CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS

Curso: Engenharia de Computação
Disciplina: Controle de Sistemas Dinâmicos (CSD)
[redacted] 2021
Semestre 2021/2

PLANO DE ESTUDOS

SEMANA 06

Aula 10 – Função de Transferência

Data: 30/11/2021

Entrega: 07/12/2021

Estude:

1) Texto 1: Seção 2.3 do livro do Norman Nise: “A Função de Transferência”.

2) Texto 2:

Representação de Sistemas Lineares

Baseado em:

Aguirre, L. A., “Introdução à Identificação de Sistemas: Técnicas Lineares e Não-Lineares Aplicadas a Sistemas Reais”, Ed. UFMG, 2000.

Ogata, K., “Engenharia de Controle Moderno”, 4ª edição, Prentice Hall, 2003.

Há várias formas de se representar um modelo matemático. Algumas representações são, por exemplo:

- Redes Neurais Artificiais (RNAs)
- Lógica Fuzzy
- Modelos NARMAX polinomiais
- Preditor Linear Local (PLL)
- Funções de Base Radial (RBFs)
- Redes de Wavelets
- Modelos ARX
- Espaço de estados
- Equações diferenciais
- **Funções de transferência (FT)**

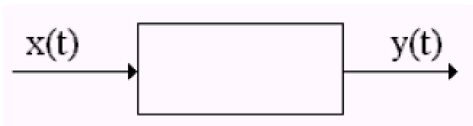
Algumas das representações citadas acima são não-lineares e outras, lineares. Uma das representações lineares mais importantes é a Função de Transferência.

Funções de Transferência

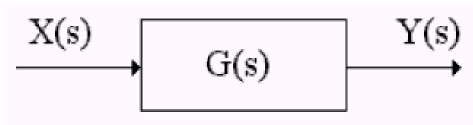
A função de transferência é uma função que modela o comportamento dinâmico de **um par entrada-saída** de um sistema (em cada função de transferência é possível relacionar apenas 1 entrada com 1 saída), ou seja, ela descreve como uma determinada entrada é dinamicamente "transferida" para a saída do sistema.

Por definição, no tempo contínuo, a função de transferência é a transformada de Laplace da sua resposta ao impulso.

Na prática, a função de transferência pode ser estimada dividindo-se a transformada de Laplace da saída pela transformada de Laplace da entrada. Assim, uma função de transferência é normalmente representada como a razão de dois polinômios em s. É a relação entre a transformada de Laplace da variável de saída e a transformada de Laplace da variável de entrada, considerando todas as condições iniciais iguais a zero. Veja a representação da função de transferência G(s):



$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ ou $Y(s) = G(s).X(s)$



A FT é definida apenas para sistemas lineares invariantes no tempo.

Um problema típico de modelagem de sistemas lineares é o de obter a função de transferência do sistema em estudo. Isso pode ser feito da seguinte forma:

1. Identificar a variável de entrada e a variável de saída de interesse;
2. Obter as equações diferenciais do sistema, considerando-se as leis que descrevem os fenômenos envolvidos;
3. Aplicar a transformada de Laplace às equações diferenciais que descrevem o sistema;
4. Manipular as equações obtidas de modo a obter a função de tranferência (saída/ entrada).

   A função de transferência de um sistema também pode ser obtida diretamente a partir de dados produzidos pelo sistema (isto é, sem utilizar as leis que o regem - as equações diferenciais), utilizando-se métodos de identificação (modelagem caixa preta, ou seja, baseada em dados).

Alguns comentários importantes sobre a função de transferência (F.T.):

- A F.T. é um modelo linear e invariante no tempo;
- A F.T. não fornece nenhuma informação relativa à estrutura física do sistema: pode-se ter sistemas físicos diferentes com F.T.s iguais. A informação que a F.T. fornece é sobre as características dinâmicas do sistema, isto é, sobre como tal sistema evolui no tempo;
- Uma grande importância da F.T. é que, por meio dela, a saída ou resposta de um sistema pode ser estudada para vários tipos de entrada, viabilizando o entendimento da natureza do sistema;

Os elementos fundamentais da função de transferência são os **pólos** e os **zeros**. Esses elementos caracterizam a resposta temporal de um sistema. Conhecendo como esses elementos afetam a resposta temporal (e a resposta em freqüência) de um sistema, é possível ter uma idéia do comportamento qualitativo de funções de transferência simples, sem recorrer a simulações.

A **ordem** de uma função de transferência é igual ao número de pólos que ela tem. Em funções de transferência de sistemas reais é impossível ter um número de zeros (reais) maior que o número de pólos. Esse tipo de sistema não é realizável na prática. Tanto os pólos como os zeros podem ser reais ou complexos; caso eles sejam complexos, aparecerão em pares conjugados.

A localização dos pólos no plano complexo s mostra a **estabilidade** da função de transferência (F.T.):

- se todos os pólos têm a parte real negativa, isto é, estão localizados no semiplano esquerdo de s, a F.T. é estável;
- se pelo menos 1 pólo tem a parte real positiva, isto é, está localizado no semiplano direito de s, a F.T. é instável.

