



**UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TRIESTE**

Quantum Machine Learning for Entanglement Detection

Brusatin Simone, Candeago Christian,
D'Anna Alessio Maria, Da Rold Paolo

1 marzo 2024

Introduzione

Negli ultimi anni si sta acquisendo sempre più consapevolezza dell'importante ruolo dell'entanglement nella trasmissione di informazione quantistica.

Ricerca su Entanglement detection attraverso modelli di Machine Learning.

Machine learning vs. Tomografia quantistica

Da un dataset quantistico ci chiediamo se il

Quantum ML sia migliore del **Classical ML**?

Per rispondere a questa domanda:

- ▶ generiamo quattro diversi tipi di dataset: due per stati puri e due per stati misti;
- ▶ confrontiamo vari modelli di Quantum machine learning, in particolare QSVM e QVC, per la classificazione binaria di stati entangled o separabili

DATASET

Dataset 1: Matrici unitarie

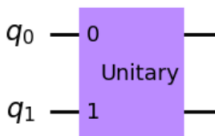
Generazione di matrici unitarie attraverso la funzione `random_unitary` di Qiskit.

Distribuite uniformemente secondo la **misura di Haar**
→ gli stati quantistici spaziano tutto lo spazio di Hilbert.

Verifica, tramite **Decomposizione di Schmidt**, se lo stato generato è effettivamente entangled o separabile.

- ▶ 16 features, contenenti le entrate delle matrici
- ▶ target: 0 (stato entangled) o 1 (stato separabile)

Stati entangled:



Stati separabili:



Dataset 2: Proiezioni su stato di Bell

Singolo sistema, $\hat{\rho} \Rightarrow$ Misura collettiva su $\hat{\rho}_T = \hat{\rho} \otimes \hat{\rho}$

$$P_{xy} = \frac{\text{Tr}[(\hat{\rho}_T)(\hat{\Pi}_x \otimes \hat{\Pi}_{Bell} \otimes \hat{\Pi}_y)]}{\text{Tr}[(\hat{\rho}_T)(\hat{\Pi}_x \otimes \hat{I} \otimes \hat{\Pi}_y)]}$$

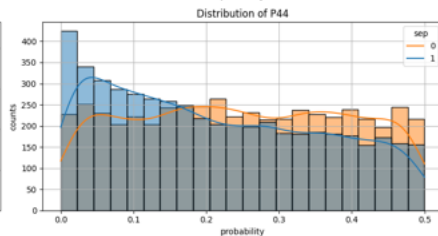
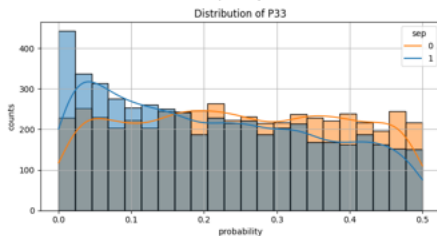
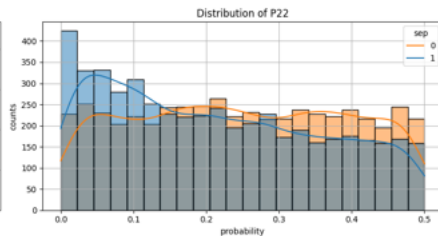
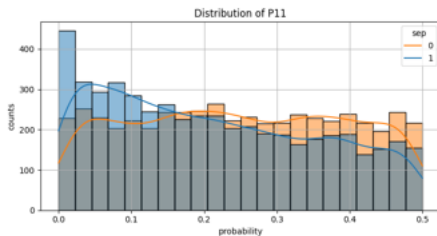
Proiezioni locali $\hat{\Pi}_1, \hat{\Pi}_2, \hat{\Pi}_3, \hat{\Pi}_4$ costruite come combinazioni delle quattro matrici di Pauli.

10 features $\mathbf{P}_{xy} \rightarrow$ rappresentano le **probabilità di proiettare con successo il nostro stato su uno stato di Bell, data una particolare coppia di proiezioni locali.**¹

¹Trávníček et al., *Sensitivity versus selectivity in entanglement detection via collective witnesses*, 2023

