UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
DEP. DE ENGENHARIA ELÉTRICA E COMPUTAÇÃO

SEL0616 - PRINCÍPIOS DE COMUNICAÇÃO

PROVA 3

Leonardo Vinícius de Oliveira Toledo, n°10276907

São Carlos
2020

Sumário

1 Questão 1

A função de autocorrelação $X(t)$ é dada por

$$\begin{aligned}R_X(\tau) &= E[X(t+\tau)X(t)]\\ &= A^2E\left[\cos\left(2_\pi Ft + 2_\pi F_\tau - \theta\right)\cos\left(2_\pi Ft - \theta\right)\right]\\ &= \frac{A^2}{2}E\left[\cos\left(4_\pi Ft + 2_\pi F_\tau - 2\theta\right) + \cos\left(2_\pi F_\tau\right)\right]\end{aligned}$$

Calculando uma média sobre θ e conhecendo que θ é uniformemente distribuído sobre um período de 2π radianos, teremos:

$$\begin{aligned}R_X(\tau) =& \frac{A^2}{2}E[\cos(2\pi F\tau)]\\ =& \frac{A^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f_F(f)\cos(2\pi f\tau)df\end{aligned}$$

Em seguida, notamos que $R_X(\tau)$ é relacionado com a densidade espectral de potência da seguinte forma:

$$R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f)\cos(2\pi f\tau)df$$

Portanto, comparando as expressões acima, podemos deduzir que a densidade de espectral de potência de $X(t)$ é:

$$S_X(f) = \frac{A^2}{2}f_F(f)$$

Quando a frequência assume um valor constante, como f_c por exemplo, temos:

$$f_F(f) = \frac{1}{2}\delta\left(f - f_c\right) + \frac{1}{2}\delta\left(f + f_c\right)$$

e, correspondentemente:

$$S_X(f) = \frac{A^2}{4}\delta\left(f - f_c\right) + \frac{A^2}{4}\delta\left(f + f_c\right)$$

2 Questão 2

2.1 a)

A saída do filtro é dada por:

$$\begin{aligned}Y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)X(t-\tau)d\tau\\ &= \frac{1}{T}\int_0^T X(t-\tau)d\tau\end{aligned}$$

Fazendo a substituição $t - \tau = u$. Então, o valor da amostragem $Y(t)$ no tempo $t = T$ é igual a:

$$Y = \frac{1}{T}\int_0^T X(u)du$$

A média de Y é portanto:

$$\begin{aligned} E[Y] &= E\left[\frac{1}{T}\int_0^T X(u)du\right] \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T E[X(u)]du \\ &= 0 \end{aligned}$$

A variância de Y é:

$$\begin{aligned} \sigma_Y^2 &= E\left[Y^2\right] - \{E[Y]\}^2 \\ &= R_Y(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} S_Y(f)df \\ &= \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} S_X(f)|H(f)|^2 df \end{aligned}$$

No entanto,

$$\begin{aligned} H(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\exp(-j2\pi ft)dt \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T \exp(-j2\pi ft)dt \\ &= \frac{1}{T}\left[\frac{\exp(-j2\pi ft)}{-j2\pi ft}\right]_0^T \\ &= \frac{1}{j2\pi fT}[1 - \exp(-j2\pi fT)] \\ &= \operatorname{sinc}(fT)\exp(-j2\pi fT) \end{aligned}$$

Logo,

$$\sigma_Y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f)\operatorname{sinc}^2(fT)df$$

2.2 b)

Uma vex que a entrada do filtro é Gaussiana, segue que Y também é Gaussiano. Consequentemente, a função densidade de probabilidade de Y é dada por:

$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y}\exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_Y^2}\right)$

onde σ_Y^2 foi definido na questão anterior.

