

Estabilidade de Mittag-Leffler e Aplicações às redes neurais de Hopfield fracionárias

Bruno Borges de Souza



IME-USP



Instituto de Matemática e Estatística - USP

12 de setembro de 2019

- 1 Introdução
- 2 Justificativa
- 3 Cálculo fracionário
- 4 Estabilidade de Mittag-Leffler
- 5 Redes Neurais de Hopfield fracionárias
- 6 Estabilidade de Redes Neurais de Hopfield fracionárias
- 7 Conclusão

- 1 Introdução
- 2 Justificativa
- 3 Cálculo fracionário
- 4 Estabilidade de Mittag-Leffler
- 5 Redes Neurais de Hopfield fracionárias
- 6 Estabilidade de Redes Neurais de Hopfield fracionárias
- 7 Conclusão

- 1943 - McCulloch and Pitts [MP43] introduz as redes neurais como máquinas computacionais.
- 1958 - Frank Rosenblatt apresenta o perceptron.
- 1982 - o físico, biólogo e neurologista John Hopfield desenvolve uma arquitetura de rede neural recorrente associativa.
- 2008 - Boroomand e Menhaj [BM08], propuseram as Redes Neurais de Hopfield Fracionárias (FHNN).
- 2009 - Yan Li, YangQuan Chen, and Igor Podlubny propõe em 2009 um critério especial de estabilidade, a estabilidade de Mittag-Leffler.
- 2015 - Shuo Zhang, Yongguang Yu, and Hu Wang aplicam a estabilidade de Mittag-Leffler para FHNN's.

- 1 Introdução
- 2 Justificativa**
- 3 Cálculo fracionário
- 4 Estabilidade de Mittag-Leffler
- 5 Redes Neurais de Hopfield fracionárias
- 6 Estabilidade de Redes Neurais de Hopfield fracionárias
- 7 Conclusão

Estabilidade em Redes Neurais

A presença de estabilidade sempre implica alguma forma de coordenação entre as partes individuais do sistema (Haykin, 2009) Para aplicações em computação paralela e processamento de sinais, é necessário uma solução computável bem definida para todos os estados iniciais. (Zhang, 2015)

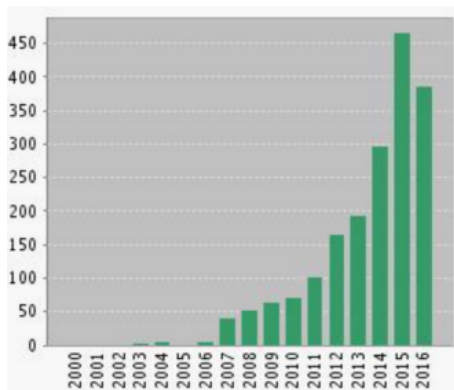
Cálculo fracionário em Redes Neurais

Como as derivadas fracionárias possuem melhor descrição de memória, oferecem uma vantagem com relação as derivadas de ordem inteira na modelagem de sistemas biológicos complexos, com comportamento não-linear e memória de longo prazo.

Publicações

É um tópico com um aumento considerável de publicações relacionados ao tema

Citações para FNN nos últimos 20 anos



Fonte: Shuo Zhang, YangQuan Chen, and Yongguang Yu. A survey of fractional-order neural networks. 2017

- 1 Introdução
- 2 Justificativa
- 3 Cálculo fracionário**
- 4 Estabilidade de Mittag-Leffler
- 5 Redes Neurais de Hopfield fracionárias
- 6 Estabilidade de Redes Neurais de Hopfield fracionárias
- 7 Conclusão

Integral de Riemann-Liouville

Vamos primeiramente introduzir uma motivação para a definição da integral de Riemann-Liouville. Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua por partes no intervalo $[0, \infty]$ e integrável em todo o subintervalo $[0, \infty)$ e $J^n f(t) = (JJ\dots J)f(t)$ a composição n vezes do operador integral

$$Jf(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$$

$$J^2 f(t) = JJf(t) = \int_0^t Jf(\tau_1) d\tau_1 = \int_0^t \int_0^{\tau_1} f(\tau) d\tau d\tau_1$$

$$J^2 f(t) = \int_0^t \int_0^{\tau_1} f(\tau) d\tau d\tau_1 = \int_0^t \int_{\tau}^t f(\tau) d\tau_1 d\tau = \int_0^t f(\tau)(t - \tau) d\tau$$

$$J^n f(t) := \int_0^t \int_0^{\tau_{n-1}} \dots \int_0^{\tau_1} f(\tau) d(\tau) d(\tau_1) \dots d(\tau_{n-1}),$$

$$J^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t f(\tau)(t - \tau)^{(n-1)} d\tau. \quad (1)$$

Definição (Integral de Riemann-Liouville)

Sejam $\alpha > 0$, $f(x)$ contínua por partes no intervalo $[0, \infty)$ e integrável em um subintervalo $[a, b]$. Então para $x \in [a, b]$ definimos a integral fracionária de Riemann-Liouville de ordem α como sendo a seguinte integral

$${}_a J_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(\tau)}{(x - \tau)^{1-\alpha}} d\tau \quad (2)$$

Teorema (Lei dos Expoentes)

[1] Sejam $\alpha, \beta > 0$ e $f(x)$ contínua por partes em $(0, \infty)$. Temos que a integral fracionária de Riemann-Liouville satisfaz a relação

$${}_a J_x^\alpha ({}_a J_x^\beta f(x)) = {}_a J_x^{\alpha+\beta} f(x)$$

Exemplo

Vamos calcular a integral de Riemann-Liouville de ordem α para a função $x^k, k > -1$: Fazendo a mudança de variável $u = \frac{s}{x}$, temos:

$$\begin{aligned} {}_0J_x^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{f(s)}{(x-s)^{1-\alpha}} ds \\ {}_0J_x^\alpha x^k &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x x^{\alpha-1} \left(1 - \frac{s}{x}\right)^{\alpha-1} s^k ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-u)^{\alpha-1} (xu)^k x du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 x^\alpha (1-u)^{\alpha-1} x^k u^k du \\ &= \frac{x^{\alpha+k}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^k du \end{aligned} \tag{3}$$

Exemplo

Usando a função beta em 3, temos

$${}_0J_x^\alpha x^k = \frac{x^{\alpha+k}}{\Gamma(\alpha)} B(k+1, \alpha) = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)} x^{\alpha+k} \quad (4)$$

Derivada de Riemann-Liouville

É baseada essencialmente no fato da derivada ser a operação inversa da integração na lei dos expoentes.

Definição (Derivada de Riemann-Liouville)

Sejam $\alpha > 0$ e n o menor inteiro maior que α . A derivada de Riemann-Liouville da função f é

$${}^{RL}D_x^\alpha f(x) = D^n [{}_aJ_x^{n-\alpha} f(x)] = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{f(\tau) d\tau}{(x-\tau)^{\alpha-n+1}} \quad (5)$$

na qual D^n é a derivada de ordem inteira e ${}_aJ_x^{n-\alpha}$ a integral de Riemann-Liouville

Exemplo

Usando a definição 2, vamos calcular a derivada de Riemann-Liouville de ordem α de $f(x) = x^k$, com $k > -1$. Usando a Equação 4, podemos escrever

$${}_0^{RL}D_x^\alpha f(x) = D^n[{}_0J_x^{n-\alpha}x^k] = \left[\frac{D^n(x^{n-\alpha+k})\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+n-\alpha+1)} \right] \quad (6)$$

Veja que

$$\begin{aligned} D^n(x^{n-\alpha+k}) &= (n-\alpha+k)(n-\alpha+k-1)\dots(n-\alpha+k-(n-1))x^{n-\alpha+k-n} \\ &= \frac{(n-\alpha+k)!}{(-\alpha+k)!}x^{-\alpha+k} = \frac{\Gamma(n-\alpha+k+1)}{\Gamma(-\alpha+k+1)}x^{-\alpha+k} \end{aligned}$$

Exemplo

Substituindo em 6, vamos ter

$${}_0^{RL}D_x^\alpha x^k = \frac{x^{k-\alpha}\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)} \quad (7)$$

Veja na Eq. 7, considerando $k = 0$, que ${}_0^{RL}D_x^\alpha x^0 = \frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$, ou seja, a derivada de Riemann-Liouville de $f(x) = 1$ não é zero.

- Em 1969, M. Caputo [Cap69] desenvolveu uma nova definição para derivada fracionário com o objetivo de resolver alguns problemas relacionados à viscoelasticidade.