A decomposição de uma F.T. em frações parciais é muito útil na análise de sistemas lineares, porque assim é possível separá-la em "módulos básicos" cuja resposta pode ser facilmente obtida em tabelas de transformada de Laplace.

A resposta ao impulso de um sistema pode ser obtida calculando-se a transformada de Laplace inversa de sua F.T..

F.T.s de ordem maior que dois podem ser decompostas em subsistemas de ordem mais baixa, isto é, de primeira e segunda ordens. Por isso é importante conhecer bem as características dinâmicas de sistemas de baixa ordem, uma vez que sistemas complexos podem, normalmente, ser decompostos em tais componentes mais simples.

3) Vídeos:

   - Função de transferência (ELT007, ELT009, ELT035), até o instante 15:45s.
     https://www.youtube.com/watch?v=x51Oh7jIL9k

- Função de Transferência de Um circuito RL
  https://www.youtube.com/watch?v=fcPW_BfDqeo
- Funções de Transferência e Diagramas de Blocos - Curso de Sistemas de Controle (até o instante 9:54)
  https://www.youtube.com/watch?v=g5luumwtgog

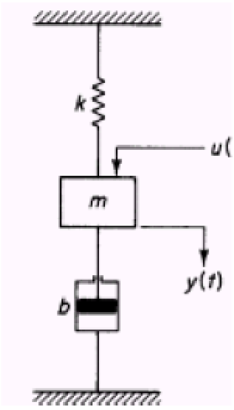
Atividades:

1) Obtenha a função de transferência de cada sistema a seguir:

a) Sistema Amortecedor Viscoso-Massa-Mola

- Variáveis:

$u(t)$: Força aplicada ao sistema
$y(t)$: Deslocamento da massa
m: Massa
k: Constante da mola
b: Coeficiente de atrito viscoso
ky: Força na mola.
bdy/dt: Força no amortecedor
$a = d^2y/dt^2$: Aceleração da massa.



- Equações do sistema: Pela Segunda Lei de Newton tem-se:

$$ma = u - ky - b\dot{y}$$

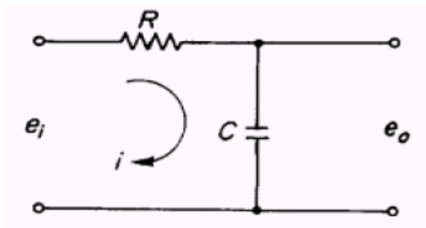
$$u = m\ddot{y} + b\dot{y} + ky$$

➔ Obtenha a função de transferência que relaciona o deslocamento da massa com a força aplicada ao sistema, ou seja, Y(s)/U(s). Qual é a ordem dessa FT?

b) Sistema elétrico – circuito RC

- Variáveis/grandezas:

$e_i(t)$: tensão de entrada
$e_o(t)$: tensão de saída
i(t): corrente elétrica
R: Resistor
C: Capacitor

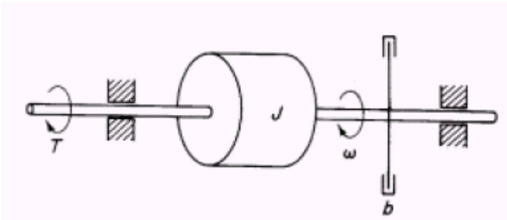


- Equações de sistemas elétricos:

$$v_R = Ri(t) \quad v_L = L\frac{d}{dt}i(t) \quad v_C = \frac{1}{C}\int i(t)dt$$

➔ Obtenha a função de transferência que relaciona a tensão de saída com a tensão de entrada do circuito, ou seja, $E_o(s)/E_i(s)$. Qual é a ordem dessa FT?

c) Sistema rotacional



- Variáveis/grandezas:

J: Momento de inércia(kgm^2)
α: Aceleração ($rad/s2$)
T: Torque aplicado (Nm)
w: Velocidade (rad/s)

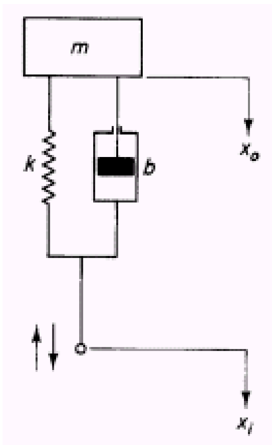
- Equações do sistema:

Fazendo $J\alpha = \sum T$ tem-se:

$$J\dot{w}(t) = -bw(t) + T(t)$$

➔ Obtenha a função de transferência que relaciona a velocidade com o torque aplicado ao sistema, ou seja, $\frac{\Omega(s)}{T(s)}$. Qual é a ordem dessa FT?

d) Sistema suspensão de automóvel



- Variáveis:

Semelhantes ao sistema da letra a).

- Equação do sistema:

Pela Segunda Lei de Newton, tem-se:

$$m\ddot{x}_o(t) = -k(x_o(t) - x_i(t)) - b(\dot{x}_o(t) - \dot{x}_i(t))$$

➔ Obtenha a função de transferência $X_o(s)/X_i(s)$.
Qual é a ordem dessa FT?