- Analisi Matematica II -

Federico Brutti

May 8, 2025

"Qui c'è da applicare un procedimento matematico molto importante; si chiama porconare" - Franco Z.

Contents

Chapter 1

Equazioni Differenziali

1.1 Modelli differenziali

Passiamo da uno studio numerico ad uno particolarmente più astratto. Analisi matematica 2 è una materia molto importante non solo per consolidare le nozioni del predecessore che compongono il toolset necessario per lavorare qui, ma anche perché renderà il resto delle materie di stampo matematico più comprensibili e approcciabili.

Iniziamo riprendendo le funzioni; ne hai viste di ogni tipo, da sole, composte, inverse etc... e adesso lavorerai con famiglie di funzioni.

Definizione 1. ***Equazione differenziale ordinaria***
Definiamo equazione differenziale di ordine n un'equazione del tipo:

$$F(t, y, y', y'', ..., y^n)$$

Dove $y(t)$ è la funzione incognita ed F è una funzione assegnata delle $n+2$ variabili $(t, y, y', y'', ..., y^n)$ a valori reali. Diremo inoltre il suo ***ordine*** *l'ordine massimo di derivata che compare.*

Come potrai immaginare, l'esistenza di un'equazione implica l'esistenza di una soluzione. Non sarà bello, ma per ottenerla sarà necessario l'aiuto degli integrali.

Definizione 2. ***Curva integrale dell'equazione differenziale***
Diciamo curva integrale o soluzione dell'equazione nell'intervallo $I \subset \mathbb{R}$ una funzione $\phi(t)$, definita almeno in I e a valori reali, per cui risulti:

$$F(t, \phi(t), \phi'(t), \phi''(t), ..., \phi^n(t)) = 0, \ \forall t \in I$$

*In merito, ci servirà ottenere l'****integrale generale****, ovvero una formula che rappresenti la famiglia di tutte le soluzioni dell'equazione.*

Concetti di base ottenuti; benvenuto in analisi matematica 2.

1.2 Equazioni differenziali del primo ordine

Definizione 3. ***Equazione differenziale del primo ordine***
Si dice tale qualunque equazione differenziale si presenti con un'incognita, una funzione e una singola derivata. Avrà infatti la forma:

$$F(t, y, y') = 0, \text{ con } F \text{ funzione assegnata di } t, y, y' \text{ a valori reali}$$

Tali equazioni si risolvono attraverso l'integrazione delle stesse. Queste prenderanno una forma generale del tipo:

$$y'(t) = f(t), \text{ con soluzioni } y(t) = \int f(t)dt + c, \text{ dove } c \in \mathbb{R}$$

Essendo che l'equazione ha infinite curve integrali distinte dalla costante arbitraria c, ne traiamo che l'insieme delle soluzioni di un'equazione differenziale del primo ordine è costituito da più funzioni, dipendenti dal parametro $c : t \to \phi(t; c)$. Questa scrittura è l'**integrale generale** menzionato prima.

Qua sorge una domanda importante: sarebbe possibile determinarne una curva integrale precisa? Il quesito ha soluzione nell'aggiunta della **condizione di Cauchy**, da qui in poi riferita come *restrizione.* Infatti, applicandola all'integrale generale di un'equazione differenziale, ci consente di determinare il valore della costante arbitraria in sua funzione. Questa aggiunta forma il sovramenzionato costrutto:

Definizione 4. ***Problema di Cauchy***
Chiamiamo problema di Cauchy il processo risolutivo di un'equazione differenziale che detiene una condizione supplementare, con lo scopo ultimo di trovare una soluzione precisa. Assume la forma:

$$\begin{cases} F(t, y, y') = 0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Osserviamo le modalità di risoluzione dei suddetti problemi. Per quanto riguarda il lavoro sulle equazioni differenziali si tratta sempre di determinare prima la curva integrale, per poi applicare ad essa la restrizione del problema.

Esempio 1. ***Risolvere il seguente problema di Cauchy***

$$\begin{cases} y' = -e^{-x} \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

Per prima cosa è necessario trovare la curva integrale dell'equazione differenziale, quindi procediamo con l'integrazione.

$$\int -e^{-x}dx = e^{-x} + c$$

Abbiamo trovato la soluzione generale. Non basta: troviamo quel valore della costante c in funzione della condizione per far sì che torni. Per applicarla, sostituiamo alle x il valore 0 e poniamo l'equazione uguale a 3:

$$e^{-0} + c = 3 \implies 1 + c = 3 \implies c = 2$$

Abbiamo trovato il valore richiesto. Sostituiamolo alla costante nella soluzione generale dell'equazione differenziale per trovare la specifica.

$$Soluzione : y(x) = e^{-x} + 2$$

Lavorando con questo costrutto è cosa buona e giusta ordinare gli elementi dell'equazione. La forma standard più chiara, detta **forma normale**, vede la derivata uguale al resto dei dati, ovvero:

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

Il procedimento osservato per i problemi di Cauchy è generale e varrà per tutti gli argomenti ad esso inerenti, seppur si possano trovare alcune differenze per i casi particolari trattati nelle successive sezioni.

1.2.1 Equazioni a variabili separabili

Definizione 5. *Equazioni differenziali a variabili separabili*
Questo è un caso particolare di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine. La derivata è data dal prodotto di due funzioni a, b, la prima continua su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ e la seconda su un intervallo $J \subset \mathbb{R}$. Si presentano nella forma:

$$y' = a(t)b(y)$$

Da questa definizione, vedendo che si parla di prodotti, è necessario distinguere due istanze di lavoro:

- Se il numero $\overline{y}$ è una soluzione dell'equazione $b(y) = 0$, la funzione costante $y(t) = \overline{y}$ è una soluzione valida, detta **integrale singolare**. Il secondo membro si annulla perché $b(\overline{y}) = 0$, come anche il primo, perché la derivata di una costante è 0.

- Supponendo $b(y) \neq 0$ abbiamo il seguente caso più comune ed elaborato, ovvero la forma:

$$a(t) = \frac{y'}{b(y)}$$

È necessario ampliare il discorso sul secondo caso. Prendiamo un'ipotetica soluzione $y(t)$, allora l'equazione soddisferà la seguente identità, la quale prendendo gli integrali definiti di ambo i membri fa ottenere:

$$\frac{y'(t)}{b(y(t))} = a(t) \implies \int \frac{y'(t)}{b(y(t))} dt = \int a(t)dt + c$$

Nell'integrale di sinistra è consentito effettuare un cambio di variabile $y = y(t); dy = y'(t)dt$, ottenendo:

$$\int \frac{dy}{b(y)} = \int a(t)dt + c$$

Che risulta essere l'integrale generale dell'equazione differenziale.

Inoltre, se la funzione $B(y)$ è una primitiva di $\frac{1}{b(y)}$ e $A(t)$ una primitiva di $a(t)$, allora l'integrale generale è assegnato dalla seguente equazione in **forma implicita**:

$$B(y) = A(t) + c, \text{ con } c \text{ costante arbitraria.}$$

Adesso ragioniamo; in che modo il problema di Cauchy si adatta a questo tipo di equazioni? Abbiamo una forma apposita:

Teorema 1. ***Problema di Cauchy per ED a variabili separabili***

$$\begin{cases} y' = a(t)b(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Dove a è continua in un intorno I di t_0 e b è continua in un intorno J di y_0. Esisteranno quindi:

- *Intorno $I' \subset I$ di t_0.*
- *Funzione continua y definita su I'.*
- *Funzione derivata y' continua su I', soluzione del problema.*

Inoltre, se anche b' è una funzione continua su J oppure b ha un rapporto incrementale[1] *limitato in J (anche se non è derivabile), allora la soluzione è* ***unica***.

Esempio 2. ***Risolvere il problema di Cauchy***

$$\begin{cases} y' = ty^3 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

1. ***Calcola l'integrale generale dell'equazione differenziale***
   Anzitutto, poniamo $y \neq 0$, poiché a noi serve trovare l'integrale generale, non quello singolare. Procediamo con la separazione delle variabili:

   $$y' = ty^3 \implies \frac{dy}{dt} = ty^3 \implies \frac{dy}{y^3} = tdt$$

   Adesso possiamo procedere ad integrare le due parti distinte, quindi:

   $$\int \frac{dy}{y^3} = \int tdt + c \implies -\frac{1}{2y^2} = \frac{t^2}{2} + c$$

   Effettuiamo i passaggi algebrici per ricavare la funzione y:

   - $-\frac{1}{2y^2} = \frac{t^2}{2} + c \implies \left(-\frac{1}{2y^2}\right)^{-1} = \left(\frac{t^2}{2} + c\right)^{-1}$
   - $-2y^2 = \frac{2}{t^2 + 2c} \implies -y^2 = \frac{1}{t^2 + 2c} \implies y^2 = -\frac{1}{t^2 - 2c}$

   Che porta infine ad avere la soluzione generale:

   $$y = \pm \frac{1}{\sqrt{-2c - t^2}}$$

2. ***Imponi la condizione di Cauchy***
   Notiamo che il valore posto della condizione è positivo, di conseguenza la soluzione di y è tale che appartiene all'intervallo $(0, +\infty)$ e considereremo solamente la radice positiva della soluzione generale.

   Detto ciò, determiniamo il valore di $y(t)$ applicando la condizione; per renderci la vita ulteriormente facile, applichiamo una piccola sostituzione sulla costante. D'altronde è arbitraria. Dopodiché diamole il valore della condizione.

[1] Concetto che misura la velocità con la quale una funzione cresce o decresce in base alla variabile indipendente.

$$\textit{for } k = -2c \implies y(t) = \frac{1}{\sqrt{k - t^2}} \implies y(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}$$

Soluzione specifica dell'equazione.

1.2.2 Equazioni lineari del primo ordine

Tipo di equazioni differenziali ordinarie, dove F è lineare in y e y', le cui soluzioni sono espresse mediante uno spazio vettoriale di dimensione 1. Si presentano nella forma:

$$a_1(t)y'(t) + a_2(t)y(t) = g(t)$$

Con a_1, a_2 funzioni continue su un intervallo. L'equazione può presentarsi in due forme diverse, date a ed f funzioni continue sull'intervallo $I \subset R$:

- **Equazione completa o forma normale**; scrivibile se il coefficiente $a_1(t)$ non si annulla.

  $$y'(t) + a(t)y(t) = f(t)$$

  Otteniamo la sua soluzione aggiungendone una particolare alla sua curva integrale, definita da un valore conosciuto della costante arbitraria c.

- **Equazione omogenea**; ottenibile ponendo $f(t) = 0$, presenta la seguente forma:

  $$z'(t) + a(t)z(t) = 0$$

  Notiamo che le y sono sostituite dalle z per chiarire il tipo di equazione presa in esame.

