BRUNO BORGES DE SOUZA

LISTA 4

Exercício 13.1

· Como $P_1 + P_2 = 1$, $P(\text{classe }1|x) = 0,5$, $P(\text{classe }1|x) = P(\text{classe }2|x)$.

Pela fórmula de Bayes:

$$P(\text{classe }1|x) = P(\text{classe }2|x)$$

$$\frac{P(x|\text{classe }1)P(\text{classe }1)}{P(x|\text{classe }1)P(\text{classe }1) + P(x|\text{classe }2)P(\text{classe }2)} = \frac{P(x|\text{classe }2)P(\text{classe }2)}{P(x|\text{classe }1)P(\text{classe }1) + P(x|\text{classe }2)P(\text{classe }2)}$$

$$\Rightarrow P(x|\text{classe }1)P_1 = P(x|\text{classe }2)P_2$$

Aplicando o logaritmo e expandindo a expressão, sabendo que $N(x|\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$:

$$\log P(x|\text{classe }1) + \log P_1 = \log P(x|\text{classe }2) + \log P_2$$

$$-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{1}{2}\log(2\pi\sigma_1^2) + \log P_1 = \frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2} - \frac{1}{2}\log(2\pi\sigma_2^2) + \log P_2$$

$$-\frac{x^2}{2\sigma_1^2} + \frac{2x\mu_1}{2\sigma_1^2} - \frac{\mu_1^2}{2\sigma_1^2} - x^2 + \frac{2x\mu_2}{2\sigma_2^2} - \frac{\mu_2^2}{2\sigma_2^2} - \frac{1}{2}\log(2\pi\sigma_1^2) + \log P_1 + \frac{1}{2}\log(2\pi\sigma_2^2) - \log P_2 = 0$$

Arrumando os termos:

$$\underbrace{\left(\frac{1}{\sigma_2^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}\right)}_{a} x^2 + \underbrace{2\left(\frac{\mu_1}{\sigma_1^2} - \frac{\mu_2}{\sigma_2^2}\right)}_{b} x + \underbrace{\left(\frac{\mu_2^2}{\sigma_2^2} - \frac{\mu_1^2}{\sigma_1^2} - \log\sigma_1^2 + 2\log P_1 + \log\sigma_2^2 - 2\log P_2\right)}_{c} = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Há duas soluções. Nem todas as soluções são razoáveis. Se a equação não tiver solução real, as gaussianas só se interceptarão num ponto da cauda, o que torna muito difícil fazer estimação.