

# Algoritmos Genéticos para otimização de portfólios de ações baseados no modelo de média-variância com restrições de cardinalidade

Bruno Amaral Teixeira de Freitas, RA 246983  
Luiz Henrique Yuji Delgado Oda, RA 247255

Abril 2024

## 1 Resumo

O presente trabalho discute a elaboração de algoritmos genéticos para a resolução do problema de otimização de portfólios de ações baseados no modelo de média-variância com restrições de cardinalidade.

Particularmente, optou-se por avaliar as metodologias implementadas sobre ativos listados na B3, atualmente a única bolsa de valores em operação no Brasil.

Foram executados códigos de algoritmo genético com elitismo (conservação de alguns cromossomos), variando o crossover (uniform crossover, flat crossover e blend crossover) e seleção de pais (torneio e ranking). Essas variações foram executadas várias vezes para compararmos criando um Time-to-target (TTT) plot e criando performance profiles. Essas variações foram comparadas com um portfólio base formado por proporções iguais de todos os ativos escolhidos e, no geral, apresentaram um resultado superior.

## 2 Introdução

Problemas de alocação de recursos têm sido enfrentados pela humanidade desde os seus primórdios, abrangendo aplicações comerciais, militares, governamentais, industriais e financeiras. A ideia central desses problemas consiste em determinar a maneira mais proveitosa de alocar uma quantidade limitada de recursos dentre diversas possibilidades de escolha, com o objetivo de maximizar os benefícios obtidos por tal alocação.

No contexto de mercados financeiros, uma aplicação de interesse para qualquer investidor é a otimização de carteiras de ações, também chamadas de portfólios. Em particular, considerando o cenário brasileiro, a busca por soluções eficazes de alocação de recursos pode proporcionar melhores alocações de investimentos sobre os ativos listados na B3, que é atualmente (2024) a única bolsa de valores em operação no Brasil.

## 2.1 Otimização por análise de média-variância

Mas como fazer essa escolha de carteira? Em 1952, o economista Harry Markowitz desenvolveu a Teoria Moderna de Portfólio - contribuição essa que lhe rendeu um prêmio Nobel em 1990 - uma primeira metodologia capaz de modelar matematicamente conceitos como risco e retorno e, com base nessas métricas, estabelecer portfólios ótimos.

O modelo de Markowitz ficou conhecido como média-variância e consiste em realizar uma otimização sobre os retornos esperados - calculados a partir da média dos retornos históricos do ativo - e o risco associado a cada investimento - calculado a partir da variância histórica do preço do ativo. Supõe-se que um investidor racional sempre tentará minimizar o risco ao qual está exposto, dado um retorno mínimo desejado, ou maximizar o seu retorno, dado um risco máximo tolerável. Cada uma dessas abordagens gerará portfólios que, segundo Markowitz, representam alocações ótimas de investimentos.

De acordo com essas formulações clássicas da Teoria Moderna de Portfólio e dado um conjunto de  $n$  ativos, definimos:

- $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)^\top$  : vetor de pesos do portfólio, onde  $w_i$  representa a fração do total do capital investido no ativo  $i$ , com  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ .
- $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)^\top$  : vetor dos retornos esperados dos ativos.
- $\Sigma = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij}$  : matriz de covariância dos retornos dos ativos, sendo  $\sigma_{ij}$  a covariância entre os preços históricos de  $i$  e  $j$ .
- $\sigma_0^2$  : nível de risco tolerável
- $\mu_0$  : retorno mínimo esperado
- $\lambda$  : coeficiente de tolerância a risco, podendo assumir valores reais de 0 a 1

Para maximizar o retorno esperado para um dado nível de risco tolerável, resolvemos o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned}
 &\text{maximizar} && \mathbf{w}^\top \mu \\
 &\text{sujeito a} && \mathbf{w}^\top \Sigma \mathbf{w} \leq \sigma_0^2 \\
 &&& \sum_{i=1}^n w_i = 1 \\
 &&& w_i \geq 0, \forall i
 \end{aligned} \tag{1}$$

Alternativamente, para minimizar o risco para um dado nível de retorno esperado, resolvemos:

$$\begin{aligned}
&\text{minimizar} && \mathbf{w}^\top \Sigma \mathbf{w} \\
&\text{sujeito a} && \mathbf{w}^\top \mu \geq \mu_0 \\
&&& \sum_{i=1}^n w_i = 1 \\
&&& w_i \geq 0, \forall i
\end{aligned} \tag{2}$$

Além dessas formulações clássicas de Markowitz, também é possível modelar o problema considerando uma função objetivo que combina a maximização dos retornos esperados e a minimização dos riscos envolvidos.

$$\begin{aligned}
&\text{maximizar} && \lambda \mathbf{w}^\top \mu - (1 - \lambda) \mathbf{w}^\top \Sigma \mathbf{w} \\
&\text{sujeito a} && \sum_{i=1}^n w_i = 1 \\
&&& w_i \geq 0, \forall i
\end{aligned} \tag{3}$$

Para essa formulação, o coeficiente de tolerância a risco controla o quão conservador um investidor deseja ser na obtenção de portfólios. Se  $\lambda = 0$ , temos o caso de um indivíduo completamente conservador, de modo que deseja-se unicamente minimizar os riscos envolvidos. Já se  $\lambda = 1$ , temos o caso de um investidor arrojado, que busca maiores retornos independentemente da possibilidade de perdas.