Capiamo quindi che il procedimento da attuare si compone di due passi principali: prima la ricerca di un integrale generale dell'equazione omogenea, poi trovare la soluzione particolare da aggiungere a quella completa. Vediamo un esempio:

Esempio 3. ***Risoluzione equazione differenziale lineare del primo ordine***
Consideriamo la seguente semplice equazione:

$$y'(t) + 3y(t) = 2t, \textit{ dove } a(t) = 3, \; f(t) = 2t \textit{ e la primitiva } A(t) = 3t$$

1. ***Ricerca della soluzione generale dell'equazione omogenea***
   L'equazione omogenea ha forma $y'(t) + a(t)y(t) = 0$, di conseguenza prenderemo quella iniziale ponendo $f(t) = 0$, per poi moltiplicare tutto per l'esponenziale alla primitiva $A(t)$ ed infine ricavare $z'(t)$

   $$z'(t) + 3z(t) = 0 \implies z'(t)e^{3t} + 3z(t)e^{3t} = 0 \implies z'(t)e^{3t} = 0$$

   Avendo ottenuto una funzione differenziale, necessitiamo di integrarla per ottenere quello che ci serve.

   $$\int z'(t)e^{3t}dt = z(t)e^{3t} + c \implies z(t) = ce^{-3t}$$

   *Come dici? Hai sbagliato il segno? Forse devo ricordarti il significato di costante **arbitraria**. Può essere quello che voglio, quando lo voglio.*

2. ***Metodo di variazione delle costanti per trovare il valore di c***
   Il metodo consiste nel trasformare la costante in una funzione. Abbiamo che la soluzione appena trovata è di forma $\overline{y} = ce^{-3t}$, la quale dovrà prendere il posto delle y nell'equazione iniziale, dando la forma:

   $$e^{-3t}(c'(t) - 3c(t)) + 3c(t)e^{-3t} = 2t \implies e^{-3t}c'(t) = 2t$$

   Ora dobbiamo trovare la funzione $c(t)$, quindi spostiamo gli elementi ed integriamo le due parti.

   $$c'(t) = 2te^{3t} \implies c(t) = \int 2te^{3t}dt \implies c(t) = \frac{2}{3}te^{3t} - \frac{2}{9}e^{3t}$$

   Ora, sperando che quello che sto per fare non sia un abusivismo notazionistico, rimuovo l'esponenziale dall'equazione, siccome la funzione della costante è arbitraria e può essere quello che voglio, ottenendo:

   $$c(t) = \frac{2}{3}t - \frac{2}{9}$$

3. ***Composizione dell'integrale generale dell'equazione completa***
   Adesso abbiamo tutte le equazioni necessarie per scrivere la soluzione:

   - $z(t) = ce^{-3t}$
   - $c(t) = \dfrac{2}{3}t - \dfrac{2}{9}$

   $$\textit{Soluzione: } y(t) = ce^{-3t} + \frac{2}{3}t - \frac{2}{9}$$

1.3 Equazioni differenziali lineari del secondo ordine

Un'equazione differenziale è tale se si presenta nella forma:

$$a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = f(t)$$

Dove i coefficienti a_i ed il termine noto f sono funzioni definite in un intervallo I dove sono continue. Come in quelle del primo ordine, se il termine noto è 0, l'equazione si dice **omogenea**, altrimenti è **completa**. Inoltre, se le funzioni a_i sono costanti, la chiameremo **a coefficienti costanti**, in caso contrario sarà a **coefficienti variabili**. Infine, se $a_2(t) \equiv 1$ si dirà in **forma normale**.

La chiamiamo lineare perché introducendo tra gli spazi di funzioni[2] un operatore apposito L al primo membro, possiamo notare che ha una dinamica uguale alle applicazioni lineari viste in algebra. Quindi:

$$L : C^2(I) \to C^0(I)$$
$$L : y \to Ly$$

Noterai sicuramente che $y \in C^2(I)$ e $Ly \in C^0(I)$. Si mantiene lo stesso ragionamento anche per i coefficienti reali λ_i:

$$L(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 L y_1 + \lambda_2 L y_2$$

Capiamo che parlando di problemi di Cauchy, l'integrale generale di qualsiasi equazione del secondo ordine avrà necessariamente due parametri arbitrari e due restrizioni. La scrittura completa risulta essere:

$$\begin{cases} y'' + a(t)y' + b(t)y = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases}$$

Dove a, b, f sono funzioni continue nell'intervallo I tale che $t_0 \in I \forall y_0, y_1 \in \mathbb{R}$. Il problema avrà una sola soluzione $y \in C^2(I)$, individuata imponendo le restrizioni.

La nostra fortuna di poter lavorare con un operatore lineare rende semplice trovare la struttura dell'integrale generale; c'è pure il teorema:

Teorema 2. ***Struttura dell'integrale generale dell'equazione lineare completa***

[2]Si tratta del concetto di **classi di funzioni**. La classe C di una funzione indica l'appartenenza della stessa all'insieme delle funzioni derivabili con continuità per n numero di volte.

1. *L'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea $Lz = 0$ in un intervallo I è uno spazio vettoriale e sottospazio di $C^2(I)$.*

2. *L'integrale generale dell'equazione completa si ottiene sommando l'integrale di quella omogenea con una soluzione particolare della prima.*

In particolare, dal primo punto del teorema evinciamo che ci saranno due soluzioni dell'equazione omogenea $z_1(t), z_2(t)$ linearmente indipendenti ed ogni altra soluzione dell'omogenea è combinazione lineare delle $z_i(t)$. Quindi l'integrale generale sarà dato dalla formula:

$$c_1 z_1(t) + c_2 z_2(t), \text{ con } c_i \text{ costanti arbitrarie.}$$

Talvolta risulterà dubbio se le soluzioni sono linearmente dipendenti o meno, ed esattamente per questo ci viene in soccorso l'algebra lineare con la nozione di determinante:

Teorema 3. ***Matrice Wronksiana per controllo indipendenza lineare***

Il controllo è molto semplice; creiamo una matrice 2x2 dove la prima riga è costituita dalle soluzioni, mentre la seconda dalle loro derivate prime. Se il calcolo del determinante $det(Mat) = ad - cb \neq 0$, allora le soluzioni saranno linearmente indipendenti. In caso contrario se ne dovranno cercare delle altre.

$$Mat = \begin{pmatrix} z_1(t) & z_2(t) \\ z_1'(t) & z_2'(t) \end{pmatrix}$$

Esempio 4. ***Determinazione soluzioni dell'equazione omogenea di second'ordine***

Consideriamo la seguente equazione differenziale omogenea di secondo ordine:

$$t^2 z'' - 3tz' + 3z = 0, \text{ per Ansatz: } z_1 = t \text{ e } z_2 = t^3$$

Grazie al nostro approccio avremo di conseguenza:

- $z_1 = t \implies z_1' = 1 \implies z_1'' = 0$
- $z_2 = t^3 \implies z_2' = 3t^2 \implies z_2'' = 6t$

Verifichiamo se sostituendo gli elementi trovati l'equazione si annulla:

- $t^2 z_1'' - 3tz_1' + 3z_1 = 0 \implies t^2 \times 0 - 3t \times 1 + 3 \times t = 0 \implies -3t + 3t = 0$
- $t^2 z_2'' - 3tz_2' + 3z_2 = 0 \implies t^2 \times 6t - 3t \times 3t^2 + 3 \times t^3 \implies 6t^3 - 9t^3 + 3t^3 = 0$

Abbiamo confermato che quelle trovate sono soluzioni valide per l'equazione omogenea. Sono tuttavia linearmente dipendenti? Effettuiamo il check con la matrice Wronskiana:

$$Mat = \begin{pmatrix} z_1(t) & z_2(t) \\ z_1'(t) & z_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & t^3 \\ 1 & 3t^2 \end{pmatrix}$$

$$det(Mat) = ad - cb = (t \times 3t^2) - (1 \times t^3) = 2t^2 \neq 0$$

Soluzioni valide e linearmente indipendenti. Meglio di così? Resta solo scrivere la soluzione generale dell'omogenea:

$$z(t) = c_1 z_1 + c_2 z_2 = c_1 t + c_2 t^3$$

Premetto che non sarà sempre possibile risolvere un'equazione differenziale di secondo ordine, ma è normale che sia così; non ci vogliamo ancora così male. Per questa ragione ci soffermeremo solamente sui due casi particolari trattati nelle successive sezioni; tuttavia il seguente procedimento generale per gli esercizi trattati è universale. Facciamone il punto:

1. Determinare la curva integrale generale dell'equazione omogenea, trovando due sub-soluzioni z_1, z_2 linearmente indipendenti.

2. Determinare la soluzione particolare dell'equazione completa.

3. Scrivere la curva integrale generale dell'equazione completa in forma: $y(t) = \overline{y}(t) + c_1 z_1(t) + c_2 z_2(t)$

1.3.1 Equazioni lineari omogenee a coeffcienti costanti

Nominata all'inizio della sezione, riprendiamo l'equazione differenziale lineare del secondo ordine **a coefficienti costanti**:

$$z''(t) + az'(t) + bz(t) = 0, \text{ dove } a, b \text{ sono valori costanti.}$$

Come in quelle di primo ordine, risulta comodo ricercare soluzioni di tipo esponenziale $t \to e^{rt}$, con $r \in \mathbb{C}$. La prima furbata sta qui; la derivata dell'esponenziale non varia, quindi se sostituiamo e^{rt} ad ogni z, potremo raccogliere il primo, per poi rimuoverlo completamente dall'equazione in quanto valore sicuramente positivo.

$$e^{rt}(r^2 + ar + b) = 0 \implies r^2 + ar + b = 0$$

Questa equazione ottenuta si dice **equazione caratteristica** ed è risolvibile come una normalissima equazione di secondo grado, con la formula quadratica. In tal merito, ci è possibile distinguere tre casi in base al valore del discriminante:

- $\Delta > 0$; L'equazione caratteristica avrà due radici reali e distinte r_1, r_2, quindi le funzioni $z_1(t) = e^{r_1 t}$ e $z_2(t) = e^{r_2 t}$ saranno due soluzioni distinte e indipendenti dell'equazione omogenea. Si tratta del caso più semplice e l'integrale si scrive come:

$$z(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

- $\Delta = 0$; L'equazione caratteristica avrà una sola radice con doppia molteplicità, quindi $r = -\frac{a}{2}$. Abbiamo quantomeno la sicurezza che una soluzione è data da:

$$z(t) = ce^{-\frac{a}{2}t}$$

  Mentre per l'altra sarà necessario utilizzare il metodo di variazioni delle costanti, ponendo il valore $c(t)$. Otteniamo:

$$z(t) = c(t)e^{rt}, \text{ dove } r = -\frac{a}{2}$$

  Da cui derivata prima e seconda sono:

