

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI VERONA

CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA

Sistemi

Federico Brutti
federico.brutti@studenti.univr.it

Inserire citazione inerente alla materia

Contents

1	Introduzione al corso	3
1.1	Segnali e sistemi	3
1.2	Tipi di segnali	6
1.3	Distribuzioni	8
2	Dinamiche dei sistemi	11
2.1	Sistemi Lineari Tempo invariante	11
2.2	Calcolo delle risposte	12
2.2.1	Calcolo della risposta libera	13
2.2.2	Calcolo della risposta forzata	15
3	Laplace	20
3.1	Risposta in frequenza e Trasformata di Laplace	20
4	Bode	21

Chapter 1

Introduzione al corso

Il corso si propone di dare gli strumenti necessari alla comprensione della ricezione di segnali monodimensionali. Pone le basi per altre materie come elaborazione di segnali e immagini; richiede inoltre competenze di base ottenute da analisi 1 e 2, come anche nozioni di fisica 1. È consigliato iniziare questa materia solamente una volta dopo aver solidificato tali basi, specie riguardo i numeri complessi.

1.1 Segnali e sistemi

Partiamo dai concetti di base: **segnali** e **sistemi** sono due entità in stretta correlazione, e non possono esistere da sole. La prima riguarda le informazioni trasmesse nello spazio-tempo, mentre la seconda rappresenta lo strumento con il quale si andrà a elaborare la precedente.

Esistono due tipi di segnali di nostro interesse, quelli a **tempo continuo**, dati dai fenomeni fisici, e quelli a **tempo discreto**, in una forma approssimata per essere elaborati dalla macchina. Risulta finito nel tempo e nei valori.

Come già visto nel corso di Architetture degli Elaboratori, viene seguito il seguente algoritmo per la conversione dei dati e la loro conseguente elaborazione:

1. **Campionamento:** Divide in intervalli uguali il segnale ricevuto, quindi passa da continuo a discreto. Non è un processo distruttivo.
2. **Quantizzazione:** Approssima gli intervalli ottenuti ad un valore leggibile dalla macchina in base alla sua risoluzione. Da qui il segnale non è più revertibile.
3. **Encoding:** Trasforma il segnale quantizzato in dati. Non sarà approfondito.

In questa parte di corso ci concentreremo su segnali unidimensionali non negativi, ovvero rappresentabili tramite funzioni lineari. In successione verranno approfonditi anche i seg-

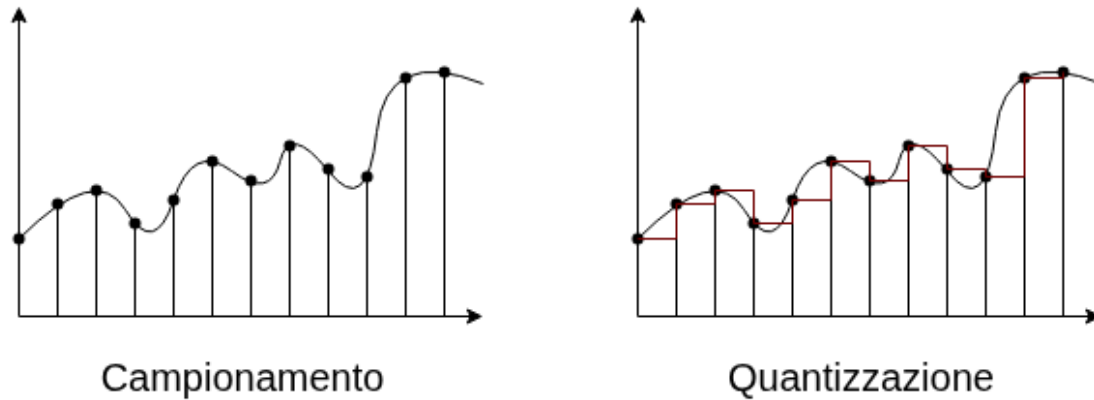


Figure 1.1: Algoritmi di ricezione segnali

nali bidimensionali, usati per la rappresentazione di immagini, e tridimensionali, ovvero le stesse con colori.

Parliamo adesso dei **sistemi**. Questi detengono un'entrata ed un'uscita, anche se spesso viene usato un ulteriore **blocco di retroazione** per ricalibrare o modificare il segnale di output. In tal caso, l'uscita del blocco diventerà la nuova entrata del sistema principale. Un esempio di questo comportamento è il termostato. Di base segnala puramente la temperatura attuale, ma se attivato in automatico, cercherà di bilanciare la suddetta accendendo l'aria condizionata o i termoarredi.

Passiamo ora alle notazioni utilizzate nel corso. I segnali si indicano con la lettera minuscola f , mentre le maiuscole sono usate per le **Trasformate**, le quali hanno il compito di convertire i segnali. Vedremo più tardi in dettaglio la loro utilità.

