Clasificación de funciones

INYECTIVA

Una *función* $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B}$ es inyectiva si cualquiera sean x_1, x_2 pertenecientes a A se cumple:

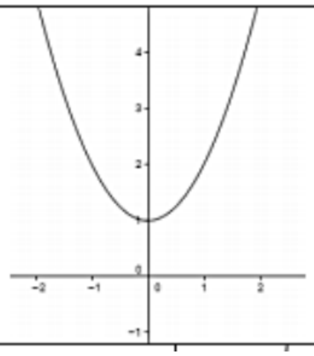
$$x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Ejemplos:

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = x^2 + 1$

Esta función **no es inyectiva** porque a dos elementos distintos del dominio les corresponde la misma imagen.

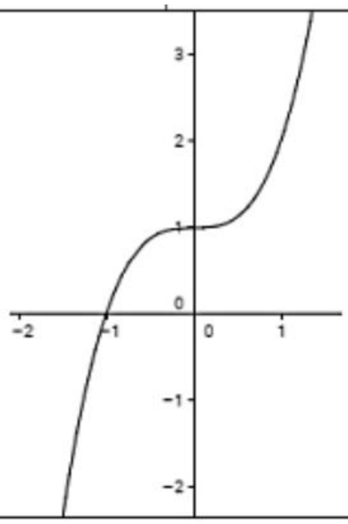
$$f(1) = f(-1) = 2$$



$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = x^3 + 1$

Esta función **es inyectiva** porque a dos elementos distintos del dominio les corresponden imágenes distintas.

$f(1) = 2 \wedge f(-1) = 0$



SOBREYECTIVA

Una *función* $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B}$ es suryectiva si:

$$\mathbb{I}m\,(f) = \mathbb{C}odom\, f(x)$$

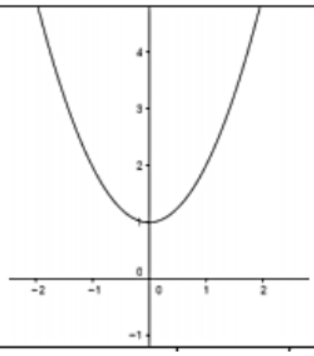
donde $\mathbb{I}m\,(f) = \{y \in B \,/\, \exists\, x \in A \text{ tal que } y = f(x)\}$

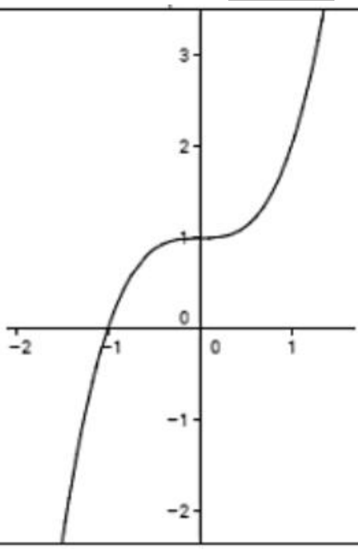
Ejemplos:

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = x^2 + 1$

Esta función **no es suryectiva** porque el codominio de la función es $\mathbb{R}$ y el conjunto imagen es $[1 ; \propto)$

$$\mathbb{I}m\, f(x) \neq \mathbb{C}odom\, f(x)$$

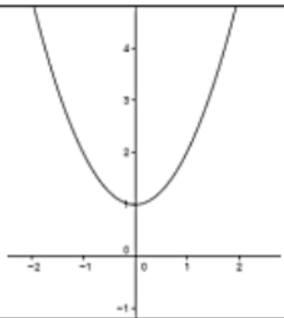
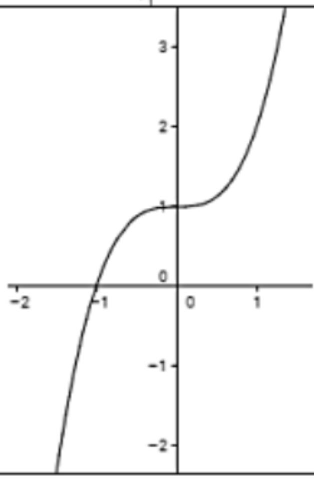


$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}/f(x) = x^3+1$ Esta función **es suryectiva** porque el codominio de la función es $\mathbb{R}$ y el conjunto imagen es $\mathbb{R}$ $\mathbb{Im}\, f(x) = \mathfrak{Codom}\, f(x)$	

BIYECTIVA

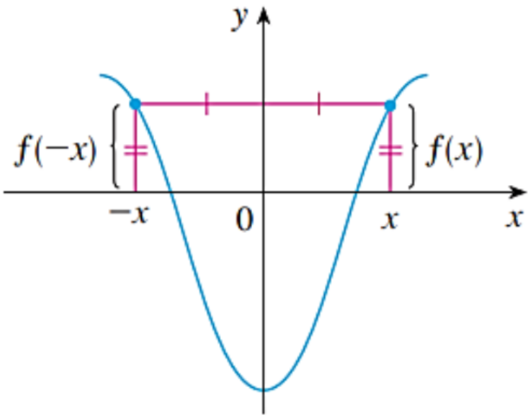
> Una *función* $\boldsymbol{f : A \to B}$ es biyectiva si es **inyectiva y suryectiva**

