Neurocomputação, Dinâmica Não-Linear e Redes Neurais de Hopfield

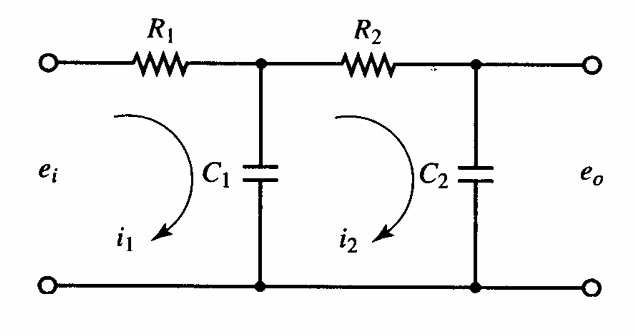
Índice Geral

1 Princípios de Computação Analógica 3
2 O poder da simulação computacional 8
3 Aspectos de Neurocomputação 11
4 Neurocomputação × Computação Convencional 14
5 Rede de Hopfield: recorrência e dinâmica não-linear 20
6 Princípios básicos de sistemas dinâmicos não-lineares 22
6.1 Introdução 22
6.2 Sistemas não-lineares multidimensionais 24
6.3 Análise de sistemas não-lineares 28
6.4 Exemplos de comportamentos dinâmicos não-lineares 29
6.5 Estado Estacionário em Sistemas Não-Lineares 32
6.5.1 Definição de trajetória 32
6.5.2 Pontos fixos (ou pontos de equilíbrio) 36
6.5.3 Soluções periódicas 38
6.5.4 Soluções quase-periódicas 40
6.5.5 Caos 42

7 Redes neurais recorrentes como sistemas dinâmicos não-lineares 47
7.1 Modelos derivados da física estatística 47
7.2 Considerações dinâmicas (supondo espaço de estados contínuo e dinâmica contínua) 49
8 Rede de Hopfield 54
8.1 Características operacionais da rede de Hopfield 56
8.2 Fase 1: Armazenagem de padrões (memórias fundamentais) 58
8.3 Fase 2: Recuperação dos padrões (estados de equilíbrio estáveis) 59
9 Regra de Hebb 60
10 Recapitulação 62
11 A emergência de memória associativa 63
12 Atratores espúrios 66
13 Capacidade de memória da rede de Hopfield 67
14 Extensões (Parte I) 70
15 Extensões (Parte II) 71
16 Problemas de natureza combinatória 72
17 Referências 76

1 Princípios de Computação Analógica

- considere o seguinte circuito elétrico:



- as equações que regem seu comportamento ao longo do tempo são dadas na forma:

$$\frac{1}{C_1}\int (i_1 - i_2)dt + R_1 i_1 = e_i$$

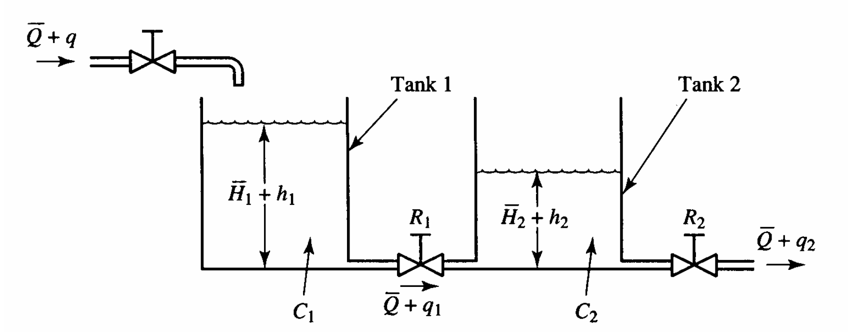
$$\frac{1}{C_2}\int i_2 dt = e_0 \qquad \frac{1}{C_1}\int (i_2 - i_i)dt + R_2 i_2 + \frac{1}{C_2}\int i_2 dt = 0$$

- utilizando a transformada de Laplace, obtém-se:

$$E_0(s) = G(s)E_i(s)$$

com função de transferência $G(s) = \dfrac{1}{R_1C_1R_2C_2s^2 + (R_1C_1 + R_2C_2 + R_1C_2)s + 1}$.

- considere agora o seguinte sistema hidráulico, composto por tanques comunicantes:



onde $\bar{Q}$ e $\bar{H}_i$ (i=1,2) são fluxo e altura em estado estacionário.

- o propósito é mostrar que existem funções de transferência análogas entre este sistema hidráulico e o circuito elétrico apresentado anteriormente, mesmo tratando-se de sistemas dinâmicos de natureza distinta.
- Definição 1: A resistência R em uma válvula é dada pela razão entre a altura h e o fluxo q de vazão, produzindo:

$$R\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{m}^3/\mathrm{s}}\right] = \frac{h}{q}.$$

- Definição 2: A capacitância de um tanque é dada pela mudança em quantidade de líquido armazenado necessária para ocasionar uma mudança unitária na altura, produzindo:

$$C\left[\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{m}}\right] = \frac{\text{mudança na quantidade de líquido armazenado}}{\text{mudança na altura}}.$$

- repare que capacitância (medida em m^2) não é capacidade (medida em m^3).

- se o diâmetro do tanque for constante, então a capacitância (que, por definição, é a área de uma seção horizontal no tanque) será constante.
- das duas definições acima, resultam as duas equações a serem empregadas na modelagem do sistema de tanques comunicantes:

$$\frac{h}{R} = q \qquad\qquad C\frac{dh}{dt} = (q_i - q_o)$$

- sendo assim, as equações que regem o comportamento ao longo do tempo do sistema de tanques comunicantes são dadas na forma:

$$\frac{h_1 - h_2}{R_1} = q_1 \qquad\qquad C_1\frac{dh_1}{dt} = q - q_1$$

$$\frac{h_2}{R_2} = q_2 \qquad\qquad C_2\frac{dh_2}{dt} = q_1 - q_2$$

- utilizando a transformada de Laplace, obtém-se:

$$Q_2(s) = G(s)Q(s)$$

com função de transferência $G(s) = \dfrac{1}{R_1C_1R_2C_2s^2 + (R_1C_1 + R_2C_2 + R_2C_1)s + 1}$.

- comparando-se as duas funções de transferência, constata-se que elas não são idênticas (diferem apenas nos termos que indicam a interação de tanques e a interação de capacitores). No entanto, dado um dos sistemas dinâmicos apresentados, existem valores que podem ser adequadamente definidos para os parâmetros do outro sistema de modo que, para uma mesma condição inicial, o comportamento ao longo do tempo seja idêntico para ambos os sistemas.
- sendo assim, tomando-se aquele sistema mais simples de ser projetado, cujos parâmetros podem ser ajustados de forma simples e confiável, e cujas variáveis de estado podem ser facilmente medidas, é possível estudar o comportamento dinâmico do outro sistema, por analogia.
- este é o princípio da computação analógica.

2 O poder da simulação computacional

- uma das mais importantes realizações científicas do último século é sem dúvida a descoberta do poder da simulação, ou seja, a capacidade de extrair informações sobre um determinado dispositivo mesmo antes deste existir fisicamente, se é que ele possa vir a existir algum dia. Para tanto, é necessário dispor de dois instrumentos:
    1. uma descrição detalhada das propriedades físicas (ou uma representação matemática equivalente) do dispositivo a ser simulado;
    2. uma ferramenta que seja capaz de manipular adequadamente estes processos descritivos (ou estas representações matemáticas).
- o primeiro instrumento está diretamente associado a procedimentos de análise, enquanto que o segundo instrumento corresponde a um processo de síntese.
- é importante mencionar que o que se procura sintetizar para efeito de simulação pode ser um dispositivo bastante genérico, não necessariamente algo fisicamente realizável.

- em 1953, Enrico Fermi e dois de seus colegas do Laboratório Científico Los Alamos (onde foi descoberta a bomba atômica), John Pasta e Stanislaw Ulam, inventaram o conceito de um ‘experimento de computador’.
- de repente, o computador se transformou em uma nova forma de exercer ciência, por realizar uma função semelhante àquela do microscópio e outros equipamentos que ampliam a capacidade sensorial humana, ao revelar peculiaridades de fenômenos que jamais seriam perceptíveis por meio de procedimentos tradicionais de experimentação em laboratório.
- Fermi e seus colegas introduziram a simulação computacional como uma forma eficaz de se buscar uma maior compreensão do conceito de entropia, e desde então inúmeros experimentos científicos e tecnológicos têm sido realizados usando simulação computacional.

- devido ao seu poder de processamento, os computadores são hoje definidos como ferramentas de simulação de propósito geral, já que a partir do mesmo *hardware* dotado de poder computacional suficiente, é possível desenvolver vários produtos de *software* que conduzam o computador a desempenhar tarefas específicas de complexidade variada.
- portanto, o programa de computador (*software*) é o responsável pela flexibilidade associada ao papel do computador como ferramenta de simulação de propósito geral.
- no entanto, a notável evolução de processos de síntese de mapeamentos estáticos e dinâmicos utilizando redes neurais artificias recorrentes e não-recorrentes representa uma nova perspectiva na geração de ferramentas de simulação de propósito geral. Esta nova concepção de dispositivos computacionais, denominada neurocomputação, busca dividir a responsabilidade pela flexibilidade do dispositivo computacional entre o *software* e o *hardware*.

- com isso, ao abrir mão de um *hardware* de propósito geral, cria-se a possibilidade de projetar dispositivos de *hardware* dedicados, específicos para cada aplicação.
- viabiliza-se, assim, o tratamento ótimo do compromisso existente entre complexidade de análise e potencialidade dos recursos computacionais a serem disponibilizados.
- esta é uma condição necessária para permitir a abordagem de problemas de elevada complexidade, de difícil tratamento por parte dos mais poderosos computadores convencionais hoje disponíveis.