Le notazioni per variabili a tempo continuo sono t, τ, t_i , mentre per quelle a tempo discreto si usa k . La scrittura $f(t)$ indica un segnale a tempo continuo. Per cogliere un istante specifico, si scrive $f(3)$, che ritornerà il valore di f al tempo 3.

I sistemi sono invece rappresentati come una scatola nera, con un'entrata $u(t)$ ed un'uscita $v(t)$. Per loro si usano lettere greche o maiuscole, come Σ . Generalmente lavoreremo con sistemi LTI, ovvero **Lineari Tempo Invariante**, ciò significa che vale la sovrapposizione degli effetti (lineare), e che a prescindere dal punto di ingresso del segnale nel sistema, l'uscita sarà sempre la stessa (tempo invariante).

Il compito che ci poniamo è l'analisi dei sistemi tramite un approccio classico. Partiamo dal segnale, un qualunque evento fisico, e prendiamo per esempio una molla con una massa attaccata ad una sua estremità. Il movimento che questa effettua fino al ritornare

stabile è il nostro segnale. Detto ciò, l'analisi è un processo diviso in quattro fasi:

1. **Definizione del modello:** Per la rappresentazione del sistema verranno utilizzati grafici appositi, mentre per segnali a tempo continuo e discreto si useranno equazioni differenziali ed equazioni alle differenze rispettivamente.

Essendo le equazioni differenziali algoritmicamente complesse, più avanti nel corso saranno introdotte le trasformate, che consentono di trasformare equazioni differenziali in equazioni di secondo grado con numeri complessi. In particolare:

- **Trasformata di Laplace:** Più generale, per segnali a tempo continuo.
 - **Trasformata di Fourier:** Sottocategoria della precedente, usata sempre per segnali a tempo continuo.
 - **Trasformata Zeta:** Per segnali a tempo discreto.
2. **Analisi di proprietà e stabilità:** La definizione del modello introduce proprietà ad esso associate. Per esempio, supponiamo che un'auto sia il nostro sistema; il freno, che riduce la sua accelerazione per poi fermare del tutto il veicolo, è una proprietà. Se questa agisce come inteso, il sistema è detto **stabile**.
 3. **Controllo delle proprietà:** Qui si parla di prestazioni, ovvero il costo utilizzato per produrre l'output richiesto. Chiaro che meno costa, meglio è.
 4. **Sintesi del modello:** Non vista nel corso, è utile per la correzione del sistema affinché risulti stabile.

Sebbene siano il nostro principale campo di prova, nella realtà non esistono sistemi lineari. Infatti noi prenderemo una parte del segnale il cui comportamento risulta simile ad una funzione lineare, effettuando, in parole povere, un'astrazione del segnale preso in esame.

Approfondiamo ora la stabilità. Generalmente, quando la grandezza di un output non tende ad infinito, è detta stabile, ma ne abbiamo due tipi:

- **Stabilità BIBO:** L'acronimo sta per bounded input, bounded output. Afferma che se ho un input limitato in ampiezza, mi aspetto che lo sarà anche l'uscita. Formalmente:

$$\exists M > 0. |u(t)| < M \forall t \in \mathbb{R} \implies \exists N > 0. |v(t)| < N \forall t \in \mathbb{R}$$

- **Stabilità asintotica:** Afferma che esiste un limite tale per cui il mio valore si annulla. Ciò vale sia in input che output. Quindi se cessa l'input, così farà l'output. Questa stabilità implica la precedente, ma non viceversa.

$$\forall t \text{ di } v(t). t \in \mathbb{R}, \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = 0$$

Abbiamo detto prima che i segnali sono rappresentati mediante equazioni differenziali; infatti il modello generale è dato da una doppia sommatoria con due indici diversi di un coefficiente, moltiplicata per una parte esponenziale ed una parte polinomiale.

Definizione 1. Formula generale per la rappresentazione dei segnali

$$y(t) = \sum_i \sum_j c_{ij} e^{\alpha t \frac{t^e}{e!}}$$

In questa formula, t è la variabile del tempo ed α è un numero complesso. Quest'ultimo è rappresentabile anche come $\lambda + \omega t$ e quindi scomponibile in due esponenziali. È ovviamente consentito passare in coordinate polari:

- $e^{j\omega} = \cos(\omega t) + j \sin(\omega t)$.
- $e^{\alpha t} = \rho(\cos(\omega t) + j \sin(\omega t))$.

1.2 Tipi di segnali

È stato precedentemente menzionato come i due tipi di segnali principali siano quelli a tempo continuo e discreto, è ora di associare il concetto ad effettive funzioni sulle quali andremo a lavorare.

Segnali sinusoidali: $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$; $x[n] = A \cos(\Omega_0 n + \phi)$

Le due formule sono usate per l'espressione dei segnali in forma sinusoidale, la prima a tempo continuo, la seconda a tempo discreto. Le componenti sono:

- A : Ampiezza, indica l'altezza dell'onda in base all'asse delle y .
- ω_0 ; Ω_0 : Frequenza, determinata dalla dilatazione delle singole onde. Si ottiene con $f = \frac{1}{t}$, dove t è il periodo.
- ϕ : Fase, punto di inizio del segnale.