3 Questão Computacional 1

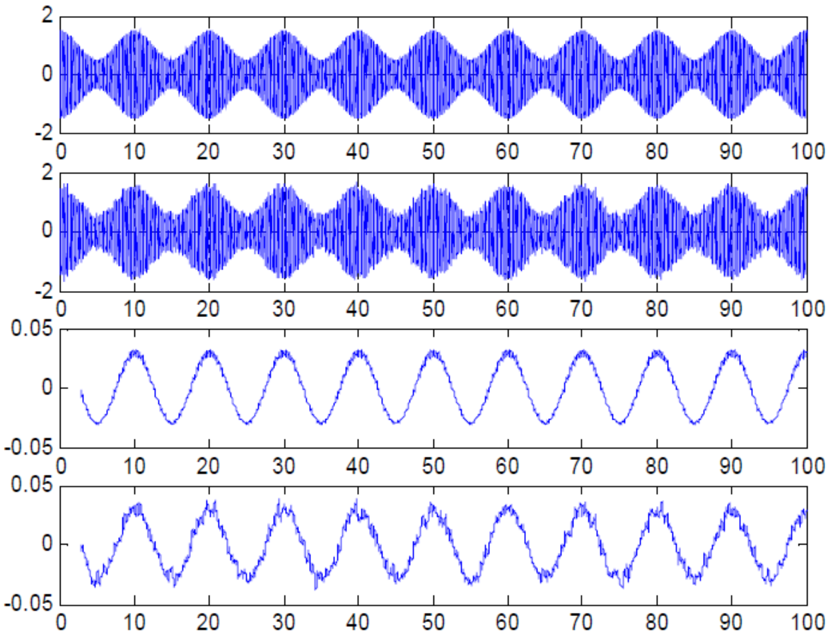
Código para análise:

```
function ex1()
%Dados para o exercicio
  Fs    = 143;
  t       = [0: 1/Fs : 100];
  fc    = 20;
  fm   = 0.1;
  ka    = 0.5;
  SNRc = 30;
  Ac    = 1;
  tau   = 0.25/4;

%Sinal modulado
m = cos(2*pi*fm*t);
c  = Ac*cos(2*pi*fc*t);
s   = (1 + ka*m).* c;
subplot(4,1,1), plot(t,s), grid on
title('Sinal modulado AM')
P = std(m)^2;

% Adicionando ruído de banda estreita

  P_AM  = Ac^2*(1+ka^2*P)/2;
  N     = P_AM/10.^(SNRc/10);
  sigma = sqrt(N);


  noise    = randn(size(s)) + j*randn(size(s));
  LPFnoise = LPF(Fs, noise, tau);
  BPnoise  = real(LPFnoise .* exp(j*2*pi*fc/Fs*[1:length(s)]));
  scale    = 2*sigma / std(BPnoise);

  s_n = s + scale * BPnoise;
```

```
  subplot(4,1,2), plot(t,s_n), grid on
  title('Sinal Modulado AM com ruído')


  ED   = EnvDetector(t,s);
  ED_n = EnvDetector(t,s_n);

  ED      = ED(400:end);
  ED_n    = ED_n(400:end);
  t       = t(400:end);

  ED       = ED - mean(ED);
  ED_n   = ED_n - mean(ED_n);


  BBsig     = LPF(Fs,ED,tau);
  BBsig_n = LPF(Fs,ED_n,tau);

  subplot(4,1,3), plot(t,BBsig);
  title('Sinal AM demodulado sem ruído')
  subplot(4,1,4), plot(t,BBsig_n)
  title('Sinal AM demodulado com ruído')

%Deteto de envoltoria
  function Vc = EnvDetector(t,s);

    Vc(1) = 0;
  for i = 2:length(s)
    if s(i) > Vc(i-1)
        Vc(i) = s(i);
    else
        Vc(i) = Vc(i-1) - 0.023*Vc(i-1);
    end
  end
   return;
```

```
%Filtro Passa-Baixa
  function y = LPF(Fs, x, tau);
    t1   = [0: 1/Fs : 5*tau];
    h    = exp(-t1/tau) * 1/Fs;
    y    = filter(h, 1, x);
  return;
```

O resultado da execução pode ser conferido a seguir:



O primeiro gráfico se trata do sinal modulado AM, o segundo do sinal modulado AM com ruído, o terceiro do sinal AM demodulado sem ruído e o quarto do sinal AM demodulado com ruído.