3 Aspectos de Neurocomputação

- a neurocomputação é o ramo da computação dedicado à construção de uma nova geração de computadores inteligentes baseado na teoria conexionista. O objetivo é desenvolver computadores com capacidade de representação interna do conhecimento e eficiência no processo de aprendizagem ainda não atingidos pelas

estruturas de processamento já desenvolvidas, incluindo outras arquiteturas não-convencionais e aquelas dedicadas à solução de problemas específicos.

- logicamente, a fonte de inspiração para a neurocomputação continua sendo o cérebro natural encontrado nos organismos vivos, particularmente nos primatas.
- embora não seja um ponto de vista unânime, já que é contestado principalmente por parte importante dos neurofisiologistas, o aspecto fundamental da neurocomputação é a hipótese de que, mesmo quando redes neurais artificiais compostas por neurônios formais (modelos matemáticos de neurônios naturais) puderem ser consideradas simplesmente como ferramentas de matemática aplicada, estas continuam a ser caricaturas de redes neurais naturais, retratando assim o objetivo último (mesmo que distante) de entender e explorar em toda sua essência o cérebro dos organismos vivos.
- o argumento que procura validar esta hipótese é a estratégia geralmente adotada no processo de modelagem do cérebro dos organismos vivos. Em lugar de buscar

a reconstrução (parcial ou total) deste sistema natural tão fielmente quanto possível, adotam-se modelos teóricos utilizando o menor número de ingredientes associados ao sistema natural que ainda assim permitam preservar uma série de propriedades essenciais.

- o conjunto de propriedades essenciais adotado deve ser suficientemente amplo e adequadamente diversificado de forma a permitir a geração de modelos conexionistas com potencial de representação e poder computacional desejado para a aplicação.
- a busca da complexidade mínima se justifica pela necessidade de produzir modelos que sejam implementáveis e tratáveis analiticamente com base no estágio atual de tecnologia e conhecimento teórico disponíveis. Como um resultado desta política de desenvolvimento de modelos artificiais para neurocomputação tem-se que a maioria absoluta das redes neurais artificiais consideradas são estruturas conexionistas simples e homogêneas, com padrões de conexão bem definidos.

- a homogeneidade deriva de propriedade análoga presente em regiões bem definidas do cérebro e também do resultado da aplicação de ferramentas estatísticas e de teoria da complexidade, que permitem analisar sistemas dotados de um grande número de elementos constituintes com base no comportamento emergente da interação destes elementos, no caso, os neurônios.
- por outro lado, os padrões de conexão são definidos com base no tipo de representação interna que deve ocorrer junto às estruturas conexionistas. Por exemplo, é sabido que a existência de memória dinâmica requer invariavelmente a presença de conexões recorrentes, enquanto que a capacidade de aproximação universal de mapeamentos estáticos contínuos pode ser assegurada pela definição de padrões de conexão em camadas.

4 Neurocomputação × Computação Convencional

- computadores clássicos podem ser prontamente utilizados no processo de implementação de neurocomputadores. Com isso, faz-se necessário justificar a razão pela qual se mantém o interesse em projetar e construir arquiteturas dedicadas que resultem em máquinas de neurocomputação:

- devido à sua arquitetura inerentemente paralela, o tempo de processamento ganho na utilização de neurocomputadores em lugar de computadores convencionais torna possível a solução de problemas até então intratáveis pelos mais poderosos computadores seqüenciais atualmente disponíveis;
- máquinas dedicadas induzem o pesquisador a adotar outras estratégias de abordagem para um determinado problema a ser resolvido com base em ferramentas computacionais.

- como será visto brevemente nas próximas seções, a programação de um neurocomputador não envolve a elaboração de um programa a partir de uma série linear de instruções, passo a passo. O que se busca na verdade é delinear o problema no espaço de fase do neurocomputador, conduzindo a uma superfície de energia a ser minimizada com base na própria dinâmica dos estados dos neurônios.

- a expressão para esta superfície de energia deve ser derivada a partir das informações contidas no enunciado do problema, conduzindo à definição dos parâmetros da rede neural (intensidade das conexões e limiares).
- fica evidenciada aqui a existência de dois tipos básicos de variáveis associadas à dinâmica de um neurocomputador: os estados dos neurônios e os parâmetros da rede neural.
- a dinâmica dos parâmetros corresponde à fase de aprendizado ou incorporação de conhecimento, enquanto que a dinâmica dos estados, ou dinâmica de relaxação, corresponde ao processo de minimização da superfície de energia que conduz à solução do problema.
- na utilização de um formalismo descritivo para o algoritmo a ser considerado na implementação de um modelo cognitivo para um sistema computacional, geralmente não é levado em conta o quanto este algoritmo é condicionado por

hipóteses como os tipos de operações básicas e estruturas de dados possíveis e seus modos de iteração.

- além disso, ao contrário de computadores clássicos que são projetados para operar com o máximo de acurácia possível, o objetivo básico do processo de solução baseado em neurocomputadores é produzir soluções apenas aproximadas.
- os mecanismos fundamentais utilizados para gerar esta aproximação da solução ótima podem envolver diferentes níveis de analogia e associação.
- PERETTO (1992) apresentou uma comparação interessante entre neurocomputadores, computadores analógicos e computadores digitais, conforme é apresentado na figura 1:
- computadores digitais: executam automaticamente, a cada passo do processo de computação, correções da trajetória de seu estado físico por meio da representação binária do estado interno de seus componentes;

- computadores analógicos: não são capazes de realizar correção de trajetória, sendo que a relevância dos resultados produzidos dependem da acurácia dos componentes e da extensão dos cálculos;
- neurocomputadores: embora executem cálculos analógicos, a trajetória do estado interno dos neurocomputadores é apreendida em uma base local e atraída pela solução do problema (associada àquela base).

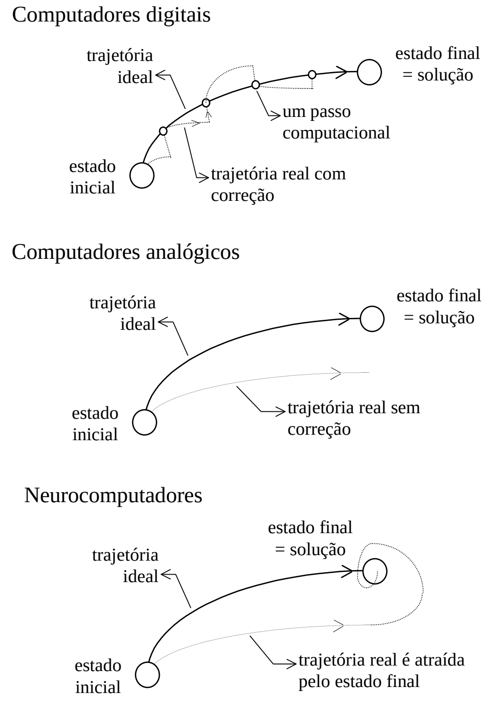


Figura 1 - Comparação entre computadores digitais, computadores analógicos e neurocomputadores (PERETTO, 1992)

5 Rede de Hopfield: recorrência e dinâmica não-linear

- inspirada em conceitos de física estatística e dinâmica não-linear;
- principais características: unidades computacionais não-lineares
  simetria nas conexões sinápticas
  totalmente realimentada (exceto auto-realimentação)

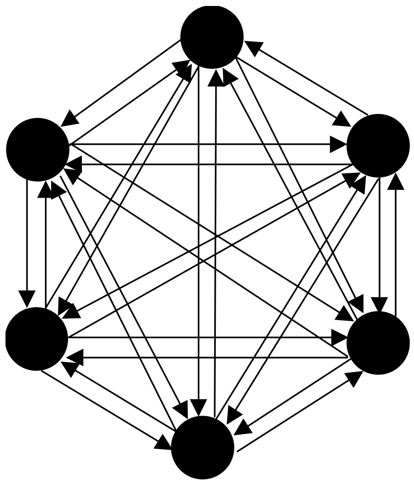


Figura 2 – Rede Neural de Hopfield: ênfase nas conexões

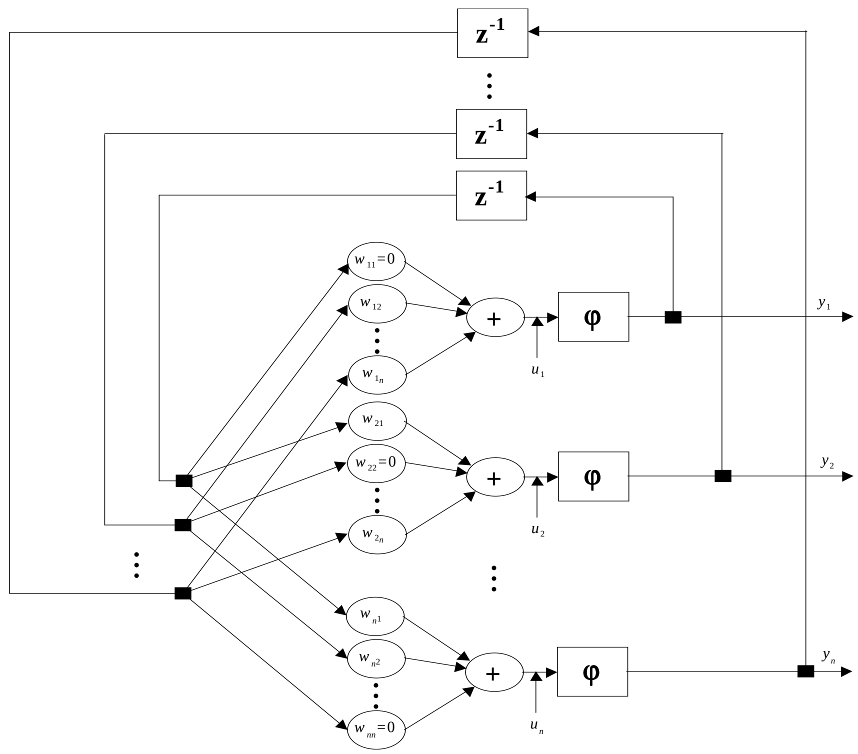


Figura 3 – Rede Neural de Hopfield: ênfase no processamento dinâmico (caso discreto)

6 Princípios básicos de sistemas dinâmicos não-lineares

6.1 Introdução

- a teoria de sistemas dinâmicos se ocupa em descrever matematicamente sistemas em movimento, permitindo classificar e predizer seu comportamento no tempo.
- o comportamento temporal de sistemas dinâmicos pode depender tanto de variáveis observáveis como de variáveis não-observáveis.
- um sistema dinâmico consiste de duas partes: um estado e uma dinâmica.
- o estado descreve a condição atual do sistema na forma de um vetor de variáveis parametrizadas em relação ao tempo, sendo que o conjunto de estados possíveis é denominado espaço de estados do sistema.
- a dinâmica descreve como o estado do sistema evolui no tempo, sendo que a seqüência de estados exibida por um sistema dinâmico durante sua evolução no tempo é denominada trajetória no espaço de estados.