  - $z'(t) = e^{rt}(rc(t) + c'(t))$
  - $z''(t) = e^{rt}(r^2 c(t) + 2rc'(t) + c''(t)$

  E sostituendo tutto all'equazione iniziale otteniamo:

$$e^{rt}[(r^2 + ar + b)c(t) + (2r + a)c'(t) + c''(t)] = 0$$

  Notiamo in primis che r è soluzione dell'equazione caratteristica, quindi il coefficiente $c(t)$ si annulla, come d'altronde lo fa anche $c'(t)$, perché risulta $a - a = 0$. Quindi la nostra equazione omogenea "variata" deve risultare necessariamente $c''(t) = 0$, da cui $c(t) = c_2 t + c_1$. Scriveremo quindi come segue la soluzione generale dell'omogenea:

$$z(t) = e^{-\frac{a}{2}t}(c_2 t + c_1)$$

- $\Delta < 0$; L'equazione caratteristica avrà due radici complesse e coniugate $r_1 = a + bi$ e $r_2 = a - bi$, date dalle relative funzioni:

  - $z_1(t) = e^{(a+bi)t} = e^{at}(cos(bt) + isin(bt))$
  - $z_2(t) = e^{(a-bi)t} = e^{at}(cos(bt) - isin(bt))$

Volendo noi preferibilmente soluzioni reali piuttosto che complesse e ricordando che ogni combinazione lineare è una soluzione, possiamo prendere rispettivamente, grazie ad un magheggio algebrico: $\frac{1}{2}(z_1 + z_2)$ e $\frac{1}{2i}(z_1 - z_2)$, ovvero la forma che userai al posto delle altre:

$$z_1(t) = e^{at}cos(bt),\ z_2(t) = e^{at}sin(bt)$$

Le quali formano l'integrale generale $z(t)$:

$$z(t) = e^{at}(c_1cos(bt) + c_2sin(bt))$$

Esempio 5. ***Risoluzione equazioni omogenee per ogni caso***

- $\Delta > 0$*:*

  Consideriamo l'equazione $z'' - 2z' - 3z = 0$. Facendoci furbi potremmo usare l'algebra, ma mostrerò il procedimento generale con la formula quadratica. Anzitutto, passiamo all'equazione caratteristica:

  $$z'' - 2z' - 3z = 0 \implies r^2 - 2r - 3 = 0$$

  Definiamo ora le parti della formula quadratica come $a = 1$, $b = -2$, $c = -3$ e svolgiamo i calcoli:

  $$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \implies \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2}$$

  Che ci darà rispettivamente:

  - $r_1 = 3$
  - $r_2 = -1$

  Ora abbiamo tutti gli elementi per la formula dell'integrale generale:

  $$z(t) = c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t} \implies c_1e^{3t} + c_2e^{-t}$$

- $\Delta = 0$*:*

  Consideriamo l'equazione $z'' + 6z' + 9z = 0 \implies r^2 + 6r + 9 = 0$. Facendoci furbi e notando che questo è un trinomio particolare, otteniamo che ha due soluzioni perfettamente uguali:

  - $r_1 = -3$

- $r_2 = -3$

Quindi che fare? Teniamo r_1 e facciamo dipendere r_2 dall'incognita t. Molto semplicemente otteniamo che:

$$z(t) = c_1 e^{r_1} + c_2 t e^{r_1} \implies c_1 e^{-3t} + c_2 t e^{-3t} \equiv e^{-3t}(c_1 + c_2 t)$$

- $\Delta < 0$*:*

  Comsideriamo l'equazione $z'' + 2z' + 5z = 0 \implies r^2 + 2r + 5 = 0$. Notiamo che usando la formula quadratica, risulta un discriminante che ha senso solo nel campo dei complessi. Ne agiamo di conseguenza:

$$z_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-2 \pm 4i}{2}$$

  Avremo di conseguenza le due soluzioni:

  - $r_1 = a + bi \implies r_1 = -1 + 2i$
  - $r_2 = a - bi \implies r_2 = -1 - 2i$

  Siccome a noi interessa avere soluzioni reali, considereremo solamente tali valori delle soluzioni, ottenendo $\alpha = -1$, $\beta = 2$. Ora possiamo scrivere la formula generale:

$$z(t) = c_1 e^{\alpha t} cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t} sin(\beta t) \implies e^{-t}(c_1 cos(2t) + c_2 sin(2t))$$

1.3.2 Equazioni lineari non omogenee a coefficienti costanti

Il nostro scopo qui è trovare l'integrale particolare dell'equazione completa. Non differisce molto dal metodo per le equazioni del primo ordine, questo è come il secondo passaggio. La forma da trovare è:

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t), \text{ con } a, b \text{ valori costanti.}$$

Ci troviamo di fronte a due strade in base all'esercizio proposto; nel caso in cui f avesse una forma semplice, ovvero un polinomio oppure un polinomio moltiplicato per un esponenziale, è consigliato ricercare una soluzione che gli somigli, mediante il **metodo di somiglianza**. In alternativa, è sempre possibile usare il metodo di variazione delle costanti visto per il precedente ordine, anche se risulta più oberoso a livello di calcoli.

Definizione 6. ***Metodo di somiglianza - caso polinomiale***
Sia $f(t) = p_r(t)$, dove quest'ultimo è un polinomio di grado r. Cercheremo una soluzione di tipo polinomiale come segue:

- *Se* $(b \neq 0) \implies y(t) = q_r(t)$.
- *Se* $(b = 0 \wedge a \neq 0) \implies y(t) = tq_r(t)$.
- *Se* $(b = 0 \wedge a = 0) \implies y(t) = t^2 q_r(t)$.

Dove $q_r(t)$ *è un polinomio di grado* r *di cui occorre determinare i coefficienti.*

Esempio 6. *Si consideri l'equazione differenziale* $y'' - 3y' + 2y = 1 + t^2$. *La forma della soluzione è:*

$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} + \phi(t)$$

Dove r_i *sono le radici dell'equazione omogenea e* $\phi(t)$ *indica una forma simile al membro dell'equazione differenziale di destra. Affrontiamo i due passaggi:*

1. ***Ricerca delle radici dell'equazione omogenea***

   Come visto prima, ricerchiamo l'equazione caratteristica:

   $$z''(t) - 3z'(t) + 2z(t) = 0 \implies r^2 - 3r + 2 = 0$$

   Risolviamola come una semplice equazione di secondo grado, con l'algebra:

   $$r^2 - 3r + 2 = 0 \implies (r-2)(r-1) = 0 \implies r_1 = 2,\, r_2 = 1$$

   La soluzione generale dell'equazione omogenea sarà quindi:

   $$z(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^t$$

2. ***Ricerca della soluzione completa***

   Ora cerchiamo l'altra parte necessaria per la curva integrale particolare; il metodo della somiglianza dice di prendere un polinomio simile a quello dato, dello stesso grado. In tal caso prenderemo la forma generale del polinomio di secondo grado, ottenendo:

   $$\overline{y}(t) = at^2 + bt + c,\ \overline{y'}(t) = 2at + bt,\ \overline{y''}(t) = 2a$$

   Queste tre funzioni vanno ora sostituite alle loro corrispondenti nell'equazione differenziale iniziale, quindi:

   $$y'' - 3y' + 2y = 1 + t^2 \implies 2a - 3(2at + b) + 2(at^2 + bt + c) = 1 + t^2$$

   La quale, effettuando qualche calcolo, diventa:

$$(2a)t^2 - (6a - 2b)t + (2a - 3b + 2c) = 1 + t^2$$

Ora utilizzeremo l'algebra per renderci le cose più semplici. La ragione per cui ho voluto confinare i valori noti delle parti dell'equazione è per rendere quali coefficienti debbano essere presi e messi a sistema, eguagliati al loro corrispettivo valore con lo stesso grado.

Se non risulta chiaro è normale. Bisogna immaginare che al membro di destra siano presenti sempre tutti i coefficienti per ogni grado, quindi nel nostro caso: $1t^2, 0t^1, 1t^0 \implies 1, 0, 1$. *Questi tre numeri vanno eguagliati ai polinomi con lo stesso grado; quindi:*

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ -6a + 2b = 0 \\ 2a - 3b + 2c = 1 \end{cases} = \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{3}{2} \\ c = \frac{9}{4} \end{cases}$$

Questi tre valori vengono ora sostituiti alle corrispondenti lettere nell'equazione $\overline{y}$*, la quale ci darà la soluzione particolare che ci serve.*

$$\overline{y} = at^2 + bt + c \implies \overline{y} = \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{3}{2}t + \tfrac{9}{4}$$

La soluzione completa è infatti data da:

$$y(t) = c_1e^{2t} + c_2e^t + (\tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{3}{2}t + \tfrac{9}{4})$$

Definizione 7. ***Metodo di somiglianza - caso polinomiale ed esponente***

Sia $f(t) = Ae^{\lambda t}$*, con* $\lambda \in \mathbb{C}$*. Cercheremo una soluzione in forma* $y(t) = e^{\lambda t}\gamma(t)$*. Troviamo che:*

$$\gamma'' + \gamma'(2\lambda + a) + \gamma(\lambda^2 + a\lambda + b) = A$$

Ci basta trovare una qualsiasi $\gamma(t)$ *che soddisfi la forma appena vista; ma anche qui abbiamo alcuni casi su cui ragionare.*

- *Se* $\lambda^2 + a\lambda + b \neq 0$*, quindi* λ *non è radice dell'equazione caratteristica avremo:*

$$\textit{Costante } \gamma(t) = \frac{A}{\lambda^2 + a\lambda + b} \implies y(t) = \frac{Ae^{\lambda t}}{\lambda^2 + a\lambda + b}.$$

- *Se* $(\lambda^2 + a\lambda + b = 0) \land (2\lambda + a \neq 0)$*, prenderemo:*

$$\text{Costante } \gamma'(t) = \frac{A}{2\lambda + a} \implies \left(\gamma(t) = \frac{At}{2\lambda + a}\right) \wedge \left(y(t) = \frac{Ate^{\lambda t}}{2\lambda + a}\right).$$

- *Se* $(\lambda^2 + a\lambda + b = 0) \wedge (2\lambda + a = 0)$ *diremo che l'equazione iniziale è* $\gamma'' = A$*, da cui otteniamo:*

$$\left(\gamma(t) = \frac{A}{2}t^2\right) \wedge \left(y(t) = \frac{A}{2}t^2 e^{\lambda t}\right)$$

Esempio 7. *Consideriamo l'equazione differenziale* $y'' + y' - 2y = 3e^{-t}$ *ed effettuiamo i classici passaggi:*

1. ***Ricerca della soluzione generale omogenea***

   Mi sbrigo un attimo con i passaggi, dai, ora hai capito come gira.