Il punto d'intersezione con l'asse delle y è dato da $A \cos(\phi)$, detto **Shift temporale**, mentre il **Periodo** $t_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ è la distanza fra le due ampiezze massime delle singole onde. Questo tipo di segnale detiene inoltre proprietà legate al tipo di funzione:

- **Periodicità:** Esiste un certo periodo t_0 che se sommato a t ritorna lo stesso risultato. t_0 è il numero più piccolo per il quale vale questa proprietà. Per il tempo discreto, non è garantita periodicità in quanto con l'approssimazione si potrebbe arrivare ad una perdita di dati.

- **Time shifting:** Una traslazione temporale, ovvero spostarsi avanti o indietro nel tempo rispetto al segnale, equivale ad un cambio di fase. Dove questa proprietà è sempre vera in segnali a tempo continuo, in quelli a tempo discreto potrebbe non valere.
- **Parità:** Data una fase $\phi = 0$, otterremo una funzione coseno, quindi pari. Vale $x(t) = x(-t)$.
- **Disparità:** Data una fase $\phi = -\frac{\pi}{2}$, otterremo una funzione seno, quindi dispari. Vale $x(t) = -x(-t)$.

Segnali esponenziali reali: $x(t) = Ce^{at}$; $x[n] = Ce^{bn}$

Segnali che seguono le regole delle funzioni esponenziali, quindi cresce o decresce in base al segno dell'esponente. Nelle rispettive formule, abbiamo poi: $C, a, b \in \mathbb{R}$.

In caso di time shift, la variabile modificata è t o n , per la rispettiva formula, e ne influenza la scala. Si scriverà infatti: $Ce^{a(t+t_0)}$.

Per quanto riguarda i segnali discreti, si preferisce passare ad una formula contratta, dove $\alpha = e^b$:

$$x[n] = Ce^{bn} \equiv C(e^b \times e^n) \equiv C\alpha^n$$

Abbiamo quattro modi diversi per la loro rappresentazione in base al valore di α e al suo modulo:

- $\alpha > 0$, $|\alpha| > 1$: cresce e tende ad infinito nel primo quadrante.
- $\alpha > 0$, $|\alpha| < 1$: Decresce e tende a 0 nel primo quadrante.
- $\alpha < 0$, $|\alpha| > 1$: Ha un comportamento oscillatorio, cresce e tende ad infinito nell'asse delle x .
- $\alpha < 0$, $|\alpha| < 1$: Ha un comportamento oscillatorio, decresce e tende a 0 nell'asse delle x .

Segnali esponenziali complessi: $x(t) = ce^{at}$; $x[n] = c\alpha^n$

I segnali esponenziali complessi hanno un comportamento oscillatorio, il quale cresce o decresce verso l'asse delle x in base al segno delle variabili r e $|\alpha|$ nelle rispettive formule. Si dice che ha una forma sinusoidale smorzata. Nello specifico, infatti, per il tempo continuo si ha:

- $c = |c|e^{j\theta}$, con forma polare.
- $a = r + j\omega_0$, con forma cartesiana.

Che ci fa ottenere, grazie alla formula di Eulero che consente di passare da esponenziale a forma polare del complesso: $e^{j(\omega_0 t + \theta)} = \cos(\omega_0 t + \phi) + j \sin(\omega_0 t + \phi)$, quanto segue:

$$\begin{aligned} x(t) &= |c| e^{j\theta} e^{(r+j\omega_0)t} \\ &= |c| e^{rt} e^{j(\omega_0 t + \theta)} \\ &= |c| e^{rt} \cos(\omega_0 t + \phi) + j \sin(\omega_0 t + \phi) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Da questa equazione estesa è possibile differenziare i modi in cui si può scrivere graficamente il segnale; se $r > 0$, la sinusoide crescerà all'infinito, altrimenti decrescerà fino a 0.

Per quanto riguarda invece il tempo discreto, le componenti sono:

- $c = |c| e^{j\theta}$
- $\alpha = |\alpha| e^{j\Omega_0}$

Sostituiamole alla formula contratta per ottenere quella estesa, come prima:

$$\begin{aligned} x[n] &= |c| e^{j\theta} (|\alpha| e^{j\Omega_0})^n \\ &= |c| |\alpha|^n e^{j(\Omega_0 n + \theta)} \\ &= |c| |\alpha|^n \cos(\Omega_0 n + \theta) + j \sin(\Omega_0 n + \theta) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Il grafico qui dipende dal valore di $|\alpha|$. Se maggiore di 0, la sinusoide crescerà all'infinito verso l'asse delle x , altrimenti qui tenderà a 0.