- hipótese: a dinâmica é determinística (em oposição à estocástica), ou seja, para cada estado do sistema, a dinâmica especifica unicamente o próximo estado (dinâmica discreta) ou então a direção de variação do estado (dinâmica contínua).
- neste caso, um sistema dinâmico é uma prescrição matemática determinística para a evolução de um estado no tempo.
- entradas externas podem influir na determinação do próximo estado.

Tabela 1 - Taxionomia dos sistemas dinâmicos (KOLEN, 1994)

		ESPAÇO DE ESTADOS	
		contínuo	discreto
DINÂMICA	contínua	sistema de equações diferenciais	vidros de spin
	discreta	sistema de equações a diferenças	autômato

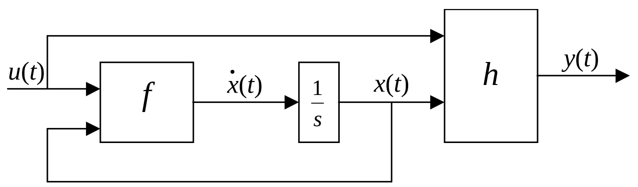
- quando um sistema dinâmico não apresenta a propriedade de linearidade (princípio da superposição de efeitos) ele é denominado sistema dinâmico não-linear. Os sistemas físicos são inerentemente não-lineares.
- no entanto, quando a faixa de operação do sistema é pequena e as não-linearidades são suaves, um sistema dinâmico não-linear pode ser representado aproximadamente por seu correspondente sistema linearizado, cuja dinâmica é descrita por um conjunto de equações diferenciais ou a diferenças lineares.

6.2 Sistemas não-lineares multidimensionais

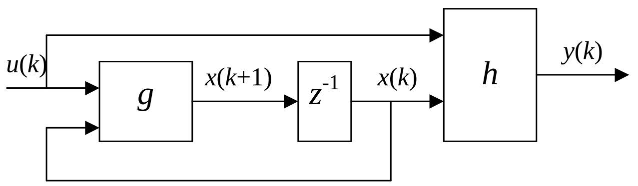
- f_i, g_i (i=1, …, n) são funções não-lineares e n é finito (uma série de restrições devem ser impostas a estas funções, a fim de permitir o tratamento dos sistemas resultantes com base no conhecimento e nas ferramentas disponíveis)
- $x_1, \ldots, x_n$: variáveis de estado (memória que o sistema tem do seu passado)
- $u_1, \ldots, u_p$: entradas do sistema (externas e/ou por realimentação)
- número finito de equações dinâmicas acopladas (tempo contínuo e discreto)

- $\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p) \end{cases}$ $\begin{cases} x_1(k+1) = g_1(k, x_1(k), \dots, x_n(k), u_1(k), \dots, u_p(k)) \\ \vdots \\ x_n(k+1) = g_n(k, x_1(k), \dots, x_n(k), u_1(k), \dots, u_p(k)) \end{cases}$
- representar estas equações em forma mais compacta: <u>notação vetorial</u>
- $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix}$ $f(t,x,u) = \begin{bmatrix} f_1(t,x,u) \\ \vdots \\ f_n(t,x,u) \end{bmatrix}$ $g(k,x,u) = \begin{bmatrix} g_1(k,x,u) \\ \vdots \\ g_n(k,x,u) \end{bmatrix}$
- equações de estado: $\dot{x} = f(t,x,u)$ $x(k+1) = g(k,x,u)$
- equação de saída: $y = h(t,x,u)$ $y = h(k,x,u)$
- $y \in \Re^p$ é denominado vetor de saída, e geralmente contém variáveis de interesse particular na análise de um sistema dinâmico, como variáveis que podem ser fisicamente medidas ou variáveis cujo comportamento deve ser monitorado ou controlado.
- modelo de espaço de estados (ou modelo de estados) de um sistema não-linear

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \\ y(t) = h(t, x(t), u(t)) \end{cases}$$



$$\begin{cases} x(k+1) = g(k, x(k), u(k)) \\ y(k) = h(k, x(k), u(k)) \end{cases}$$



- quando é necessária a equação de saída? $\rightarrow$ representação interna; variáveis de estado $\times$ variáveis de saída
- o modelo de espaço de estados é a forma mais geral que um sistema não-linear pode assumir em uma representação matemática, embora muitas vezes seja interessante obter formas canônicas equivalentes.
- muito da eficiência da teoria de controle moderno (casos linear e não-linear) pode ser atribuída à generalidade e versatilidade dos modelos de espaço de estados. *Mas*

nem todos os sistemas físicos de dimensão finita podem ser representados nesta forma.

- efeito do uso de um modelo de estado para um sistema não-linear: força a análise do sistema sob o ponto de vista da interação entrada/estado e estado/saída (a entrada geralmente não vai atuar *diretamente* sobre a saída).
- f, g e h, também denominadas campos vetoriais, são geralmente supostas serem funções suaves em seus argumentos, com derivadas parciais, de qualquer ordem, contínuas (objetivo: garantir a existência e unicidade de solução). Uma restrição mais forte seria supor que as funções são analíticas em seu domínio de definição.
- uma função é analítica quando ela é diferenciável em um ponto z_0 de seu domínio e em uma vizinhança de z_0, de modo que ela pode ser representada por uma série de potência baseada em potências de $(z - z_0)$.

6.3 Análise de sistemas não-lineares

- envolve conceitos matemáticos mais avançados (análise funcional, geometria diferencial) que o caso linear (álgebra matricial), e o número de abordagens é muito maior que no caso linear, já que as ferramentas são predominantemente específicas ou não-universais.
- o estudo do modelo de estados pode ser conduzido a partir de duas frentes:

1. análise: dada a descrição da dinâmica do sistema, supõe-se que a função de entrada é especificada (fixa) e estuda-se o comportamento da função $x(\cdot)$;
2. síntese: dada a descrição da dinâmica do sistema, bem como o comportamento desejado da função $x(\cdot)$, o problema é encontrar uma função de entrada (função de controle) $u(\cdot)$ adequada, que vai levar $x(\cdot)$ a se comportar de um modo desejado. Ou, de uma forma mais genérica, dado apenas o comportamento desejado da função $x(\cdot)$, o problema é encontrar a dinâmica do sistema (campo vetorial f ou g), podendo ou não haver alguma função de entrada (função de controle) associada.

- neste tópico do curso nos restringiremos à análise e síntese de equações de estado não-forçadas e invariantes no tempo (sistema autônomo):

$$\dot{x}(t) = f\left(x(t)\right) \qquad\qquad x(k+1) = g\left(x(k)\right)$$

6.4 Exemplos de comportamentos dinâmicos não-lineares

- a dinâmica de um sistema não-linear é muito mais rica que a de um sistema linear, ou seja, há fenômenos dinâmicos significativos que só ocorrem na presença de não-linearidades, não podendo assim serem descritos ou preditos por modelos lineares.

Exemplos de fenômenos essencialmente não-lineares:

- **tempo de escape finito**: o estado de um sistema linear instável vai para infinito quando o tempo tende a infinito. Já no caso não-linear, o estado pode ir para infinito em tempo finito.

- **múltiplos pontos de equilíbrio isolados**: um sistema linear pode apresentar apenas um ponto de equilíbrio isolado, indicando a existência de apenas um ponto de operação em estado estacionário, o qual atrai o estado do sistema, independente da condição inicial. Já no caso não-linear, podem existir múltiplos pontos de equilíbrio isolados, e assim *o ponto de operação em estado estacionário vai depender da condição inicial*.
- **ciclos limites**: para um sistema linear invariante no tempo apresentar oscilação permanente, ele deve apresentar um par de autovalores no eixo imaginário. Esta condição é uma impossibilidade prática na presença de perturbações. Mesmo considerando apenas a possibilidade teórica, *a amplitude da oscilação vai depender da condição inicial*. **Na prática, oscilações estáveis devem ser produzidas por sistemas não-lineares**. Há sistemas não-lineares que atingem oscilações de amplitude e freqüência fixas, independente da condição inicial. Este tipo de oscilação é denominada ***ciclo limite***.

- **oscilações sub-harmônicas, harmônicas e quase-periódicas**: um sistema linear estável, sujeito a uma entrada periódica, produz uma saída de mesma freqüência. Um sistema não-linear, sujeito a uma excitação periódica pode oscilar com freqüências que são sub-múltiplos ou múltiplos da freqüência de excitação. Pode ser gerada inclusive uma quase-oscilação, formada pela soma de oscilações periódicas cujas freqüências não são múltiplos entre si.
- **caos**: um sistema não linear pode apresentar um comportamento de estado estacionário que não é equilíbrio, nem oscilação periódica, nem oscilação quase-periódica, sendo denominado caos.
- **múltiplos modos de comportamento**: é comum que múltiplos modos de comportamento dinâmico, dentre os descritos acima, possam ser exibidos por um mesmo sistema dinâmico não-linear, mesmo sem a presença de excitação. Com excitação, as mudanças de modo de comportamento podem ser descontínuas em relação a mudanças suaves na amplitude e freqüência da excitação.

