Algebra Lineare

Corso di Laurea in Informatica - Università degli studi di Verona

Federico Brutti

Federico Brutti
federico.brutti@studenti.univr.it

Indice

6 | Numeri Complessi

11 | Sistemi Lineari e Matrici

12 | Tipi di Matrice e operazioni

13 | Spazi e Sottospazi Vettoriali

14 | Dipendenza e Indipendenza Lineare

15 | Applicazioni Lineari

16 | Rango e Nullità

17 | Autovalori e Autovettori

18

Diagonalizzazione di matrici

As the student approached the Linear Algebra exam, he stumbled upon a task: Calculate the determinant of the following matrix. The boy, puzzled by its form, asked: "Are you a row-echelon matrix because you have one pivot per column or do you have one pivot per column because you're a row-echelon matrix? And would you lose to the method of Gauss' elimination?" The matrix replied: "If you used matrix operations to simplify the calculations, you might give me a little trouble, but nah, I'd win." It proceeded to use DOMAIN EXPANSION: COMPLEX NUMBERS; almost making the student fall into despair. Indeed, trying to reduce its form with Gauss proved counter-productive. In his dying moments, the student uttered the phrase: "With this treasure I summon; always bet on Laplace". The determinant was trivially calculated with a series of cross-multiplications on the lines and columns that were not ignored and everyone would bare witness to the bare flesh of the one who is free; to the one who left it all behind. Him and his overwhelming utility!.

Numeri Complessi

1.1 Numeri immaginari e operazioni in $\mathbb{C}$

Il campo di lavoro dell'Algebra Lineare si espande anche nell'insieme numerico $\mathbb{C}$, ovvero quello dei numeri complessi ed il più grande fra tutti. Qui introduciamo le **unità immaginarie** i, grazie alle quali è possibile scrivere orrori Lovecraftiani come $i^2 = -1$, che potrà essere sempre sostituito a -1, dovessi trovarlo nei tuoi calcoli.
Ci è quindi possibile ottenere qualunque numero in qualunque situazione e da qui, infatti, il seguente teorema.

Teorema 1.1. Teorema Fondamentale dell'Algebra
Un'equazione polinomiale di grado n della forma $a_0 + a_1 z + ... + a_n z = 0$, dove a_n 0, ammette *n* soluzioni nell'insieme $\mathbb{C}$

Passiamo ordunque alle operazioni dell'insieme numerico. Oltre alle quattro elementari, sarà ancora possibile utilizzare potenze, radici e anche coordinate. In tutti gli esempi seguenti vale la scrittura $z_1 = (a + bi), z_2 = (c + di)$.

- *Addizione*: Raccogli *i* e somma tutto il resto.

  Esempio. $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
  $(6 + 7i) + (-12 + 17i) = (6 - 12) + (7 + 17)i = -6 + 24i$

- *Sottrazione*: Non dissimile dall'addizione, al sottraendo si negheranno gli elementi.

  Esempio. $z_1 - z_2 = (a + bi) + (-c - di) = (a - c) + (b - d)i$

- *Moltiplicazione*: La classica moltiplicazione fra polinomi.

  Esempio. $z_1 \times z_2 = (a+bi)(c+di) = ac+adi+bci+bdi^2 = (ac-bd)+(ad+bc)i$

- *Divisione*: Una razionalizzazione, in sintesi.

  Esempio. $\frac{1+2i}{2-i} = \frac{1+2i}{2-i} \times \frac{2-i}{2-i} = \frac{2+i+4i+2i^2}{4+2i-2i-i^2} = \frac{8i}{8} = i$

Altri casi particolari di numeri sono:

- *Opposto*: Si dice tale quando sommato algebricamente ad un altro numero riporta 0 come risultato. $z_1 + z_2 = 0$

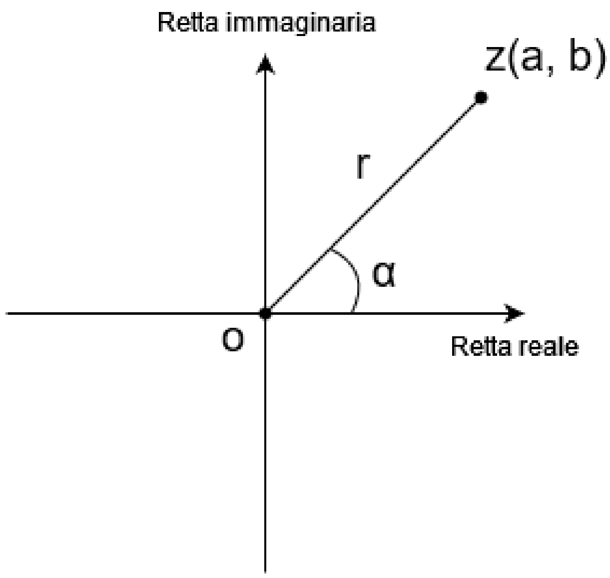
- *Coniugato*: Il numero complesso avente la stessa parte reale e parte immaginaria di segno opposto rispetto a *z*. $z = a + bi, \overline{z} = a - bi$

- *Modulo*: Il numero *z* maggiore di 0 che vale $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Nota. Seguono ora le relative proprietà di quanto appena visto:

- $z_1 \times \overline{z_1} = a^2 + b^2 = |z_1|^2$
- $\overline{z_1 + z_2} = (a + c) - (b + d)i$
- $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$
- $\frac{\overline{1}}{z_1} = \frac{1}{\overline{z_1}}, z \neq 0$
- $\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = \overline{z \times \frac{1}{z_2}} = \overline{z_1} \times \frac{1}{z_2} = \overline{z_1} \times \frac{1}{\overline{z_2}}, z_2 \neq 0$
- $\frac{1}{z_1} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{\overline{z_1}}{|z_2|^2}$

Osserviamo ora che per ogni numero complesso, quando messo su un piano di riferimento, le sue coordinate (a, b) rappresentano parte reale *a* e parte immaginaria *b*. Ci è quindi possibile lavorare sulle **coordinate polari** attraverso le formule trigonometriche.



