Algebra e Matematica di Base

Corso di Laurea in Informatica - Università degli Studi di Verona

Federico Brutti

Federico Brutti
federico.brutti@studenti.univr.it

Indice

14 | Strutture Algebriche

Sto scrivendo questo testo a causa della burocrazia

Insiemi

Onestamente non ho la benché minima idea di cosa tratti matematica di base; tutti gli argomenti sembrano familiari ma allo stesso tempo estranei. Inoltre sembra una materia di cui si sente la mancanza nell'ordinamento precedente. Iniziamo con la definizione formale di **Insieme**, elemento della teoria su cui si basa la matematica tutta:

> **Definizione 1.1. Insieme**
> Gruppo di elementi aventi una stessa proprietà. Si indica con una lettera maiuscola.

Pare ovvio che con questi insiemi sia possibile operare in qualche modo; per prima cosa elenchiamo i simboli utilizzati nel corso:
Connettivi:

- **Congiunzione**: $\wedge$

  Ritorna vero solo se tutti gli elementi sono veri.

- **Disgiunzione**: $\vee$

  Ritorna vero se almeno un elemento è vero.

- **Negazione**: $\neg$

  Rende falso il vero e viceversa.

- **Implicazione**: $\implies$

  Corrisponde a ”Se, allora”, ritorna vero nei casi $0 \to 1$ oppure $1 \to 1$, mentre è falso se $1 \to 0$ oppure $0 \to 0$.

- **Doppia Implicazione**: $\iff$

  Corrisponde a ”se e solo se, allora” e viene rappresentata mediante due implicazioni: $(\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)$.

- **Bottom**: $\perp$

  Indica il valore di assurdo, 0.

- **Top**: $\top$

  Indica il valore di verità, 1.

Quantificatori:

- **Esiste**: $\exists$

  Indica l'esistenza di un elemento con una determinata proprietà.

- **Per ogni**: $\forall$

  Indica che per ogni caso considerato, esiste un elemento con una data proprietà.

Ed ora introduciamo tutte le varie operazioni insieme alle loro proprietà.

1.1 Operazioni fra gli insiemi

Distinguiamo inizialmente i due casi in cui è possibile operare con gli insiemi:

- **Coppie**, collezioni di oggetti dove è possibile distinguere il primo elemento dal secondo. Si distinguono in:
  - **Ordinate**: $(A, B) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$
    Insieme dove gli elementi sono legati da una determinata relazione di ordinamento.
  - **Non ordinate**: $(A, B) = (B, A)$
    Gli insiemi di questo tipo saranno sempre uguali se contengono gli stessi identici elementi, a prescindere dall'ordine in cui sono scritti.
- **N-uple**, dove sono presenti più di due insiemi, trattato più avanti.

Ed ora possiamo iniziare con le operazioni effettive:

- **Appartenenza, contenimento e sottoinsieme**

  Diciamo che un elemento x appartiene ad un insieme A quando rispetta i criteri per farne parte, come avere una determinata proprietà o caratteristica.

  > **Definizione 1.2. Appartenenza e non appartenenza**
  >
  > Data una proprietà P requisito per far parte dell'insieme A, definiamo formalmente:
  >
  > - **Appartenenza**: $x \in A$, $A = \{x | P(x)\}$
  >   All'insieme A appartiene l'elemento x tale che x abbia una data proprietà P.
  > - **Non appartenenza**: $y \notin A$
  >   All'insieme A non appartiene y.

  Diremo poi che un insieme B è sottoinsieme di A quando il primo è interamente contenuto nel secondo. Ciò non necessariamente significa che sia uguale, tuttavia.

  > **Definizione 1.3. Sottoinsiemi**
  >
  > Dati due insiemi A e B diremo che B possiamo avere i seguenti casi:
  >
  > - **Sottoinsieme Improprio**: $B \subseteq A, \forall x.(x \in A \implies x \in B)$
  >   Quando ogni elemento appartiene a B, appartiene anche ad A.
  > - **Uguaglianza**: $A = B, \forall x.(x \in A \iff x \in B)$
  >   Quando due insiemi sono perfettamente uguali.
  > - **Sottoinsieme Proprio**: $B \subset A$
  >   Quando tutti gli elementi di B appartengono ad A e $A \neq B$.

  Abbiamo infine l'elemento neutro, detto **Insieme Vuoto**, scritto con $A = \emptyset$, il quale indica un insieme privo di elementi.

- **Unione**

  L'unione fra due insiemi risulta come un terzo insieme contenente gli elementi di entrambi. Formalmente:

  > **Definizione 1.4. Unione** $A \cup B = \{a | a \in A \vee a \in B\} = C$
  >
  > Unisce gli elementi di A a quelli di B per creare un nuovo insieme C che contiene tutti gli elementi dei primi due senza ripetizioni. Detiene inoltre le seguenti proprietà:
  >
  > – $A \cup \emptyset = \emptyset$
  > – $(A \cup B) = (B \cup A)$
  > – $(A \cup B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
  > – $A \cup A$
  > – $A \subseteq C \wedge B \subseteq C = A \cup B \subseteq C$
  > – $A \subseteq C \iff A \cup Z = C$

- **Intersezione**

  L'intersezione prende solamente gli elementi comuni ad A e B.