1.3 Distribuzioni

Talvolta ci sono delle grandezze non misurabili numericamente e quando ciò ha luogo, ci serviamo dei segnali generalizzati. La loro particolarità riguarda essere definiti all'interno di un'operazione di integrale, il cui risultato ritornerà il valore cercato. Formalmente scriviamo l'**impulso di Dirac**:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sigma(t) \phi(t) dt = N$$

Dove σ è la grandezza, ϕ lo strumento ed N la misura.

Lo strumento di lavoro base per questa misurazione è invece detto **impulso unitario**, ed è una funzione che comprende un **supporto**, quindi la larghezza della funzione, infinitesimo, **altezza** infinita, ed un **area**, quindi l'integrale, uguale ad 1. Inoltre, è definita in $[0^-, 0^+]$ e si denota con:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

Chiariamo che la grandezza da misurare è δt , lo strumento è la costante 1 moltiplicata per la grandezza, ed 1 è il risultato. In natura questa funzione non esiste, ma è utile per effettuare approssimazioni e quindi anche il **campionamento**. I casi ricorsivi sono:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \Rightarrow 0 \\ 0 \end{cases}$$

A partire dall'impulso unitario possiamo definire due funzioni non derivabili, ma fondamentali per l'analisi dei segnali:

- **Finestra rettangolare unitaria**

Un rettangolo di altezza 1 definito nell'intervallo $[-\frac{t}{2}, \frac{t}{2}]$. Quest'onda, se ripetuta nel tempo, fa ottenere un'onda quadra. Da un punto di vista pratico è utile per il controllo dei motori. Ricorsivamente è definita come:

$$\pi(t) = \begin{cases} 1 & \in [-t/2 \leq t \leq t/2] \\ 0 \end{cases}$$

- **Finestra triangolare unitaria**

Un triangolo di altezza 1 definito nell'intervallo $[-T, T]$. Non viene usata per fare controlli particolari, ma funziona per fare filtraggi migliori. Se ripetuta nel tempo fa ottenere un'onda triangolare e ci aiuterà a generare le sinusoidi. Ricorsivamente è definita come:

$$\begin{cases} 1 - |t| & \in [-T \leq t \leq T] \\ 0 \end{cases}$$

Ottenere il caso generale dalle funzioni unitarie è semplicissimo, basta sostituire il valore preso in esame al posto della costante 1 nella definizione ricorsiva. Ma in generale come è possibile ottenere un impulso?

Trattasi di una serie di funzioni fra cui cambiamo dei valori, ma, per definizione, l'area deve risultare sempre uguale ad 1. La verifica si esegue con la semplice formula della geometria piana:

- **Area del rettangolo:** $b \times h$.

- **Area del triangolo:** $\frac{b \times h}{2}$.

In particolare, con il triangolo è possibile definire quale sia la derivata dell'impulso, una funzione che cresce e decresce nell'infinitesimo molto vicino al valore 0. Ci sarà utile per definire le **funzioni polinomiali**, segnali definiti come operazioni integrali a partire dall'impulso. Queste sono generalmente definite ricorsivamente come:

$$\delta_{-n}(t) = \begin{cases} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} t \geq 0 \\ 0 \end{cases}$$

A partire dalle definizioni otteniamo le seguenti funzioni:

- **Funzione gradino**, primo integrale. Permette di garantire la causalità:

$$\delta_{-1}(t) = \begin{cases} \frac{t^{1-1}}{(1-1)!} t \geq 0 \\ 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 1t \geq 0 \\ 0 \end{cases}$$

- **Funzione rampa**, secondo integrale:

$$\delta_{-2}(t) = \begin{cases} \frac{t^{2-1}}{2-1} t \geq 0 \\ 0 \end{cases} \implies \begin{cases} t^2 \geq 0 \\ 0 \end{cases}$$

- **Funzione parabola**, terzo integrale, non vista in questo corso.

Lo scopo dei segnali polinomiali riguarda la caratterizzazione del sistema mediante il testing. Per esempio, si dà in input una funzione gradino, misura standard, e si annota il tempo utilizzato per ritornare il valore. In successione vedremo con più precisione come passare da tempo continuo a discreto, ma per ora è sufficiente sapere che è possibile ottenere il valore delle funzioni in un preciso punto t_0 moltiplicando la funzione per un impulso. Si può fare se abbiamo una funzione continua in questo punto. Quindi, per $t \in \mathbb{R}$:

$$v(t)\delta(t - t_0) = v(t_0)\delta(t - t_0)$$

La formula può essere anche riscritta come

$$N(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(\tau)\delta(\tau - t_0)d\tau$$

Quindi il valore di una funzione in t_0 è l'integrale della funzione moltiplicata per un impulso traslato in t_0 .