Dataset 2: Proiezioni su stato di Bell

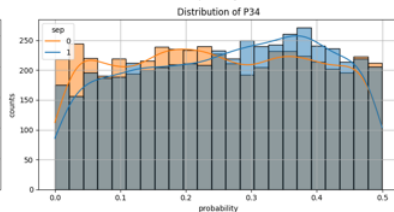
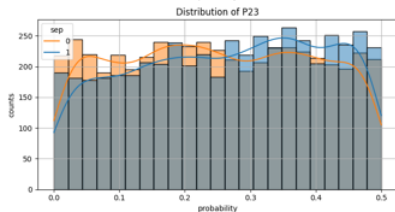
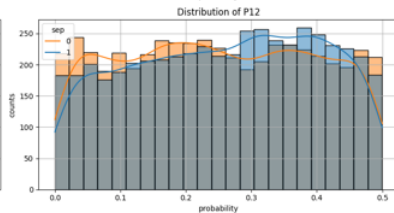
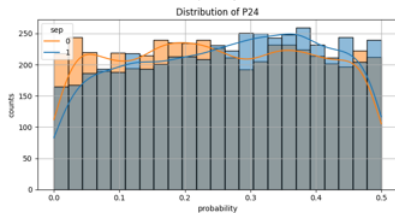
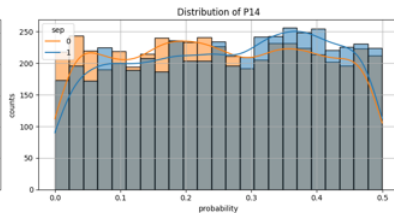
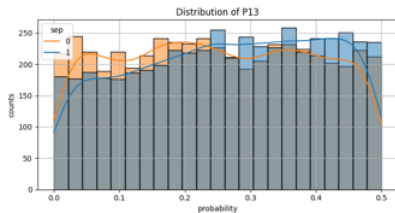
Mostriamo le distribuzioni di ciascuna delle probabilità al variare della coppia di proiettori locali cui è associata:



Distribution of P13

Distribution of P14

Dataset 2: Proiezioni su stato di Bell



Dataset 3 e 4: Stati misti

Abbiamo poi generato un terzo dataset contenente le entrate di matrici di densità 4x4 ma associate a **stati misti**.

\hat{d} diagonale, a traccia 1 $\rightarrow \hat{\rho} = \hat{U} \hat{\rho} \hat{U}^\dagger$

Verifica se gli stati sono entangled o separabili tramite la "Negativity":

$$N = \left| \sum_i \lambda_i^- \right|$$

Anche qui, per la generazione, abbiamo seguito il metodo suggerito da ⁽²⁾, per poi fare un undersampling per bilanciare il dataset.

Infine abbiamo generato un ultimo dataset in cui, analogamente a prima, proiettiamo gli stati su uno stato di Bell attraverso misure collettive.

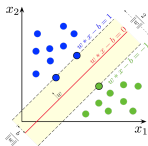
²

Trávníček et al., *Sensitivity versus selectivity in entanglement detection via*

MODELLI

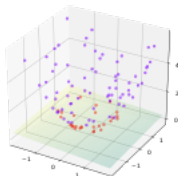
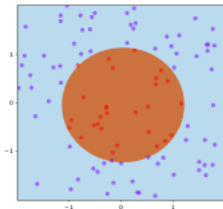
Support Vector Machine

L'idea di un modello SVM è quello di trovare il migliore iperpiano che separi i dati



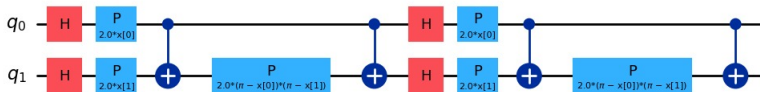
Kernl trick: Un kernel serve a proiettare i dati in uno spazio di dimensione maggiore. La sua formulazione è

$$k(x_i, x_j) = \langle \phi(x_i), \phi(x_j) \rangle$$



Quantum Support Vector Machine (QSVM)

Feature map:

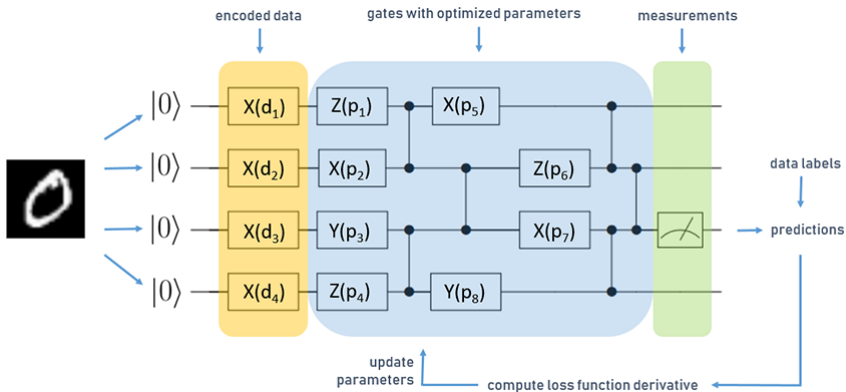


Il kernel quantistico che abbiamo usato è dato da

$$k(x_i, x_j) = |\langle \phi(x_i) | \phi(x_j) \rangle|^2$$

Quantum Variational Circuit (QVC)

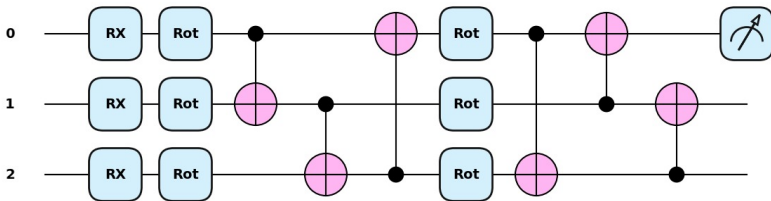
Un generico modello QVC è dato da



Quantum Variational Circuit (QVC)