  > **Definizione 1.5. Intersezione** $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$
  >
  > Dati due insiemi A, B, crea un insieme C che contiene esclusivamente gli elementi comuni ai primi due. Detiene le seguenti proprietà:
  >
  > – $A \cap \emptyset = \emptyset$
  > – $A \cap B = B \cap A$
  > – $A \cap (B \cap C) = (A \cap C) \cap C$
  > – $A \cap A = A$
  > – $C \subseteq A \wedge C \subseteq B \implies C \subseteq A \cap B$
  > – $A \subseteq B \iff A \cap B = A$
  > – $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

- **Differenza**

  La differenza fra insiemi sottrae gli elementi di B a quelli di A.

  > **Definizione 1.6. Differenza** $A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$
  >
  > Dati due insiemi A, B, l'operazione differenza sottrae tutti gli elementi di B a quelli di A. Nel caso in cui gli insiemi non abbiano elementi in comune, l'operazione non avrà effetto. Detiene le seguenti proprietà:
  >
  > – $A \setminus \emptyset = A$
  > – $A \setminus A = \emptyset$
  > – $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$

- $(A \setminus B) \cup A = A$
- $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$

Un'altra operazione molto utile sempre in questo senso è la **Differenza Simmetrica**, la quale permette di ricavare esclusivamente gli elementi unici da due insiemi.

Definizione 1.7. Differenza Simmetrica $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Dati due insiemi A, B, la differenza simmetrica effettua un'unione fra la differenza $A \setminus B$ e $B \setminus A$, con lo scopo di ottenere Tutti gli elementi appartenenti ai due insiemi che non sono ripetuti. Detiene le seguenti proprietà:

- $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
- $A \triangle B = B \triangle A$
- $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$
- $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$
- $A \triangle \emptyset = A$
- $A \triangle A = \emptyset$
- $(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C)$

- **Insieme Potenza**

  INFORMATI IN MERITO

- **Generalizzazione di operazioni**

  INFORMATI IN MERITO

1.1.1 Leggi di De Morgan

1.2 Relazioni fra insiemi

INSERISCI DEFINIZIONE DI RELAZIONE FRA INSIEMI

- **Prodotto cartesiano**

  Il Prodotto Cartesiano è una relazione fra due insiemi dove a partire dagli elementi di A, crea tutte le coppie possibili con gli elementi di B. Giuro è più semplice a vederlo.

Definizione 1.8. Prodotto Cartesiano $A \times B = \{(x, y) | x \in A \wedge y \in B\}$

Dati due insiemi A, B, si definisce il loro prodotto cartesiano l'insieme di tutte le coppie ordinate di elementi, indicati da (a, b), tali che il primo elemento a della coppia appartenga all'insieme A e il secondo elemento b della coppia appartenga all'insieme B.

Esempio. **Calcolo di un prodotto cartesiano**

$$A = 1, 2, \; B = 3, 4$$
$$A \times B = C = (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)$$

CONTINUA DA QUA

- **Insieme delle parti**
- **Insieme complementare**
- **Relazione inversa**
- **Composizione**
- **Relazione chiusa**

1.3 Principi di dimostrazione

Il processo di dimostrazione matematica è un algoritmo deduttivo utilizzato per provare la verità di ipotesi arbitrarie basandosi sul ragionamento logico. Un metodo frequentemente utilizzato è la **Dimostrazione per assurdo**, dove si parte dal presupposto che la tesi sia falsa. Se si riesce a concludere il processo senza incappare in contraddizioni, hai provato che la tesi è falsa, altrimenti è vera.

Ho l'impressione che qui manchino un pò di cose.

1.4 Domande di teoria

Teorema 1.9. Here goes a theorem.

Demostración. Here goes the proof □

Corollario 1.10. Here goes a collorary

Esempio. Here goes an example

Nota. Here goes a note

Lemma 1.11. Here goes a lemma

Proposizione 1.12. Here goes a proposition

Definizione 1.13. Here goes a definition

1.4.1 Esercizi

Relazioni e Funzioni

2.1 Tipo di funzioni

- Funzioni totali
- Funzioni parziali
- Iniettive
- Suriettive
- Biunivoche
- Funzioni composte
- Funzione inversa
- Cancellabilità della funzione

2.2 Relazioni di equivalenza

2.3 Partizioni

2.4 Relazioni di ordinamento

2.5 Domande di teoria

2.6 Esercizi

Numeri Naturali

3.1 Definizioni per ricorsione primitiva

3.2 Principali operazioni

3.3 Costruzione di interi e razionali

3.4 Fattorizzazione e teorema fondamentale dell'aritmetica

3.5 Congruenze

3.6 Domande di teoria

3.7 Esercizi

Cardinalità

4.1 Insiemi finiti e infiniti

4.2 Equipotenza

4.3 Ordinamento delle cardinalità

4.4 Teorema di Cantor

4.5 Non numerabilità dei reali

4.6 Domande di teoria

4.7 Esercizi

Strutture Algebriche

5.1 Monodi

5.2 Gruppi

5.3 Anelli

5.4 Reticoli

5.5 Domande di teoria

5.6 Esercizi