6.5 Estado Estacionário em Sistemas Não-Lineares

- nesta seção os sistemas dinâmicos autônomos são classificados em termos de seu comportamento de estado estacionário (ou de regime), um conceito definido para $t \to \infty$.
- embora haja uma diferença qualitativa marcante entre sistemas dinâmicos de tempo discreto e contínuo, *ambos exibem os mesmos tipos de comportamento dinâmico em estado estacionário*. Com isso, todos os resultados desta seção são **válidos tanto para tempo contínuo como para tempo discreto**.

6.5.1 Definição de trajetória

Definição 1: A seqüência de estados exibida por um sistema dinâmico durante sua evolução no tempo é denominada trajetória.

- embora um mesmo sistema dinâmico possa experimentar trajetórias iniciais completamente diferentes, estas trajetórias geralmente convergem para um comportamento característico quando $t \to \infty$, conhecido como comportamento de estado estacionário (ou de regime).

- o estado estacionário corresponde ao comportamento assintótico de um sistema quando $t \to \infty$, tendo sentido apenas estados estacionários finitos.

Definição 2: Para um dado sistema dinâmico, a diferença entre sua trajetória de estado e seu comportamento de estado estacionário é denominada transiente.

- os conceitos de estado estacionário e transiente são muito utilizados em teoria de sistemas lineares. *Já no caso de sistemas não-lineares, em que o princípio da superposição não mais se aplica, e soluções em forma fechada são difíceis de obter, o conceito de transiente perde algumas de suas serventias (é uma noção de base temporal), mas o conceito de estado estacionário continua a representar uma etapa fundamental no processo de análise de sistemas dinâmicos não-lineares.*

- como os resultados a seguir são válidos tanto para dinâmica discreta como para dinâmica contínua, vamos definir aqui uma notação de trajetória que seja comum para os dois casos (uma formalidade necessária para os estudos que serão considerados na seqüência).

Definição 3: Seja para o sistema de tempo contínuo $\dot{x} = f(x(t)), x(t_0) = x_0$, ou então para o sistema de tempo discreto $x(k+1) = g(x(k)), x(0) = x_0$, a solução vai depender explicitamente da condição inicial, sendo denominada fluxo e denotada por $\phi_t(x_0)$. Embora, para o caso discreto, a notação mais adequada fosse $\phi_k(x_0)$, vamos utilizar *t* em lugar de *k*, deste ponto em diante, seja para tempo contínuo ou discreto.

Definição 4: O conjunto de pontos $\{\phi_t(x_0) : -\infty < t < +\infty\}$ é denominado trajetória através de x_0.

Definição 5: Um atrator é uma região do espaço de estados para onde as trajetórias convergem a partir de uma região maior do espaço de estados. A região do espaço de estados a partir da qual o sistema evolui para o atrator é denominada base de atração.

- estudo de conjuntos limites atratores é de interesse especial já que conjuntos limites não-atratores (repulsores) não podem ser observados em sistemas físicos ou mesmo em simulações.
- no caso de sistemas lineares assintoticamente estáveis, *existe um único conjunto limite e a base de atração do conjunto limite é todo o espaço de estados*, ou seja, o estado estacionário é independente da condição inicial do sistema. Por outro lado, sistemas não-lineares típicos podem apresentar vários conjuntos limites, inclusive com a propriedade de serem conjuntos limites atratores com bases de atração distintas. Neste caso, a condição inicial vai determinar qual dos conjuntos limites será alcançado pelo estado estacionário.

- a seguir, são apresentados quatro tipos distintos de atratores, em ordem crescente de complexidade: ponto fixo, soluções periódicas, soluções quase-periódicas e caos.

6.5.2 Pontos fixos (ou pontos de equilíbrio)

Definição 6: Um ponto fixo (ou ponto de equilíbrio) $\bar{x}$ de um sistema autônomo, dado pela equação $\dot{x} = f\big(x(t)\big), x(t_0) = x_0$ ou $x(k+1) = g\big(x(k)\big), x(0) = x_0$ é uma solução constante $\bar{x} = \phi_t(\bar{x})$, para todo t.

- assim, diz-se que $\bar{x}$ é um ponto de equilíbrio de um sistema dinâmico se, uma vez que o estado do sistema atinge $\bar{x}$, o estado permanece em $\bar{x}$ indefinidamente.
- para sistemas invariantes no tempo, pontos de equilíbrio são caracterizados pela solução de equações algébricas:

$$\dot{x} = f\big(x(t)\big) \quad \leftrightarrow \quad 0 = f(\bar{x})$$

$$x(k+1) = g\big(x(k)\big) \quad \leftrightarrow \quad \bar{x} = g(\bar{x})$$

- um ponto de equilíbrio pode então ser visto como um ponto no espaço de estados que é invariante sob a dinâmica associada ao sistema.
- existem três variedades de pontos fixos, **pontos estáveis, pontos instáveis e pontos de sela**, definidas como segue:

Ponto fixo estável ou atrator: dado um ponto fixo representando o estado atual de um sistema dinâmico, então pequenas perturbações impostas ao estado do sistema resulta em uma trajetória que retorna ao ponto fixo após um transiente inicial. Ou seja, a distância entre o estado do sistema (em uma vizinhança do ponto fixo) no instante t e o ponto fixo estável vai se tornando arbitrariamente pequena para t suficientemente elevado.

Ponto fixo instável ou repulsor: nem todos os pontos fixos atraem seus estados vizinhos. Os pontos fixos instáveis repelem os estados vizinhos. Se o estado de um sistema no instante t_1 coincide com um ponto fixo instável, o sistema vai permanecer neste estado para todo $t > t_1$. No entanto, qualquer perturbação junto a este estado de

equilíbrio instável faz com que a dinâmica associada ao sistema mova seu estado no sentido de afastá-lo do ponto fixo instável;

Ponto de sela: entre os pontos fixos estáveis e instáveis existem os pontos de sela. Estes pontos do espaço de estados exibem propriedades de atração e repulsão, dependendo da direção de aproximação dos estados vizinhos. Portanto, pontos de sela só podem ocorrer em sistemas dinâmicos cujo espaço de estados apresenta mais de uma dimensão.

6.5.3 Soluções periódicas

Definição 7: $\phi_t(\mathbf{x}^*)$ é uma solução periódica de um sistema autônomo se, para todo t,

$$\phi_t(\mathbf{x}^*) = \phi_{t+T}(\mathbf{x}^*)$$

para algum período mínimo $T > 0$. Este resultado é válido para qualquer estado $\mathbf{x}^*$ pertencente à solução periódica, sendo que a escolha de um estado $\mathbf{x}^*$ específico implica apenas na fixação da origem do tempo.

- a restrição $T > 0$ é necessária para prevenir a classificação de um ponto fixo como solução periódica. Enquanto os pontos fixos estão associados à ausência de movimento, as soluções periódicas correspondem a um sistema em movimento constante e uniforme, que visita periodicamente um conjunto de estados.

Definição 8: Uma solução periódica é dita ser isolada se ela possui uma vizinhança que não contém nenhuma outra solução periódica. Uma solução periódica isolada é comumente denominada ciclo limite.

- oscilações sustentadas também podem ocorrer em sistemas lineares, mas estas não correspondem a ciclos limites pois as oscilações em sistemas lineares dependem da condição inicial, não são isoladas e são muito sensíveis a qualquer tipo de mudança nos parâmetros do sistema correspondente.
- os ciclos limites, da mesma forma que os pontos fixos, podem atrair estados vizinhos, repeli-los, ou apresentar uma combinação destas duas condições. Ciclos limites atratores produzem oscilações que são estáveis em relação a pequenas

perturbações. Perturbações junto a ciclos limites repulsores acabam movendo o sistema em direção a outros atratores.

6.5.4 Soluções quase-periódicas

Definição 9: Uma função quase-periódica é tal que pode ser expressa por uma soma de p funções periódicas na forma:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{p} h_i(t),$$

onde h_i (i=1,...,p) tem período mínimo T_i e freqüência $f_i = 1/T_i$. Além disso, deve existir um conjunto finito de freqüências básicas $\{\hat{f}_1,..., \hat{f}_p\}$ com as seguintes propriedades:

- independência linear: não existe um conjunto não-nulo de inteiros $\{k_1,...,k_p\}$ tal que $k_1\hat{f}_1 + ... + k_p\hat{f}_p = 0$;

➢ base para toda f_i: sempre existe um conjunto de inteiros $\{k_1^i,\ldots,k_p^i\}$ tal que, para $i = 1,\ldots,p$, $f_i = k_1^i \hat{f}_1 + \ldots + k_p^i \hat{f}_p$.

- dada esta definição, é possível afirmar que uma forma de onda quase-periódica é a soma de formas de onda periódicas cujas freqüências correspondem a uma combinação linear de um conjunto finito de freqüências básicas. Como, por exemplo, $\{\hat{f}_1, \hat{f}_2\}$ gera o mesmo conjunto de freqüências que $\{\hat{f}_1, \hat{f}_1 + \hat{f}_2\}$, conclui-se que o conjunto de freqüências básicas não é único para um mesmo p (neste exemplo utilizou-se $p = 2$).
- uma forma de onda periódica é uma forma de onda quase-periódica com $p = 1$. Para $p = 2$, considere a seguinte função no tempo:

$$x(t) = h_1(t) + h_2(t),$$

onde h_1 e h_2 são funções periódicas arbitrárias com períodos T_1 e T_2, respectivamente. A função $x(t)$ é quase-periódica se T_1 e T_2 forem tais que T_1/T_2 é

um número irracional. Caso contrário, existiriam dois inteiros q e r tais que $qT_1 = rT_2$, fazendo com que $x(t)$ fosse periódica, com período $T = qT_1$.