Para as 3 formulações descritas, o problema admite soluções fechadas obtidas por meio de ferramentas do cálculo diferencial.

## 2.2 Portfólios de média-variância com restrições de cardinalidade

Apesar de sua importância para as finanças quantitativas, o método de Markowitz não foi capaz de, sozinho, produzir bons resultados práticos. Algumas hipóteses para isso se devem à dificuldade de se fornecer valores realistas para os riscos dos ativos e valores de retorno esperados, além do fato da Teoria Moderna de Portfólio não incluir limitações práticas do mercado em sua formulação, a exemplo de taxas de corretagem, negociação de papéis em lotes de tamanho fixo e restrições de cardinalidade.

Estas últimas correspondem a limitar o número total de investimentos realizados e controlar a proporção do capital alocado para cada ativo escolhido. Em cenários nos quais existem centenas de ações disponíveis para compra, portfólios gerados a partir da otimização de média-variância pura poderiam ser compostos também por centenas de investimentos, tornando extremamente complexa a análise e o acompanhamento da carteira pelo próprio investidor. De modo similar, seriam possíveis casos nos quais diversos investimentos recebessem proporções desprezíveis do capital, ainda que não nulas, resultando apenas em um aumento desnecessário da complexidade do portfólio. Por fim, ainda que a modelagem de risco estimule a diversificação dos investimentos, não há garantias

de que o modelo de Markowitz não iria recomendar a alocação de parcelas significativas do capital em um único ativo - o que é uma prática sabidamente desaconselhada no mundo das finanças.

Diante desse contexto, nota-se que a adição de restrições de cardinalidade representa um primeiro passo para tornar os portfólios gerados por análise de média-variância aplicáveis em contextos reais.

Para esse caso, em adição dos parâmetros e variáveis já descritos, também temos:

- $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)^\top$  : vetor de valores binários, onde  $z_i = 1$  indica que o investimento  $i$  está presente no portfólio e  $z_i = 0$ , que ele não está
- $N$  : número natural indicando o tamanho máximo desejado para o portfólio
- $\delta$  : proporção mínima do capital que pode ser alocada em uma ação
- $\epsilon$  : proporção máxima do capital que pode ser alocada em uma ação

Nesse caso, considerando a função-objetivo que combina risco e retorno, o problema de otimização fica:

$$\begin{aligned}
 &\text{maximizar} && \lambda \mathbf{w}^\top \boldsymbol{\mu} - (1 - \lambda) \mathbf{w}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w} \\
 &\text{sujeito a} && \sum_{i=1}^n w_i = 1 \\
 & && \sum_{i=1}^n z_i \leq N \\
 & && \delta z_i \leq w_i \leq \epsilon z_i, \forall i
 \end{aligned} \tag{4}$$

## 2.3 Análise de complexidade

Diferentemente da otimização de portfólios de média-variância clássica proposta por Markowitz, a otimização com restrições de cardinalidade descrita anteriormente pertence à classe dos problemas NP-difíceis. A prova descrita abaixo é baseada na discutida por Escudero (2006).

Em resumo, sabe-se que o problema Subset Sum com restrição de cardinalidade é NP-Completo. Esse problema consiste em extrair, de um conjunto  $S = s_1, s_2, \dots, s_n$  de inteiros, um subconjunto que cuja soma seja zero.

Se for possível realizar uma redução polinomial desse problema ao problema de otimização de portfólios de média-variância com restrições de cardinalidade, então este último também deverá ser NP-difícil.

Para isso, resolve-se  $n$  instâncias do problema de otimização de portfólio analisado, considerando portfólios com tamanho máximo  $c = 1, 2, \dots, n$ . Ou seja, a primeira instância analisará portfólios com  $c = 1$ , a segunda,  $c = 2$  e assim por diante. Para cada instância, associa-se uma ação a cada elemento de  $S$  e atribui-se um retorno  $R$  único para todas as ações. Para a restrição das proporções  $w_i$ , fazemos  $\delta = \epsilon = 1/c$ . Ou seja, toda ação estará restrita a ter a

mesma proporção. Percebe-se que essas restrições de proporções tornam viáveis apenas soluções com exatamente  $c$  ações. Por fim, a matriz de covariâncias é definida de modo que  $\sigma_{ij} = s_i s_j$ , ao mesmo tempo que  $\lambda$  assume algum valor qualquer menor que 1, de modo que o termo da função-objetivo relacionado a essa matriz não seja nulo.

Como toda solução possui o mesmo número de ações e toda ação possui o mesmo retorno, podemos desprezar o fator de retornos esperados da função-objetivo. Além disso, o fato de todas as ações possuírem a mesma proporção simplifica a modelagem do risco, de modo que o problema se reduz a apenas:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} \quad \frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n s_i s_j = \left( \frac{1}{c} \sum_{i=1}^n z_i s_i \right)^2 \\ & \text{sujeito a} \quad \sum_{i=1}^n z_i = c \end{aligned} \tag{5}$$

Percebe que o caso ótimo para a minimização ocorrerá se for possível escolher um conjunto de ações para o qual os  $s_i$  somam 0. Dessa maneira, se pelo menos uma das  $n$  instâncias da otimização do portfólio possuir solução tal que a função-objetivo seja minimizada para 0, então o portfólio obtido nessa instância corresponderá a uma solução de Subset Sum, com subconjunto de tamanho  $c$ .