Definição

Sejam $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$ o menor inteiro maior que α e $f(t)$ uma função integrável de ordem n . A derivada de Caputo da função f é

$${}_a^C D_x^\alpha f(x) = {}_a J_x^{n-\alpha} D^n f(x) \quad (8)$$

$${}_a^C D_x^\alpha f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x \frac{f^{(n)}(\tau)}{(x-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau, & \text{se } n-1 < \alpha < n \\ \frac{d^n}{dx^n} f(x), & \text{se } \alpha = n \end{cases} \quad (9)$$

- Quando $\alpha \rightarrow n$, a derivada de Caputo da função $f(x)$ torna-se a n -ésima derivada da função $f(x)$. Para mostrar isto, vamos assumir que $0 \leq n-1 < \alpha < n$ e que a função $f(x)$ tem derivada de ordem $n+1$ no intervalo $[a, b]$ para $b > a$. Integrando por partes temos

$$\begin{aligned} {}^C D_x^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(\tau)}{(x-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-f^{(n)}(\tau) \frac{(x-\tau)^{n-\alpha}}{n-\alpha} \Big|_a^x - \int_a^x -f^{(n+1)}(\tau) \frac{(x-\tau)^{n-\alpha}}{n-\alpha} d\tau \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} \left(f^{(n)}(a) x^{n-a} + \int_a^x f^{(n+1)}(\tau) (x-\tau)^{n-\alpha} d\tau \right) \end{aligned}$$

- Tomando o limite para $\alpha \rightarrow n$,
$$\lim_{\alpha \rightarrow n} {}^C D_x^\alpha f(x) = f^{(n)}(a) + f^{(n)}(\tau) \Big|_a^x = f^{(n)}(x).$$

Exemplo

Vamos calcular a derivada de ordem α , segundo Caputo, da função $f(x) = x^\mu$, $\mu > -1$ e $\mu \neq 0$. No caso em que μ é um número natural temos, para $\mu > n$

$$D^n x^\mu = \frac{\mu!}{(\mu - n)!} x^{\mu - n}$$

Usando a função gama, podemos escrever a expressão acima como

$$D^n x^\mu = \frac{\Gamma(\mu + 1)}{\Gamma(\mu - n + 1)} x^{\mu - n}$$

Do exemplo (3), temos que

$$J^\alpha x^{\mu - n} = \frac{\Gamma(\mu - n + 1)}{\Gamma(\mu - n + \alpha + 1)} x^{\mu - n - \alpha}$$

Exemplo

A partir disto podemos escrever

$$\begin{aligned} {}^C D_x^\alpha x^\mu &= J^{n-\alpha} [D^n x^n] = J^{n-\alpha} \left[\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-n+1)} x^{\mu-n} \right] \\ &= \left[\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\alpha+1)} x^{\mu-\alpha} \right] \end{aligned}$$

Definição

sejam $f_1(x)$ e $f_2(x)$ duas funções no intervalo $[a, b]$ e $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. As seguintes equações são asseguradas,

$${}_a^{RL}D_x^\alpha(f_1(x) + f_2(x)) = {}_a^{RL}D_x^\alpha f_1(x) + {}_a^{RL}D_x^\alpha(f_2(x)), \quad (10)$$

$${}_a^{RL}D_x^\alpha(c_1 f_1(x)) = c_1 {}_a^{RL}D_x^\alpha(f_1(x)) \quad (11)$$

$${}_a^CD_x^\alpha(f_1(x) + f_2(x)) = {}_a^CD_x^\alpha f_1(x) + {}_a^CD_x^\alpha(f_2(x)), \quad (12)$$

$${}_a^CD_x^\alpha(c_1 f_1(x)) = c_1 {}_a^CD_x^\alpha(f_1(x)). \quad (13)$$

.que podem ser demonstradas diretamente das propriedades de linearidade da integral.

- A derivada de ordem α é inversa à esquerda, mas não necessariamente inversa à direita de uma integral de ordem α .

Teorema

Sejam $\alpha > 0$ e f uma função integrável no intervalo $[a, b]$, então valem as seguintes igualdades

$${}^{RL}D_x^\alpha J_x^\alpha f(x) = f(x) \quad (14)$$

$$J_x^\alpha {}^{RL}D_x^\alpha f(x) = f(x) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{\Gamma(\alpha - k + 1)} x^{\alpha-k} D^{n-k} J^{n-\alpha} f(x)|_{x=a} \quad (15)$$

são válidos em todo intervalo $[a, b]$.

Inversa à direita da Derivada de Caputo

- A derivada de Caputo é inversa à esquerda de integral de Riemann-Liouville, ou seja,

$${}_a^C D_x^\alpha ({}_a J^\alpha f(x)) = f(x). \quad (16)$$

- Porém, de forma análoga à derivada de Riemann-Liouville, a inversa à direita da derivada de Caputo não é válida:

Teorema

$${}_a J^\alpha \left({}_a^C D_x^\alpha f(x) \right) = f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{D^k f(a)}{k!} (x-a)^k.$$

Relacionamento entre a derivada de Caputo e Riemann-Liouville

O seguinte teorema relaciona as derivadas de Riemann-Liouville e Caputo

Teorema

[2] *Seja $x > 0, \alpha \in \mathbb{R}, n - 1 < \alpha < n \in \mathbb{N}$. Então o seguinte relacionamento entre as derivadas de Riemann-Liouville e Caputo são asseguradas:*

$${}_a^C D_x^\alpha f(x) = {}_a^{RL} D_x^\alpha f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} f^{(k)}(0) \quad (17)$$

- Há muitas sugestões para interpretação do cálculo fracionário, que podem ser encontrados, por exemplo, em [Pod98], [Die10] e [Ric14].
- O núcleo da interpretação aqui usada é o conceito de memória.
- quando a saída de um sistema em cada momento depende apenas da entrada no tempo atual, tais sistemas são ditos sistemas sem memória.
- Por exemplo, considere um resistor de resistência R , obedecendo à Lei de Ohm $U(t) = RI(t)$.
- Por outro lado, quando o sistema tem que se lembrar de valores anteriores da entrada, a fim de determinar o valor atual da saída, tais sistemas são chamados de sistemas com memória.
- Agora suponha um capacitor com capacitância C . Neste caso, a tensão U entre as placas no instante t vale

$$U(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t I(\tau) d\tau,$$

onde $I(\tau)$ é a corrente que chega ao capacitor no instante τ .

- Para mostrar que as derivadas fracionárias possuem memória, vamos supor um função $Y(t)$, cujo valor em termos de $f(t)$ pode ser escrita da seguinte forma:

$$Y(t) = \int_0^t \frac{(t - \tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau) d\tau, \quad (18)$$

- isto é, $Y(t)$ pode ser vista como uma soma ponderada de energia que armazena a entrada anterior de função $f(t)$ Baseado na definição acima, tal sistema é um sistema com memória e em tais sistemas, a memória decai à taxa de $w(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$, pois
$$Y(t) = \int_0^t (w(t - \tau) f(\tau)) d\tau .$$



$${}_0^C D_t^\alpha Y(t) = {}_0^C D_t^\alpha J_t^\alpha f(t) = f(t).$$

Interpretação dos Terminais

- Vimos que uma característica particular da integral e derivadas fracionárias ${}_a J_t^\alpha f(t)$, ${}^R L D_t^\alpha$ e ${}_a^C D_t^\alpha$ é o uso do terminal a
- Suponha que esses operadores estão definidos no intervalo $[a, b]$, $a \leq t \leq b$. Seria possível definir estas derivadas com o limite superior b do intervalo, o qual seriam as derivadas fracionárias à direita de $f(t)$, como por exemplo

$${}^R L D_{b-}^\alpha f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_t^b (\tau - t)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau,$$

onde n é o menor inteiro maior que α .

$${}_a^C D_t^\alpha f(t)$$

$${}_t^C D_{b-}^\alpha f(t)$$

Derivada à Esquerda Derivada à Direita

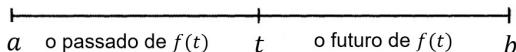


Figura: As derivadas à esquerda e à direita como operações no passado e futuro

- 1 Introdução
- 2 Justificativa
- 3 Cálculo fracionário
- 4 Estabilidade de Mittag-Leffler**
- 5 Redes Neurais de Hopfield fracionárias
- 6 Estabilidade de Redes Neurais de Hopfield fracionárias
- 7 Conclusão

Função de Mittag-Leffler

- Criada pelo matemático sueco Magnus Gustaf Mittag-Leffler, que a estudou em 1903.
- Esta função é uma generalização da função exponencial e desempenha papel importante no estudo das equações diferenciais de ordem fracionária.
- A função de Mittag-Leffler de um parâmetro é definida como

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (19)$$

onde $\alpha > 0$ e z uma variável que pode ser complexa ou real.

- A função de Mittag-Leffler de dois parâmetros, introduzida por Agarwal, é definida da seguinte maneira

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (20)$$

onde $\alpha, \beta > 0$.

- Veja que, para o caso em que $\alpha = 1$,

$$E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z,$$

- As funções seno e cosseno hiperbólicos são casos particulares da função de Mittag-Leffler:

$$E_{2,1}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh(z)$$

$$E_{2,2}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k+1)!} = \frac{\sinh(z)}{z}.$$

- A função de Mittag-Leffler é completamente monotônica para $0 < \alpha < 1$, ou seja,

$$(-1)^m \frac{d^m}{dx^m} E_\alpha(-x) \geq 0, \quad (21)$$

com $x > 0$, $0 < \alpha < 1$ e $m = 0, 1, 2, \dots$

- Esta propriedade foi primeiramente estudada por Pollard em 1948.

Lema

diethelm2010analysis) Considere a função de Mittag-Leffler de dois parâmetros $E_{\alpha,\beta}$ para $\alpha, \beta > 0$. A série de potências definida pela equação 20 é convergente para todo $z \in \mathbf{C}$.

A transformada de Laplace para o cálculo fracionário

- A transformada de Laplace é fundamental para o estudo de equações diferenciais de ordem fracionária.

Lema

A transformada de Laplace da integral de Riemann-Liouville é dada por
 $\mathcal{L}\{J_t^\alpha f(t)\} = s^{-\alpha} \mathcal{L}\{f(t)\}$

Lema

A transformada de Laplace da derivada de Caputo é dada por

$$\mathcal{L}\left\{{}^C D_t^\alpha f(t)\right\} = s^\alpha f(s) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)} s^{\beta-k-1} \quad (22)$$

sendo n o menor inteiro maior que $\alpha > 0$.