   - *Equazione caratteristica:* $r^2 + r - 2 = 0$*, con soluzioni* $r_1 = -2$, $r_2 = 1$.
   - *Soluzione generale:* $z(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^t$

2. ***Applichiamo il metodo di somiglianza***

   Qui abbiamo un polinomio di grado zero moltiplicato per un esponenziale; la sua forma generale è data da:

   - $\overline{y}(t) = ae^{-t}$*, l'esponenziale preso è lo stesso della ED.*
   - $\overline{y'}(t) = -ae^{-t}$
   - $\overline{y''}(t) = ae^{-t}$

   Sostituendo opportunamente, otteniamo:

   $$ae^{-t} - ae^{-t} - 2ae^{-t} = 3e^{-t} \implies e^{-t}(-2a - 3) = 0 \implies a = -\tfrac{3}{2}$$

   Sostituendo a $\overline{y}$ *quanto trovato, otteniamo* $-\frac{3}{2}e^{-t}$*, ottenendo la soluzione completa che segue:*

   $$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^t - \tfrac{3}{2}e^{-t}$$

Esempio 8. *Consideriamo l'equazione differenziale* $y'' + y' - 2y = 3e^t$*. Questo risulta essere un caso particolare, perché almeno una delle radici dell'omogenea ha lo stesso identico valore dell'esponente nella ED. L'equazione è quasi uguale a quella del precedente esempio, se hai lamentele, guarda il procedimento su.*

1. ***Per l'omogenea***
    - *Equazione caratteristica:* $r^2 + r - 2 = 0$
    - *Radici del polinomio:* $r_1 = -2$, $r_2 = 1$
    - *Soluzione generale:* $z(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^t$

2. ***Per la curva completa***

    Noterai che almeno una delle radici è uguale all'esponente del membro di destra della ED; non apportare modifiche è un errore, quindi che fare?

    Risulta necessario far dipendere l'esponenziale da una t di grado uguale alla molteplicità algebrica[3] *dell'esponenziale, quindi:*

    $$\overline{y}(t) = ate^t,\ \overline{y'}(t) = ae^t + ate^t,\ \overline{y''}(t) = ae^t + ae^t + ate^t$$

    Sostituendo e svolgendo i calcoli otteniamo:

    $$ae^t + ae^t + ate^t + ae^t + ate^t - 2(ate^t) = 3e^t \implies a = 1 \implies \overline{y}(t) = te^t$$

    Otteniamo finalmente la curva integrale particolare data da:

    $$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^t + te^t$$

Notare che nella classe di termini noti $Ae^{\lambda t}$, con $\lambda \in \mathbb{C}$, appartengono anche le seguenti categorie:

$$cos\omega t,\ sin\omega t,\ e^{\lambda t}cos\omega t,\ e^{\lambda t}sin\omega t,\ \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Definizione 8. ***Metodo di sovrapposizione***
Nel caso in cui $f(t)$ sia una combinazione lineare di termini appartenenti a due tipi di funzione diversi[4]*, per linearità allora:*

1. *Troviamo una soluzione dell'equazione che ha come termine noto il primo elemento di quello originario.*

2. *Troviamo una soluzione dell'equazione che ha come termine noto il secondo elemento di quello originario.*

3. *Troviamo una soluzione dell'equazione di partenza, che sarà la somma delle due soluzioni prima trovate.*

Esempio 9. *Inserisci esempio*

---

[3] Si tratta del numero di volte in cui compare il valore nel polinomio

[4] Un esempio è la somma di un polinomio con un esponenziale, oppure un esponenziale sommato con una funzione trigonometrica.

Chapter 2

Calcolo Infinitesimale

2.1 Calcolo infinitesimale per le curve

Prima di iniziare l'argomento è necessario rimettere in chiaro alcuni importanti concetti visti in precedenza con algebra lineare, come il **calcolo vettoriale**. Quanto verrà espresso ora si trova nello spazio $\mathbb{R}^n$, i cui elementi si dicono **vettori** e si indicano con $v = (x_1, x_2, ..., x_n)$, mentre le x_i sono le **componenti del vettore**.

Diremo poi **modulo** o norma di un vettore la radice del prodotto scalare fra ogni sua componente alla seconda. Si scrive:

$$|v| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \equiv \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$$

Diciamo poi **versore** il vettore unitario indicato con:

$$vers(v) = \frac{v}{|v|} = 1$$

Lo spazio R^n è poi dotato della **base canonica**, dove ogni vettore e_i presenta un solo valore 1 in una posizione i, con tutte le altre uguali a 0

$$e_1 = (1, 0, ..., 0, 0),\ e_2 = (0, 1, ..., 0, 0),\ e_n = (0, 0, ..., 0, 1)$$

Ed ogni vettore può essere espresso come combinazione lineare degli elementi della base canonica:

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

Le operazioni classiche somma algebrica e prodotto per uno scalare portano al **prodotto scalare**, già menzionato prima e definito come:

$$\langle v_1, v_2 \rangle = (u_1, u_2, ..., u_n)(w_1, w_2, ..., w_n) = \sum_{i=1}^{n} u_i w_i$$

In particolare, se lo spazio $\mathbb{R}^n$ ha dimensione 2 o 3, abbiamo che funziona il **teorema del coseno**:

$$\langle v_1, v_2 \rangle = |v_1||v_2| \cos(\theta) \implies \cos(\theta) = \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{|v_1||v_2|}$$

dove theta è un angolo compreso fra i due vettori. Diremo inoltre che due vettori si dicono **ortogonali** quando il loro prodotto scalare è uguale a zero.

Infine, richiamiamo il **prodotto vettoriale**, un procedimento simile a quello per il calcolo dell'inversa di una matrice. Sfortunatamente, solo la parte più tediosa:

$$u \times v = \begin{pmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = i(u_2v_3 - u_3v_2) - j(u_1v_3 - u_3v_1) + k(u_1v_2 - u_2v_1)$$

In tal merito, se il prodotto vettoriale di due vettori è 0, questi si dicono **paralleli**. Per quanto riguarda i prerequisiti di algebra, queste nozioni sono sufficienti, quindi soffermiamoci sullo scopo che vogliamo darci.

Finora abbiamo lavorato con la nozione di funzione ad una singola variabile reale; dobbiamo estendere il concetto per far sì che comprenda anche i casi in cui si ricevano o ritornino più variabili. Lavoreremo infatti con funzioni del tipo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ oppure $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Nello specifico:

- **Funzione di più variabili**; Funzione definita sullo spazio $A \subset \mathbb{R}^n$, con $n = 1$.
- **Funzione a valori reali**; Funzione che ha immagine $f(A) \subseteq \mathbb{R}$.
- **Funzione a valori vettoriali**; Funzione con immagine $f(A) \subset \mathbb{R}^n$, dove $n > 1$.

Generalmente ci interesseremo massimo allo spazio $\mathbb{R}^3$, perché altrimenti la cosa diventerebbe estremamente dolorosa. Ricorda: se è a una dimensione, ha una sola variabile reale, se ne ha due, stai lavorando con vettori, mentre se ne ha tre con una matrice 3×3 e così via.

2.1.1 Calcolo differenziale e integrale per funzioni a valori vettoriali

Anzitutto osserveremo casi di calcolo infinitesimale per funzioni a più variabili, che risulta essere il caso più semplice su cui lavorare; più nello specifico, vedremo che in dimensione 2 e 3, le funzioni assumeranno il significato geometrico di curva nel piano o nello spazio rispettivamente.

Definizione 9. ***Limite per funzioni a più variabili***
Sia $r : I \to \mathbb{R}^m$, con I intervallo dello spazio $\mathbb{R}$. Siano ora $t_0 \in I \wedge l \in \mathbb{R}^m$, con l il valore del limite. Allora:

$$\lim_{t \to t_0} |r(t) - l| = 0 \implies \lim_{t \to t_0} r(t) = l$$

Questa definizione viene utilizzata per le funzioni ad una variabile, tuttavia è estendibile anche a funzioni vettoriali immaginando che $r(t)$ comprenda ogni singola componente del vettore, quindi come $r(t) = [r_1(t), r_2(t), ..., r_n(t)]$, che produrrà altrettanti valori l_i. Infatti, se prendiamo una funzione vettoriale dello spazio $\mathbb{R}^2$ possiamo dire che:

$$\lim_{t \to t_0} |r(t) - l| = 0 \implies \lim_{t \to t_0} \left| \begin{pmatrix} r_1(t) - l_1 \\ r_2(t) - l_2 \end{pmatrix} \right|$$

Che ci fa ottenere, finalmente, la forma generale del limite che ci serve per gli esercizi. Nonostante questa sia quella per lo spazio di dimensione 2, è facilmente estendibile a dimensioni superiori:

$$\lim_{t \to t_0} \sqrt{(r_1(t) - l_1)^2 + (r_2(t) - l_2)^2} = 0 \implies \lim_{t \to t_0} (r_1(t) - l_1) + (r_2(t) - l_2) = 0$$

Esempio 10. ***Calcolo di limite di funzione*** $r : I \to \mathbb{R}^3$
Consideriamo la funzione: $r(t) = (\cos(t) + \pi, e^t - 1, \sin(t^2))$. Per calcolarne il limite per $t \to t_0$, bisogna applicarlo per ogni singola componente del vettore. Avremo quindi che:

$$lim_{t \to t_0} r(t) = \begin{cases} lim_{t \to t_0}(\cos(t) + \pi) = 1 + \pi \\ lim_{t \to t_0}(e^t - 1) = 0 \\ lim_{t \to t_0}(\sin(t^2)) = 0 \end{cases}$$

Se hai dubbi sui risultati ottenuti dai limiti, ripassati la teoria di analisi 1 perché sarà fondamentale. Il vettore di risultati ottenuti sarà:

$$lim_{t\to t_0} r(t) = (1+\pi, 0, 0)$$

Fortunatamente, abbiamo che definizioni e proprietà dei limiti di funzioni vettoriali sono analoghe alle loro controparti unidimensionali; infatti:

- Vale il teorema di unicità del limite.
- Vale il teorema sul limite della somma o del prodotto per una costante.
- La definizione di funzione continua in un punto o insieme è la medesima. Diciamo infatti che $r : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ è continua in t_0 se vale che:

  $$\lim_{t\to t_0} r(t) = r(t_0)$$

  Generalmente, una funzione a valori vettoriali è continua se e solo se lo sono tutte le sue componenti.

Se vale il limite, sarà possibile utilizzarlo per dare la definizione di **derivata per le funzioni a valori vettoriali**, non molto dissimile da quella vista in termini unidimensionali.