- soluções quase-periódicas também podem representar regimes atratores, repulsores, ou uma combinação destes.

6.5.5 Caos

- não há uma definição geral para caos que seja aceita em toda sua extensão nas mais diversas áreas envolvidas no estudo deste fenômeno não-linear. Em termos práticos, como a trajetória de um sistema dinâmico caótico é aperiódica, pode-se atribuir comportamento caótico a todo comportamento estacionário que não possa ser inserido em nenhum dos três casos anteriores: pontos fixos, soluções periódicas ou soluções quase-periódicas.
- é certo que sistemas dinâmicos lineares não podem exibir comportamento caótico, ou seja, atratores ou repulsores caóticos só ocorrem no caso de sistemas dinâmicos não-lineares. Também é sabido que caos não ocorre caso a ordem do sistema

dinâmico seja inferior a 3, no caso de dinâmica contínua, ou 2, no caso de dinâmica discreta (se o mapeamento for não-inversível, então ordem 1 basta).

- dinâmicas lineares podem apenas expandir, comprimir ou rotacionar o espaço de estados, de forma que apenas pontos fixos e ciclos periódicos são possíveis.
- pontos fixos estáveis resultam da aplicação repetida de operadores de compressão. No limite, estas operações reduzem subconjuntos do espaço de estados a um único ponto. Ciclos limites surgem a partir da rotação do espaço de estados. Por outro lado, quando a dinâmica não-linear repetidamente expande, dobra e (possivelmente) comprime o espaço de estados, emerge o comportamento caótico.
- pode-se dizer que a dinâmica caótica começou a ser estudada a partir dos trabalhos do matemático francês Henri Poincaré, por volta da virada do século passado. Um dos problemas analisado por Poincaré correspondia à descrição das órbitas de três corpos celestiais (uma estrela e dois planetas) experimentando atração gravitacional mútua. Um aspecto importante foi o fato de Poincaré analisar o

comportamento de um conjunto de órbitas originadas a partir de condições iniciais distintas, ao invés de tratar órbitas individuais. Com isso, ele foi capaz de mostrar que órbitas com propriedades dinâmicas desconhecidas, hoje denominadas órbitas caóticas, podiam ser geradas.

- um sistema dinâmico caótico apresenta um estado estacionário finito, mas que não gera uma trajetória periódica nem quase-periódica. À primeira vista, a dinâmica caótica se assemelha a muitos processos aleatórios, não seguindo nenhum tipo de padrão. No entanto, sistemas caóticos são descritos por equações determinísticas, enquanto que um processo verdadeiramente aleatório pode ser caracterizado apenas em termos de propriedades estatísticas.
- a questão é que não é possível realizar previsões de longo prazo para uma trajetória caótica, ou seja, o horizonte de previsibilidade cresce apenas com o logaritmo da precisão de medida realizada junto à condição inicial: sensibilidade à condição inicial (ou a uma pequena perturbação que ocorra a qualquer instante de tempo),

dada por um valor positivo para o expoente de Lyapunov (WOLF *et al.*, 1985; ECKMANN *et al.*, 1986; MCCAFFREY *et al.*, 1992).

- o expoente de Lyapunov mede a taxa com que trajetórias vizinhas no espaço de estados convergem ou divergem. Há tantos expoentes de Lyapunov quanto dimensões no espaço de estados, sendo que o maior expoente é geralmente o mais importante.
- pelo exposto acima, fica evidente que caos não tem a ver com desordem (ao menos em dinâmica não-linear). Trata-se de um comportamento dinâmico não-linear, determinístico, mas imprevisível a longo prazo. Estes aspectos gerais associados ao comportamento caótico conduzem aos três requisitos matemáticos utilizados para demonstrar que um sistema dinâmico apresenta comportamento caótico:

- sensibilidade em relação à condição inicial;
- ergodicidade;
- presença de um conjunto denso de pontos pertencentes a soluções periódicas instáveis.

- o objeto geométrico no espaço de estados para o qual uma trajetória caótica é atraída é denominado <u>atrator estranho</u>, sempre que sua dimensão for fracionária (geometria fractal). É possível obter atratores caóticos que não são estranhos.
- da mesma forma que atratores periódicos podem ser diferenciados por seus períodos, atratores estranhos podem ser diferenciados por sua dimensão. Pontos fixos e ciclos limites de tempo discreto são atratores de dimensão zero, pois são constituídos apenas por um número finito de pontos. Ciclos limites de tempo contínuo são atratores de dimensão inteira. Por exemplo, quando o ciclo limite é uma curva que se liga em suas extremidades, sua dimensão é um. Já atratores caóticos podem apresentar dimensão fracionária.
- <u>observação</u>: existem métodos para cálculo da dimensão de um atrator estranho e também há atratores estranhos que não são produzidos por dinâmicas caóticas.
- é possível que computadores simulem comportamentos caóticos? (BINDER & JENSEN, 1986)

7 Redes neurais recorrentes como sistemas dinâmicos não-lineares

7.1 Modelos derivados da física estatística

- incorporação de um princípio físico fundamental: armazenagem de informação em uma configuração dinamicamente estável (requer um tempo para se acomodar em uma condição de equilíbrio → dinâmica de relaxação → comportamento de estado estacionário).
- cada padrão a ser armazenado fica localizado em um vale da superfície de energia. Como a dinâmica não-linear da rede é estabelecida de modo a minimizar a energia, os vales representam pontos de equilíbrio estável (cada qual com a sua base de atração).
- memória ↔ ponto de equilíbrio estável: embora outros pesquisadores já viessem buscando a implementação de tal conceito, HOPFIELD (1982) foi o primeiro a formulá-lo em termos precisos.

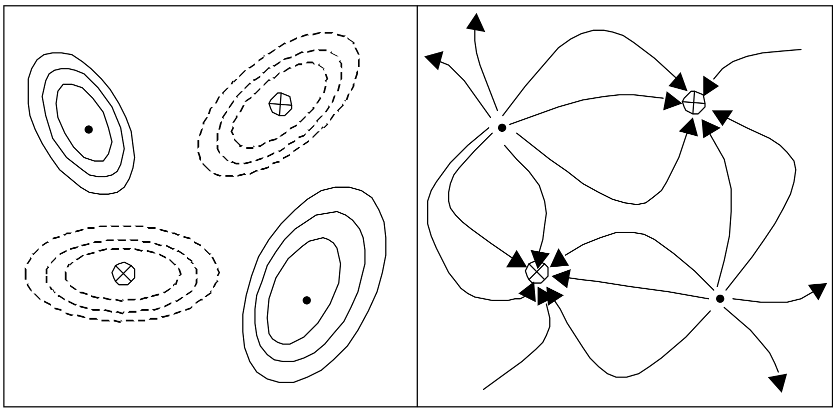


Figura 4 – Superfície de energia: pontos de equilíbrio e bases de atração

- este tipo de sistema dinâmico pode operar como:
  1) memória associativa (endereçável por conteúdo);
  2) dispositivo computacional para resolver problemas de otimização de natureza combinatória.

- problema de otimização de natureza combinatória: é um sistema discreto com um grande número, embora finito, de estados possíveis (soluções candidatas). O objetivo é encontrar o estado que minimiza uma função-custo, a qual fornece uma medida de desempenho para o sistema.

7.2 Considerações dinâmicas (supondo espaço de estados contínuo e dinâmica contínua)

- considere uma rede neural composta de N neurônios com acoplamento simétrico descrito por $w_{ji} = w_{ij}$ ($i,j = 1,\ldots,N$), onde w_{ji} é o peso sináptico que conecta a saída do neurônio i à entrada do neurônio j, e também com ausência de auto-realimentação, ou seja, $w_{jj} = 0$ ($j = 1,\ldots,N$).
- uma generalização, com $w_{ji} \neq w_{ij}$ e/ou $w_{jj} \neq 0$ ($i,j = 1,\ldots,N$), pode resultar em um sistema dinâmico com outros comportamentos de estado estacionário, além dos pontos fixos (pontos de equilíbrio). Por exemplo: ciclos limites, quase periodicidade e caos.

- sejam $u_j(t)$ o sinal de ativação interna do neurônio j e $y_j(t)$ o correspondente sinal de saída, então tem-se que:

$$y_j(t) = \varphi_j\left(u_j(t)\right)$$

onde $\varphi_j(\cdot)$ é a não-linearidade sigmoidal do neurônio j. Neste desenvolvimento, estamos considerando u_j e y_j como variáveis de tempo contínuo.

- considerando que o estado da rede (neste caso, $\mathbf{y}(t)$ também poderia ser escolhido como vetor de estados, já que a função de ativação é inversível) é dado por

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_N(t) \end{bmatrix},$$

a dinâmica da rede neural é descrita por um conjunto de equações diferenciais não-lineares acopladas (HOPFIELD, 1984; COHEN & GROSSBERG, 1983), na forma:

$$C_j \frac{du_j}{dt} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N} w_{ji}\varphi_i(u_i) - \frac{u_j}{R_j} - \theta_j,\; j = 1,\ldots,N.$$

onde θ_j é um limiar aplicado ao neurônio j por uma fonte externa. O efeito capacitivo associado ao neurônio j, dado por C_j, determina a taxa finita de variação do sinal de ativação interna $u_j(t)$ em relação ao tempo t, que é uma propriedade intrínseca dos neurônios biológicos e também da implementação física dos neurônios artificiais.