Lema

A transformada de Laplace da derivada fracionária de Riemann-Liouville é dada por

$$\mathcal{L}\{ {}^{RL}D_t^\alpha f(t) \} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} D^{k-n+\alpha} f(0) \quad (23)$$

onde n é o menor inteiro maior que $\alpha > 0$.

Lema

Seja $\alpha, \beta > 0$. A transformada de Laplace da função $z^{\alpha+\beta-1} \frac{d^k E_{\alpha,\beta}(\pm az^\alpha)}{d(\pm az^\alpha)^k}$,

$$\mathcal{L} \left\{ z^{\alpha+\beta-1} \frac{d^k E_{\alpha,\beta}(\pm az^\alpha)}{d(\pm az^\alpha)^k} \right\} = \frac{k! s^{\alpha-\beta}}{(s^\alpha \mp a)^{k+1}} \quad (24)$$

- Se substituirmos $k = 0$ em x:

$$\mathcal{L} \left\{ t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\pm at^\alpha) \right\} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha \mp a}.$$

Existência e Unicidade de equações diferenciais ordinárias em ordem fracionária

Teorema

[3] Seja $\alpha > 0$, $\alpha \notin \mathbb{N}$ e $n = \lceil \alpha \rceil$, onde $\lceil n \rceil$ é o menor inteiro maior que n . Além disso, seja $K > 0$, $h^* > 0$, e $b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}$. Defina

$$G := \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq t \leq h^*, x \in \mathbb{R} \text{ para } t = 0 \text{ e}$$

$$\left| t^{n-\alpha} x - \sum_{k=1}^n \frac{b_k t^{n-\alpha}}{\Gamma(\alpha-k+1)} \right| < K \text{ caso contrário}\},$$

e assuma que a função $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e limitada em G e satisfaz a condição de Lipschitz com respeito à segunda variável, isto é

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| < L|x_1 - x_2|.$$

Então a equação diferencial

$${}^{RL}D_t^\alpha x(t) = f(t, x(t)),$$

Teorema (continuação)

munida das condições iniciais

$${}^{RL}D_t^{\alpha-k}x(0) = b_k \quad (k = 1, 2, \dots, n-1), \quad \lim_{z \rightarrow 0^+} J^{n-\alpha}x(z) = b_n,$$

tem uma solução contínua unicamente definida $x \in (0, h]$ onde

$$h := \min \left\{ h^*, \tilde{h}, \left(\frac{\Gamma(\alpha+1)K}{M} \right)^{1/n} \right\},$$

com $M := \sup_{(t,z) \in G} |f(t,z)|$ e \tilde{h} sendo um número positivo arbitrário satisfazendo a restrição

$$\tilde{h} < \left(\frac{\Gamma(2\alpha - n + 1)}{\Gamma(\alpha - n + 1)L} \right)^{1/\alpha}.$$

Teorema

Seja $\alpha > 0$ e $n = \lfloor \alpha \rfloor$. Além disso, seja $x_0^{(0)}, \dots, x_0^{(n-1)} \in \mathbb{R}$, $K > 0$, e $h^* > 0$. Defina

$$G := \{(t, x) : t \in [0, h^*], \left| x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k x_0^{(k)}}{k!} \right| \leq K\},$$

e seja a função $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Também defina

$$M := \sup_{(t,z) \in G} |f(t, z)| \text{ e}$$

$$h = \begin{cases} h^*, & \text{se } M = 0 \\ \min \left\{ h^*, \left(\frac{K \Gamma(n+1)}{M} \right)^{1/\alpha} \right\} \end{cases}$$

Então existe uma função $x \in C[0, h]$ que resolve o problema de valor inicial

Teorema (continuação)

$${}_0^C D_t^\alpha x(t) = f(x, x(t)) \quad (25)$$

$$D^k x(t) = x_0^{(k)}, k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (26)$$

Teorema

Seja $0 < \alpha$ e n o menor inteiro maior que α . Além disso, seja $x_0^{(0)}, \dots, x_0^{(n-1)} \in \mathfrak{R}$, $K > 0$ e $h^ > 0$. Defina G como no Teorema 7 e $f : G \rightarrow \mathfrak{R}$ contínua e satisfazendo a condição de Lipschitz com respeito à segunda variável, ou seja,*

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|t_1 - t_2|,$$

com $L > 0$ constante. Então existe uma única solução definida em $h \in [0, h]$ resolvendo o P.V.I 25.

Lema (Riemann-Liouville)

Assuma que as hipóteses do Teorema 5 e seja $h > 0$. A função $x \in C(0, h]$ é solução da equação diferencial de Riemann-Liouville se e somente se é solução da equação integral de Volterra

$$x(t) = \sum_{k=1}^n \frac{b_k t^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha - k + 1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau. \quad (27)$$

Lema (Caputo)

Assuma as hipóteses do Teorema 7. A função $x \in C[0, h]$ é uma solução do P.V.I dado em 25, se e somente se é uma solução da equação integral de Volterra

$$x(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} x_0^{(k)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{(n-1)} f(\tau, x(\tau)) d\tau \quad (28)$$

Definição (Ponto de equilíbrio)

Considere a seguinte sistema não-autônomo de equações diferenciais ordinárias $\dot{x} = f(t, x(t))$ com $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$ aberto e f satisfazendo as condições usuais do teorema de Picard de existência e unicidade de soluções. Então \bar{x} é denominado ponto de equilíbrio de do sistema 5 se $f(t, \bar{x}) = 0$.

Definição (Estabilidade e Atratividade)

O ponto de equilíbrio \bar{x} do sistema 5 é denominado **estável** se $\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0, \|x(0) - \bar{x}\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - \bar{x}\| < \epsilon, \forall t \geq t_0$; e denominado **atrativo** quando $\exists \delta > 0$ tal que $\|x(0) - \bar{x}\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x}$. É denominado **assintoticamente estável** quando é simultaneamente estável e atrativo.

Estabilidade de Lyapunov

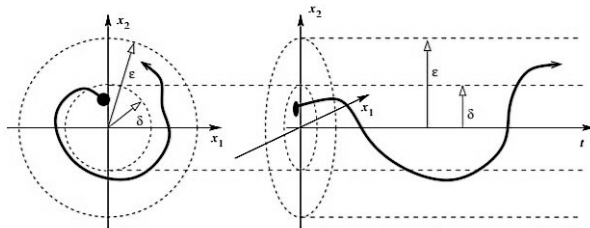
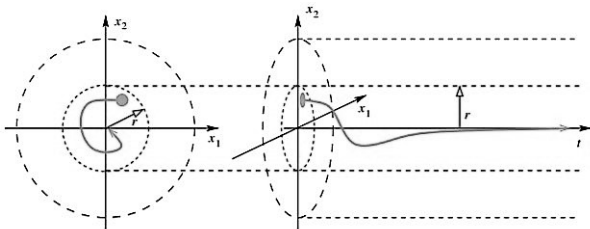


Figura: Noção geométrica de estabilidade em duas dimensões



Definição (Estabilidade Uniforme)

*O ponto de equilíbrio \bar{x} do sistema 5 é **uniformemente estável** quando é estável e o raio $\delta = \delta(t_0)$ não depende do instante t_0 considerado. De forma análoga, um ponto de equilíbrio é **uniformemente assintoticamente estável** quando é assintoticamente estável e o raio $\delta = \delta(t_0)$ não depende do instante t_0 .*

Definição (Estabilidade Exponencial)

*O ponto de equilíbrio \bar{x} do sistema 5 é **exponencialmente estável** se existem constantes positivas c , k e λ tais que*

$$\|x(t)\| \leq k\|x(t_0)\|e^{-\lambda(t-t_0)} \quad (29)$$

*para todo $\|x(t_0)\| < c$. É **globalmente exponencialmente estável** quando a desigualdade é satisfeita para todo $\|x(t_0)\|$.*

Definição (Função de Lyapunov)

Uma função $V : U \rightarrow \mathbb{R}$, onde U é uma vizinhança qualquer de $\bar{x} = 0$, é denominada função de Lyapunov para $\dot{x} = f(t, x(t))$ quando satisfaz as seguintes condições:

- 1 V é contínua em U e continuamente diferenciável em $U \setminus \{0\}$;
- 2 $V(0) = 0$; $V(x) > 0$, $\forall x \in U$, $x \neq 0$;
- 3 $\dot{V}(x) = \langle \nabla V(x), f(t, x(t)) \rangle = \nabla V(x)^* f(t, x(t)) \leq 0$, $\forall x \in U \setminus \{0\}$.

Teorema (Método Direto de Lyapunov)

Seja U uma vizinhança qualquer de $\bar{x} = 0$ e $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Lyapunov para o sistema $\dot{x} = f(t, x(t))$. Então, $\bar{x} = 0$ é um ponto de equilíbrio estável.

Princípio da Invariância de LaSalle

- Estabelece um critério para estabilidade assintótica dos pontos de equilíbrio para sistemas não-lineares autônomos. Suponha o seguinte sistema

$$\dot{x} = f(x(t)), \quad (30)$$

- com $x(t_0) = x_0$. Seja $\gamma(x_0) = \{x(t, t_0; x_0, t \geq 0)\}$ a semi-trajetória de 30 através de x_0 e

$$\omega(x_0) = \{x \in \mathcal{R}^n : \exists t_n \rightarrow \infty \mid x = \lim_{n \rightarrow \infty} x(t_n, t_0; x_0)\}$$

é o conjunto (invariante) ω -limite da semi-trajetória γ que passa por x_0 , que pode ser interpretado como o lugar em que a semi-trajetória γ que passa por x_0 chega. Então temos o seguinte teorema:

Teorema (Princípio da Invariância de LaSalle)

Seja $V : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$ uma função de classe C^1 tal que $\dot{V}(x(t)) \leq 0$. Então temos que

$$\omega(x_0) \subset E = \{x \in \mathcal{R}^n : \dot{V}(x(t)) = 0\}$$

Definição

A constante \tilde{x} é um ponto de equilíbrio do sistema de Riemann-Liouville

$$\begin{cases} {}^{RL}D_t^\alpha x(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_{t_0} \end{cases} \quad (31)$$

se e somente se $f(t, \tilde{x}) = 0$. e \tilde{x} é solução, ou seja, ${}^{RL}D_t^\alpha \tilde{x} = f(t, \tilde{x})$.