Ejemplos:

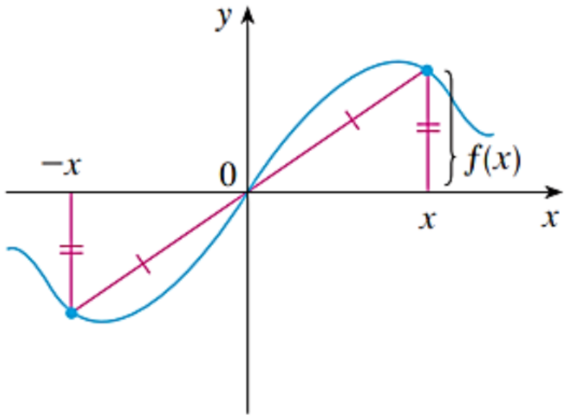
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}/f(x) = x^2+1$ Esta función **no es biyectiva** porque no es inyectiva ni suryectiva.	
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}/f(x) = x^3+1$ Esta función **es biyectiva** porque es inyectiva y suryectiva	

Paridad de una función

- **Función par:** es aquella que toma el mismo valor en el punto x y en el $-x$.
  $$f \text{ es par} \Leftrightarrow \forall x \in A: [f(x) = f(-x)]$$
- **Función impar:** a valores opuestos de x corresponden valores opuestos de la función.
  $$f \text{ es impar} \Leftrightarrow \forall x \in A: [f(-x) = -f(x)]$$



FUNCIÓN PAR



FUNCIÓN IMPAR

Existen funciones que no son pares ni impares.

Nota: para estudiar la paridad de la función obtenemos la expresión para la función evaluada en $-x$ y la comparamos con la misma evaluada en x y con la opuesta de ésta.

Determinar la paridad de las siguientes funciones definidas en el conjunto de los números reales.

a) $g(x) = x^2 - 3$ b) $f(x) = 2x^3 - 2x$

Función inversa

1. **Verificar si es inyectiva:** Asegurarse de que la función original es inyectiva (o uno a uno).
2. **Intercambiar variables:** Reemplazar x por y, y y por x en la ecuación de la función original.
3. **Despejar y:** Resolver la nueva ecuación para despejar la variable y. Esta nueva ecuación será la función inversa, $f^{-1}(x)$.
4. **Verificación:** Aplicar la función original a un valor x, luego aplicar la función inversa al resultado. Debería devolver el valor x original.

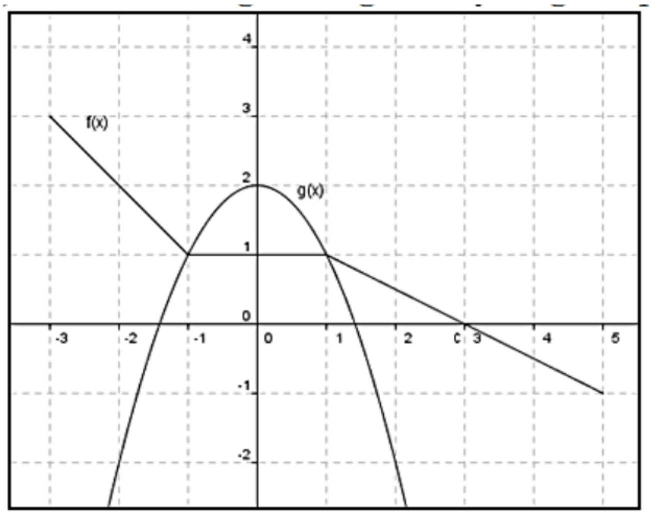
Ejemplo: Si f(x) = 2x + 3, para encontrar la función inversa:

1) La función es inyectiva porque a cada valor de y le corresponde un único valor de x.
2) **Intercambiar variables:** x = 2y + 3.
3) **Despejar y:** x - 3 = 2y

   y = (x - 3) / 2

4) **Función inversa:** $f^{-1}(x)$ = (x - 3) / 2.

1) A partir de las siguientes gráficas, determinar:



a. Dominio e imagen de cada función.
b. Cero o raíz de f(x).
c. Ordenada al origen de g(x).
d. Puntos de intersección entre f(x) y g(x).
e. f(___) = 2
f. f(___) = 1
g. g(___) = -2
h. g(0) =
i. ¿g(x) es inyectiva?
j. ¿f(x) es invertible?