- para esta dinâmica, é possível definir uma função de energia, ou função de Lyapunov (HOPFIELD, 1984):

$$E = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} w_{ji} y_i y_j + \sum_{j=1}^{N}\frac{1}{R_j}\int_0^{y_j}\varphi_j^{-1}(z)dz + \sum_{j=1}^{N}\theta_j y_j$$

- esta função de energia representa um caso particular de um teorema devido a COHEN & GORSSBERG (1983), e descreve totalmente a rede neural, ao considerar todos os pesos sinápticos e todas as variáveis de estado da rede.
- além disso, supondo que θ_j varia lentamente com o tempo de computação, é possível definir o seguinte teorema:

Teorema 1: A função de energia E é uma função monotonicamente decrescente do estado da rede $\mathbf{u}(t)$.

Prova: Veja HOPFIELD (1984) e COHEN & GROSSBERG (1983).

- isto implica que, dado um estado inicial $\mathbf{u}_0(t)$, a evolução do estado $\mathbf{u}(t)$ com o tempo vai seguir uma trajetória decrescente através da superfície de energia, até atingir um mínimo local. A partir deste ponto, o estado da rede fica constante.
- este é um resultado fundamental, pois garante que, mesmo com abundância de realimentações, os estados estacionários da rede neural recorrente descrita acima (um caso particular de sistema dinâmico não-linear) correspondem sempre a pontos de equilíbrio, não podendo assim apresentar oscilações permanentes do tipo ciclo limite, por exemplo, ou outros comportamentos estacionários mais complexos (quase periodicidade e caos).

- os pontos de equilíbrio são denominados atratores, no sentido de que existe uma vizinhança (base de atração) sobre a qual estes pontos exercem uma influência dominante.
- embora seja possível produzir redes recorrentes generalizadas, com $w_{ji} \neq w_{ij}$ e/ou $w_{jj} \neq 0$ ($i,j = 1,\ldots,N$), que apresentam uma dinâmica composta apenas por pontos de equilíbrio (CARPENTER *et al.*, 1987), geralmente se obtém regimes estacionários caracterizados por comportamentos dinâmicos mais complexos (HOPFIELD & TANK, 1986), não desejados nesta aplicação específica.

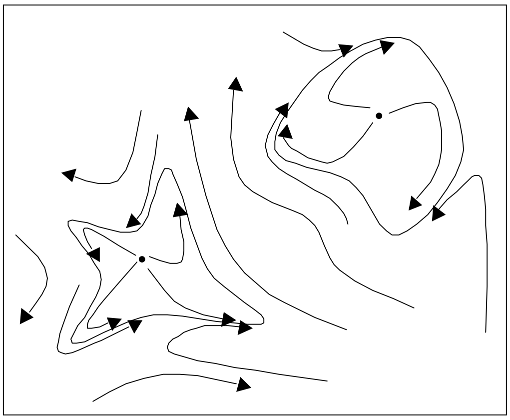
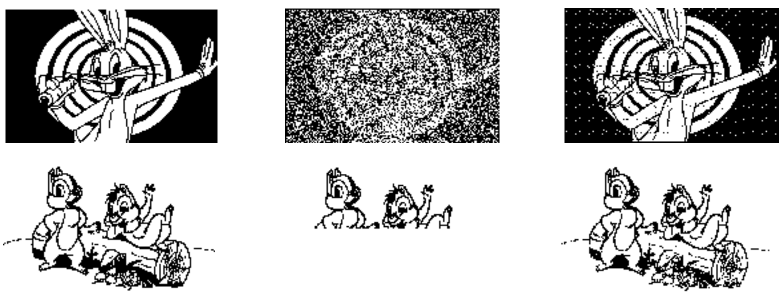


Figura 5 – Dinâmica de uma rede recorrente generalizada: presença de ciclos limites

8 Rede de Hopfield

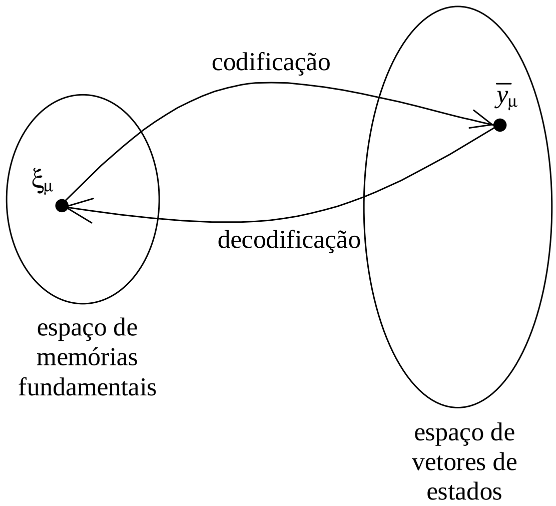
- a rede de Hopfield é um caso particular de rede recorrente, em que o espaço de estados é discreto.
- como veremos a seguir, ela pode ser vista como uma memória associativa não-linear, ou uma memória endereçável por conteúdo, cuja principal função é restaurar um padrão binário armazenado (item de memória), em resposta à apresentação de uma versão incompleta (papel restaurador) ou ruidosa (papel de corretor de erro) deste padrão.



memórias | entradas | padrões restaurados

- como memorizar?
- como restaurar?

- portanto, a recuperação do padrão armazenado na memória se dá a partir de um subconjunto das informações contidas no padrão.
- a essência da memória endereçável por conteúdo é mapear uma memória fundamental ξ_μ em um ponto fixo estável $\bar{y}_\mu$ do sistema dinâmico representado pela rede recorrente.



- logo, a rede neural de Hopfield é um sistema dinâmico não-linear cujo espaço de estados contém um conjunto de pontos fixos estáveis que representam as memórias fundamentais do sistema.

8.1 Características operacionais da rede de Hopfield

- o modelo de rede neural de Hopfield utiliza como unidade de processamento básica o neurônio de MCCULLOCH & PITTS (1943) $\rightarrow$ estado discreto;
- a ativação interna de cada neurônio j ($j = 1,\ldots,N$) é dada por

$$u_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N} w_{ji} y_i - \theta_j ,$$

onde θ_j é um limiar fixo aplicado externamente ao neurônio j. Tomando, agora, y_j como o estado do neurônio j ($j = 1,\ldots,N$), este será modificado de acordo com a função de ativação dada pela função sinal:

$$y_j = \mathrm{sgn}(u_j) = \begin{cases} +1 & \text{se } u_j > 0 \\ -1 & \text{se } u_j < 0 \end{cases}$$

- por convenção, se $u_j = 0$, o estado y_j do neurônio permanece em seu valor anterior, seja ele –1 ou +1.
- assim, um ponto fixo estável $\bar{y}_\mu$ da rede de Hopfield é um estado de convergência a partir de uma condição inicial que pertence à sua base de atração.
- portanto, estamos considerando o caso $t \rightarrow \infty$ e estamos fazendo a inclinação da função sigmoidal $\varphi_j(\cdot)$ tender a infinito, para reproduzir a função sinal.
- a partir deste ponto, vamos apresentar as duas fases de implementação da rede de Hopfield como memória associativa (endereçável por conteúdo). A primeira fase corresponde à síntese da dinâmica não-linear com base na definição dos pesos da rede de Hopfield (memorização). A segunda fase corresponde à restauração de uma dentre as memórias armazenadas (estados de equilíbrio), a partir de um padrão de entrada (estado inicial).

8.2 Fase 1: Armazenagem de padrões (memórias fundamentais)

- suponha que se queira armazenar um conjunto de p padrões dados por vetores N-dimensionais (palavras binárias), denotados por $\{\xi_\mu \mid \mu=1,\ldots,p\}$.
- para tanto, basta definir os pesos pela aplicação da regra de Hebb generalizada, ou regra do produto externo. Seja $\xi_{\mu i}$ o i-ésimo elemento do vetor ξ_μ, então o peso sináptico conectando o neurônio i ao neurônio j é definido por

$$w_{ji} = \frac{1}{N}\sum_{\mu=1}^{p} \xi_{\mu j}\xi_{\mu i}\,,$$

sendo que novamente toma-se $w_{jj} = 0$ ($j = 1,\ldots,N$).

- seja $\mathbf{W}$ a matriz $N \times N$ de pesos sinápticos, onde w_{ji} é o elemento da j-ésima linha e i-ésima coluna. Então, é possível expressar a regra do produto externo na forma:

$$\mathbf{W} = \frac{1}{N}\sum_{\mu=1}^{p} \xi_\mu \xi_\mu^T - \frac{p}{N}\mathbf{I}.$$

- observe que $\mathbf{W} = \mathbf{W}^T$, ou seja, $w_{ji} = w_{ij}$ ($i,j = 1,\ldots,N$).

8.3 Fase 2: Recuperação dos padrões (estados de equilíbrio estáveis)

- durante a fase de recuperação dos padrões armazenados (memórias), um vetor N-dimensional y é tomado como o estado inicial (condição inicial) da rede de Hopfield. Obviamente, os elementos de y assumem valores –1 ou +1.
- geralmente, este vetor y vai representar uma versão incompleta ou ruidosa da memória fundamental que foi armazenada na rede.
- o processo de recuperação da memória armazenada obedece a uma regra dinâmica denominada ajuste assíncrono. Um único neurônio j da rede é escolhido aleatoriamente para ter sua saída y_j (que agora está associada ao estado da rede) recalculada em função do valor de u_j.
- assim, o ajuste do estado da rede, de uma iteração para outra, é determinístico, mas a escolha do neurônio cujo estado será atualizado é aleatória.
- este ajuste assíncrono prossegue até que não haja mais mudanças de estado a processar, ou seja, até que a rede atinja um ponto de equilíbrio caracterizado por:

$$\bar{y}_j = \text{sgn}\left(\sum_{i=1}^{N} w_{ji}\bar{y}_i - \theta_j\right),\ j = 1,\ldots,N,$$

ou em notação matricial:

$$\bar{\mathbf{y}} = \text{sgn}(\mathbf{W}\bar{\mathbf{y}} - \theta).$$

- a rede de Hopfield sempre vai convergir para um ponto de equilíbrio se o ajuste for assíncrono.
- Se o ajuste fosse síncrono, ou seja, todos os neurônios tendo seus estados recalculados em paralelo, ciclos limites de até 2 pontos poderiam ser produzidos (BRUCK, 1990).