Definição (Ponto de Equilíbrio)

A constante \tilde{x} é um ponto de equilíbrio do sistema

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha x(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_{t_0} \end{cases} \quad (32)$$

onde $\alpha \in (0, 1)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $t_0 \geq 0$ o tempo inicial e $f : (0, +\infty] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua por partes em t satisfazendo Lipschitz local em x , se e somente se $f(t, \tilde{x}) = 0$, onde $\alpha \in (0, 1)$,

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $t_0 \geq 0$ o tempo inicial e $f : [0, +\infty] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

Estabilidade de Mittag-Leffler

- Em sistemas de ordem fracionária as soluções não satisfazem a propriedade clássica de fluxo de sistemas dinâmicos li2009mittag.
- Devido ao fato dos sistemas autônomos de ordem fracionária terem recursos de memória, a taxa de decaimento de tais sistemas é anômala, diferente de sistemas de ordem inteira.

Exemplo

Considere os dois sistemas seguintes com condição inicial $x(0)$ para $0 < \alpha < 1$.

$$\frac{d}{dt}x(t) = at^{a-1}, \quad (33)$$

$${}_0^C D_t^\alpha x(t) = at^{a-1}, 0 < \alpha < 1. \quad (34)$$

Podemos ver que as soluções analíticas dos dois sistemas são

$$t^a + x(0) e^{\frac{a\Gamma(a)t^{a+\alpha-1}}{\Gamma(a+\alpha)} + \frac{x(0)t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}},$$

- O sistema 33 é instável para qualquer $a \in (0, 1)$, pois no ponto de equilíbrio do sistema ($t = 0$), $\lim_{t \rightarrow \infty} (t^a + x(0)) = \infty$ mas o sistema 34 é estável no caso em que $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{a+\alpha-1}$ converge para zero, ou seja, para $0 < a < 1 - \alpha$.
- Isso mostra que, de fato, sistemas de ordem fracionária podem ter características de comportamento além dos sistemas de ordem inteira.

Princípio da Comparação fracionária

Lema (Princípio da Comparação para a derivada de Caputo)

Se ${}^C_{t_0}D_t^\alpha x(t) \geq {}^C_{t_0}D_t^\alpha y(t)$ e $0 < \alpha < 1$, $x(0) = y(0)$, então $x(t) \geq y(t)$.

- Demonstração. Suponha que ${}^C_{t_0}D_t^\alpha x(t) = f(t, x(t))$ e ${}^C_{t_0}D_t^\alpha y(t) = g(t, y(t))$. Então, por hipótese temos que $f(t, x(t)) \geq g(t, y(t))$.

$$y(t) = y(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{\alpha-1} g(\tau, y(\tau)) d\tau \quad (35)$$

$$x(t) = x(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau. \quad (36)$$

$$y(t) = x(t) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{\alpha-1} (g(\tau, x(\tau)) - f(\tau, x(\tau))) d\tau. \quad (37)$$

Desde que $0 < \tau < t \Rightarrow t - \tau > 0$, $0 < \alpha < 1 \Rightarrow \Gamma(\alpha) > 0$ e $g(t, x(t)) - f(t, x(t)) \leq 0$, concluímos de 37 que $y(t) \leq x(t)$.

Teorema

li2009mittag, li2010stability Se $x = 0$ o ponto de equilíbrio do sistema

$${}^C D_t^\alpha x(t) = f(t, x), \quad (38)$$

onde f é Lipschitz em relação a x por uma constante L e contínua por partes com relação a t , então a solução do sistema satisfaz

$$\|x(t)\| \leq \|x(t_0)\| E_\alpha(L(t - t_0)^\alpha), \text{ onde } \alpha \in (0, 1).$$

Estabilidade de Mittag-Leffler

- Como aponta Chen (2009) [Yan06], o decaimento da energia generalizada de um sistema dinâmico não precisa ser exponencial para que o sistema seja estável. O decaimento de energia pode ser de qualquer taxa, incluindo decaimento em lei de potência .
- Li et al. (2009) [LCP09] propõe a estabilidade de Mittag-Leffler, cujo objetivo é caracterizar a velocidade de decaimento da função de Lyapunov de uma maneira mais geral que inclua a estabilidade exponencial e a estabilidade em lei de potência como casos especiais

Definição (Estabilidade de Mittag-Leffler)

A solução do sistema 32 é dita ser Mittag-Leffler estável se

$$\|x(t)\| \leq (m(x(t_0))E_\alpha(-\lambda(t - t_0)^\alpha)^b, \quad (39)$$

onde t_0 é o tempo inicial, $\alpha \in (0, 1)$, $\lambda > 0$, $b > 0$, $m(0) = 0$, $m(x) > 0$, e $m(x)$ localmente Lipschitziana em $x \in B \in \mathbb{R}^n$ com constante de Lipschitz m_0 .

- A estabilidade de Mittag-Leffler implica estabilidade assintótica. Isso acontece por que no lado direito da desigualdade 39, $m(x(t_0))$ é finito e para $\alpha < 1$, $E_\alpha(-\lambda(t - t_0)^\alpha) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.
- A estabilidade de Mittag-Leffler mostra uma convergência mais rápida que a estabilidade exponencial próxima à origem, como pode ser visto a partir das duas derivadas

$$\left\{ \frac{d}{dt} e^{-\lambda t} \right\}_{t=0} = -\lambda e^{-\lambda t}|_{t=0} = -\lambda$$

$$\left\{ \frac{d}{dt} E_\alpha(-\lambda t^\alpha) \right\}_{t=0} = -\infty$$

onde $\alpha \in (0, 1)$ e $\lambda > 0$

- O lado direito de 39 é completamente monotônica para $0 < \alpha < 1$, e portanto maior ou igual a zero.

Definição (Estabilidade de Mittag-Leffler Generalizada)

li2010stability A solução do sistema 32 é Mittag-Leffler estável generalizado se

$$\|x(t)\| \leq [m(x_{t_0})(t - t_0)^{-\gamma} E_{\alpha, 1-\gamma}(-\lambda(t - t_0)^\alpha)]^b \quad (40)$$

- Na desigualdade 40, para $\lambda = 0$, temos

$$\|x(t)\| \leq \left[\frac{m(x_{t_0})}{\Gamma(1 - \gamma)} \right]^b (t - t_0)^{-\gamma b},$$

o que mostra que a estabilidade polinomial é um caso especial da estabilidade de Mittag-Leffler.

Teorema

li2010stability[Método Direto de Lyapunov para Sistemas Fracionários]
Seja $x = 0$ o ponto de equilíbrio do sistema 32 e $D \in \mathbb{R}^n$ um domínio contendo a origem. Seja $V(t, x(t)) : [0, \infty] \times D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável e localmente Lipschitziana com respeito a x tal que

$$\alpha_1 \|x\|^a \leq V(t, x) \leq \alpha_2 \|x\|^{ab}, \quad (41)$$

$${}_0^C D_t^\alpha V(t, x(t)) \leq -\alpha_3 \|x\|^{ab} \quad (42)$$

onde $t \geq 0, \alpha \in (0, 1), x \in B, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, a$ e b são constantes arbitrárias positivas. Então o ponto de equilíbrio $\bar{x} = 0$ é globalmente Mittag-Leffler estável.

Definição (Função Classe-K)

khalil2002nonlinear Uma função contínua $\alpha : [0, t) \rightarrow [0, \infty)$ é dita pertencer à classe-K se $\alpha(x) > 0$ para todo $x > 0$, é estritamente crescente e $\alpha(0) = 0$. Além disso, se $t = \infty$ e $\alpha(x) \rightarrow \infty$ quando $x \rightarrow \infty$, então α é uma função classe K_∞ .

Teorema

Seja $x = 0$ o ponto de equilíbrio do sistema 32 e $V(t, x(t)) : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Lyapunov, onde D é o domínio contendo a origem. Além disso, sejam α_1, α_2 e α_3 funções de classe K satisfazendo

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(t, x(t)) \leq \alpha_2(\|x\|) \quad (43)$$

$${}^C D_t^\alpha V(t, x(t)) \leq -\alpha_3(\|x\|), \quad (44)$$

onde $\alpha \in (0, 1)$. Então o ponto de equilíbrio do sistema 32 é assintoticamente estável.

- 1 Introdução
- 2 Justificativa
- 3 Cálculo fracionário
- 4 Estabilidade de Mittag-Leffler
- 5 Redes Neurais de Hopfield fracionárias**
- 6 Estabilidade de Redes Neurais de Hopfield fracionárias
- 7 Conclusão

Rede Neural de Hopfield

- Há basicamente dois tipos de redes neurais: estáticas (feedforward) e dinâmicas (recorrentes)
- As redes neurais estáticas podem ser interpretadas como operadores de transformação de representação, mas não são capazes de reutilizar a informação transformada
- Por outro lado, nas redes neurais dinâmicas, o tempo é representado pelo seu efeito real no processamento.
- A vantagem de uma rede neural recorrente é a maneira como ela armazena informação. Podemos citar como um exemplo a memória associativa, análoga à forma como um cérebro humano armazena informação. Baseia-se no fato de que a memória é endereçada através do seu conteúdo
- O padrão não corrompido é usado como um ponto de equilíbrio estável e suas versões ruidosas como sua bacia de atração.