Definizione 10. ***Derivata di funzioni a valori vettoriali***
Sia r una funzione tale che $r : I \to \mathbb{R}^m$, con $t_0 \in I$. Diciamo che r è derivabile se esiste finito il limite di quanto segue:

$$\begin{aligned} r'(t) &= \lim_{t\to t_0} \frac{r(t_0+h-r(t_0))}{h} \\ &= \left(\lim_{h\to 0} \frac{r_1(t_0+h-r_1(t))}{h}, \lim_{h\to 0} \frac{r_2(t_0+h-r_2(t))}{h}, ..., \lim_{h\to 0} \frac{r_m(t_0+h-r_m(t))}{h}\right) \\ &= r_1'(t_0), r_2'(t_0), ..., r_m'(t_0) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Noterai che ogni scrittura è conseguenza diretta della precedente. Inoltre, se r è derivabile in tutto lo spazio I e la sua derivata è ivi continua, diremo che la funzione è di classe $C^1(I)$ e lo annotiamo come $r \in C^1(I)$. Tale concetto è estendibile a ordini successivi se la derivata continua ad essere continua.

Ne esce naturalmente che gli integrali seguano una stessa dinamica.

Definizione 11. ***Integrale di funzioni a valori vettoriali***
Sia r una funzione tale che $r : [a,b] \to \mathbb{R}^m$, come prima. L'integrazione segue la relazione:

$$\int_a^b r(t)dt = \left(\int_a^b r_1(t)dt, \int_a^b r_2(t)dt, ..., \int_a^b r_m(t)dt\right)$$

E diciamo che r è integrabile nell'intervallo $[a, b]$ se e solo se tutte le sue componenti sono integrabili. Valgono inoltre il ***teorema fondamentale del calcolo integrale****, con la funzione di classe $C^1([a, b])$:*

$$\int_a^b r'(t)dt = r(b) - r(a)$$

E se r è integrabile abbiamo che vale:

$$\int_a^b r(t)dt \leq \int_a^b |r(t)|dt$$

2.1.2 Curve regolari e lunghezza di un arco di curva

Possiamo iniziare il discorso facendo appello alla fisica. Se immaginiamo un punto materiale che si muove su uno spazio tridimensionale, la sua dinamica sarà espressa da una funzione di forma: $r : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^3$ e le coordinate dal vettore $r = (x, y, z)$.

Dunque, dato il punto $t \in [t_1, t_2]$ dato in pasto alla funzione r, avremo che la funzione prenderà la forma generale di:

$$r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k \equiv r(t) = (x(t) + y(t) + z(t))$$

Ovviamente il concetto vale anche per spazi bidimensionali, come n-dimensionali. Nel primo caso avremo una funzione $r : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^2$ con le coordinate date da $r = (x, y)$ e la funzione generale:

$$r(t) = x(t)i + y(t)j \equiv r(t) = (x(t) + y(t))$$

Possiamo ora introdurre il concetto di **arco di curva continua** γ. Rigorosamente, è la coppia costituita da due parti:

1. Una funzione continua del tipo $r : I \to \mathbb{R}^m$, detta **parametrizzazione della curva**.

2. Un insieme di punti di $\mathbb{R}^m$ costituente l'immagine della funzione r, chiamato **sostegno della curva**.

Proprio grazie a questa divisione in componenti possiamo avere funzioni diverse con uno stesso sostegno. Inoltre, se esiste la derivata seconda, possiamo definire la **velocità scalare** con la formula:

$$v(t) = |r'(t)|$$

Un arco di curva continua può assumere le seguenti caratteristiche:

- L'arco è **chiuso** se nell'intervallo di definizione $I = [a, b]$ il punto iniziale della curva coincide con quello finale, quindi $r(a) = r(b)$.
- L'arco è **semplice** se la curva non ripassa mai dallo stesso punto, quindi $t_1 \neq t_2 \implies r(t_1) \neq r(t_2)$.
- L'arco è **piano** se ha un piano che contiene il suo sostegno.

Altri tipi di archi di curve sono:

- **Arco di curva regolare**

  Sia la funzione $r : I \to \mathbb{R}^m$ tale che $\forall t \in I.(r \in C^1(I) \wedge r'(t) \neq 0)$. Abbiamo quindi che il vettore derivato esiste in ogni punto, varia con la continuità e non si annulla mai. Non a caso per queste curve è definito bene il **versore tangente** $T = \frac{r'(t)}{|r'(t)|}$, il quale dipende con continuità dalla variabile t.

- **Arco di curva regolare a tratti**

  Sia $I \subset \mathbb{R}$; definiamo tale un arco di curva $r : I \to \mathbb{R}^m$ tale che sia continuo in $\mathbb{R}$ e l'intervallo possa essere diviso in un numero finito di sub-intervalli, su tutti i quali la r sarà un arco di curva regolare.

L'espressione delle curve può infine avvenire nei seguenti tre modi:

- Forma parametrica.
- Forma di grafico: $y = g(x)$.
- Forma implicita: $f(x, y) = 0$.

Adesso buttiamo dentro un concetto che ha bisogno di qualche premessa; la **lunghezza di un arco di curva**. Consideriamo la parametrizzazione di un arco di curva continua γ ed una partizione $P = \{a = t_0, t_1, ..., t_{n-1}, t_n = b\}$ dell'intervallo $I = [a, b]$, con $(t_0 < t_1 < ... < t_n)$.

Alla partizione P è associata la poligonale[1] inscritta in γ creata dagli n-segmenti di estremi $r(t_{j-1})$ e $r(t_j)$, con $j = 1, ..., n$.

Sia ora $l(P)$ la lunghezza della poligonale data dalla formula:

$$l(P) = \sum_{j=1}^{n} |r(t_j) - r(t_{j-1})|$$

L'idea di fondo è che questa lunghezza approssimi per difetto quella di γ, consentendoci di ottenerla variando in ogni istanza possibile P e prendendo l'estremo superiore di $l(P)$. In tal merito, abbiamo le definizioni:

[1] Una curva non tonda. Un angolo sotto questa visione potrebbe essere una poligonale.

Definizione 12. ***Arco di curva rettificabile***
Diciamo che un arco di curva γ è ***rettificabile*** *se vale:*

$$supl(P) = l(\gamma) < +\infty$$

L'estremo superiore sup è calcolato al variare di ogni partizione possibile dell'intervallo e $l(\gamma)$ è la lunghezza dell'arco di curva.

Grazie al concetto di velocità scalare introdotto prima, è possibile semplificarci ulteriormente la vita per quanto riguarda rettificazioni con il seguente teorema:

Teorema 4. ***Rettificazione di arco di curva regolare***
Sia $r : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ parametrizzazione di un arco di curva γ regolare. Allora questo è rettificabile e si scrive generalmente:

$$l(\gamma) = \int_a^b |r'(t)|dt$$

Mentre per rispettivamente uno spazio bidimensionale e tridimensionale valgono le seguenti scritture:

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt \wedge l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}dt$$

È inoltre possibile unire le curve; infatti, dati due archi γ_1, γ_2, con rispettive equazioni:

- $r_1 = r_1(t)$ per $t \in [a, b]$
- $r_2 = r_2(t)$ per $t \in [b, c]$

E con condizione di raccordo $r_1(b) = r_2(b)$, abbiamo che la relazione $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ è data da:

$$r(t) = \begin{cases} r_1 = r_1(t), t \in [a, b] \\ r_2 = r_2(t), t \in [b, c] \end{cases}$$

In questi casi, abbiamo che se una proprietà vale per entrambi gli archi, si estenderà anche alla loro unione. Parlando di somma, una classe particolare di curve piane è data da altre curve che si ottengono come grafici di funzioni di una variabile, ovvero nella forma $y = f(x)$, per $x \in [a, b]$. Possiamo quindi scriverle nella seguente forma parametrica:

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}, \text{ per } t \in [a, b]$$

E diremo che la curva è espressa come grafico della funzione f. Detiene le seguenti proprietà:

- La curva è continua se e solo se f è continua nell'intervallo $[a, b]$.
- La curva è regolare se e solo se f è derivabile e ha continuità nell'intervallo $[a, b]$.
- La curva è regolare a tratti se e solo se f è continua nell'intervallo $[a, b]$ e a tratti derivabile con continuità nello stesso intervallo.
- La curva non è mai chiusa ed è sempre semplice.

Otteniamo **lunghezza del grafico** con il seguente integrale:

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt$$

Un altro magheggio molto utile che possiamo recuperare dall'algebra lineare è il **passaggio alla forma polare**. Abbiamo quindi:

$$\rho = f(\theta), \text{ per } \theta \in [\theta_1, \theta_2] \implies \begin{cases} x = f(\theta) cos(\theta) \\ y = f(\theta) sin(\theta) \end{cases}$$

Otteniamo la derivata da una semplice chain rule e da essa la norma:

$$r'(\theta) = f'(\theta) cos(\theta) - f(\theta) sin(\theta),$$
$$f'(\theta) sin(\theta) + f(\theta) cos(\theta) \implies |r'(\theta)| = \sqrt{f'(\theta)^2 + f(\theta)^2}$$

Le curve cambiate in coordinate polari detengono le seguenti proprietà:

- La curva è continua se e solo se f è continua in $[\theta_1, \theta_2]$.
- La curva è regolare se e solo se f è derivabile con continuità in $[\theta_1, \theta_2]$ e le funzioni f, f' non si annullano contemporaneamente.
- La curva è chiusa se e solo se, come visto nella definizione, $f(\theta_1) = f(\theta_2)$ e $\theta_2 - \theta_1 = 2k\pi$.

Ed il calcolo della lunghezza avviene con il seguente integrale:

$$l(\gamma) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{f(\theta_2)^2 + f'(\theta_1)^2} d\theta$$

Infine, siccome è possibile trovare un estremo superiore infinito, esisteranno di conseguenza anche curve dalla lunghezza infinita, le quali risulterà impossibile rettificare.

2.1.3 Cambiamenti di parametrizzazione, parametro arco, integrali di prima specie

La lunghezza dell'arco di curva pecorsa da un punto mobile dipende solamente dal sostegno della curva. In questa sezione ci occuperemo di formalizzare quanto appena detto.

Sia infatti un arco di curva regolare $r = r(t)$, con $t \in [a, b]$. **cambiare parametrizzazione** significa introdurre una funzione derivabile ed invertibile $\phi(u) = t$, con $\phi : [c, d] \to [a, b]$, tale che la nuova curva $r = r(\phi)$, con $u \in [c, d]$ abbia lo stesso sostegno. Ci possiamo trovare davanti due casi distinti:

- Se la curva è **crescente**, le due parametrizzazioni $r(t), r(\phi)$ si dicono **equivalenti**.
- Se la curva è **decrescente**, le due si diranno **cambio di orientazione**.