9 Regra de Hebb

- a regra de aprendizado de Hebb é a mais antiga e mais famosa regra de aprendizado, podendo também ser apresentada em duas partes, na forma:

1. se os dois neurônios localizados um em cada lado de uma conexão sináptica são ativados simultaneamente (de modo síncrono), então a intensidade da conexão é aumentada.
2. se os dois neurônios localizados um em cada lado de uma conexão sináptica são ativados de modo assíncrono, então a intensidade da conexão é reduzida.

- a 2ª parte da regra de Hebb não fazia parte de sua versão original, tendo sido introduzida posteriormente.
- a regra de Hebb pode ser interpretada como um mecanismo (interativo, local e dependente do tempo) de aumentar a eficiência sináptica em função da correlação existente entre as atividades pré- e pós-sináptica.
- na literatura, são utilizadas também as conexões anti-Hebbianas e não-Hebbianas.

10 Recapitulação

- não-linearidade é condição necessária para produzir múltiplos atratores no espaço de estados de sistemas dinâmicos.
- Hopfield resolveu parcialmente o seguinte problema: *dado um conjunto de estados específicos que devem estar associados a memórias fundamentais, como gerar um sistema dinâmico não-linear que apresente pontos de equilíbrio estável justamente nestes estados específicos?*
- se este sistema dinâmico não-linear puder ser sintetizado, então vai existir uma superfície de energia com mínimos locais nos referidos estados específicos, sendo que a dinâmica do sistema vai atuar no sentido de conduzir o estado inicial do sistema a um dos mínimos locais da superfície de energia (particularmente àquele em cuja base de atração se encontra a condição inicial).

11 A emergência de memória associativa

- para a rede neural de Hopfield considerada, com $w_{ji} = w_{ij}$, $w_{jj} = 0$ $(R_j \to \infty)$ e $\theta_j = 0$ ($i,j = 1,\dots,N$), a função de energia pode ser definida na forma:

$$E = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} w_{ji} y_i y_j = -\frac{1}{2}\mathbf{y}^T \mathbf{W}\mathbf{y}$$

onde $y_j = \text{sgn}(u_j) = \text{sgn}\left(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{N} w_{ji} y_i\right)$ (j=1,…,N).

- a mudança na função de energia ΔE, devido a uma mudança Δy_j no estado do neurônio j, é dada por:

$$\Delta E = -\Delta y_j \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{N} w_{ji} y_i = -\Delta y_j u_j$$

garantindo que a dinâmica da rede vai promover o decrescimento monotônico da função de energia no tempo.

Exemplo para $N = 3$:

- $E = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{3} w_{ji} y_i y_j$

- $E = -\frac{1}{2}\left[w_{21}y_1y_2 + w_{31}y_1y_3 + w_{12}y_2y_1 + w_{32}y_2y_3 + w_{13}y_3y_1 + w_{23}y_3y_2\right]$

- supondo que $\Delta y_2 \neq 0$:

$$\Delta E = -\frac{1}{2}\left[w_{21}y_1\Delta y_2 + w_{12}\Delta y_2 y_1 + w_{32}\Delta y_2 y_3 + w_{23}y_3\Delta y_2\right]$$

- que produz:

$$\Delta E = -\left[w_{21}y_1\Delta y_2 + w_{23}y_3\Delta y_2\right] = -\Delta y_2\left[w_{21}y_1 + w_{23}y_3\right] \Rightarrow \Delta E = -\Delta y_2 \sum_{\substack{i=1\\ i\neq 2}}^{3} w_{ji} y_i$$

- quando um estado de equilíbrio estável (ponto de mínimo local da função de energia) é atingido, não há como reduzir ainda mais a energia, fazendo com que o estado da rede fique <u>invariante frente à dinâmica</u>.
- assim, para garantir a emergência de memória associativa, duas condições devem ser satisfeitas:

1. as memórias fundamentais devem ser armazenadas como estados estáveis da rede;
2. estes estados estáveis correspondentes às memórias fundamentais devem ter uma base de atração de dimensão não-nula.

- existem uma associação direta entre a extensão da base de atração e a descorrelação das memórias.

12 Atratores espúrios

- quando a rede neural de Hopfield armazena K memórias fundamentais através do ajuste de seus pesos pela regra de Hebb generalizada, os estados estáveis presentes na superfície de energia <u>não vão se restringir aos estados associados às memórias fundamentais armazenadas</u>. Todos os estados estáveis não associados às memórias fundamentais armazenadas são denominados <u>atratores espúrios</u>.
- os atratores espúrios existem em virtude dos seguintes fatores:

1. a função de energia E é simétrica, no sentido de que os estados correspondentes ao reverso das memórias fundamentais armazenadas também são estados estáveis;
2. toda combinação linear de um número ímpar de estados estáveis também vai ser um estado estável (AMIT, 1989).
3. para um grande número K de memórias fundamentais, a função de energia vai produzir pontos de equilíbrio que não estão correlacionados com nenhuma das memórias fundamentais armazenadas na rede (inflexibilidade da superfície de energia).

13 Capacidade de memória da rede de Hopfield

- infelizmente, as memórias fundamentais utilizadas para gerar os pesos da rede de Hopfield, de acordo com a seguinte equação:

$$w_{ji} = \frac{1}{N}\sum_{\mu=1}^{p}\xi_{\mu j}\xi_{\mu i},$$

nem sempre conduzem a estados estáveis.

- desse modo, a possível existência de estados espúrios, aliada à possibilidade de instabilidade das memórias fundamentais, tendem a reduzir a eficiência da rede de Hopfield como uma memória endereçável por conteúdo.
- considere a ativação interna do neurônio j, dada na forma:

$$u_j = \sum_{i=1}^{N} w_{ji} y_i,$$

onde, para efeito de generalidade, estamos supondo agora que $w_{jj} \neq 0$.

- denominando x um estado genérico da rede, temos que:

$$u_j = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\mu=1}^{p}\xi_{\mu j}\xi_{\mu i}x_i = \frac{1}{N}\sum_{\mu=1}^{p}\xi_{\mu j}\sum_{i=1}^{N}\xi_{\mu i}x_i$$

- considere agora o caso especial em que o estado genérico x é tomado como uma das memórias fundamentais armazenadas na rede, por exemplo, ξ_ν:

$$u_j = \frac{1}{N}\sum_{\mu=1}^{p}\xi_{\mu j}\sum_{i=1}^{N}\xi_{\mu i}\xi_{\nu i} \Rightarrow u_j = \xi_{\nu j} + \frac{1}{N}\sum_{\substack{\mu=1\\ \mu\neq\nu}}^{p}\xi_{\mu j}\sum_{i=1}^{N}\xi_{\mu i}\xi_{\nu i}$$

- a parcela mais à esquerda, $\xi_{\nu j}$, é simplesmente o j-ésimo elemento da memória fundamental ξ_ν, constituindo o valor desejado (<u>sinal</u>) para u_j, já que a memória fundamental deve ser um estado estável. Este resultado justifica a necessidade da divisão por N na geração dos pesos.
- a parcela mais à direita, $\frac{1}{N}\sum_{\substack{\mu=1\\ \mu\neq\nu}}^{p}\xi_{\mu j}\sum_{i=1}^{N}\xi_{\mu i}\xi_{\nu i}$, é o <u>ruído</u> existente quando os padrões não são ortogonais, ou seja, quando $\sum_{i=1}^{N}\xi_{\mu i}\xi_{\nu i} \neq 0$.

- através de um estudo estatístico, supondo, dentre outros aspectos, que as memórias fundamentais são formadas por padrões gerados aleatoriamente, é possível mostrar que a relação sinal-ruído é dada aproximadamente por

$$\rho \cong \frac{N}{K}, \text{ para valores elevados de } K.$$

- com isso, o componente de memória fundamental ξ_ν será estável (em sentido probabilístico) se, e somente se, a relação sinal-ruído for suficientemente alta.

- valores sugeridos na literatura para ρ (repare que *K* é o número de memórias):

1. ρ = 7,25, ou $\frac{1}{\rho}$ = 0,138 (*K* = 138 quando *N* = 1000);

2. $\rho \geq 2\ln N \Rightarrow K \leq \frac{N}{2\ln N}$ ($K \leq 72$ quando $N = 1000$)

14 Extensões (Parte I)

- a rede neural de Hopfield apresentada anteriormente usa dinâmica discreta e toma o neurônio de McCulloch-Pitts como unidade básica. No entanto, um desempenho muito superior, quanto à capacidade de memória, pode ser obtido empregando funções de ativação contínuas e não-monotônicas (MORITA, 1993). Obviamente, como a função de ativação passa a assumir valores em um intervalo, é necessário aplicar a função sinal para recuperar a memória a partir da saída estabilizada da rede.
- o resultado de MORITA (1993) trás como conseqüência:

1. aumento da capacidade de memória de $\frac{N}{2\ln N}$ para 0,4*N*, onde *N* é o número de neurônios;
2. desaparecimento dos estados espúrios.