Memória Associativa de Hopfield

- A rede de Hopfield pode ser vista como uma memória auto-associativa não-linear, que sempre converge para um dos padrões armazenados, em resposta à apresentação de uma versão incompleta ou com ruído daquele padrão.
- Os pontos estáveis do espaço de fase da rede são as memórias fundamentais ou estados protótipos da rede.
- Um padrão parcial apresentado à rede pode ser representado como um ponto inicial no espaço de fase.
- Desde que este ponto inicial esteja próximo ao ponto estável (dentro da sua bacia de atração), que representa o item a ser recuperado, o sistema deve evoluir no tempo até convergir para este estado memorizado.
- A rede de Hopfield é um sistema dinâmico cujo espaço de fase contém um conjunto de pontos estáveis representando as memórias fundamentais do sistema.

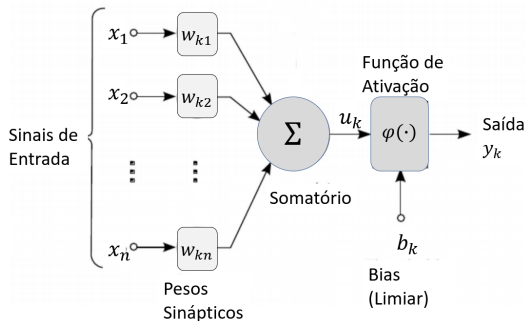


Figura: Modelo de um rede neural artificial

- A função $\varphi(\cdot)$ tem por objetivo modelar a propriedade da não-linearidade dos neurônios biológicos. É geralmente considerado monotonicamente crescente e diferenciável em $(-\infty, \infty)$, satisfazendo $\varphi(0) = 0$ e $\varphi'(z) \leq \varphi'(0)$, para $z \in \mathbb{R}$, e

$$\lim_{z \rightarrow \pm\infty} \varphi(z) = \pm 1$$

Rede Neural de Hopfield

- A equação de balanceamento para as correntes elétricas devido através do neurônio k é dado pela Lei de Kirchhoff:

$$I_{C_k} + I_{R_k} = I_{sin_k} + I_{apl_k}, \quad (45)$$

•

$$I_{sin_k}(t) = \sum_{j=1}^n w_{kj} x_j(t), \quad (46)$$

- Agora, seja v_k a voltagem do circuito RC (potencial de ativação) do neurônio k .

$$I_{C_k} = C_k \frac{dv_k(t)}{dt}, \quad (47)$$

onde C_k é a capacitância do neurônio k . A corrente resistiva é dada pela Lei de Ohm,

$$i_{R_k} = \frac{v_k(t)}{R_k}, \quad (48)$$

onde R_k é a resistência do neurônio k .

Rede Neural de Hopfield

- A saída do neurônio j pode ser escrita como $x_j = \varphi_j(v_j(t))$ e, substituindo as equações 46,47,48 e na equação 45 obtemos uma dinâmica no modelo, definida como a Rede Neural de Hopfield:

$$C_k \frac{dv_k}{dt} = -\frac{v_k(t)}{R_k} + \sum_{j=1}^n w_{kj} \varphi_j(v_j(t)) + I_{apl_k}(t), k = 1, \dots, m \quad (49)$$

Seja $v_k(t_0)$, $k = 1, \dots, n$ as condições iniciais da Rede de Hopfield.

- Usando uma notação simplificada para a equação 49, as equações de estado e saída do Hopfield contínuo com n neurônios são dadas como segue:

$$C_k \frac{dv_k}{dt} = \sum_{j=1}^n w_{kj} x_j - \frac{v_k}{R_k} + I_k \quad (50)$$

$$v_k = \frac{1}{\lambda} \varphi_k^{-1}(x_k). \quad (51)$$

onde $v_k(t)$ e $x_k(t)$ são a entrada e a saída do amplificador operacional

Rede Neural de Hopfield Fracionária

- Em 1994, Westerlund propôs um novo modelo de capacitor baseado na lei empírica de Curie que, para uma tensão de entrada geral $u(t)$, a corrente é :

$$i(t) = F({}_0^C D_t^\alpha u(t)) \quad (52)$$

onde $0 < \alpha < 1$ e $F \in \Re$ a capacitância fracionária.

Definição

Seja $0 < \alpha < 1$ e $v_k(t)$ uma função satisfazendo as hipóteses necessárias para aplicação da derivada de Caputo. As Equações de estado e saída da Rede Neural de Hopfield de ordem Fracionária é definido como:

$$F_k({}_0^C D_t^\alpha v_k(t)) = \sum_{j=1}^p w_{kj} x_j - \frac{v_k}{R_k} + I_k \quad (53)$$

$$v_k = \left(\frac{1}{\lambda} \right) \varphi_k^{-1}(x_k)$$

- Hopfield primeiramente definiu uma função a qual denominou como função de energia computacional

$$E = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_j^n w_{kj} x_k x_j - \sum_{k=1}^n x_k I_k + \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k} \int_0^{x_k} \varphi_k^{-1}(s) ds \quad (54)$$

- Hopfield demonstra que caso nenhum neurônio da rede faça realimentação em si mesmo e a matriz de pesos seja simétrica ($w_{kj} = w_{jk}$), $\frac{dE}{dt} \leq 0$.

$$\nabla_x^{(\alpha)} f(x) = \left({}^C D_{x_1}^{\alpha} f(x), {}^C D_{x_2}^{\alpha} f(x), \dots, {}^C D_{x_n}^{\alpha} f(x) \right) \quad (55)$$

Teorema

Para a FHNN definida em (53), se $\varphi_k^{-1}(x_k)$ é uma função contínua monótona crescente, e $F_k > 0$, então a função de energia da FHNN tem gradiente fracionário definido-negativo e os seguintes resultados são assegurados:

$$\nabla^{(\alpha)} E \leq 0, \nabla^{(\alpha)} E = 0 \text{ se e somente se } {}^C D_t^{\alpha} x_k = 0, k = 1, 2, \dots, n \quad (56)$$

Aplicação na identificação de Sistemas

- Reynold et al indicam como aplicar uma rede Hopfield ao problema de identificação linear de sistemas.
- Medindo entradas, variáveis de estado e derivadas temporais de variáveis de estado, eles apresentaram um procedimento para programar uma rede de Hopfield.
- Os estados dos neurônios dessa rede convergem para os valores dos parâmetros do sistema, que devem ser identificados. Em boroomand2008fractional, o autor usa a rede de Hopfield fracionária

$${}^C D_t^\alpha v_k(t) = \sum_{k=0}^n w_{kj} \frac{1}{2} \left(1 + \tanh \left(\lambda \frac{v_k(t)}{v_0} \right) \right) + I_k$$

para o procedimento de Hopfield e Tank, demonstrando sua eficácia ao mostrar que tal rede também converge para os valores de parâmetros do sistema considerado.

- 1 Introdução
- 2 Justificativa
- 3 Cálculo fracionário
- 4 Estabilidade de Mittag-Leffler
- 5 Redes Neurais de Hopfield fracionárias
- 6 Estabilidade de Redes Neurais de Hopfield fracionárias**
- 7 Conclusão

Algumas considerações sobre a estabilidade de Hopfield:

- A função de energia não é necessariamente uma função de Lyapunov, pois não é garantido que $E > 0$. conforme a definição exige;
- Ao analisar a estabilidade de uma sistema dinâmico no sentido de Lyapunov, deve-se conhecer o ponto de equilíbrio, o que não ocorre na estabilidade no sentido de Hopfield, que procura por esses pontos;
- Não se pode concluir que o ponto de equilíbrio seja o mínimo de E como na estabilidade de Lyapunov, pois na estabilidade de Hopfield poderia ser um ponto de reflexão,
- A presença de estabilidade sempre implica alguma forma de coordenação entre as partes individuais do sistema. Com relação às redes neurais de Hopfield em ordem fracionária, é necessário que haja uma solução computável bem definida para todos os possíveis estados iniciais.

Um exemplo de critério de estabilidade para as Redes de Hopfield

Muitas condições locais e globais para analisar a estabilidade de redes neurais dinâmicas foram introduzidas nas décadas de 80 e 90. Em 2000, Guan e Chen estabelece um conjunto de resultados para a estabilidade global das RNH's que são menos conservadores e mais gerais do que as anteriormente estudadas. Vamos considerar o sistema dado pela equação 50 com $\lambda = 1$,

$$C_k \frac{dv_k}{dt} = \sum_{j=1}^m w_{kj} x_j - \frac{v_k}{R_k} + I_k \quad (57)$$

$$x_k = \varphi_k(v_k), k = 1, \dots, n. \quad (58)$$

Aqui não assumiremos a simetria da matriz w_{kj} , somente que $\varphi \in C^1$, φ' é inversível (aqui denotaremos $v_k = \varphi_k^{-1}(x_k) := G(x_k)$), e satisfaz $0 < m_k \leq \varphi'_k \leq M_k < \infty$ uniformemente sobre o domínio de φ .

Teorema

Se a condição 1) ou 2) são satisfeitas, então o ponto de equilíbrio do sistema (57) é globalmente assintoticamente estável.