Il nostro modello QVC è costruito nel seguente modo:

- ▶ Encoding dei dati tramite **AngleEmbedding**
- ▶ Circuito variazionale dato da **StronglyEntangledLayers**
- ▶ **ADAM** come ottimizzatore, con **hinge loss**



Altri modelli

► Modelli ibridi:

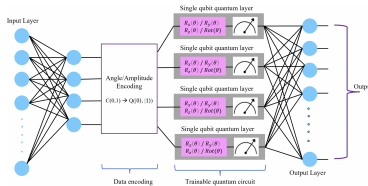


Figura: Rappresentazione del circuito di un modello ibrido³

► Convolutional neural network:

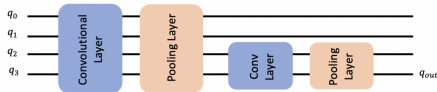


Figura: Rappresentazione del circuito di una QCNN⁴

³Khasif et al. , *Design Space Exploration of Hybrid Quantum–Classical Neural Networks*, 2021

⁴https://qiskit-community.github.io/qiskit-machine-learning/tutorials/11_quantum_convolutional_neural_networks.html

RISULTATI

Grafici per QSVM

Numero di features in funzione del tempo di esecuzione e accuracy

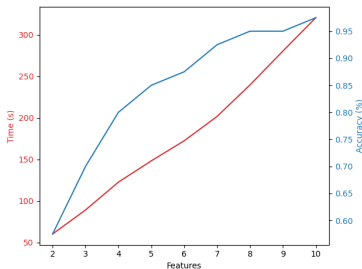


Figura: Stati puri

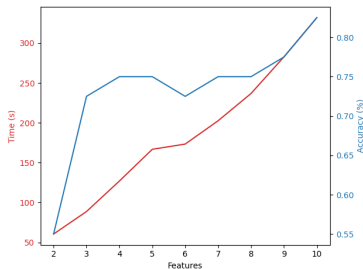
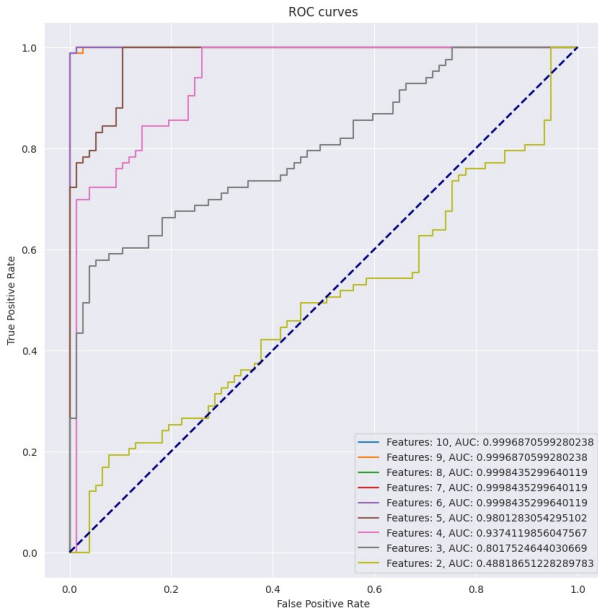


Figura: Stati misti

ROC curve per QSVM



Risultati sperimentali

| | Accuracy test | Train size | Test size |
|----------------|---------------|------------|-----------|
| QSVM qiskit | 0.975 | 160 | 40 |
| QSVM pennylane | 0.920 | 90 | 60 |
| QVC | 0.690 | 1600 | 400 |
| Classic NN | 0.975 | 2500 | 500 |

Tabella: Risultati sul dataset delle osservabili sugli **stati puri**

| | Accuracy test | Train size | Test size |
|--------------------------|---------------|------------|-----------|
| QSVM qiskit (scaling) | 0.950 | 160 | 40 |
| QSVM qiskit (no scaling) | 0.825 | 160 | 40 |
| QSVM pennylane | 0.920 | 90 | 60 |
| QVC | 0.650 | 1200 | 300 |
| Classic NN | 0.825 | 4000 | 1000 |

Tabella: Risultati sul dataset delle osservabili sui **stati misti**

Conclusioni

Da un dataset quantistico ci chiediamo se il **Quantum ML** sia migliore del **Classical ML**?

Sulla base del nostro progetto no, ma...

Bibliografia

- ▶ Trávníček et al., *Sensitivity versus selectivity in entanglement detection via collective witnesses*, 2023
- ▶ Scala et al., *Quantum variational learning for entanglement witnessing*, 2022
- ▶ Greenwood et al., *Machine-Learning-Derived Entanglement Witnesses*, 2023