Dessa maneira, pode-se reduzir Subset Sum ao problema da otimização de portfólios de média-variância com restrição de cardinalidade. Portanto, este último é NP-difícil.

## 2.4 Revisão da literatura

A classificação do problema como NP-difícil sugere que metaheurísticas podem ser abordagens apropriadas para a obtenção de soluções de alta qualidade em tempo razoável.

Anagnostopoulos (2011) e Streichert (2004) exploram a aplicação de algoritmos genéticos multi-objetivo para a otimização de carteiras média-variância com restrições de cardinalidade, considerando uma separação dos termos associados a risco e retorno em funções-objetivo separadas. Anagnostopoulos também analisa outras abordagens evolucionárias multi-objetivo.

Silva (2017) explora uma versão similar do problema, com a adição de restrições de lote mínimo - quando uma ação só pode ser negociada em múltiplos de uma quantidade mínima - e pré-seleção - quando o investidor já possui um conjunto de ações que deverá obrigatoriamente fazer parte do portfólio. Sua abordagem consistiu em implementar uma variação da metaheurística de Enxame de Partículas, também considerando múltiplas funções-objetivo.

Chang (2000) trata da versão do problema que foi apresentada neste trabalho, com uma única função-objetivo incluindo simultaneamente risco e retorno esperado. Suas abordagens envolveram o uso de algoritmos genéticos, Busca Tabu e Recozimento Simulado.

Roudier (2007) também explora a escolha de portfólios de ações com algoritmos genéticos com função-objetivo única. Contudo, ao invés de adicionar restrições de cardinalidade, sua abordagem analisa funções-objetivo mais complexas que a do modelo média-variância, objetivando modelar os mercados de modo mais realista. Contudo, sua conclusão final foi de que não foi possível encontrar um método consistente de obter-se portfólios com alto desempenho na realidade.

Ainda que os artigos mencionados acima tratem de problemas idênticos ou similares ao discutido neste trabalho, nenhum deles foi contextualizado no mercado financeiro brasileiro.

Pensando em metodologias voltadas ao cenário nacional, Oliveira (2020) discute a aplicação de diferentes funções objetivo para um algoritmo genético aplicado à otimização de carteiras da B3. Entretanto, obtém resultados acima do Ibovespa apenas ao elaborar portfólios que tomam como função objetivo a minimização da variância dos preços de fechamento das ações ao longo de um período passado analisado. Nota-se que esse caso é um subproblema do resolvido por Markowitz, de modo que seria possível obter uma solução fechada matematicamente.

Já Tourinho et al. (2013) propõe uma função objetivo baseada na teoria de Markowitz, porém acrescida do uso de restrições no número de ações a serem utilizadas em cada carteira e considerações sobre restrições no tamanho dos lotes negociados.

Essa revisão da literatura mostra que o problema de otimização de portfólio pode ser tratado de diferentes maneiras, principalmente ao considerar-se diferentes metaheurísticas e funções objetivo.

### 3 Metodologia

Seguindo a linha de alguns dos artigos revisados na literatura, utilizou-se um algoritmo genético para resolver o problema da otimização de portfólio de Média-Variância com restrições de cardinalidade. Temos que cada cromossomo representa uma solução do problema e é formado por um vetor de números reais, com o  $i$ -ésimo elemento sendo o valor real correspondente a  $w_i$ , e outro vetor de valores booleanos, onde o  $i$ -ésimo elemento indica se a ação  $i$  está ou não no portfólio. Ou seja, cada cromossomo é simplesmente o par formado pelo vetor  $\mathbf{w}$  de pesos e o vetor  $\mathbf{z}$  de booleanos. Idealmente, não seria necessário este último vetor para representar uma solução, pois o peso atribuído a uma ação já revela por si só se aquela ação está sendo usada. Nesse contexto, a presença do vetor de booleanos serve para apenas para facilitar o controle das restrições de cardinalidade durante a execução do algoritmo.

O fitness de cada cromossomo é obtido a partir da função que queremos maximizar, isto é:

$$\lambda \mathbf{w}^\top \boldsymbol{\mu} - (1 - \lambda) \mathbf{w}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w} \quad (6)$$

Em nossa implementação, toda a população selecionada é submetida a crossover e mutação. Após inicializada uma população, segue-se um ciclo formado por etapas de seleção, crossover e mutação até que um critério de parada seja atingido. De modo a evitar restringir a busca do espaço de soluções e promover uma maior variabilidade genética, executamos reparações provisórias apenas no momento de calcular o seu fitness. Essas reparações são necessárias para que as restrições do portfólio sejam obedecidas.

### 3.1 Inicialização

Inicialmente gera-se  $M$  cromossomos aleatoriamente. A geração de cada cromossomo se dá escolhendo valores booleanos e pesos aleatórios para cada ação.