Il senso di questo procedimento è la semplificazione della funzione in una con termini più semplici, non dissimile dal cambio di base visto in algebra lineare. Un primo vantaggio che si può notare è come la lunghezza di un arco di curva regolare è **invariante** per le parametrizzazioni equivalenti e cambi di orientazione.

Calcolando e poi invertendo la funzione della lunghezza dell'arco di curva, è possibile riparametrizzare la curva in funzione del **parametro arco**, ottenendo due vantaggi:

- Il parametro arco s è esattamente lo spazio percorso dal punto quando si passa da 0 ad esso.
- Se $r = r(s)$ è curva parametrizzata con s, il vettore derivato $r'(s)$ coincide con il versore tangente.

Introduciamo un ultimo argomento la cui vera utilità si vedrà nel corso di fisica:

Definizione 13. ***Integrali di prima specie***
Sia $r : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ *un arco di curva regolare di sostegno* γ *e sia* f *una funzione a valori reali definita nell'intervallo* $A \subset \mathbb{R}^m$ *contenente il sostegno. Chiamiamo* ***integrale di prima specie*** *di* f *lungo* γ *la seguente scrittura:*

$$\int_\gamma f dx \equiv \int_a^b f(r(t))|r'(t)|dt$$

Valgono anche qui i risultati di invarianza rispetto a parametrizzazioni equivalenti e cambi di orientazione.

2.2 Calcolo infinitesimale per funzioni reali di più variabili

La sezione ha come scopo lo studio delle **funzioni reali a più variabili**, che si presentano nella forma:

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

In questo caso è di nostro interesse poter disegnare un grafico, con tutto ciò che ne consegue. Ciò è espresso nella forma dell'insieme:

$$\{(c, f(x)) : x \in A\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

Anche se nella maggior parte dei casi, per la rappresentazione dei grafici useremo gli **insiemi di livello**, definiti al variare di $c \in \mathbb{R}$:

- **Forma generale**: $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = c\}$
- **Forma bidimensionale** (linea di livello): $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \in A\}$
- **Forma tridimensionale** (superficie di livello): $\{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \in A\}$

Il primo argomento di nostro interesse è il **dominio** delle funzioni; si tratta del sottoinsieme più grande di $\mathbb{R}^n$ nel quale ha senso scrivere la funzione. Per definirlo si possono seguire le regole viste in analisi 1.

Esempio 11. ***Determinazione del dominio***
INSERISCI ESEMPIO, è scritto sul quaderno, es 3.1.5

2.2.1 Limiti e continuità

Lavorando con più variabili, è inevitabile trovare incongruenze con i limiti unidimensionali; ragion per cui è necessario porre una nuova definizione di limite e continuità.

Anzitutto, prendiamo una successione $\{x_k\}_k^\infty = 1$ di punti $\mathbb{R}^n$ ed un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Vale la seguente relazione:

$$x_k \to x_0 \text{ per } k \to \infty \text{ se vale } ||x_k \to x_0|| \to 0 \text{ per } k \to \infty$$

Per renderla più comprensibile, la norma per un grafico piano sarebbe data dalla formula:

$$||x_k - x_0|| \equiv \sqrt{(x_k - x_0)^2 + (y_k - y_0)^2} = 0$$

In analisi 1 abbiamo utilizzato punti fermi per ottenere informazioni dai grafici; adesso useremo il concetto di **intorno sferico**:

Definizione 14. ***Intorno sferico***
Chiamiamo intorno sferico di centro $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e raggio $r > 0$ l'insieme dato da:

$$U_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x - x_0|| < r\}$$

Concetto che ci consente di introdurre la nozione di limite adattata per il nostro caso di studi:

Definizione 15. ***Definizione successionale di limite***
Siano $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita almeno in un intorno sferico $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e il valore $L \in \mathbb{R}^*$, dove $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Allora esiste:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Se e solo se per ogni successione x_k di punti tutti diversi tali che ognuno tenda a x_0 per k tendente a infinito. In tal caso avremo anche che:

$$\lim_{k \to \infty} f(x) = L$$

In particolare, definiamo ora la continuità:

Definizione 16. ***Continuità di una funzione***
Sia una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. La diciamo continua nell'intorno sferico x_0 se vale:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Di conseguenza, quando una funzione è continua in un intorno sferico, è possibile calcolarne il limite per x che tende a x_0 semplicemente valutando $f(x_0)$, ed il ricorso alla definizione per lo svolgimento degli esercizi avviene solamente per le **forme di indeterminazione**.

2.2.2 Analisi delle forme di indeterminazione

Consideriamo la scrittura del limite di funzione f appena vista. Se la distanza fra x, x_0 tende al valore 0, indipendentemente dalla direzione, avremo che la funzione si avvicinerà al valore L **indefinitamente**. Da qui possiamo distinguere due casi di studio, ognuno dei quali parte da un approccio a sensazioni:

1. **Il limite esiste**; Per valutare l'esistenza di un limite si utilizza il metodo della **maggiorazione**. Lo scopo finale è "schiacciare" la funzione in tal modo che il valore a cui tenda sia 0.

2. **Il limite non esiste**; Esistono vari approcci per assicurarsi che un limite non esista ed è consigliato usarne vari per avere una conferma più rigorosa. Nei casi più semplici, tuttavia, è sufficiente determinare due curve passanti per x_0 lungo le quali la funzione tende a due termini diversi.

   In parole povere, bisogna calcolare due limiti della funzione che tendono a $(x, 0), (0, y)$. Se i due limiti ritornano valori discordi, il limite di funzione non esiste.

Esempio 12. ***Dimostrazione di esistenza del limite***

Esempio 13. ***Dimostrazione di non esistenza del limite***

2.3 Esercizi

Chapter 3

Calcolo Differenziale

3.1 Calcolo differenziale per funzioni reali di più variabili

Nella precedente sezione è stato introdotto il concetto di intorno sferico di centro e raggio; ebbene, c'è un tipo per tutti i gusti.

Di base, sia l'intervallo $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si può dire:

- **Interno ad** E, se $\exists U_r(x_0) \subseteq E$
- **Esterno ad** E, se $\exists U_r(x_0) \subseteq \mathbb{R}^n/E$
- **Di frontiera per** E, se $\forall U_r(x_0) \implies (U_r(x_0) \cap E \neq \emptyset) \wedge (U_r(x_0) \cap \mathbb{R}^n/E \neq \emptyset)$

Diremo poi che l'insieme dei punti interni all'intervallo è la **parte interna di** E, per quelli esterni è il **bordo di** E, mentre l'unione dell'intervallo con il suo bordo è la **chiusura di** E.

Inoltre un insieme si dice **aperto** quando ogni suo punto è ad esso interno, mentre chiamiamo **chiuso** un insieme il cui complementare è aperto. Le operazioni fra insiemi effettuate con insiemi dello stesso tipo, non lo modificheranno. Infine, data una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua nel suo insieme di definizione (in questo caso $\mathbb{R}^n$) abbiamo che questi sono gli insiemi aperti:

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > 0\},\ \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < 0\},\ \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}$$

E questi i chiusi:

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq 0\},\ \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq 0\},\ \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\}$$

Infine, se la funzione presa in esame è continua, avremo che gli insiemi di livello di una funzione a più variabili $f(x, y)$ saranno del tipo $f(x, y) = c$ e saranno, secondo le forme appena viste, chiusi.

3.1.1 Derivate parziali, derivabilità, piano tangente

In analisi 1 è stato definito il concetto di derivata come il limite del rapporto incrementale, il quale risulta essere allo stesso tempo anche il coefficiente angolare della retta tangente alla funzione che si sta esaminando.

Lavorare in più dimensioni comporta la necessità di espandere questo concetto; anzitutto è necessario introdurre alcuni concetti:

Definizione 17. ***Derivate parziali***
Sia una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, è possibile calcolare le derivate in funzione delle rispettive variabili in un punto (x_0, y_0). Chiamiamo infatti:

- ***Derivata parziale rispetto ad*** x*:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

- ***Derivata parziale rispetto ad*** y*:*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

Definizione 18. ***Gradiente***
Chiamiamo gradiente di f nel punto (x_0, y_0) il vettore che ha come elementi le derivate parziali della funzione presa in esame e si denota come:

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

Tengo a portare all'attenzione il fatto che per calcolare le derivate parziali, le variabili $x_0 + h$ e $y_0 + k$ devono necessariamente essere all'interno del dominio di funzione; ciò risulta vero se il dominio è aperto.

Possiamo quindi dire che una funzione è derivabile in un punto del suo dominio e là esistono tutte le derivate parziali.

Esempio 14. ***Calcolo delle derivate parziali di una funzione***

Lo scopo di calcolare la derivata di funzione è l'approssimazione della stessa localmente; abbiamo visto che in una dimensione, lavorando con curve piane, la derivata sarà il coefficiente angolare della retta ad esse tangente. Per pattern recognition, è chiaro che se si lavora in più variabili avremo una superficie la cui derivata sarà un **piano tangente**.

Nello specifico, immaginiamoci di avere una funzione che dia una **superficie** $z = f(x, y)$ e di sezionarla con un **piano verticale** $y = y_0$. Otterremo una curva data da $z = f(x, y_0)$, dalla quale troveremo la retta tangente r_1. Ripetiamo lo stesso processo con un **piano orizzontale** $x = x_0$ per ottenere la tangente r_2. Avremo quindi che le due equazioni delle tangenti sono date da:

$$r_1 = \begin{cases} z = f(x_0, y_0) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) \\ y = y_0 \end{cases}$$
$$r_2 = \begin{cases} z = f(x_0, y_0) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \\ x = x_0 \end{cases}$$

E quindi, in definitiva, il **piano tangente** sarà della seguente forma:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Tutto molto bello, tuttavia la derivabilità non ha lo stesso rigore che aveva in analisi 1; infatti non implica né continuità, né l'esistenza del piano tangente. Non è quindi in grado di approssimare sempre la funzione in esame localmente; quindi necessitiamo di un concetto molto più forte: la **differenziabilità**.

3.1.2 Differenziabilità, derivate direzionali

Riportiamo alla memoria il concetto di **o piccolo**; si tratta di un'identità che vede l'incremento di una funzione uguale al differenziale della stessa, sommato da un infinitesimo di ordine superiore. Si traduce nella formula, per $h \to 0$:

$$g(t + h) - g(t) = g'(t)h + o(h)$$

Per il calcolo a più variabili è la stessa identica cosa, solamente in modo più esteso.