- 1) Existem constantes $p_k > 0$, $k = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$ tal que :

$$p_j \left(w_{jj} - \frac{1}{R_j M_j} \right) + \sum_{k=1, k \neq j}^n p_k |w_{kj}| < 0$$

2)

$$w_{kk} - \frac{1}{R_k M_k} + \sum_{j=1, j \neq k}^n |w_{kj}| < 0$$

Exemplo

Vamos considerar a seguinte RNH

$$\dot{v}_1(t) = -6v_1(t) + 2\sin(v_1(t)) + \sin(v_2(t)) - 3\sin(v_2(t)) + l_1$$

$$\dot{v}_2(t) = -5v_2(t) - 2\sin(v_1(t)) - 0.4\sin(v_2(t)) + \sin(v_3(t)) + l_2$$

$$\dot{v}_3(t) = -8v_3(t) + \sin(v_1(t) - 2.5\sin(v_2(t)) + 3.5\sin(v_3(t)) + l_3$$

$$v(t) = (v_1(t), v_2(t), v_3(t))^T$$

$$x_j = \varphi_j(v_j(t)) = \sin(v_j(t)), j = 1, 2, 3, \frac{1}{R_1} = 6, \frac{1}{R_2} = 5, \frac{1}{R_3} = 8, l_1 = \pi - 4, l_2 = 2, l_3 = 3 - 4\pi$$

- Aplicando os critérios do teorema (16), podemos escolher $M_j = 1$, já que $\sin(v_j(t))' \leq 1$ e com isso vemos facilmente que as duas condições são satisfeitas, demonstrando que o único ponto de equilíbrio do sistema, $v_t^* = (\frac{\pi}{6}, 0, \frac{\pi}{2})^T$, é globalmente estável

Solução gráfica

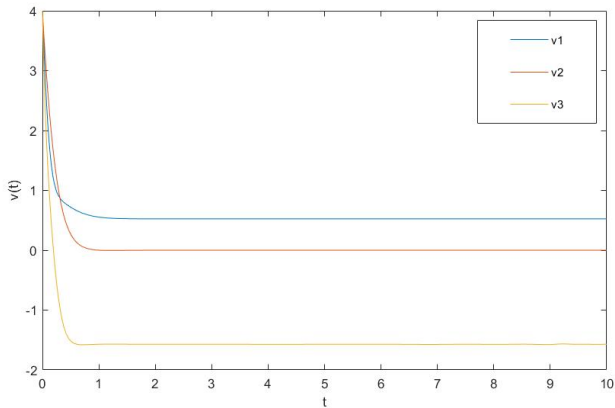


Figura: Solução da RNH do exemplo 8 com condição inicial $(4, 4, 4)^T$

[Método Direto de Lyapunov para Sistemas Fracionários

- Devemos encontrar uma função que satisfaça as condições 41 e 42. Mas, conforme comentado em zhang2015mittag, é muito difícil encontrar funções que satisfaçam tais condições

Teorema (Método Direto de Lyapunov para Sistemas Fracionários)

Seja $x = 0$ o ponto de equilíbrio dos sistema 32 e $D \in \mathbb{R}^n$ um domínio contendo a origem. Seja $V(t, x(t)) : [0, \infty] \times B \rightarrow \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável e localmente Lipschitziana com respeito a x tal que

$$\alpha_1 \|x\|^a \leq V(t, x) \leq \alpha_2 \|x\|^{ab}, \quad (59)$$

$${}_0^C D_t^\alpha V(t^+, x(t^+)) \leq -\alpha_3 \|x\|^{ab} \text{ (Quase sempre assegurado)} \quad (60)$$

onde $t \geq 0, \alpha \in (0, 1), x \in B, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, a$ e b são constantes arbitrárias, \dot{V} é contínua por partes e $V(t^+, x(t^+)) := \lim_{\tau \rightarrow t^+} V(\tau, x(\tau))$ positiva. Então o ponto de equilíbrio $x = 0$ é globalmente Mittag-Leffler estável.

Com o objetivo de construir uma função de Lyapunov apropriada, o Teorema 18 sobre uma desigualdade para a derivada de Caputo será fundamental.

Teorema

Se $h(t) \in C^1([0, +\infty))$, a seguinte desigualdade é quase sempre assegurada em todo lugar,

$${}^C D_t^\alpha |h(t^+)| \leq \operatorname{sgn}(h(t)) {}^C D_t^\alpha h(t), 0 < \alpha < 1, \quad (61)$$

onde, $h(t^+) := \lim_{\tau \rightarrow t^+} h(\tau)$ e $\operatorname{sgn}(h(t))$ é o sinal da função $h(t)$.

- Considere a RNHF da equação 53

$${}^C D_t^\alpha v_k(t) = -a_k v_k(t) + \sum_{j=1}^n b_{kj} \varphi_j(v_j(t)) + I_k(t) \quad (62)$$

onde $a_k = \frac{1}{R_k F_k}$, $b_{kj} = \frac{w_{kj}}{F_k}$ e I_k denota a corrente plicada exteriormente que pode ou não depender do tempo.

Teorema (Estabilidade de Mittag-Leffler para RNHF com entradas externas contantes)

Considere as seguintes suposições a respeito do sistema: (A1) As funções de ativação são contínuas e Lipschitzianas em \mathbb{R} com constante de Lipschitz $L_j > 0$, ou seja

$$|f_j(v_1) - f_j(v_2)| \leq L_j |v_1 - v_2|$$

.que assegura a existência e unicidade das soluções.

(A2) Existe constantes positivas $c_k (k = 1, \dots, n)$ tal que

$$c_k = a_k - \sum_{j=1}^n |b_{jk}| L_k > 0. \quad (63)$$

Sob estas condições, o sistema de Hopfield é globalmente Mittag-Leffler estável.

Estabilidade de Mittag-Leffler para RNHF com entradas externas dependentes do tempo

- No caso em que o sistema tenha I_k dependente do tempo, tal sistema torna-se não-autônomo e talvez não tenha nenhum ponto de equilíbrio.

Teorema (Estabilidade de Mittag-Leffler para RNHF com entradas externas dinâmicas)

zhang2015mittag Suponha que as condições (A1) e (A2) do Teorema 19 são satisfeitas para o sistema com I_k limitado por M_k e dependente do tempo. Neste caso, o sistema é uniformemente estável e existe $T \geq t_0$ tal que para todo $t \geq T$ e qualquer solução $v(t)$,

$$\|v(t)\| \leq \frac{W}{c} + \epsilon, \quad (64)$$

onde $c = \min\{c_1, \dots, c_n\}$, $W = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n (|b_{kj}| |\varphi_k(0)| + M_k)$ e $0 < \epsilon \ll 1$.

Exemplo

Vamos considerar agora a RNH do exemplo 8 com a diferença da derivada ser fracionária,

$$\begin{aligned} {}^C_0 D_t^\alpha v_1(t) &= -6v_1(t) + 2\sin(v_1(t)) + \sin(v_2(t)) - 3\sin(v_3(t)) + I_1 \\ {}^C_0 D_t^\alpha v_2(t) &= -5v_2(t) - 2\sin(v_1(t)) - 0.4\sin(v_2(t)) + \sin(v_3(t)) + I_2 \\ {}^C_0 D_t^\alpha v_3(t) &= -8v_3(t) + \sin(v_1(t)) - 2.5\sin(v_2(t)) + 3.5\sin(v_3(t)) + I_3 \end{aligned} \quad (65)$$

Supondo as entradas $I_1 = \pi - 4$, $I_2 = 2$ e $I_3 = 3 - 4\pi$, ou seja, entradas constantes, as condições (A1) e (A2) do Teorema 19 são verificadas facilmente. Então, o único ponto de equilíbrio desse sistema é globalmente Mittag-Leffler estável, como pode ser verificado para diferentes valores de α .

Exemplo

Agora, suponha entradas externas dependentes do tempo,

$I_1(t) = 0.8 \cos(t)$, $I_2(t) = -0.2 \sin(t)$ e $I_3(t) = \frac{t-1}{t+1}$. As condições (A1) e (A2) ainda são asseguradas e, de acordo com o Teorema 20, o sistema é uniformemente estável. Então existe um tempo $T > t_0$ tal que $|v_k(t)| \leq \|x(t)\| \leq \frac{W}{C} + \epsilon$. Como $|I_k| \leq M_k$, podemos escolher $M_1 = 0.8$, $M_2 = 0.2$ e $M_3 = 1$ e

$$W = \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^3 (|b_{ij}| |\sin(0)| + M_k) = 2$$

$$c_1 = 6 - \sum_{j=1}^3 |b_{j1}| = 5, c_2 = 5 - \sum_{j=1}^3 |b_{j2}| = 3.1, c_3 = 8 - \sum_{j=1}^3 |b_{j3}| = 6.5,$$

o que leva a $|v_k(t)| \leq 0.65$ supondo $\epsilon = 0.01$. Com diferentes valores para α e com condição inicial $(4, 4, 4)^T$, a figura 12 mostra que, para $T > 5$ por exemplo, todas as soluções satisfazem $|v_k| \leq 0.5$, $k = 1, 2, 3$.