### 3.2 Reparação

No momento de calcular o fitness e determinar a real solução representada por um cromossomo, deve-se realizar um procedimento de reparação para garantir que todas as restrições do modelo de portfólio utilizado sejam satisfeitas. Primeiramente, se o número de ações selecionadas for maior que o tamanho máximo do portfólio, deve-se remover as ações de menor peso que já foram selecionadas. Em seguida, usa-se o vetor de booleanos do cromossomo para ajustar-se o peso de ações não escolhidas para zero.

Em seguida, utiliza-se o algoritmo abaixo para satisfazer as restrições de proporções máximas e mínimas, baseado no descrito por Anagnostopoulos (2011) e Chang (2000).

---

**Algorithm 1** Reparação do cromossomo considerando restrições de peso mínimo e máximo no portfólio

---

```

1:  $S$  é a solução atual
2:  $Q$  é o conjunto de  $K$  ativos distintos na solução atual
3:  $s_i$  é o o peso atual para o ativo  $i \in Q$ 
4: begin
5:    $L := \sum_{i \in Q} s_i$  /*  $L$  é a soma atual de  $s_i$  */
6:    $F := 1 - \sum_{i \in Q} \epsilon_i$  /*  $F$  é a proporção livre */
7:    $w_i := \delta + s_i F / L \quad \forall i \in Q$  /* calcula proporções para satisfazer  $\delta$  e
   somar 1 */
8:    $R := \emptyset$  /*  $R$  é um conjunto de  $i$  cujas proporções são fixadas em  $\epsilon$  */
9:   while existir um  $i \in Q - R$  com  $w_i > \epsilon$  do
10:    para todos  $i \in Q - R$  se  $w_i > \epsilon$  então  $R := R \cup \{i\}$ 
11:     $L := \sum_{i \in Q - R} s_i$  /*  $L$  é a soma atual de  $s_i$  */
12:     $F := 1 - (\sum_{i \in Q - R} \delta + \sum_{i \in R} \epsilon)$  /*  $F$  é a proporção livre */
13:     $w_i := \delta + s_i F / L \quad \forall i \in Q - R$  /* proporções para  $i \in Q - R$  */
14:     $w_i := \epsilon \quad \forall i \in R$  /* proporções para  $i \in R$  */
15:  end while

```

---

Esse algoritmo começa estabelecendo o peso mínimo para cada ação da solução atual e adicionando mais peso de modo proporcional com os valores da solução não corrigida, preocupando-se com manter uma soma total sempre igual a 1. No pseudocódigo acima, isso é feito nas linhas 5 a 7. Em seguida, ele corrige eventuais ações que estejam acima do peso máximo ao reduzir tais valores para o limite  $\epsilon$ , ajustando o restante do portfólio de modo proporcional para garantir a soma igual a 1.

Ao final desse procedimento, temos uma solução que representa um portfólio dentro das restrições estabelecidas pelo problema.

### 3.3 Seleção

Para a seleção, utilizou-se 2 diferentes métodos. O primeiro consiste na seleção por torneio com elitismo. Nesse caso, os cromossomos de maior fitness são automaticamente escolhidos e os demais passam por rodadas de torneios montados aleatoriamente até que se atinja o número desejado de cromossomos selecionados.

O segundo método consiste na seleção por ranking, também com elitismo. Primeiro, selecionamos os cromossomos com maior fitness. Em seguida, ordenamos cada cromossomo de acordo com seu fitness. Com isso, o cromossomo de menor fitness recebe peso 1, o segundo menor fitness recebe peso 2, e assim por diante, até que o  $i$ -ésimo cromossomo receba peso  $i$ . Dessa forma, escolhemos os pais utilizando um método de roleta, onde cada cromossomo tem uma probabilidade de ser selecionado proporcional ao peso atribuído anteriormente. Esse processo continua até que se atinja o número desejado de cromossomos selecionados.

### 3.4 Crossover

Para a etapa de crossover, implementou-se 3 diferentes abordagens. A primeira, uniform crossover, consiste em utilizar uma distribuição de Bernoulli com  $p=0.5$  para decidir quais genes serão trocados.

Os outros dois crossovers são utilizadas por Stomeo et al. sendo eles o flat crossover e o blend crossover. No flat crossover, geramos apenas um filho para cada par. Sendo assim, adaptamos o crossover para que cada par de pais tenha dois filhos. No flat crossover a técnica utilizada é a de que o valor de um alelo do filho é escolhido aleatoriamente de um intervalo definido por seus pais. Esse intervalo de números é definido como:  $[min(p1_i, p2_i), max(p1_i, p2_i)]$ , sendo  $p1_i$  o valor do  $i$ -ésimo alelo do pai 1 e  $p2_i$  o  $i$ -ésimo alelo do pai 2. Já no blend crossover também temos algo parecido com o flat crossover quando se trata de gerar apenas um filho e que escolhemos o número aleatoriamente de um intervalo. No entanto, a construção do intervalo é diferente, sendo que o limite inferior é  $min(p1_i, p2_i) - \alpha \times |p1_i - p2_i|$  e o limite superior é  $max(p1_i, p2_i) + \alpha \times |p1_i - p2_i|$ , com  $\alpha$  sendo escolhido entre 0 e 1. Podemos ver que esse intervalo é ligeiramente maior que o do flat crossover, aumentando a diversidade nos alelos.