Definizione 19. ***Differenziabilità***
La differenziabilità di una funzione f in un punto (x_0, y_0) è un concetto rigoroso che ne implica derivabilità, continuità ed esistenza del piano tangente nello stesso punto. Vale se per $(h, k) \to (0, 0)$ è vera la seguente formula:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + k + o(\sqrt{h^2 + k^2})$$

Più precisamente, le componenti della formula sono:

- *Incremento della funzione:* $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$

- *Incremento sul piano tangente:* $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + k$
- *Infinitesimo d'ordine superiore:* $o(\sqrt{h^2 + k^2})$

Da questa definizione ne seguono alcune altrettanto utili; per esempio, se la funzione è differenziabile in (x_0, y_0), chiamiamo **differenziale** di f nello stesso punto l'applicazione lineare $df(x_0, y_0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definita da $df(x_0, y_0) : (h, k) \to \nabla f(x_0, y_0)(h, k)$.

Più precisamente $\nabla f(x_0, y_0)(h, k)$ è l'incremento della funzione nel passare dal punto (x_0, y_0) al punto (x_0+h, y_0+k) sul piano tangente alla funzione.

Il differenziale è necessario per l'approssimazione dell'incremento della funzione; il processo ha anche un nome: **linearizzazione**.

In che modo è possibile verificare se una funzione è o meno differenziabile? Il metodo più semplice risulta essere la **condizione sufficiente**. Diciamo infatti che se esistono e sono continue le derivate parziali in un intorno (x_0, y_0), allora la funzione sarà ivi differenziabile. Ciò vale anche per intervalli, ed in tal caso f sarà differenziabile in tutti i suoi punti.

Esempio 15. ***Verifica differenziabilità di funzione***

Finora abbiamo calcolato la velocità di crescita delle curve in base alle direzioni degli assi, tuttavia per fare un lavoro completo, è necessario conoscere anche come le funzioni crescono in direzioni diverse. Per farlo basta prendere il rapporto incrementale e valutarlo con uno scalare $t \in \mathbb{R}$. Risulta la seguente scrittura:

$$D_v f(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$$

Questa si dice **derivata direzionale** della funzione rispetto al versore v nel punto x_0 e vale a patto che il limite esista e sia finito.

In questi termini, le derivate parziali possono essere viste come derivate direzionali corrispondenti ai versori canonici e_i; quindi quelli che danno la direzione per ogni dimensione. Nel caso specifico di $\mathbb{R}^2$ diciamo che il versore $v = (cos(\theta), sin(\theta))$, ottenendo una scrittura diversa della definizione:

$$D_v f(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tcos(\theta), y_0 + tsin(\theta)) - f(x_0, y_0)}{t}$$

Dove abbiamo inoltre che:

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = D_v f(x_0, y_0)$, con $v = i$ e $\theta = 0$

- $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = D_v f(x_0, y_0)$, con $v = j$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$

Un'altra cosa da notare è che tutte le derivate direzionali sono combinazioni lineari delle derivate parziali; non a caso le prime risultano essere un caso più generale delle seconde. Paradossalmente sarebbe possibile usare solo la formula delle direzionali, perché funzionerebbe anche con le direzioni degli assi.

Introduciamo un nuovo strumento; una formula per il calcolo della derivata direzionale attraverso il gradiente:

Definizione 20. ***Formula del gradiente***
Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile nel punto $x_0 \in A$. Allora per ogni versore v esiste la derivata direzionale $D_v f(x_0)$ e vale la seguente identità:

$$D_v f(x_0) = \nabla f(x_0) v = \sum_{n}^{i=1} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) v_i$$

Per il caso specifico di due dimensioni abbiamo che per ogni versore vale:

$$D_v f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) v = ||\nabla f(x_0, y_0)|| cos(\phi)$$

Dove ϕ è l'angolo compreso fra i vettori v e $\nabla f(x_0, y_0)$, può assumere quindi un valore compreso fra $[-1, 1]$. In particolare avremo che:

- Se $\phi = \frac{\pi}{2} \vee \phi = \frac{3}{2}\pi$, allora il gradiente sarà uguale a 0.
- Se $\phi = 0$, allora risulterà il modulo (o norma) del gradiente e indica la curva di massima salita.
- Se $\phi = -1$, allora risulterà il modulo negativo del gradiente e indica la curva di massima discesa.

3.1.3 Calcolo delle derivate e derivate di ordine superiore

Abbiamo finalmente uno sputo di fortuna per quanto riguarda il calcolo di derivate. Valgono infatti le stesse regole viste in analisi 1, solamente adattate dalle dimensioni maggiori; infatti, dati $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

- Regola per la somma: $\nabla(\alpha f + \beta g) = \alpha \nabla f + \beta \nabla g$
- Regola per la moltiplicazione: $\nabla(fg) = g \nabla f + f \nabla g$

- Regola per la divisione: $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$

Queste stesse relazioni funzionano anche per i differenziali; mentre per le **funzioni composte** distinguiamo due casi di studio:

- **Primo caso**; Siano $f : A \subseteq R^n \to R$ e $g : I \subseteq R \to R$. Supponiamo che $h(x) = g(f(x))$ sia una funzione definita in un intorno $Udix_0 \in A$. Se la funzione f è differenziabile in x_0 e la g è derivabile in $f(x_0)$, allora la seguente funzione composita è differenziabile in x_0:

  $$h = g \circ f : U \subseteq R^n \to R$$

  Si ha inoltre che: $\nabla h(x_0) = g'(f(x_0)) \times \nabla f(x_0)$.

- **Secondo caso**; Siano $r : I \subseteq R \to R^n$ e $f : A \subseteq R^n \to R$. Supponiamo che $g(t) = f(r(t))$ sia definita in un intorno J di $t_0 \in I$. Se la funzione r è derivabile in t_0 e f è differenziabile in $r(t_0)$, allora la seguente funzione composta è derivabile in t_0:

  $$g = f \circ r : J \subseteq R \to R$$

  Si ha inoltre che: $g'(t_0) = \nabla f(r(t_0)) \times r'(t_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(r(t_0))r(t_i)$.

Una volta determinate le derivate parziali di una funzione f è possibile che quanto ottenuto sia a sua volta derivabile. Ci è richiesto quindi di calcolare le **derivate parziali seconde**, se esistono. Queste hanno le seguenti forme:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Queste si indicano rispettivamente con $f_{xx}, f_{yx}, f_{xy}, f_{yy}$, ed il concetto è facilmente estendibile al caso n:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$$

Teorema 5. *Teorema di Schwarz*
Sia una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, con A suo insieme di definizione aperto. Supponiamo che le derivate parziali seconde miste esistano in un intorno di un punto (x, y) e siano entrambe ivi continue. Allora queste coincideranno in quel punto. Se le derivate parziali sono continue in tutto A, allora coincideranno in tutto l'insieme. Quindi:

$$f \in C^2(A) \implies f_{xy} = f_{yx}$$

Abbiamo di conseguenza se la funzione è di classe due nell'insieme definito:

- *Le derivate parziali prime sono differenziabili in A.*
- *Le derivate parziali seconde sono continue in A.*
- *Le derivate parziali miste sono uguali.*

Notare che se una funzione presenta derivate miste diverse, necessariamente non sarà di classe due in quell'intervallo.

3.1.4 Differenziale secondo, matrice hessiana, formula di Taylor del secondo ordine

Siano una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, di classe due su A e un intorno di punto $(x_0, y_0) \in A$. Chiamiamo **differenziale secondo** di f in (x_0, y_0) la seguente funzione:

$$d^2 f(x_0, y_0) : (h, k) \to \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)h^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)k^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)hk$$

La quale somiglia per un motivo a me ignoto al risultato di un quadrato di binomio. In ogni caso, i suoi coefficienti possono essere inseriti in una **matrice hessiana**, la quale risulterà simmetrica in ogni punto di A se la funzione è in esso di classe due.

$$Hf(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

3.2 Calcolo differenziale per funzioni di più variabili a valori vettoriali

Chapter 4

Ottimizzazione di Funzioni

4.1 Generalità e proprietà topologiche delle funzioni continue

Per **ottimizzazione** intendiamo il processo di massimizzazione o minimizzazione di una quantità sotto determinate condizioni; i nostri scopi concernono le funzioni reali di n variabili reali, i cui casi saranno:

- Ricerca degli **estremi liberi**; estremi assunti in punti interni al dominio aperto A della funzione f.
- Ricerca degli **estremi vincolati**; estremi di f assunti su un sottoinsieme B non necessariamente aperto o sulla frontiera di B.

Definizione 21. ***Tipi di punto***
Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$ diciamo:

- *Punto di massimo globale x_0 per $f \in A$ se $\forall x$ vale $f(x) \leq f(x_0)$.*
- *Punto di minimo globale x_0 per $f \in A$ se $\forall x$ vale $f(x) \geq f(x_0)$.*
- *Punto di massimo locale x_0 per f se esiste un intorno U di x_0 tale che $\forall x \in U$ vale $f(x) \leq f(x_0)$.*
- *Punto di minimo locale x_0 per f se esiste un intorno U di x_0 tale che $\forall x \in U$ vale $f(x) \geq f(x_0)$.*
- *Punto di sella se non è nessuno dei precedenti.*

Diamo adesso il bentornato ad alcuni teoremi visti in analisi 1, ora nella forma in cui sono stati concepiti.

Teorema 6. ***Teorema di Weierstrass***
Sia E un insieme chiuso e limitato ed $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora questa avrà un punto massimo x_M ed un punto minimo X_m entrambi appartenenti ad E.

$$\forall x \in E.[f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)]$$

Questo è un teorema sufficiente per la dimmostrazione dell'esistenza di massimo e minimo.

Teorema 7. ***Teorema degli zeri***
Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ un insieme connesso[1] *di $\mathbb{R}^n$ ed $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Se $x, yinE$ sono tali che $f(x) > 0 \wedge f(y) < 0$, allora esisterà un terzo punto $z \in E.[f(z) = 0]$.*

Quest'ultimo teorema sarà molto utile nello studio del segno delle funzioni; perché spezza il dominio in varie parti dove f risulta avere un segno costante. Tornerà nei problemi di ottimizzazione libera.

4.2 Estremi liberi, relazione fra segno di matrice ed incremento

Sia una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sufficientemente regolare. È nostro compito cercare di definirne gli estremi; saluta un altro tuo conoscente.

Teorema 8. ***Teorema di Fermat***
Sia una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con A insieme aperto ed $x_0 \in A$ un punto di massimo o minimo locale per la funzione. Se questa è derivabile in x_0, allora $\nabla f(x_0) = 0$.

Quindi se f è derivabile in A, i punti di massimo locale si trovano necessariamente tra quelli che annullano il gradiente, in questo caso il punto di massima e minima ascesa. Ora, sapendo tutto ciò, è possibile iniziare a studiare la natura dei punti critici. Ciò si fa attraverso l'**incremento** della funzione ed il suo segno, ovvero:

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x, y) - f(x_0, y_0)$$

Come abbiamo visto dalla definizione, valgono le seguenti relazioni:

[1] Un insieme tale che presi due punti qualunqur dell'insieme, esiste un arco continuo che li congiunge tutto contenuto in E

- Se $\Delta f(x_0, y_0) \geq 0$, almeno in un intorno di (x_0, y_0), allora quest'ultimo è massimo locale.
- Se $\Delta f(x_0, y_0) \leq 0$, almeno in un intorno di (x_0, y_0), allora quest'ultimo è minimo locale.
- Se $\Delta f(x_0, y_0)$ non ha segno definito, sarà un punto di sella.