Chapter 2

Dinamiche dei sistemi

2.1 Sistemi Lineari Tempo invariante

Possiamo ora dare una definizione rigorosa di sistema: si tratta di un modello matematico o formulazione di un processo o fenomeno fisico che permette di trasformare un'entrata in un'uscita determinata. Ne esistono principalmente di due tipi:

- **Single Input Single Output**
- **Multiple Input Multiple Output**, non visti in questo programma.

In base a questi poi ci sono i sistemi dinamici, ovvero con memoria, i quali salvano i dati grazie agli stati. Rammento infine che, come i segnali, i sistemi possono essere a tempo continuo e discreto.

Per quanto riguarda i sistemi LTI, approfondiamo le proprietà menzionate nel capitolo precedente:

- **Linearità:** Partendo da un sistema con due entrate, otterrò in output un risultato equivalente alla combinazione lineare dei singoli input.
- **Tempo-invarianza:** Traslando l'input del sistema prima o dopo nel tempo avrò come output lo stesso risultato traslato prima o dopo nel tempo:

$$u(t) \rightarrow v(t) \implies u(t + \tau) \rightarrow v(t + \tau), \forall \tau \in \mathbb{R}$$

- **Causalità:** L'effetto non precede mai la causa. L'uscita $v(t)$ all'istante τ deve dipendere esclusivamente dall'ingresso $u(t)$ per $t \leq \tau$. Per comodità considereremo solo sistemi a riposo, ovvero con $\tau = 0$.

Richiamiamo all'attenzione il concetto di stabilità per formalizzarlo definitivamente. Definiamo:

Sistema asintoticamente stabile

Un sistema si dice tale se dopo aver dato l'input, l'output va a morire fino ad arrivare a 0. Formalmente:

$$\exists \tau \in \mathbb{R} \text{ tale che } u(t) = 0, \forall t \geq \tau \implies \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = 0$$

Sistema BIBO-stabile

Supponiamo di avere un segnale che oscilla da un certo istante τ sempre all'interno di un certo intervallo di ampiezza. Se in output vale la stessa dinamica, il sistema si dice BIBO-stabile. Formalmente:

1. Se $(\exists \tau \wedge M_u > 0) \in \mathbb{R}$ tali che $|u(t)| < M_u$
2. Allora: $\forall t \geq \tau \implies \exists M_v > 0$
3. Infine, quest'ultimo è tale che: $|v(t)| < M_v \forall t \geq \tau$.

Prendere nota del fatto che ogni sistema asintoticamente stabile è necessariamente anche BIBO-stabile, in quanto suo caso particolare, ma non vale il contrario.

Ora che conosciamo la teoria, bisogna capire come si modellano effettivamente i sistemi. Come già detto, vengono descritti mediante equazioni differenziali per input e output. Un buon iter di lavoro generale è prima scrivere tutte le equazioni che descrivono le leggi in atto, per poi estendere la scrittura con tutte le componenti richieste. Va ordinata con output a sinistra e input a destra. L'equazione differenziale generale per la rappresentazione dei modelli è:

$$a_n \frac{\partial^n v(t)}{\partial t^n} + a_{n-1} \frac{\partial^{n-1} v(t)}{\partial t} + \dots + \frac{\partial v(t)}{\partial t} + a_0 v(t) = b_m \frac{\partial^m u(t)}{\partial t^m} + b_{m-1} \frac{\partial^{m-1} u(t)}{\partial t} + \dots + b_1 \frac{\partial u(t)}{\partial t} + b_0 u(t)$$

Qui, $b_n, a_n \neq 0$ sono due normali coefficienti. La buona notizia è che esiste una forma più compatta, grazie alla sommatoria:

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{\partial^i v(t)}{\partial t^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{\partial^j u(t)}{\partial t^j}$$

Qui invece n, m danno l'ordine delle equazioni differenziali, con generalmente $n \geq m$. Più precisamente, se $n > m$, si dice strettamente proprio e se $n \geq m$ si dice proprio. Nello schema con la black box, nel sistema si scrive proprio questa seconda equazione.

2.2 Calcolo delle risposte

Come precedentemente menzionato, i sistemi sono definiti tramite equazioni differenziali, dove la forma generale mostra a sinistra l'output e a destra l'input. A noi interessa

studiare il comportamento del sistema, quindi le sue risposte. Definiamo quindi **risposta totale**:

$$v = v_l + v_f$$

Dove le componenti sono:

- **Risposta libera:** Comportamento del sistema che dipende solo dalle condizioni iniziali.
- **Risposta forzata:** Comportamento del sistema che dipende solo da un determinato input u .

Il procedimento da effettuare si traduce nella risoluzione dell'equazione differenziale con specifici vincoli, per ottenere le due componenti ed infine descrivere il comportamento del sistema.

2.2.1 Calcolo della risposta libera

I passaggi sono equivalenti a quelli per la risoluzione di un'equazione differenziale associata ad un problema di Cauchy. Quindi:

1. Ottenimento dell'equazione omogenea.
2. Ottenimento del polinomio caratteristico.
3. Risoluzione del suddetto polinomio per ottenere radici, ordine di grandezza e molteplicità algebrica.
4. Sostituzione dei valori nelle opportune variabili nella formula della soluzione generale.
5. Applicazione delle condizioni di Cauchy.
6. Scrittura della risposta libera.