15 Extensões (Parte II)

- uma regra mais eficiente para definição dos pesos da rede de Hopfield convencional, em lugar da regra de Hebb generalizada, é a regra de projeção.
- ela tem a desvantagem de não apresentar uma motivação biológica, mas a vantagem de explorar as propriedades algébricas dos pontos de equilíbrio.
- ξ_μ será um ponto de equilíbrio se $\mathbf{W}\xi_\mu = \xi_\mu$, μ=1,…,K.
- seja $\mathbf{P} = [\xi_1 \quad \cdots \quad \xi_K]$, então temos que $\mathbf{WP} = \mathbf{P}$.
- uma solução para $\mathbf{W}$ é dada na forma: $\mathbf{W} = \mathbf{P}\left(\mathbf{P}^T\mathbf{P}\right)^{-1}\mathbf{P}^T$.
- para que exista $\left(\mathbf{P}^T\mathbf{P}\right)^{-1}$, basta que os vetores ξ_μ, μ=1,…,K, sejam linearmente independentes, pois esta condição garante que a matriz $\mathbf{P}$ tem posto completo.
- a matriz $\mathbf{P}^+ = \left(\mathbf{P}^T\mathbf{P}\right)^{-1}\mathbf{P}^T$ é denominada pseudo-inversa de $\mathbf{P}$ (Moore-Penrose).
- $\mathbf{W} = \mathbf{PP}^+$ é a matriz de projeção ortogonal de vetores do $\Re^N$ para o subespaço cuja base é o conjunto de vetores ξ_μ, μ=1,…,K.

16 Problemas de natureza combinatória

- são problemas que se enquadram entre aqueles de mais difícil solução com base nas ferramentas matemáticas de tratamento hoje disponíveis;
- <u>exemplo</u>: problema do caixeiro viajante (TSP) → dadas as localizações de um número específico de cidades (distribuídas em um plano), o problema é encontrar o menor percurso que se inicia e termina numa mesma cidade, tendo passado uma única vez por todas as outras cidades. É um problema de fácil formulação, mas para o qual não se conhece nenhum método que garanta a obtenção da solução ótima além do método exaustivo de testar todas as possibilidades e optar pela que produzir o menor percurso. Em virtude da explosão de percursos possíveis com o aumento no número de cidades, o método exaustivo torna-se computacionalmente intratável mesmo para problemas com um número reduzido de cidades (por exemplo, para 100 cidades, o número de percursos possíveis é da ordem de 10^{156}).

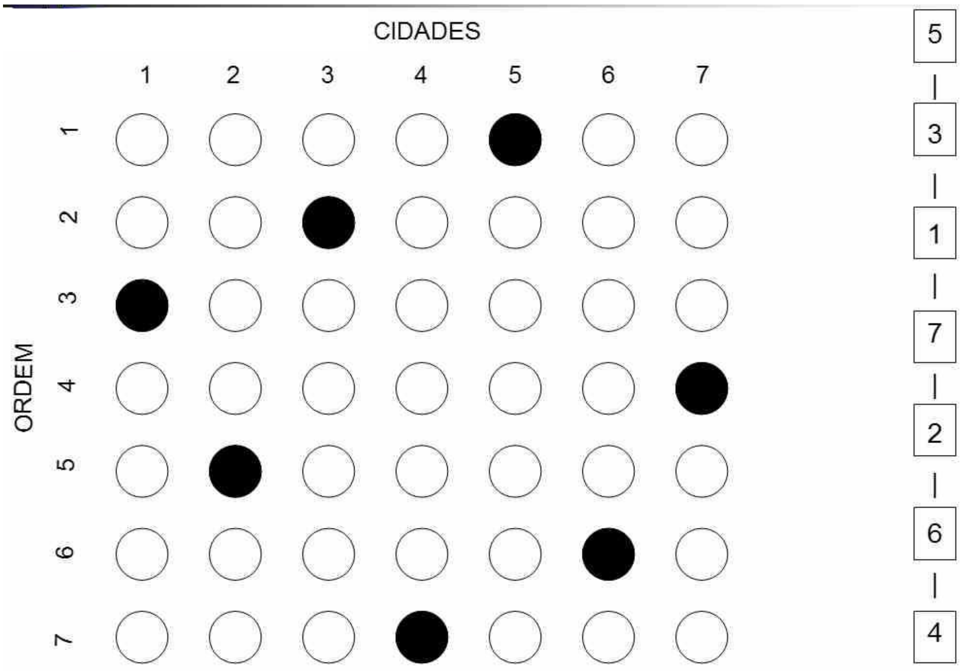
- em termos de complexidade computacional, o problema do caixeiro viajante é do tipo *NP*-completo.
- a aplicação pioneira de redes de Hopfield no tratamento do problema do caixeiro viajante (uma abordagem possivelmente extensível a outros problemas de natureza combinatória) se deu com o trabalho de HOPFIELD & TANK (1985). Basicamente, foi considerada uma rede neural analógica, com uma dinâmica representada na forma de um conjunto de equações diferenciais acopladas, na forma:

$$C_j \frac{du_j}{dt} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N} w_{ji}\varphi_i(u_i) - \frac{u_j}{R_j} - \theta_j,\ j = 1,\ldots,N.$$

- os pesos sinápticos da rede são determinados a partir das distâncias entre as cidades a serem visitadas e a solução ótima corresponde a um ponto de equilíbrio (mínimo local da superfície de energia) no espaço de estados da rede neural.

- ao mesmo tempo em que era necessário minimizar a função-objetivo, a qual avalia a distância total do percurso, também existiam restrições a serem atendidas, como passar ao menos uma vez em cada cidade.
- como a violação de uma única restrição torna a correspondente solução inválida, é necessário incorporar junto à função-objetivo termos que penalizam a violação de cada restrição. Além disso, esta função-objetivo estendida deve corresponder à superfície de energia da rede de Hopfield, de tal forma que a aplicação da dinâmica da rede conduza o estado sempre para pontos de menor energia. Com isso, uma possível representação da função de energia assume a forma:

$$E = E^{obj} + c_1 E_1^{restr} + \cdots + c_m E_m^{restr}$$



Interpretação do ponto de equilíbrio como uma solução para o problema do caixeiro viajante (repare que só há um neurônio ativo por linha e por coluna)

- além do desempenho da rede de Hopfield na solução do problema do caixeiro viajante não ser superior a outras técnicas de solução já disponíveis, a extensão desta abordagem para outros problemas de natureza combinatória, embora possível, não é imediata, e os resultados podem não ser promissores.
- na verdade, o potencial de aplicação de sistemas dinâmicos não-lineares junto a problemas de explosão combinatória é muito alto, embora a complexidade envolvida no processo de mapeamento do problema em uma superfície de energia do sistema dinâmico associado tem impedido a exploração completa desta ferramenta de solução.

17 Referências

AMIT, D.J. *Modeling Brain Function: The World of Attractor Neural Networks*. Cambridge University Press, 1989.

BHAYA, A., KASZKUREWICZ, E. & KOZYAKIN, V.S. Existence and Stability of a Unique Equilibrium in Continuous-Valued Discrete-Time Asynchronous Hopfield Neural Networks. *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 7, no. 3, pp. 620-628, 1996.

BINDER, P.M. & JENSEN, R.V. Simulating Chaotic Behavior with Finite State Machines. *Physical Review A*, vol. 34, pp. 4460-4463, 1986.

BRUCK, J. On the convergence properties of the Hopfield model. *Proc. of the IEEE*, vol. 78, pp. 1579-1585, 1990.

CARPENTER, G.A., COHEN, M.A. & GROSSBERG, A. Technical comments on "Computing with neural networks." *Science*, vol. 235, pp. 1226-1227, 1987.

COHEN, M.A. & GROSSBERG, S. Absolute stability of global pattern formation and parallel memory storage by competitive neural networks. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. 13, pp. 815-826, 1983.

ECKMANN, J.-P., KAMPHORST, S.O., RUELLE, D. & CILIBERTO, S. Liapunov Exponents From Time Series. *Physical Review A*, vol. 34, pp. 4971-4979, 1986.

HAYKIN, S. *Neural Networks – A Comprehensive Foundation*. Maxwell Macmillan International, 1994.

HOPFIELD, J.J. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the U.S.A.*, vol. 79, pp. 2554-2558, 1982.

HOPFIELD, J.J. Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the U.S.A.*, vol. 81, pp. 3088-3092, 1984.

HOPFIELD, J.J. & TANK, D.W. 'Neural' computation of decisions in optimization problems. *Biological Cybernetics*, vol. 52, pp. 141-152, 1985.

HOPFIELD, J.J. & TANK, D.W. Computing with neural circuits: A model. *Science*, vol. 233, pp. 625-633, 1986.

KHALIL, H.K. *Nonlinear Systems*. 2nd. edition, Prentice Hall, 1996.

KOLEN, J.F. *Exploring the Computational Capabilities of Recurrent Neural Networks*. Ph.D. Thesis, The Ohio State University, 1994.

MCCAFFREY, D.F., ELLNER, S., GALLANT, A.R. & NYCHKA, D.W. Estimating the Lyapunov Exponent of a Chaotic System With Nonparametric Regression. *Journal of the American Statistical Association*, vol. 87, no. 419, pp. 682-695, 1992.

MCCULLOCH, W.S. & PITTS, W. A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity. *Bulletin of Mathematical Biophysics*, vol. 5, pp. 115-133, 1943.

MEISS, J.D. Frequently Asked Questions about Nonlinear Science. Department of Applied Mathematics, University of Colorado at Boulder, http://amath.colorado.edu/faculty/jdm/faq-Contents.html.

MORITA, M. Associative memory with nonmonotonic dynamics. *Neural Networks*, vol. 6, pp. 115-126, 1993.

OTT, E. *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 1993.

PERETTO, P. *An Introduction to the Modeling of Neural Networks*. Cambridge University Press, 1992.

SLOTINE, J.-J. & LI, W. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, 1991.

VIDYASAGAR, M. *Nonlinear Systems Analysis*. 2nd. edition, Prentice Hall, 1993.

WOLF, A., SWIFT, J.B., SWINNEY, H.L. & VASTANO, J.A. Determining Lyapunov Exponents From a Time Series. *Physica D*, vol. 16, pp. 285-315, 1985.