Dove tendenzialmente si potrebbe passare a coordinate polari per ottenere quanto ci serve, questo metodo fa cagare. Utilizzeremo quindi gli sviluppi di Taylor per semplificarci la vita, nonostante possano risultare una scrittura più verbosa.

$$\begin{aligned}\Delta f(x_0, y_0) &= f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \\ &= \langle \nabla f(x_0, y_0), (h, k) \rangle + \frac{1}{2}(h, k) \times H(x_0, y_0) \times (h, k) + \circ(\sqrt{h^2 + k^2})\end{aligned} \tag{4.1}$$

Dove (h, k) è un vettore con quegli elementi e H indica la matrice Hessiana vista nelle sezioni precedenti. Notare che viste in questo modo, le matrici possono **avere un segno**, il quale verrà determinato con l'algoritmo della prossima sezione: il **test degli autovalori**.

4.3 Studio dei punti critici con il test degli autovalori

Il focus principale è lo studio degli autovalori per determinare il segno della matrice, ed in definitiva, il tipo di punto critico preso in esame. Logicamente, per matrici simmetriche di rango uguale a 2 abbiamo i seguenti risultati:

- Se $det(M) > 0$, avremo due autovalori positivi.
- Se $det(M) < 0$, avremo un autovalore positivo e l'altro negativo.
- Se $det(M) = 0$, almeno un autovalore è uguale a zero.

Mentre per matrici di rango maggiore è sempre necessario affidarsi alla seguente regola generale:

- Matrice positiva se tutti gli autovalori λ_i sono maggiori di zero.
- Matrice negativa se tutti gli autovalori λ_i sono minori di zero.

- Matrice semidefinita positiva se tutti gli autovalori non sono negativi e almeno uno di essi è nullo.
- Matrice semidefinita negativa se tutti gli autovalori non sono positivi e almeno uno di essi è nullo.
- Matrice indefinita se la matrice ha almeno un autovalore positivo ed uno negativo.

Ricorderai bene che la ricerca degli autovalori[2] avviene tramite la risoluzione del polinomio caratteristico di una matrice, a partire dalla formula

$$det(M - \lambda I_n) = 0$$

Ritornerà utile in futuro ricordare il **teorema spettrale**, ovvero; se una matrice è simmetrica, allora gli autovalori saranno reali e gli autovettori ortogonali e ortonormali.

4.4 Ottimizzazione vincolata, vincoli esplicitabili

Facciamo un piccolo riassunto di quanto appena detto:

- Il teorema di Fermat dice che se una funzione è relativamente semplice, avremo che il suo massimo e minimo si troveranno in corrispondenza dei punti critici, rispettivamente dati da ∇f che indica massima ascesa e $-\nabla f$ che indica la minima ascesa.
- Per non dannarci, possiamo scrivere una funzione in forma di Taylor, ottenendo la sua forma quadratica e, studiando il segno della matrice Hessiana, possiamo dire che tipo di incremento abbiamo e trarre conclusioni riguardo la natura dei punti critici.

Tuttavia, è probabile che i punti critici possano trovarsi anche al di fuori del dominio della funzione e che quindi non corrispondano a massimi o minimi. Non potendo usare il teorema di Fermat, dovremo ragionare su come trovare una soluzione alternativa, poiché la funzione è **vincolata** al proprio dominio.

Molti problemi di ottimizzazione riguardano l'utilizzo di vincoli; un esempio è quando un determinato minimo deve stare al di sopra di una data funzione. Il concetto non è molto dissimile dai problemi di Cauchy, se ci pensi. Abbiamo alcuni casi da esaminare:

[2] Le radici del polinomio caratteristico.

- **Vincolo esplicitabile**

  Questo è il caso più semplice di tutti; quando è possibile esplicitare una variabile del vincolo in funzione di un'altra. Ci troveremo davanti alle seguenti forme:

  $$h(x) = f(x, y(x)) \vee h(y) = f(x(y), y) \vee h(t) = f(x(t), y(t))$$

  Si riesce quindi a ritornare all'ottimizzazione in una singola variabile.

  Esempio 16. ***Ottimizzazione con vincolo esplicitabile***

  Sia la funzione $f(x, y) = x^2 + 3y^3 - y$ tale che $y = x^2$ dal massimo o minimo. Molto semplicemente qui si sostituisce alla y il suo valore e possiamo ottenere la funzione ottimizzata richiesta.

  $$f(x, x^2) = x^2 + 3(x^2)^3 - x^2 \implies f(x, x^2) = 3x^6$$

- **Vincolo da parametrizzare**

  Questo caso è uguale a quello precedente, solo che prima di poter esprimere la funzione in una singola variabile, è necessario parametrizzarne la curva; poi si procede come di consueto.

  Esempio 17. ***Ottimizzazione con vincolo da parametrizzare***

  Sia la funzione $f(x, y) = 3x^2y - y^3 + x^2$ tale che il dominio sia: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$. Per ottimizzare la curva è necessario ragionare sul dominio e sostituire i vari valori all'equazione. Avendo quindi i due punti:

  $$x \in [0, 1] \wedge y \in [0, 2]$$

  Ricaviamo che:

  - $f(x, 2) = 3x^2(2) - (2)^3 + x^2 = 6x^2 - 8 + x^2$
  - $f(x, 0) = 3x^2(0) - (0)^3 + x^2 = x^2$
  - $f(1, y) = 3y(1)^2 - y^3 + (1)^2 = 3y^2 - y^3 + 1$
  - $f(0, y) = 3y(0)^2 - y^3 + (0)^2 = -y^3$

  Fortunatamente il dominio sul quale lavorare dovrebbe dartelo il prof, quindi non penarti tanto sulla sua ricerca.

- **Vincolo semi-esplicitabile**

  Parliamo di tutti quei casi in cui è posto un vincolo la cui esplicitazione crea una forma complicata da gestire, come una radice, un esponenziale o un logaritmo. Lavorarci è fastidioso.

Esempio 18. ***Ottimizzazione con vincolo semi-esplicitabile***

Sia la funzione $f(x,y) = x^3 - 2xy^2 + y^2$ *tale che* $x^2 + y^2 = 4$. *Diciamo che vogliamo esplicitare il vincolo in funzione di* x, *ci toccherà isolare la* y, *ottenendo:*

$$y = \sqrt{4 - x^2}$$

Ovviamente è possibile esplicitare tutto nella funzione, ma pensa a quanto soffrirai per casi meno semplici di questo.

$$f(x, \sqrt{4 - x^2}) = x^3 - 2x(4 - x^2)^2 + (4 - x^2)$$

4.5 Moltiplicatori di Lagrange

Sfortunatamente, ni' mondo non esiste un pò di bene ed infatti non sarà sempre possibile esplicitare i vincoli in una sola variabile. In che modo è possibile risolvere questi problemi?

Come nel calcolo dei limiti si usava De L'Hôpital per ogni male[3], per l'ottimizzazione di funzioni vincolate non esplicitabili il carro armato è rappresentato dai **moltiplicatori di Lagrange**.

Si tratta di un metodo che funziona con vincoli rappresentati da una curva regolare, sia in forma esplicita che non; cerchiamo di arrivarci con un pò di sano ragionamento.

Se abbiamo un vincolo, allora ci saranno alcune direzioni inammissibili per la funzione e di conseguenza avremo che in ognuna di queste *la derivata direzionale si annullerà.*

Per capire quali siano queste direzioni, supponiamo che un vincolo descriva un *arco di curva regolare* con una retta tangente che va nella direzione del versore v. Qui la derivata direzionale D_v si annullerà.

In altre parole, se (x^*, y^*) è il punto di estremo vincolato si ha che:

$$D_v f(x^*, y^*) = 0$$

Per la formula del gradiente otteniamo inoltre il seguente risultato:

$$\nabla f(x^*, y^*) v = 0$$

[3]Non era possibile, ma lo si faceva ugualmente, ed in ogni caso non ci si può affidare ad esso per analisi 2.

Noi sappiamo che il gradiente di una funzione è ortogonale[4] alla direzione della retta tangente alle sue curve di livello.

Quindi se anche il vincolo è regolare abbastanza, anche dalla sua formula del gradiente risulterà zero. Dati questi risultati, traiamo che i due gradienti nel punto vincolato devono essere paralleli, ovvero deve esistere un numero $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui uno dei due è multiplo dell'altro, ovvero:

$$\nabla f(x^*, y^*) = \lambda \nabla g(x^*, y^*)$$

E diremo infine che (x^*, y^*) è un **punto critico vincolato**. Segue la definizione formale.

Teorema 9. ***Moltiplicatori di Lagrange***
Siano due funzioni $f, g \in C^1(\mathbb{R}^{\nvDash})$ ed (x^*, y^*) un punto di estremo vincolato per f sotto il vincolo $g(x, y) = b$.

*Se il punto è regolare per il vincolo, ovvero $\nabla g(x^*, y^*) \neq (0, 0)$, allora esiste un valore $\lambda^* \in \mathbb{R}$ chiamato **moltiplicatore di Lagrange**, tale che valga:*

$$\nabla f(x^*, y^*) = \lambda \nabla g(x^*, y^*)$$

Un'altra cosa interessante che si può fare con questa formula è spostare tutto a sinistra e chiamarla come una funzione $Q(x, y)$, ottenendo la seguente scrittura:

$$\nabla Q(x, y) = \nabla f(x, y) - \lambda \nabla g(x, y) = 0 \equiv L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - b)$$

Che si chiama **funzione Lagrangiana**, mentre per il gradiente vale:

$$\nabla L(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} f_x - \lambda g_x \\ f_y - \lambda g_y \\ g(x, y) - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f - \lambda \nabla g \\ \\ g(x, y) - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La particolarità di questa funzione è che si vede il λ come una variabile. La cosa è estendibile anche a più vincoli, ed in tal caso avremo un numero maggiore di λ. Ci consente, in definitiva, di trasformare un'ottimizzazione vincolata in una libera.

[4] Non so perché si ostinino a dire ortogonale al porto di perpendicolare. Fatto sta che è un sinonimo e io preferisco adattarmi alle scritture in uso.

Chapter 5

Calcolo Integrale

5.1 Pisellp4

Chapter 6

Campi Vettoriali

6.1 Pisellp5

Chapter 7

Serie di Fourier

7.1 PisellpFinale