### 3.5 Mutação

Após o crossover temos a etapa de mutação, onde cada alelo de cada um dos cromossomos gerados tem uma probabilidade de ser modificado. Se isso acontecer, ações que foram selecionadas passam a ser não selecionadas e ações que estão fora do portfólio passam a ser inclusas, com um peso gerado aleatoriamente.

### 3.6 Critério de parada

O critério de parada de todas as nossas instâncias do algoritmo genético é a quantidade de gerações, que foi fixada em 1000 para todas as iterações do nosso experimento.

### 3.7 Parâmetros/dados

Após serem determinados de modo experimental, foram fixados os seguintes parâmetros: tamanho da população (número de cromossomos) em 100, taxa de mutação em 0,005, taxa de crossover em 0,1, número de cromossomos de elitismo em 20, tamanho do torneio na seleção em 20, tamanho do portfólio em 20, número de ações disponíveis em 53, coeficiente de tolerância ao risco em 0,5, proporção mínima de uma ação no portfólio em 0,02 e proporção máxima em 0,5. Além disso, também enviamos o retorno de cada ação no período em que estamos baseando nosso algoritmo e a covariância de cada par de ações nesse período. O período considerado para calcular esses dados foi de 7 de maio de 2009 até 7 de maio de 2019. O retorno de cada ação foi calculado como a média dos retornos anuais para cada ativo. A covariância foi calculada como a covariância das sequências dos valores de fechamento das ações, dois a dois. Os dados foram obtidos no site da Bovespa, a partir das planilhas individuais de cada ação, e foram utilizados os valores de fechamento das ações. As ações utilizadas foram algumas presentes no Índice Bovespa e que existiam desde pelo menos 2009. Elas são as ações abaixo:

ABEV3.SA	ALPA4.SA	B3SA3.SA	BBDC3.SA
BBDC4.SA	BEEF3.SA	BRAP4.SA	BRFS3.SA
BRKM5.SA	CCRO3.SA	CMIG4.SA	CPFE3.SA
CPLE6.SA	CSAN3.SA	CSNA3.SA	CYRE3.SA
DXCO3.SA	EGIE3.SA	ELET3.SA	ELET6.SA
EMBR3.SA	ENEV3.SA	EQTL3.SA	EZTC3.SA
GGBR4.SA	GOAU4.SA	HYPE3.SA	ITSA4.SA
ITUB4.SA	JBSS3.SA	LREN3.SA	MRFG3.SA
MRVE3.SA	MULT3.SA	PCAR3.SA	PETR3.SA
PETR4.SA	RADL3.SA	RENT3.SA	SBSP3.SA
SLCE3.SA	SMT03.SA	SUZB3.SA	TAEI11.SA
TIMS3.SA	TOTS3.SA	TRPL4.SA	UGPA3.SA
USIM5.SA	VALE3.SA	VIVT3.SA	WEGE3.SA
YDUQ3.SA			

## 4 Avaliação dos Resultados

Para nosso experimento, rodamos cada uma das variações do nosso algoritmo genético 50 vezes e obtivemos o cromossomo com melhor fitness entre todos. Para esse cromossomo, calculamos também o retorno de um portfólio com sua composição no período de 7 de maio de 2019 até 7 de maio de 2024.

Para avaliação dos resultados, temos dois parâmetros a serem considerados: o fitness da solução e o retorno no período de 5 anos após aquele utilizado para rodar o algoritmo genético. Para analisar o fitness da solução, utilizamos o time-to-target plot. Nele, temos para cada fitness qual é a probabilidade de ele ser alcançado em uma certa geração. Conseguimos o gráfico abaixo para cada uma das variações de crossover e seleção:

