\theta_1(t)) + \frac{|\dot{\theta}_1|^2 \cos(\theta_1(t)) - \dot{\theta}_1(t) \ddot{\theta}_1(t) m_1 (l_1 + l_{c1}) (l_{c1} |\dot{\theta}_1|^2 + l_1 |\dot{\theta}_1| \cos(\theta_1(t)))}{2 l_1 l_{c1}}$$

Obtención de la Energía Cinética Total en un Péndulo de 1 GDL

Introducción

En este reporte se analiza un modelo dinámico de un péndulo con 1 grado de libertad (1 GDL) y junta rotacional. El objetivo es establecer de manera sistemática los pasos necesarios para obtener la energía cinética total del sistema. La metodología combina conceptos de cinemática y dinámica.

Objetivos

- Determinar la cinemática del sistema: Obtener las expresiones para la posición, la orientación y las velocidades del eslabón.
- Calcular la energía cinética: Incluir tanto el componente traslacional como el rotacional del eslabón.
- Establecer el Lagrangiano y la función de energía total: Con el fin de facilitar posteriores análisis dinámicos y de control.

Metodología y Procedimiento

1. Preparación del Entorno y Declaración de Variables

Descripción:

Se limpia el entorno de MATLAB (borrando variables, cerrando figuras y limpiando la consola) para asegurar que no existan datos previos que puedan interferir con el análisis. Se declaran las variables simbólicas necesarias para describir el ángulo, la velocidad y la aceleración del péndulo, así como los parámetros físicos (masa, momentos de inercia, longitudes y constantes) que caracterizan al sistema.

2. Definición de la Cinemática Directa

Descripción:

Se construye la cinemática directa del péndulo, definiendo la posición y la orientación del eslabón respecto al marco de referencia base.

- **Posición:** Se expresa en función del ángulo θ_1 usando funciones trigonométricas.
- **Orientación:** Se establece mediante una matriz de rotación que depende de θ_1

3. Construcción de las Matrices de Transformación Homogénea

Descripción:

Se generan las matrices homogéneas que combinan la posición y la orientación, permitiendo transformar las coordenadas de la articulación desde el marco base hasta el efector final.

- Se inicializan las matrices locales y globales.
- Se calcula la transformación global (en este caso, igual a la local al tener un solo eslabón).

4. Cálculo del Jacobiano y las Velocidades

Descripción:

El Jacobiano permite relacionar las velocidades articulares con las velocidades del efector final.

- Jacobiano Lineal: Se obtiene mediante la derivada parcial de la posición final respecto a la variable articular, o mediante un producto cruzado que involucra el eje de rotación.
- Jacobiano Angular: Se determina a partir del eje de rotación de la junta.

Pasos:

- Se multiplica el Jacobiano por el vector de velocidades Q_p para obtener:
- La velocidad lineal V_1
- La velocidad angular W_1

5. Obtención de la Posición del Centro de Masa

Descripción:

La posición del centro de masa se obtiene sustituyendo la longitud total l_1 por la distancia l_{c1} . Esto es crucial para calcular la energía traslacional, ya que se utiliza la posición del centro de masa en lugar de la del extremo del eslabón.

6. Cálculo de la Energía Cinética

Descripción:

La energía cinética se divide en dos componentes:

- **Traslacional:** Derivada de la velocidad total del centro de masa.
- **Rotacional:** Asociada a la velocidad angular y a la distribución de masa (matriz de inercia).

Pasos:

- Se calcula la velocidad total del centro de masa: $V1_{Total} = V1 + \text{cross}(W1, P01)$
- Se establece la energía cinética: $K1 = \frac{1}{2} m1 * V1_{Total}^2 + 0.5 * W1 * I1 * W1$

7. Cálculo de la Energía Potencial y del Lagrangiano

Descripción:

La energía potencial se calcula utilizando la altura del centro de masa y la aceleración de la gravedad. Posteriormente, se define el Lagrangiano, que es la diferencia entre la energía cinética y la potencial, y se utiliza para estudios de dinámica y control.

Pasos:

- Energía potencial: $U_1 = m_1 g h_1$ donde h_1 es la componente de altura (en este caso, se toma la que corresponda según el sistema de referencia).
- Se define el Lagrangiano: $L = K - U$
- La función de energía total se expresa como: $H = K + U$

Conclusión

El proceso de obtener la energía cinética total en este sistema implica integrar la descripción cinemática con los principios de la dinámica. Se parte de la definición de la posición y orientación del eslabón, se calcula el Jacobiano para derivar las velocidades y se determina la energía cinética considerando las contribuciones traslacional y rotacional. Finalmente, la energía potencial se suma para obtener una función de energía total, la cual es fundamental en el análisis del comportamiento dinámico y el diseño de sistemas de control.