2) Determine si cada una de las siguientes funciones es par o impar.

a) $f(x) = -3x^2 - 5x$

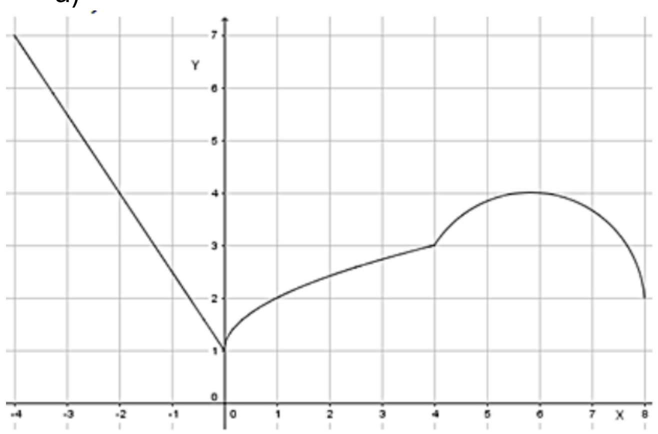
b) $h(x) = x^5 - 6$

c) $g(x) = x^3 - 3x$

d) $i(x) = -3x^2$

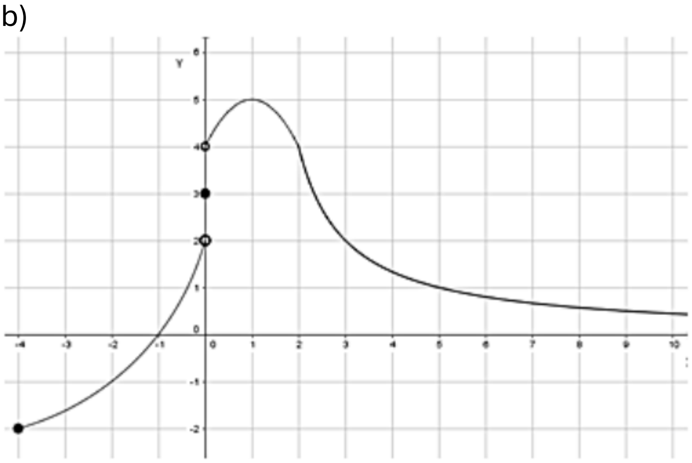
3) Observa y completa.

a)



Dominio:
Imagen:
Cero o raíz:
Ordenada al origen:
Crecimiento:
Decrecimiento:
f(-4) = _____
f(1) = _____
f(4) = _____
f(8) = _____
f(___) = 1
f(___) = 4

b)



Dominio:
Imagen:
Cero o raíz:
Ordenada al origen:
f(-4) = _____
f(-1) = _____
f(5) = _____

4) Determine si las siguientes funciones son uno a uno (inyectiva). En caso de ser una función inyectiva encuentre la función inversa, su rango y dominio.

(a) $f(x) = 2x - 1$.

(b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

(c) $f(x) = x^2$ con dominio $[0, \infty)$.

(d) $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$.

(e) $f(x) = x^3 + 3$.

(f) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$.

(g) $h(x) = \dfrac{2x^3 + 6x^2 + 6x - 1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$.

Composición de funciones

Definición: Dadas dos funciones $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$, la función compuesta $\boldsymbol{f \circ g}$ (también llamada la **composición** de $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$) está definida por

$$(\boldsymbol{f \circ g})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))$$

Ejemplo: Si $\boldsymbol{f(x) = x^2}$ y $\boldsymbol{g(x) = x - 3}$, encuentre las funciones $\boldsymbol{f \circ g}$ y $\boldsymbol{g \circ f}$.

Tenemos

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(x-3) = (x-3)^2$$

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(x^2) = x^2 - 3$$

Ejercicio: Si $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x}}$ y $\boldsymbol{g(x) = \sqrt{2 - x}}$, encuentre las funciones y su dominio: $\boldsymbol{f \circ g}$, $\boldsymbol{g \circ f}$, $\boldsymbol{f \circ f}$ y $\boldsymbol{g \circ g}$.

5) Encuentre las funciones $f\ o\ g, g\ o\ f, f\ o\ f, g\ o\ g$.

$f(x) = x^2 - 1, \quad g(x) = 2x + 1$

$f(x) = x - 2, \quad g(x) = x^2 + 3x + 4$

$f(x) = 1 - 3x, \quad g(x) = \cos x$

$f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = \sqrt[3]{1 - x}$

$f(x) = x + \dfrac{1}{x}, \quad g(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$

$f(x) = \dfrac{x}{1+x}, \quad g(x) = \operatorname{sen} 2x$

6) Encuentre las funciones $f\ o\ g\ o\ h$

$f(x) = x + 1, \quad g(x) = 2x, \quad h(x) = x - 1$

$f(x) = 2x - 1, \quad g(x) = x^2, \quad h(x) = 1 - x$

$f(x) = \sqrt{x - 3}, \quad g(x) = x^2, \quad h(x) = x^3 + 2$

$f(x) = \tan x, \quad g(x) = \dfrac{x}{x - 1}, \quad h(x) = \sqrt[3]{x}$