Esempio 1. *Calcolare la risposta libera dell'equazione differenziale:*

$$\begin{cases} v(0) = 0 \\ v'(0) = 1 \end{cases} ; v''(t) + 3v'(t) - 4v(t) = 5u'(t) - u(t)$$

1. Ottenimento equazione omogenea

L'equazione omogenea associata a quella presa in esame è semplicemente la parte di nostro interesse posta uguale a zero, in questo caso l'output, quindi:

$$v''(t) + 3v'(t) - 4v(t) = 0$$

2. Ottenimento polinomio caratteristico

Per ottenere la forma polinomiale bisogna sostituire alla t una variabile s , il cui grado è il numero di derivata dell'elemento:

$$s^2 + 3s - 4 = 0$$

3. Risoluzione del polinomio ottenuto

Non difficile. Sono i classici passaggi algebrici per le equazioni di secondo grado:

$$s^2 + 3s - 4 = 0 \implies (s + 4)(s - 1) = 0$$

Da questo calcolo ricaviamo due radici distinte, quindi $r = 2$, i cui valori sono: $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = 1$, e che le loro molteplicità sono: $\mu_1 = \mu_2 = 1$.

4. Sostituzione nella formula generale

Abbiamo già detto che la formula della soluzione generale è data da:

$$v_l(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} c_{i,l} \times e^{\lambda_i t} \times \frac{t^l}{l!}$$

Dove i, l sono coefficienti ottenuti con i vincoli di Cauchy. Sostituiamo:

$$\begin{aligned} v_l(t) &= c_1 \times e^t \times \frac{t^0}{0!} + c_2 \times e^{-4t} \times \frac{t^0}{0!} \\ &= c_1 e^t + c_2 e^{-4t} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Questa equazione sarà la base sulla quale andremo ad applicare le condizioni e derivare ove necessario.

5. Applicazione delle condizioni di Cauchy

Osservando le condizioni, è chiaro che saranno applicate prima alla forma normale, poi alla derivata prima. Mettiamo a sistema le due formule, sostituiamo a t il valore del vincolo e poniamo il tutto al valore richiesto:

$$\begin{cases} v_l(t) = c_{1,0}e^t + c_{2,0}e^{-4t} \\ v'_l(t) = 1c_{1,0}e^t - 4c_{2,0}e^{-4t} \end{cases} \implies \begin{cases} c_{1,0}1 + c_{2,0}1 = 0 \\ c_{1,0} - 4c_{2,0} = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} c_{1,0} + c_{2,0} = 0 \\ c_{1,0} - 4c_{2,0} = 1 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema con passaggi algebrici otteniamo infine che:

$$\begin{cases} c_{1,0} + c_{2,0} = 0 \implies c_{1,0} = 1/5 \\ c_{1,0} - 4c_{2,0} = 1 \implies c_{2,0} = -1/5 \end{cases}$$

Ottenendo così i valori delle c da sostituire alla formula generale.

6. Scrittura della risposta libera

Nulla di più semplice, una sostituzione delle c nella formula generale:

$$v_l(t) = \frac{1}{5}e^t - \frac{1}{5}e^{-4t}$$

Una cosa interessante che si può ricavare dalla descrizione dell'equazione differenziale è il **modo elementare**, descritto come:

$$m(t) = e^{\lambda_t \frac{t^l}{l!}}$$

Risulta utile considerare i suoi tre casi di studio, perché grazie ad essi possiamo trarre conclusioni sulla stabilità di un sistema:

- Il limite per t che tende ad infinito del modo è uguale a zero solamente se ogni radice del polinomio caratteristico è minore di zero. In tal caso, il sistema è **asintoticamente stabile**.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} m(t) = 0 \iff \lambda_i < 0$$

- Il modo $m(t)$ è limitato, quindi può prendere solo determinati valori, sull'intervallo $[0, +\infty)$ solamente se le radici del polinomio caratteristico sono minori o uguali a zero. In tal caso il sistema è detto **semplicemente stabile**.
- Se il limite per t che tende ad infinito è uguale ad infinito non rientriamo nei primi due casi ed il sistema è detto **instabile**.