Solução gráfica

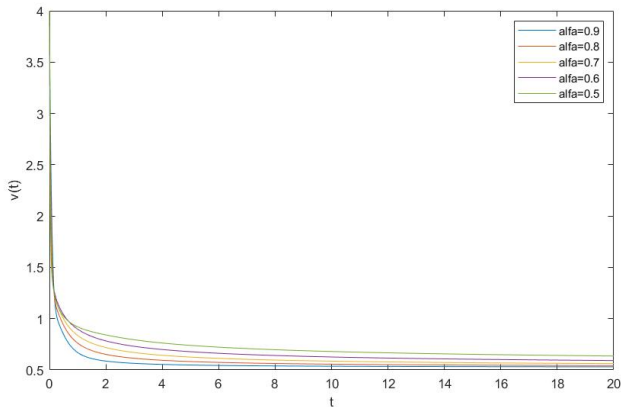


Figura: solução da RNHF 12 com condição inicial $(4, 4, 4)^T$ para os valores de $\alpha = 0.9, 0.8, 0.7, 0.6$ e 0.5 em cada uma das coordenadas de $v(t) = [v_1(t), v_2(r), v_3(t)]^T$.

Solução gráfica

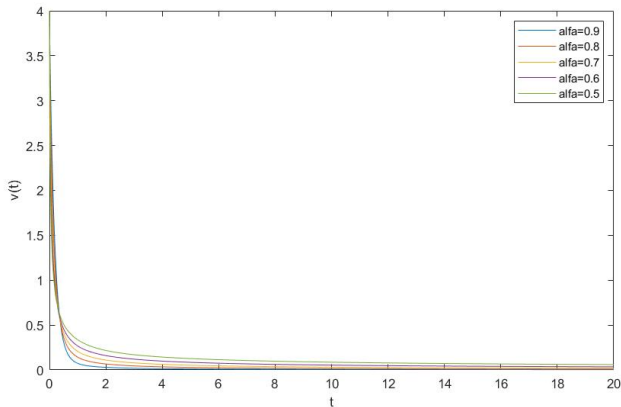


Figura: solução da RNHF 12 com condição inicial $(4, 4, 4)^T$ para os valores de $\alpha = 0.9, 0.8, 0.7, 0.6$ e 0.5 em cada uma das coordenadas de $v(t) = [v_1(t), v_2(r), v_3(t)]^T$.

Solução gráfica

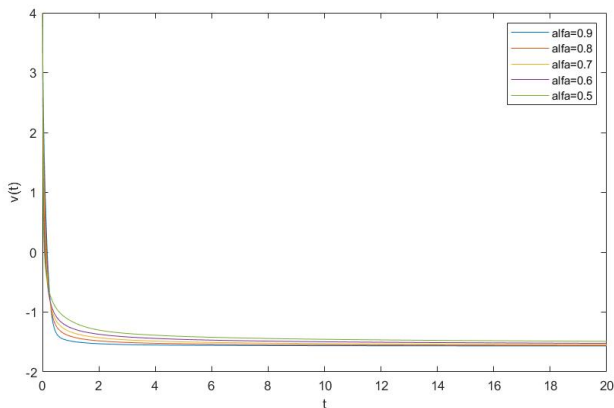


Figura: solução da RNHF 12 com condição inicial $(4, 4, 4)^T$ para os valores de $\alpha = 0.9, 0.8, 0.7, 0.6$ e 0.5 em cada uma das coordenadas de $v(t) = [v_1(t), v_2(r), v_3(t)]^T$.

Solução gráfica

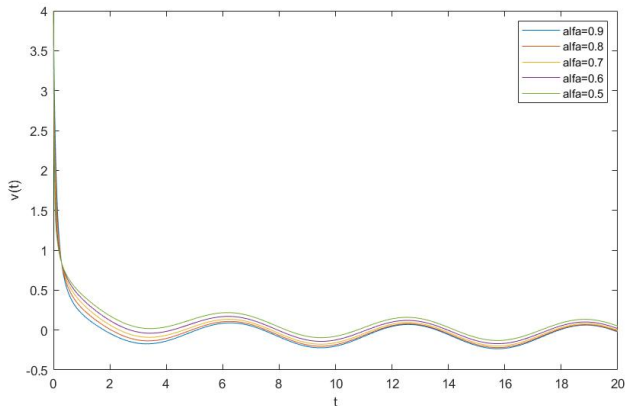


Figura: solução da RNHF 12 com condição inicial $(4, 4, 4)^T$ para os valores de $\alpha = 0.9, 0.8, 0.7, 0.6$ e 0.5 em cada uma das coordenadas de $v(t) = [v_1(t), v_2(r), v_3(t)]^T$.

Solução gráfica

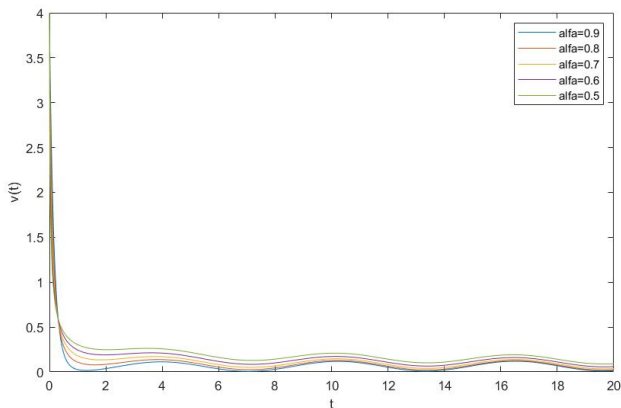


Figura: solução da RNHF 12 com condição inicial $(4, 4, 4)^T$ para os valores de $\alpha = 0.9, 0.8, 0.7, 0.6$ e 0.5 em cada uma das coordenadas de $v(t) = [v_1(t), v_2(r), v_3(t)]^T$.

Solução gráfica

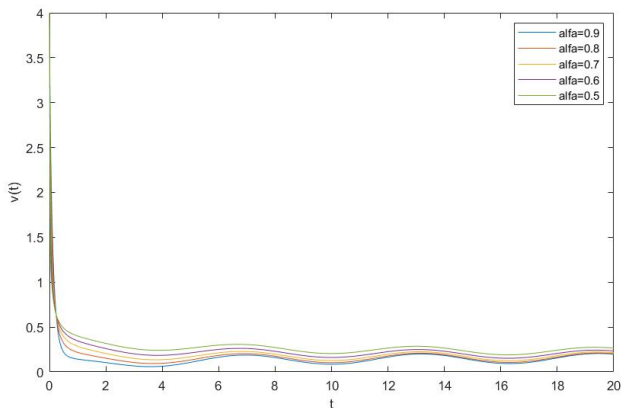


Figura: solução da RNHF com condição inicial $(4, 4, 4)^T$ e constantes externas dependentes do tempo para os valores de $\alpha = 0.9, 0.8, 0.7, 0.6$ e 0.5 em cada uma das coordenadas de $v(t) = [v_1(t), v_2(r), v_3(t)]^T$.

- 1 Introdução
- 2 Justificativa
- 3 Cálculo fracionário
- 4 Estabilidade de Mittag-Leffler
- 5 Redes Neurais de Hopfield fracionárias
- 6 Estabilidade de Redes Neurais de Hopfield fracionárias
- 7 Conclusão**

- Apresentamos inicialmente as principais propriedades das derivadas e integrais fracionárias com a interpretação de Caputo e Riemann-Liouville.
- Expomos uma interpretação física para essas derivadas, baseada no conceito de memória de um sistema, e estudamos ferramentas necessárias para o estudo das equações diferenciais ordinárias fracionárias,
- Neste trabalho mostramos um critério de estabilidade proposto em 2009, a estabilidade de Mittag-Leffler, que tem a estabilidade em lei de potência e exponencial como casos particulares. A partir disto, deduziu-se uma extensão do método direto de Lyapunov para sistemas de ordens não inteiras.

- Uma condição suficiente de estabilidade de Mittag-Leffler para redes neurais Hopfield de ordem fracionária com entrada constante é dada. E a estabilidade uniforme de redes neurais Hopfield de ordem fracionária com entrada dependente do tempo foi analisada e discutida.
- Sobre a rede de Hopfield fracionária, ainda é um tópico de pesquisa muito recente e promissor com relação à sua dinâmica e comportamento dos pontos de equilíbrio e, devido ao fato de modelos de ordem fracionária possuírem melhor descrição de memória, possíveis aplicações futuras podem demonstrar sua efetividade em comparação às redes de Hopfield em ordem inteira.
- uma extensão natural deste trabalho seria estudar critérios de estabilidade de redes neurais fracionárias com mais de um ponto de equilíbrio e abordar redes neurais de Hopfield fracionárias atrasadas e impulsivas, já que tais redes podem sofrer perturbações impulsivas que podem afetar comportamentos dinâmicos dos sistemas, assim como atrasos de tempo que é inevitável na prática e capaz de causar oscilações ou instabilidades em sistemas dinâmicos.



Igor Podlubny.

Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications, volume 198.

Elsevier, 1998.



Rudolf Gorenflo and Francesco Mainardi.

Essentials of fractional calculus.

2000.



Kai Diethelm.

The analysis of fractional differential equations: An application-oriented exposition using differential operators of Caputo type.

Springer Science & Business Media, 2010.

Referências II



Kenneth S Miller and Bertram Ross.

An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations.

1993.



Stefan G Samko, Anatoly A Kilbas, and Oleg I Marichev.

Fractional integrals and derivatives: theory and applications.

1993.



Eugene Butkov.

Física matemática.

Livros Técnicos e Científicos, 1988.



Michele Caputo.

Linear models of dissipation whose q is almost frequency independent—ii.

Geophysical Journal International, 13(5):529–539, 1967.



Rubens de Figueiredo Camargo.
Cálculo Fracionário e Aplicações.
PhD thesis, Unicamp, 2009.



JUNIOR CESAR ALVES SOARES.
Cálculo Fracionário e as Equações de Evolução.
PhD thesis, Unicamp, 2016.