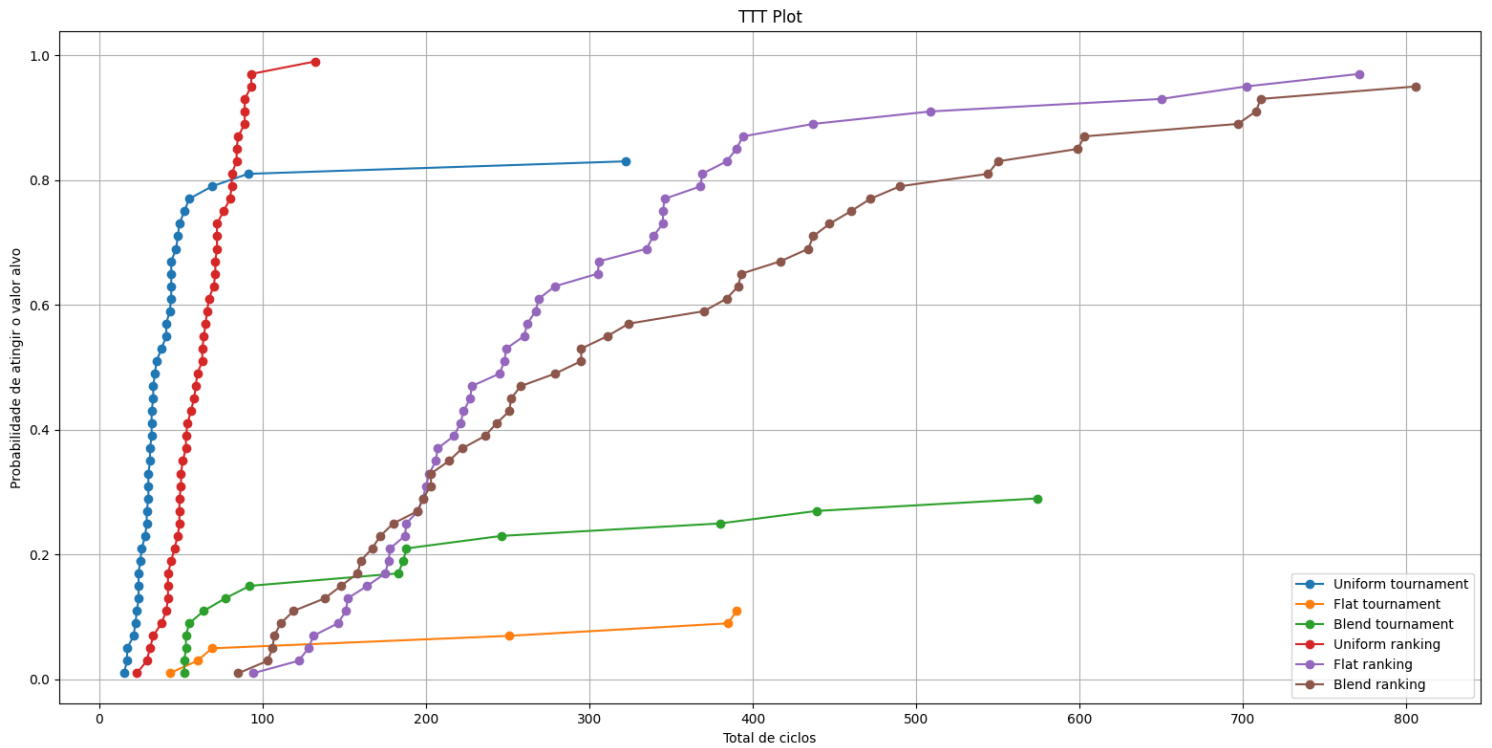


Figura 1: TTT Plot com valor alvo 1.45

Podemos ver pelo gráfico que o algoritmo utilizando a seleção por torneio muitas vezes não atingiu o valor alvo em 1000 ciclos. Já a seleção por ranking atinge o valor alvo mais vezes, mostrando-se mais consistente. A vantagem da seleção por torneio nesse gráfico se dá por sua rapidez em atingir o valor alvo. Podemos ver que, inicialmente, os gráficos dos algoritmos com seleção por torneio "começam" melhor que seus equivalentes por ranking. Isso pode ser resultado de uma seleção mais agressiva, afunilando mais os cromossomos. Já em relação ao crossover, podemos ver claramente que o uniform crossover se mostra o melhor nesse quesito, enquanto o blend e o flat são muito parecidos, com o blend sendo melhor para a seleção por torneio e o flat para a seleção por ranking.

Levando em conta o retorno, ou seja, a rentabilidade da nossa solução nos próximos 5 anos após aqueles usados para rodar o algoritmo genético, analisaremos um gráfico do tipo performance profile. Esse gráfico é baseado no retorno ótimo, que foi de 1,54874 entre todas as iterações do algoritmo genético. O desempenho de um portfólio é o retorno ótimo dividido pelo retorno do portfólio. Podemos ver esse gráfico na Figura 2.

É importante começar destacando que a solução de um portfólio uniforme (todas as ações com uma porcentagem igual) apresenta um retorno de 1,29129. Podemos ver o retorno para cada um dos dias dos 5 anos analisados no gráfico da Figura 3.

Ao dividir o valor ótimo pelo retorno, temos um desempenho de aproximadamente 1,2. Esse retorno é facilmente superado em praticamente todas as variações de algoritmo genético utilizadas. Podemos ver que, para todas as variações usando o flat ou o blend crossover, o valor de 1,2 é superado praticamente 100% das vezes. No entanto, para o uniform crossover, a situação é um pouco diferente. O uniform crossover com seleção por ranking não atinge o valor de um portfólio uniforme nem mesmo 5% das vezes. Já aquele com seleção por torneio atinge um valor melhor ou igual ao de um portfólio uniforme pelo menos 65% das vezes, mas ainda apresenta um desempenho muito inferior às outras variações.

Entre as variações com flat e blend crossover, é possível observar que o flat crossover com seleção por torneio é ligeiramente superior para encontrar soluções muito boas, enquanto o blend crossover com seleção por ranking sempre encontrou soluções melhores que 1,15. Isso pode significar um algoritmo mais consistente para o blend crossover.

Uma surpresa é que o TTT plot e o performance profile aparentemente não apresentam muita relação. Temos que o uniform crossover com seleção por ranking é extremamente consistente em atingir bons valores de fitness e, ainda assim, encontra soluções muito inferiores em relação ao retorno. Já o flat crossover com seleção por torneio é extremamente ruim em encontrar bons valores de fitness e, mesmo assim, encontra soluções com ótimos retornos.