2.2.2 Calcolo della risposta forzata

Per il calcolo della risposta forzata ci serviremo di due strumenti: la **risposta impulsiva** e l'**operatore di convoluzione**. La prima per poter prendere un qualunque valore della funzione per descriverla, il secondo invece consente, in presenza di due segnali, di calcolare l'area sottesa del loro prodotto girando rispetto all'asse delle y uno dei due segnali per poi scorrerlo sull'altro. La risposta forzata v_f è quindi definita come:

$$\begin{aligned} v_f &= (u * v)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)v(t - \tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} v(\tau)u(t - \tau)d\tau \end{aligned} \tag{2.2}$$

Questo operatore detiene anche la proprietà commutativa, associativa e distributiva rispetto alla somma, consentendo di scegliere a piacere il segnale fermo. Inoltre vedremo

che l'uscita $v(t)$ di un sistema LTI inizialmente a riposo, in corrispondenza di un ingresso $u(t)$ è data proprio dalla convoluzione fra quest'ultimo e la risposta impulsiva $h(t)$.

$$\begin{aligned} v(t) = (u * h)(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)u(t - \tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)h(t - \tau)d\tau \end{aligned} \quad (2.3)$$

Supponendo sempre un sistema LTI causale e quindi inizialmente a riposo, abbiamo la risposta impulsiva $h(t) = 0$ quando $t < 0$, perché lo stimolo impulsivo $\delta(t) = 0$ per $t < 0$. In questi termini è possibile considerare l'integrale in un determinato intervallo di tempo, semplificando eventualmente i calcoli:

$$\begin{aligned} v(t) = (u * h)(t) &= \int_{0^-}^{+\infty} h(\tau)u(t - \tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{t^+} u(\tau)h(t - \tau)d\tau \end{aligned} \quad (2.4)$$

- Calcolo della risposta impulsiva

Dato un sistema a riposo, la risposta impulsiva $h(t)$ è l'output in corrispondenza di un impulso unitario $\delta(t)$. La formula generale è:

$$h(t) = d_0\delta(t) + \left[\sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} d_{i,l} \frac{t^l}{l!} e^{\lambda_i t} \right] \delta_{-1}(t)$$

I cui elementi sono:

- d_0 : Coefficiente. Risulta uguale a zero esclusivamente se il sistema è proprio, quindi quando gli indici delle due sommatorie n, m sono uguali.
- $\delta(t)$: Impulso unitario, già menzionato.
- $d_{i,l}$: Coefficienti specifici della risposta impulsiva.
- $\frac{t^l}{l!} e^{\lambda_i t}$: Modi elementari, già menzionati.
- $\delta_{-1}(t)$: Funzione gradino per garantire la causalità dell'uscita.

Esempio 2. Calcolare la risposta impulsiva dell'equazione differenziale

$$v'(t) + 2v(t) = u(t) + u(t)$$

1. Equazione omogenea, polinomio caratteristico e calcolo delle radici

Notiamo anzitutto che entrambi i lati dell'equazione presentano un numero di coefficienti uguale, quindi è confermato che il sistema è proprio e $d_0 \neq 0$. Chiarito ciò poniamo l'output a zero e risolviamo il polinomio caratteristico:

$$v'(t) + 2v(t) = 0 \implies s + 2 = 0 \implies \lambda_1 = -2$$

Da questo risultato notiamo inoltre che abbiamo una sola radice, quindi $r = 1$ e molteplicità $\mu_1 = 1$.

2. Sostituzione valori nei modi elementari

Puri passaggi algebrici:

$$\frac{t^l}{l!} e^{\lambda_i t} \implies \frac{t^0}{0!} e^{-2t} \implies e^{-2t}$$

3. Scrittura risposta impulsiva e calcolo derivate necessarie

Prendiamo la formula generale di prima e sostituiamo il valore ottenuto. Poi, in base all'ordine di grandezza dell'equazione, sarà necessario derivare il tutto per ricavare ogni singolo termine. In questo caso, dobbiamo derivare una sola volta.

$$\begin{aligned} h(t) &= d_0 \delta(t) + \sum_{i=1}^r \sum_{l=1}^{\mu_i-1} d_{i,l} e^{\lambda_i t} \frac{t^l}{l!} \delta_{-1}(t) \\ &= d_0 \delta(t) + d_{1,0} e^{-2t} \delta_{-1}(t) \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$h'(t) = d_0 \delta'(t) - 2d_{1,0} e^{-2t} \delta_{-1}(t) + d_{1,0} e^{-2t} \delta(t)$$

4. Riscrittura equazione iniziale in termini di impulso

Quindi dobbiamo porre $v(t) = h(t)$ e $u(t) = \delta(t)$ e sostituirli all'equazione originale.

$$h'(t) + 2h(t) = \delta'(t) + \delta(t)$$

$$\begin{aligned} d_0 \delta'(t) - 2d_{1,0} e^{-2t} \delta_{-1}(t) + d_{1,0} e^{-2t} \delta(t) + 2(d_0 \delta(t) + d_{1,0} e^{-2t} \delta_{-1}(t)) &= \delta'(t) + \delta(t) \\ d_0 \delta'(t) + 2d_0 \delta(t) + d_{1,0} e^{-2t} \delta(t) &= \delta'(t) + \delta(t) \end{aligned} \quad (2.6)$$

