BRUNO BORGES DE SOUZA

LISTA 3

Exercício 9.6 (Moment Matching)

• Pela ideia do moment Matching, devemos corresponder os momentos empíricos m e S com os momentos da distribuição, dado por

$$\langle x \rangle = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \quad Var(x) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

• Fazendo $m = \langle x \rangle$, $Var(x) = S$. temos que simplesmente escrever α e β em função de m e S:

$$m = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \Rightarrow (\alpha+\beta)m = \alpha \text{ ou } \alpha = \frac{\beta m}{1-m} \Longleftrightarrow \beta = \alpha\frac{1-m}{m}$$

$$S = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} \Rightarrow S = \frac{\cancel{\alpha^2}\frac{1-m}{m}}{\cancel{\alpha^2}\left(1+2\frac{1-m}{m}+\left(\frac{1-m}{m}\right)^2\right)\left(\alpha+\alpha\frac{1-m}{m}+1\right)}$$

$$S = \frac{1-m}{\cancel{m}\left(\frac{\cancel{m^2}}{m^2}+\frac{\cancel{2m}-\cancel{2m^2}}{m^2}+\frac{1-\cancel{2m}+\cancel{m^2}}{m^2}\right)\left(\frac{\cancel{\alpha m}+\alpha-\cancel{\alpha m}+m}{\cancel{m}}\right)}$$

$$S = \frac{1-m}{\frac{1}{m^2}(\alpha+m)} \Rightarrow \alpha + m = \frac{m^2(1-m)}{S} \Longleftrightarrow \alpha = \frac{m(m-m^2-S)}{S}$$

• Diferente da distribuição normal, o moment matching da distribuição beta não equivale ao seu MLE. Podemos calcular o log Likelihood e depois as derivadas parciais de L com relação a α e β para igualá-las a zero:

$$L(\alpha,\beta) = (\alpha-1)\sum_{n=1}^{N}\log x^n + (\beta-1)\sum_{n=1}^{N}\log(1-x^n) - N\log B(\alpha,\beta)$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}L = N(\Psi(\alpha+\beta)-\Psi(\alpha)) + \sum_{i=1}^{N}\log x^i = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}L = N(\Psi(\alpha+\beta)-\Psi(\beta)) + \sum_{i=1}^{N}\log(1-x^i) = 0$$

, onde $B(\alpha,\beta)$ é a função Beta e $\Psi(x) \equiv \frac{d\log\Gamma(x)}{dx}$ a função digama

- Portanto, como o MLE da distribuição beta não é ~~fun~~ uma expressão fechada, não é possível afirmar sua correspondência com o momento matching.

- Um contra-exemplo computacional seria no matlab gerar uma distribuição beta com 1000 amostras:

```
>> r = betarnd(1.5,1.25,1000,1);
```

E comparar os valores de α e β com o MLE encontrado:

```
>> phat = mle(r, 'distribution', 'beta')

phat =

        1.5227    1.2946

m = mean(r);   s = var(r);
```

$$alfa = \frac{m(m - m^2 - s)}{s} = 1.5281$$

$$beta = alfa \frac{1-m}{m} = 1.3080$$

- Uma boa ideia seria encontrar o MLE resolvendo o dado sistema não-linear com valores iniciais α e β, pois esses valores se aproximam do mle encontrado.