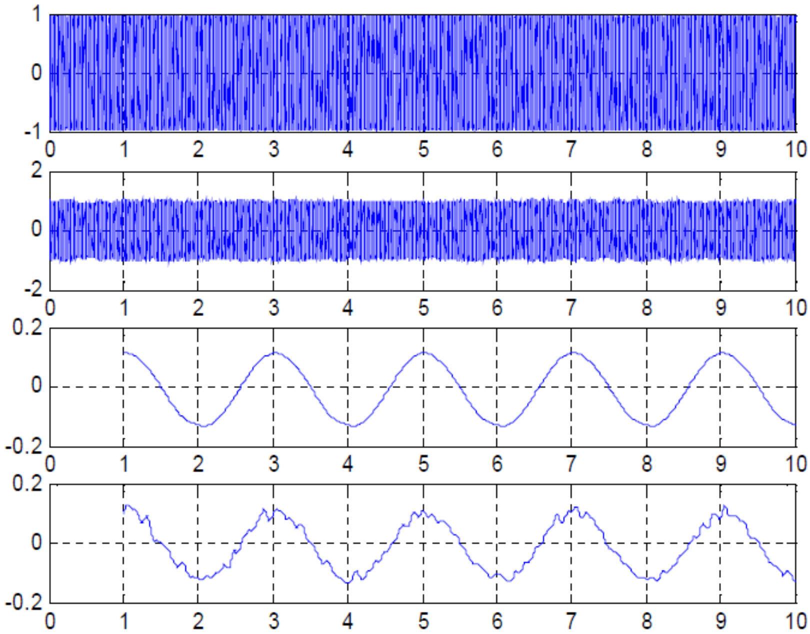
4 Questão computacional 2

```
function b = ex2;
%dados do exercicio
fc  = 100;
Fs = 1024;
fm = 0.5;
Ts = 1/Fs;
t = [0:Ts:10];
C_N = 20
Ac = 1;
```

```
Bt = 20
W = 5;
SNRc = C_N+10*log10(Bt/W);

m  = cos(2*pi*fm*t);
kf = 2;
FMsig = FMmod(fc,t,kf,m,Ts);
P          = 0.5;
N          = P/10.^(SNRc/10);
sigma = sqrt(N);

noise        = randn(size(FMsig)) + j*randn(size(FMsig));  %Ruído
LPFnoise = LPF(Fs, noise, 0.05);  % 0.01 = > Bt ` 50 kHz eq. Noise BW
BPnoise = real(LPFnoise.*exp(j*2*pi*fc/Fs*[1:length(FMsig)]));
scale    = sigma/std(BPnoise);

FMsign = FMsig + scale * BPnoise;
subplot(4,1,1), plot(t,FMsig), grid on
title('Sinal FM modulado')
subplot(4,1,2), plot(t,FMsign), grid on
title('sinal FM modulado com ruído')

Rx_c = FMdiscriminator(fc,FMsig,Ts);
Rx_n = FMdiscriminator(fc,FMsign,Ts);

t = t(round(1/Ts):end);
subplot(4,1,3), plot(t,Rx_c); grid on
title('Sinal FM demodulado sem ruído')
subplot(4,1,4), plot(t,Rx_n); grid on
title('Sinal FM demodulado com ruído. ')

function s = FMmod(fc,t,kf,m,Ts);
theta    = 2*pi*fc*t+ 2*pi*kf * cumsum(m)*Ts;
s        = cos(theta);

function D3 = FMdiscriminator(fc,S, Ts)
t  = [0:Ts:10*Ts];  % for filter
```

```
FIRdiff = [ 1.60385  0.0  0.0  0.0   -0.0  0.0  0.0  -0.0  -0.0  -0.0  -1.60385];
BP_diff = real(FIRdiff .* exp(j*2*pi*fc*t));

LPF_B = 1E-4 *[ 0.0706    0.2117    0.2117    0.0706];
LPF_A = [1.0000   -2.9223    2.8476   -0.9252];

D1 = filter(BP_diff, 1, S);
D2 = EnvDetect(D1);
D2 = D2 - mean(D2);
D3 = filter(LPF_B,LPF_A, D2);
D3 = D3(round(1/Ts):end);

function Vc = EnvDetect(s);

Vc(1) = 0;
for i = 2:length(s)
    if s(i) > Vc(i-1)
        Vc(i) = s(i);
    else
        Vc(i) = Vc(i-1) - 0.005*Vc(i-1);
    end
end

return;

function y = LPF(Fs, x, tau);
t1  = [0: 1/Fs : 5*tau];
h   = exp(-t1/tau) * 1/Fs;
y   = filter(h, 1, x);

return;
```

O resultado da execução pode ser conferido a seguir:



O primeiro gráfico se trata do sinal FM modulado. O segundo gráfico se trata do sinal FM modulado com ruído, o terceiro do sinal FM demodulado sem ruído e o último do sinal FM demodulado com ruído.