# Modelo Auto Regressivo (AR) - Método Mínimos Quadrados

| | |
|---|---|
| Aula | 26 |
| Ready | ☑ |
| Finished | ☑ |
| Ciclos | Ciclo 03: Algoritmos Estatísticos |

## Objetivo da Aula:

- [ ] Ferramentas
- [ ] Métodos dos Mínimos Quadrados

## Conteúdo:

### 1. Ferramentas

1. Os coeficientes são ajustados com o método dos mínimos quadrados

### 2. Métodos dos Mínimos Quadrados

O **método dos mínimos quadrados (OLS - Ordinary Least Squares)** é uma técnica estatística amplamente utilizada para estimar os coeficientes de modelos lineares, incluindo modelos de séries temporais como o **modelo autorregressivo (AR)**. Ele busca encontrar os coeficientes que minimizam a soma dos erros quadráticos entre as previsões do modelo e os valores observados.

Para encontrar os coeficientes do modelo de Médias Móveis (MA), precisamos desenvolver a função de erro quadrático (SSE - *Sum of Squared*

*Errors*) e derivar as equações normais.

## ▼ Passo 1: Definição do Modelo MA(q)

O modelo **Médias Móveis (MA)** de ordem qqq pode ser escrito como:

$$X_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

onde:

- $X_t$ é o valor da série no instante t,
- $\mu$ é a média da série,
- $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q$ são os coeficientes do modelo MA(q),
- $\varepsilon_t$ é um ruído branco com média zero e variância $\sigma_2$.

## ▼ Passo 2: Definição da Função de Erro SSE

Nos métodos de mínimos quadrados, queremos encontrar os coeficientes $\theta_i$ que minimizam a soma dos erros quadráticos:

$$SSE = \sum_{t=1}^{n} (X_t - \hat{X}_t)^2$$

onde $\hat{X}_t$ é o valor ajustado pelo modelo:

$$\hat{X}_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

Como não observamos diretamente os erros $\varepsilon_t$, precisamos expressá-los em função dos valores da série temporal. Para simplificar a notação, consideramos:

$$\varepsilon_t = X_t - \mu - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

Substituímos isso na função SSE:

$$SSE = \sum_{t=1}^{n} (X_t - \mu - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q})^2$$

Nosso objetivo agora é minimizar essa função derivando em relação a $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q$

## ▼ Passo 3: Diferenciação para Encontrar os Coeficientes

Para encontrar os coeficientes θi\theta_iθi, derivamos SSE em relação a cada $\theta_j$ e igualamos a zero:

$$\frac{\partial SSE}{\partial \theta_j} = -2 \sum_{t=1}^{n} \varepsilon_{t-j} (X_t - \mu - \sum_{i=1}^{q} \theta_i \varepsilon_{t-i}) = 0, \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, q\}$$

Isso nos dá um **sistema de equações normais** que pode ser resolvido para encontrar os coeficientes $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q \theta 1, \theta 2, \ldots, \theta q$.

Esse sistema pode ser representado em forma matricial:

$$R\boldsymbol{\theta} = \mathbf{r}$$

onde:

- $\mathbf{R}$ é a matriz de autocorrelação dos resíduos $\varepsilon_t$
- $\boldsymbol{\theta}$ é o vetor de coeficientes [θ1,θ2,...,θq]
- $\mathbf{r}$ é o vetor de correlação cruzada entre Xt e os resíduos passados.

## ▼ Passo 4: Solução para os Coeficientes

Se considerarmos um processo MA(1), onde temos apenas θ1\theta_1θ1, a equação reduzida será:

$$\theta_1 = \frac{\sum_{t=2}^{n} \varepsilon_{t-1} (X_t - \mu)}{\sum_{t=2}^{n} \varepsilon_{t-1}^2}$$

Para um modelo MA(q), resolvemos o sistema linear gerado pelas equações normais, geralmente usando métodos numéricos como **Newton-Raphson** ou **Máxima Verossimilhança**.