5. Valutazione delle funzioni in $t = 0$

$$\begin{aligned} d_0 \delta'(t) + 2d_0 \delta(t) + d_{1,0} \delta(t) &= \delta'(t) + \delta(t) \\ d_0 \delta'(t) + 2d_0 \delta(t) + d_{1,0} \delta(t) - \delta'(t) - \delta(t) &= 0 \\ (d_0 - 1) \delta'(t) + (d_{1,0} + 2d_0 - 1) \delta(t) &= 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

6. Risoluzione del sistema di equazioni e soluzione finale

Dall'algebra bisogna ricordarsi il concetto di indipendenza lineare. Possiamo porre a sistema i singoli ordini di grandezza e risolverli per ottenere i valori effettivi di nostro interesse.

$$\begin{cases} (d_0 - 1) \delta'(t) = 0 \\ (d_{1,0} + 2d_0 - 1) \delta(t) = 0 \end{cases} = \begin{cases} d_0 = 1 \\ d_{1,0} = -1 \end{cases}$$

Chiaro che $d_0 = 1, d_{1,0} = -1$ siano i coefficienti da sostituire nell'equazione originale. Una volta fatto ciò, il processo è concluso.

$$\begin{aligned} h(t) &= d_0\delta(t) + d_{1,0}e^{-2t}\delta_{-1}(t) \\ &= \delta(t) - e^{-2t}\delta_{-1}(t) \end{aligned} \quad (2.8)$$

- Utilizzo dell'operatore di convoluzione

Ottenuta la risposta impulsiva, è ora possibile ottenere la forzata, la quale dipende esclusivamente da input e per i sistemi LTI causali è descritta come:

$$\begin{aligned} v_f(t) &= (u * h)(t) = \int_{0^-}^{t^+} h(\tau)u(t - \tau)d\tau \\ &= \int_{0^-}^{t^+} u(\tau)h(t - \tau)d\tau \end{aligned} \quad (2.9)$$

Esempio 3. Calcolare la risposta forzata v_f a partire dai seguenti $h(t), u(t)$

$$h(t) = \frac{1}{2}\delta_0(t) + \frac{7}{4}e^{\frac{1}{2}t}\delta_{-1}(t); u(t) = 3\delta_{-1}(t)$$

Quindi notiamo che l'input è una funzione gradino di altezza 3. Procediamo con la risoluzione dell'integrale. Le forme possibili sono:

$$\begin{aligned} v(f) &= (h * u)(t) = (h * 3\delta_{-1})(t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)3\delta_{-1}(t - \tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} 3\delta_{-1}(\tau)h(t - \tau)d\tau \end{aligned} \quad (2.10)$$

Volendo preservare la nostra sanità mentale, terremo ferma la funzione più complessa, ovvero la risposta impulsiva. I passaggi continuano come segue:

$$\begin{aligned} (h * u)(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)3\delta_{-1}(t - \tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2}\delta_0(\tau) + \frac{7}{4}e^{\frac{1}{2}\tau}\delta_{-1}(\tau) \right] 3\delta_{-1}(t - \tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}\delta_0(\tau)3\delta_{-1}(t - \tau)d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{7}{4}e^{\frac{1}{2}\tau}\delta_{-1}(\tau)3\delta_{-1}(t - \tau)d\tau \\ &= \frac{3}{2} \int_{0^-}^{0^+} \delta_0(\tau)\delta_{-1}(t - \tau)d\tau + \frac{21}{4} \int_0^{t^+} e^{\frac{1}{2}\tau}\delta_{-1}(\tau)\delta_{-1}(t - \tau)d\tau \\ &= \frac{3}{2} \times 1 + \frac{21}{4} \int_0^{t^+} e^{\frac{1}{2}\tau}d\tau \\ &= \frac{3}{2} + \frac{21}{4} \left[\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}\tau} \right]_0^t = \frac{3}{2} + \frac{21}{4} \left(\frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2} + \frac{21}{8}e^{\frac{1}{2}t} - \frac{21}{8} = v_f \end{aligned} \quad (2.11)$$

Notare come gli estremi di integrazione variano ad un certo punto. Questo accade grazie al focus del nostro interesse. Per esempio, nel primo blocco, abbiamo l'intervallo di definizione dell'impulso, per il quale risulta essere sempre uguale ad 1. Così è stato sostituito. Il secondo blocco riguarda invece gli istanti di tempo dopo l'impulso, quindi a partire da 0 all'istante t .

Un'ultima cosa che è utile menzionare, più perché è richiesta all'esame che altro, è saper definire la stabilità di un sistema. Già menzionato come una stabilità **asintotica** è confermata se la parte reale di ogni radice del polinomio caratteristico è minore di zero, ma per definire un sistema **BIBO-stabile** è necessario verificare che la risposta impulsiva sia integrabile e con un risultato finito.

Chapter 3

Laplace

3.1 Risposta in frequenza e Trasformata di Laplace

Chapter 4

Bode

Bode