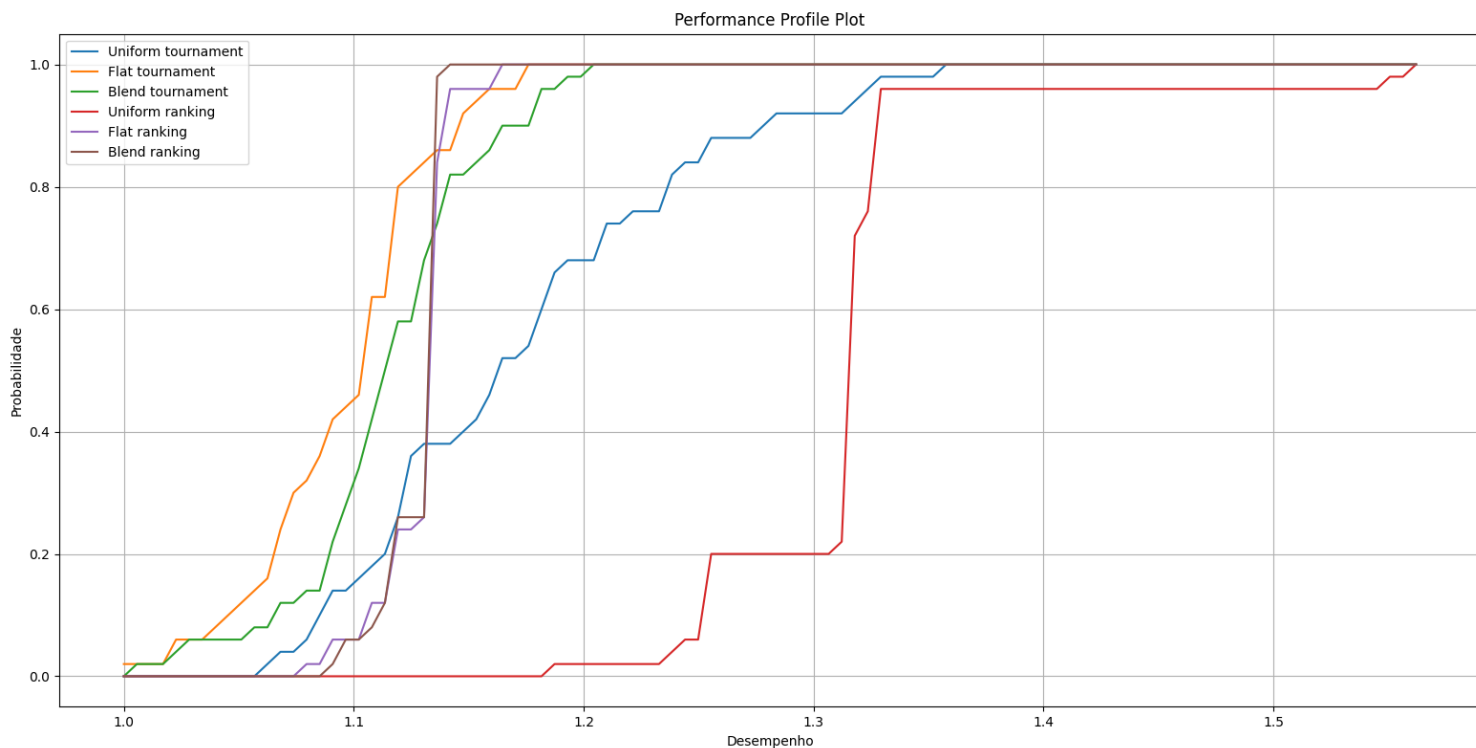


Figura 2: Performance profile com solução ótima 1.54874

## 5 Conclusão

Foi possível obter bons retornos com o uso do algoritmo genético quando comparado com o rendimento médio das ações selecionadas, principalmente com o uso do flat crossover e seleção por torneio. No entanto, não é possível concluir de forma precisa se nosso algoritmo é realmente eficiente para encontrar essas soluções, visto que o fitness calculado durante o algoritmo genético não mostra muita relação com o retorno nos anos seguintes.

Além disso, o fato de que todas as ações observadas estão no índice da Bovespa pode estar causando um viés no nosso experimento, visto que ações do Ibovespa já passam por uma seleção antes de compor o índice.