Mohammad Amirian Matlob and Yousef Jamali.
The concepts and applications of fractional order differential calculus
in modelling of viscoelastic systems: A primer.
arXiv preprint arXiv:1706.06446, 2017.



Herrmann Richard.
Fractional calculus: an introduction for physicists.
World Scientific, 2014.

 Yan Li, YangQuan Chen, and Igor Podlubny.

Mittag-leffler stability of fractional order nonlinear dynamic systems.
Automatica, 45(8):1965–1969, 2009.

 P. Humbert and R.P.Agarwal.

Sur la fonction de mittag-leffler et quelques unes de ses
generalizations.
Bull. Sci. Math., (Ser.II), 45:180–185, 1953.

 Harry Pollard.

The completely monotonic character of the mittag-leffler function (-).
Bulletin of the American Mathematical Society, 54(12):1115–1116,
1948.

 Bijnan Bandyopadhyay and Shyam Kamal.

Solution, stability and realization of fractional order differential equation.

In Stabilization and Control of Fractional Order Systems: A Sliding Mode Approach, pages 55–90. Springer, 2015.

 AA Kilbas and JJ Trujillo.

Differential equations of fractional order: methods results and problem—i.

Applicable Analysis, 78(1-2):153–192, 2001.

 S Samko, AA Kilbas, and DI Marichev.

Integrals and derivatives of the fractional order and some of their applications (armsterdam: Gordon and breach).
1993.



Aleksandr Mikhailovich Lyapunov.

The general problem of the stability of motion.

International journal of control, 55(3):531–534, 1992.



Jean-Jacques E Slotine, Weiping Li, et al.

Applied nonlinear control, volume 199.

Prentice hall Englewood Cliffs, NJ, 1991.



Yan Li, YangQuan Chen, and Igor Podlubny.

Stability of fractional-order nonlinear dynamic systems: Lyapunov direct method and generalized mittag–leffler stability.

Computers & Mathematics with Applications, 59(5):1810–1821, 2010.



Jocelyn Sabatier, Mathieu Moze, and Christophe Farges.

Lmi stability conditions for fractional order systems.

Computers & Mathematics with Applications, 59(5):1594–1609, 2010.



Chen Yangquan.

Ubiquitous fractional order controllers.

In Proceedings of the 2nd IFAC Symposium on Fractional Derivatives and Applications (IFAC FDA06, Plenary Paper), pages 19–21, 2006.



Hassan K Khalil and JW Grizzle.

Nonlinear systems, volume 3.

Prentice hall Upper Saddle River, NJ, 2002.



Warren S McCulloch and Walter Pitts.

A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity.

The bulletin of mathematical biophysics, 5(4):115–133, 1943.



Simon Haykin.

Neural networks and learning machines, volume 3.

Pearson Upper Saddle River, 2009.



ROBERTJ McEliece, EDWARD C Posner, EUGENE Rodemich, and SANTOSH Venkatesh.

The capacity of the hopfield associative memory.

IEEE transactions on Information Theory, 33(4):461–482, 1987.



John P J Pinel.

Biopsychology.

Pearson Boston, MA, 2011.



Raluca Jessop.

Stability and Hopf Bifurcation Analysis of Hopfield Neural Networks with a General Distribution of Delays.

PhD thesis, University of Waterloo, 2011.



Madan Gupta, Liang Jin, and Noriyasu Homma.

Static and dynamic neural networks: from fundamentals to advanced theory.

John Wiley & Sons, 2004.



Alan L Hodgkin and Andrew F Huxley.

A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve.

The Journal of physiology, 117(4):500–544, 1952.



Arefeh Boroomand and Mohammad B Menhaj.

Fractional-order hopfield neural networks.

In *International Conference on Neural Information Processing*, pages 883–890, 2008.



Svante Westerlund and Lars Ekstam.

Capacitor theory.

IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation,
1(5):826–839, 1994.



Xiaoxin Liao, LQ Wang, and Pei Yu.

Stability of dynamical systems, volume 5.
Elsevier, 2007.



Rafael Fernandes Pinheiros.

O problema de Lurie e aplicações às redes neurais.

PhD thesis, Universidade de São Paulo, 2014.



Shuo Zhang, Yongguang Yu, and Hu Wang.

Mittag-leffler stability of fractional-order hopfield neural networks.

Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 16:104–121, 2015.



Donald O Hebb.

The organization of behavior: A neurophysiological approach, 1949.



Jinrong Hu, Jiliu Zhou, Yifei Pu, Yan Liu, and Yi Zhang.

A novel fraction-based hopfield neural networks.

In *Soft Computing in Information Communication Technology*, pages 143–150. Springer, 2012.



John J Hopfield and David W Tank.

“neural” computation of decisions in optimization problems.

Biological cybernetics, 52(3):141–152, 1985.



S Reynold Chu, Rahmat Shoureshi, and Manoel Tenorio.

Neural networks for system identification.

IEEE Control systems magazine, 10(3):31–35, 1990.



Peng Liu, Zhigang Zeng, and Jun Wang.

Multiple mittag-leffler stability of fractional-order recurrent neural networks.

IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 47(8):2279–2288, 2017.



Zhi-Hong Guan, Guanrong Chen, and Yi Qin.

On equilibria, stability, and instability of hopfield neural networks.

IEEE Transactions on Neural Networks, 11(2):534–540, 2000.



Hadi Delavari, Dumitru Baleanu, and Jalil Sadati.

Stability analysis of caputo fractional-order nonlinear systems revisited.

Nonlinear Dynamics, 67(4):2433–2439, 2012.



George E Andrews, Richard Askey, and Ranjan Roy.

Special functions, volume 71.

Cambridge university press, 2000.



Manuel A Duarte-Mermoud, Norelys Aguila-Camacho, Javier A Gallegos, and Rafael Castro-Linares.

Using general quadratic lyapunov functions to prove lyapunov uniform stability for fractional order systems.

Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 22(1-3):650–659, 2015.



Frank Rosenblatt.

The perceptron: a probabilistic model for information storage and organization in the brain.

Psychological review, 65(6):386, 1958.

 George F Luger and William A Stubblefield.

Artificial intelligence and the design of expert systems.

Benjamin-Cummings Publishing Co., Inc., 1990.

 Masahiro Nakagawa and Kazuyuki Sorimachi.

Basic characteristics of a fractance device.

IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences, 75(12):1814–1819, 1992.

 Michele Caputo.

Elasticita e dissipazione.

Zanichelli, 1969.

 Thomas J Anastasio.

The fractional-order dynamics of brainstem vestibulo-oculomotor neurons.

Biological cybernetics, 72(1):69–79, 1994.



Shuo Zhang, YangQuan Chen, and Yongguang yu.

A survey of fractional-order neural networks.

page V009T07A024, 08 2017.



Michael A Cohen and Stephen Grossberg.

Absolute stability of global pattern formation and parallel memory storage by competitive neural networks.

IEEE transactions on systems, man, and cybernetics, (5):815–826, 1983.



Allon Guez, Vladimir Protopopsecu, and Jacob Barhen.

On the stability, storage capacity, and design of nonlinear continuous neural networks.

IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 18(1):80–87, 1988.



Douglas G Kelly.

Stability in contractive nonlinear neural networks.

IEEE Transactions on Biomedical Engineering, 37(3):231–242, 1990.



Mauro Forti, A Liberatore, Stefano Manetti, and Mauro Marini.

On absolute stability of neural networks.

In *Proceedings of IEEE International Symposium on Circuits and Systems-ISCAS'94*, volume 6, pages 241–244. IEEE, 1994.



Antônio C. Roque.

Introdução à neurociência computacional.
2018.



JM Patin.

A very short proof of stirling's formula.

Amer. Math. Monthly, 96(1):41–42, 1989.

Referências XVII



William A Kirk and Brailey Sims.
Handbook of metric fixed point theory.
Springer Science & Business Media, 2013.



Geraldo Botelho, Daniel Pellegrino, and Eduardo Teixeira.
Fundamentos de análise funcional.
SBM, 2012.



Johannes Weissinger.
Zur theorie und anwendung des iterationsverfahrens.
Mathematische Nachrichten, 8(1):193–212, 1952.



Gary W Bohannan.
Analog fractional order controller in temperature and motor control applications.
Journal of Vibration and Control, 14(9-10):1487–1498, 2008.



RL Magin and M Oviaia.

Modeling the cardiac tissue electrode interface using fractional calculus.

Journal of Vibration and Control, 14(9-10):1431–1442, 2008.



Nicole Heymans.

Dynamic measurements in long-memory materials: fractional calculus evaluation of approach to steady state.

Journal of Vibration and Control, 14(9-10):1587–1596, 2008.



Predictor-corrector pece method for fractional differential equations.

<https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/32918-predictor-corrector-pace-method-for-fractional-differential-equations>

Accessed: 2019-05-30.



Kai Diethelm and Alan D Freed.

The fracpece subroutine for the numerical solution of differential equations of fractional order.

Forschung und wissenschaftliches Rechnen, 1999:57–71, 1998.



Brian N Lundstrom, Matthew H Higgs, William J Spain, and Adrienne L Fairhall.

Fractional differentiation by neocortical pyramidal neurons.

Nature neuroscience, 11(11):1335, 2008.



K Matsuoka.

On absolute stability of neural networks.

Transactions of the Institute of Electrical Communication Engineering, Japan, 74:536–542, 1991.

Estabilidade de Mittag-Leffler e Aplicações às redes neurais de Hopfield fracionárias

Bruno Borges de Souza



IME-USP



Instituto de Matemática e Estatística - USP

12 de setembro de 2019