BRUNO BORGES DE SOUZA

LISTA 1

Exercício 2.1 (Parte I)

· Seja uma matriz de adjacência A onde $[A]_{ij} = 1$ se os vértices de i até j são conectados e $[A]_{ij} = 0$ caso contrário:

· Pelo produto de matrizes, $[AA]_{ij} = [A^2]_{ij} = \sum_{r=1}^{m} a_{ir} a_{rj} = a_{i1} a_{1j} + \dots + a_{im} a_{mj}$

Neste caso, vemos que cada termo $[A^2]_{ij}$ conta quantos caminhos há entre i e j em tempo $k=2$, pois olhando o somatório vemos que é feita a soma de caminhos entre i e j, $a_{i1} a_{1j}, a_{i2} a_{2j}, \dots, a_{im} a_{mj}$.

· Vamos prosseguir por indução. Suponha que vale para $k-1$ e considere A^{k-1}.

· A quantidade de caminhos de comprimento $k-1$ conectando os vértices i, j é dado pelo valor que aparece na posição (i,j) da matriz. Para o comprimento k, temos:

$$A^k = [a_{ij}^{(k)}] \quad e \quad A^k = A^{k-1} \cdot A$$

$$A^k = [a_{ij}^{(k)}] \quad e \quad [a_{ij}^{(k)}] = \sum_{r=1}^{m} a_{ir}^{(k-1)} a_{rj}$$

· Cada $a_{ir}^{(k-1)}$ conta a quantidade de caminhos de comprimento $k-1$ ligando os vértices i e r e os elementos a_{rj} nos diz se há ou não caminhos entre r e j. Logo, cada elemento $[a_{ij}^{(k)}]$ de A^k nos diz quantos ~~elementos~~ caminhos de comprimento k existem ligando os vértices i e j.

· No enunciado do exercício, pede para mostrar que $[A^k]_{ij}$ representa o número de caminhos entre j e i no tempo k. O resultado é válido apenas se o grafo em questão for não-direcionado, pois neste caso $[A^k]$ é simétrica e $[A^k]_{ij} = [A^k]_{ji}$

BRUNO BORGES DE SOUZA

LISTA 1

Exercício 2.1 (Parte II)

- O algoritmo é simples: Calculamos $A^2, A^3, \ldots,$ até $[A^{(k)}]_{ij} \neq 0$.

Algoritmo do menor caminho

$k = 1$ e A = matriz adjacente, A_0 = matriz identidade;

While $([A]_{ij} = 0)$ do:

$A_k = A_{k-1} \cdot A$

$k = k + 1$

return $([A_k]_{ij})$ e k