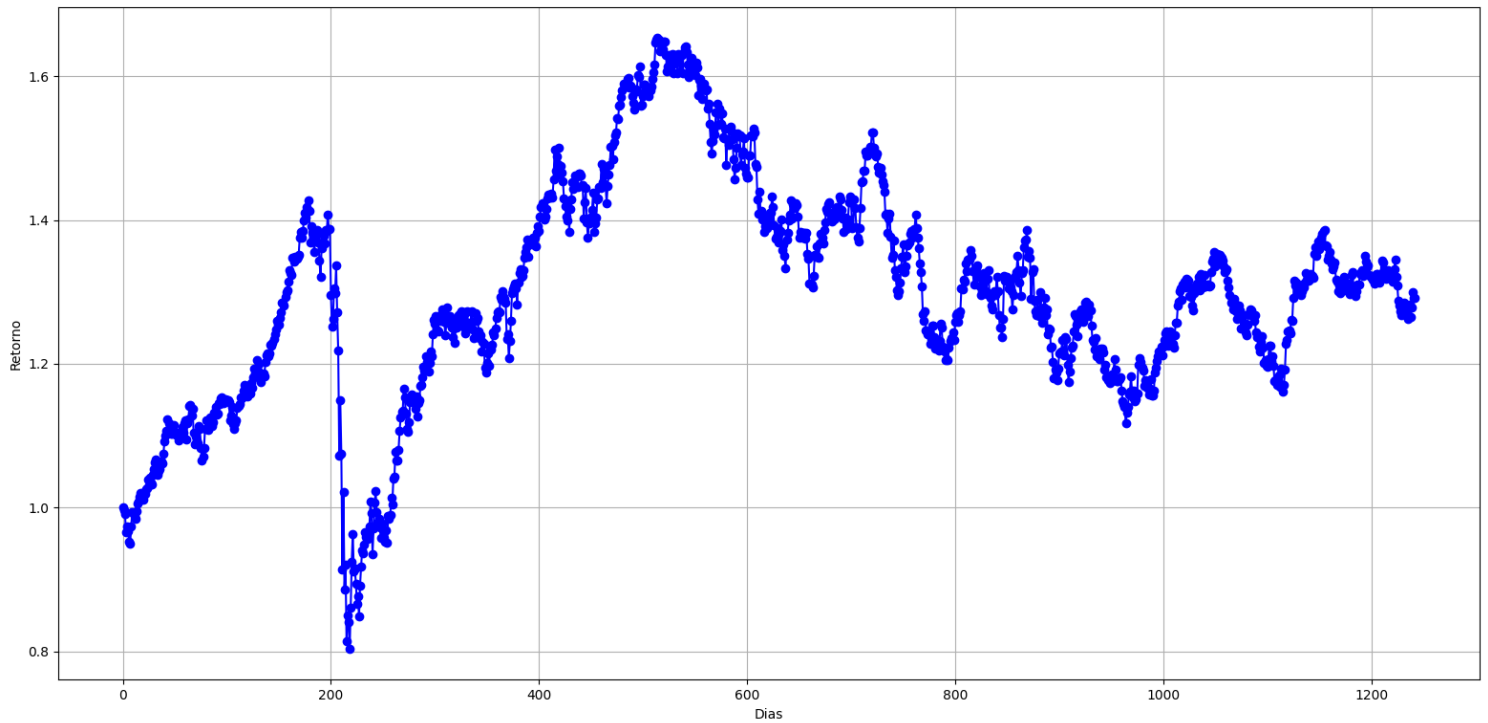


Figura 3: Retorno carteira uniforme

## 6 Referências Bibliográficas

1. Colin R. Reeves. Genetic Algorithms. In: M. Gendreau, J.-Y. Potvin (eds.), **Handbook of Metaheuristics**, International Series in Operations Research & Management Science 146, DOI: 10.1007/978-1-4419-1665-5.
2. H. Markowitz. **Portfolio Selection**, Journal of Finance, 1952, 7-1, 77–91.
3. R. Moral-Escudero, R. Ruiz-Torrubiano, and A. Suarez, **Selection of Optimal Investment Portfolios with Cardinality Constraints**, in \*2006 IEEE International Conference on Evolutionary Computation\*, Vancouver, BC, Canada, 2006, pp. 16-21. doi: 10.1109/CEC.2006.1688603.
4. Roudier, Félix. 2007. **Portfolio Optimization and Genetic Algorithms**. Master's thesis, Swiss Federal Institute of Technology (ETH)

Zurich and Ecole Nationale des Ponts et Chaussées (ENPC) Paris.

5. Stomeo, Emanuele, Simone Caenazzo, Ksenia Ponomareva, and Rohit Jha. **Genetic Algorithm Application to Portfolio Optimisation**. N.p., n.d. Acesso em 24/04/2024. <https://www.riskcare.com/application/files/2016/2375/6422/Genetic-Algorithm-Application.pdf>.
6. OLIVEIRA, Guilherme Isaac Giorgete. **Algoritmos genéticos na otimização de carteiras de ações no Brasil**. 2020. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Faculdade de Economia, Administração, Contabilidade e Atuária, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2020. Disponível em: <https://bdta.abcd.usp.br/directbitstream/2846d9d3-7957-466e-8e15-196817bbd177/Algoritmos%20gen%C3%A9ticos%20na%20otimiza%C3%A7%C3%A3o%20de%20carteiras%20de%20a%C3%A7%C3%B5es%20no%20Brasil.pdf>. Acesso em: 24 abr. 2024.
7. TOURINHO, Renan Fortes; OLIVEIRA, Antônio Costa de; VERAS, Rodrigo de Melo Souza. **Um Algoritmo Genético para Seleção de Portfólio de Investimentos com Restrições de Cardinalidade e Lotes-Padrão**. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE SISTEMAS DE INFORMAÇÃO (SBSI), 9. , 2013, João Pessoa. Anais [...]. Porto Alegre: Sociedade Brasileira de Computação, 2013 . p. 541-552. DOI: <https://doi.org/10.5753/sbsi.2013.5720>.
8. B3. B3, 2024. Índice Bovespa (Ibovespa B3), Carteira - Jan. a Abr. 2024. Disponível em: [https://www.b3.com.br/pt\\_br/market-data-e-indices/indices/indices-amplos/indice-ibovespa-ibovespa-composicao-da-carteira.htm](https://www.b3.com.br/pt_br/market-data-e-indices/indices/indices-amplos/indice-ibovespa-ibovespa-composicao-da-carteira.htm).