BRUNO BORGES DE SOUZA

LISTA 5

Exercício 24.1

- Temos $h_t = R_\theta h_{t-1}$, $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

1. Se calcularmos os autovalores de R_θ, temos:

$$\det\begin{pmatrix} \cos\theta-\lambda & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + \underbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta - 1} = \cos\theta \pm i\sin\theta$$

Os autovalores só seriam reais se $\sin\theta = 0 \therefore \theta = \pi$ ou $\theta = 0$. Mas para qualquer outro valor que rotacionemos, os autovalores serão imaginários.

2. Isto já é explicado no exemplo 24.3. Já temos que $h_t = R_\theta h_{t-1}$, R_θ matriz de transição; para a matriz de emissão, pegamos a projeção tal que $V_t = [1 \;\; 0] h_t$. Os elementos V_t, $t = 1, \ldots, T$ descrevem uma senóide.

3. Temos:

$$\begin{cases} x_t = R_{11} x_{t-1} + R_{12} y_{t-1} & \text{ou } x_{t+1} = R_{11} x_t + R_{12} y_t \\ y_t = R_{21} x_{t-1} + R_{22} y_{t-1} & \hookrightarrow x_{t+1} = R_{11} x_t + R_{12}(R_{21} x_{t-1} + R_{22} y_{t-1}) \end{cases}$$

$$\hookrightarrow y_{t-1} = \frac{x_t - R_{11} x_{t-1}}{R_{12}} \rightarrow x_{t+1} = R_{11} x_t + R_{12}\left(R_{21} x_{t-1} + \frac{R_{22}}{R_{12}}(x_t - R_{11} x_{t-1})\right)$$

4. Como $h_t = \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix}$, numa senoide $V_t = x_t$. Como podemos expressar x_t em função de x_{t-1} e x_{t-2}, daí teria $V_t = \sum_{l=1}^{2} a_l V_{t-l} + \eta_t$, com os coeficientes AR dado em função dos elementos de R_θ.

5. A solução de $\ddot{x} = -\lambda x$ é $x(t) = c_2 \sin(t\sqrt{\lambda}) + c_1 \cos(t\sqrt{\lambda})$, o que também é uma senoide. A equação de diferenças de segunda ordem encontrada na etapa 3 dá solução em tempo discreto enquanto $\ddot{x} = -\lambda x$ dá a solução em tempo contínuo da senoide.