- r = lunghezza del segmento $\overline{oz}$, ovvero il *raggio polare*.
- α = ampiezza dell'angolo.
- o = Origine del grafico.

Figura 1.1: Grafico delle coordinate polari

1.2 Forme dei Numeri Complessi

Possiamo ottenere la forma trigonometrica di un numero complesso attraverso la coppia delle coordinate. Per facilitare la comprensione è consigliato guardare il piano di lavoro.

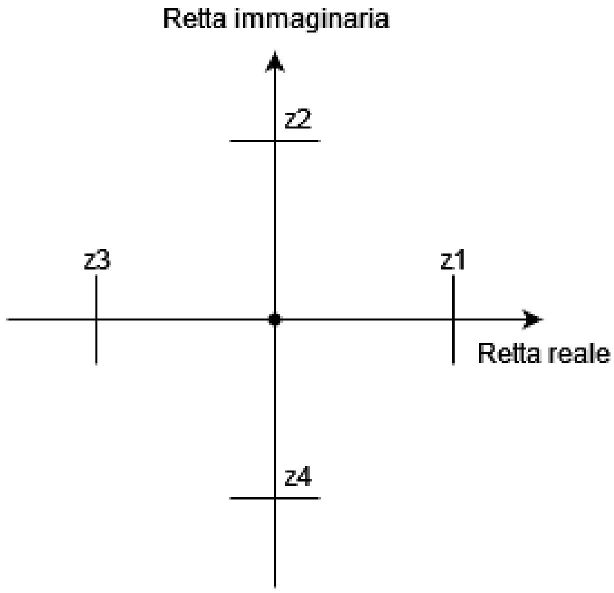


Figura 1.2: Valori nel piano cartesiano

Queste sono le **forme trigonometriche**; tuttavia a noi serve la forma algebrica, ottenibile utilizzando seno e coseno, ovvero:
$\sin(\alpha) = \frac{b}{r}$, $\cos(\alpha) = \frac{a}{r}$
$z = (r\cos(\alpha)) + (r\sin(\alpha))i = r(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$

- $z_1 = (1, 0) = 1$ -> $\cos(0) + i\sin(0)$
- $z_2 = (1, \frac{\pi}{2}) = i$ -> $\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2})$
- $z_3 = (1, \pi) = -1$ -> $\cos(\pi) + i\sin(\pi)$
- $z_4 = (1, \frac{3}{2}\pi) = -i$ -> $\cos(\frac{3}{2}\pi) + i\sin(\frac{3}{2}\pi)$

Similmente al comportamento delle funzioni trigonometriche, per moltiplicare due forme trigonometriche si utilizza la formula di duplicazione.

Esempio. $z_1 = r(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$, $z_2 = s(\cos(\beta) + i\sin(\beta))$
$$\begin{aligned} z_1 \times z_2 &= r \times s(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))(\cos(\beta) + i\sin(\beta)) \\ &= r \times s[(\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)) + (\cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta)i] \\ &= r \times s[\cos(\alpha + \beta) + \sin(\alpha + \beta)i] \end{aligned}$$

1.3 Formula di De Moivre e radici n-esime

Oltre alle quattro operazioni elementari ci è possibile lavorare anche con potenze e radici.

Teorema 1.2. Formula di De Moivre
Consente di calcolare la potenza di un numero complesso espresso in forma trigonometrica o esponenziale.

Esempio. $z = r(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)) \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$.
$z^n = r^n[\cos(n \times \alpha) + i\sin(n \times \alpha)]$

$z = \sqrt{3} + i$
$z = 2[\cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6})] = z^6 = 2^6[\cos(\pi) + i\sin(\pi)] = 2^6[-1 + i \times 0] = 2^6 \times -1 = -64$

Si dicono invece radici n-esime di y le soluzioni dell'equazione $x^n = y$, dove $y \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$. Esisteranno poi n radici n-esime complesse $z_0, z_1, ..., z_n$ di y. Verranno utilizzati come dati l'ampiezza α dell'angolo, il valore 2π per le radianti ed un numero k per consentire di "coprire"

ogni posizione della circonferenza nel piano; in pratica segna l'istanza di un determinato punto. Si scrivono come segue:
Se $y = r(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$, allora per $k = 0, 1, ..., n-1$ vale la seguente scrittura:
$z_n = \sqrt[n]{r}[\cos(\frac{\alpha+k2\pi}{n}) + i\sin(\frac{\alpha+k2\pi}{n})$
Essendo inoltre nell'insieme $\mathbb{C}$, possono esistere anche le radici quadrate dei numeri negativi, come è anche possibile utilizzare la formula quadratica per trovare le soluzioni.

> **Teorema 1.3. Teorema delle Radici complesse**
> Sia $a \in \mathbb{R}$ tale che $a < 0$; esisteranno precisamente due radici quadrate di a in $\mathbb{C}$.

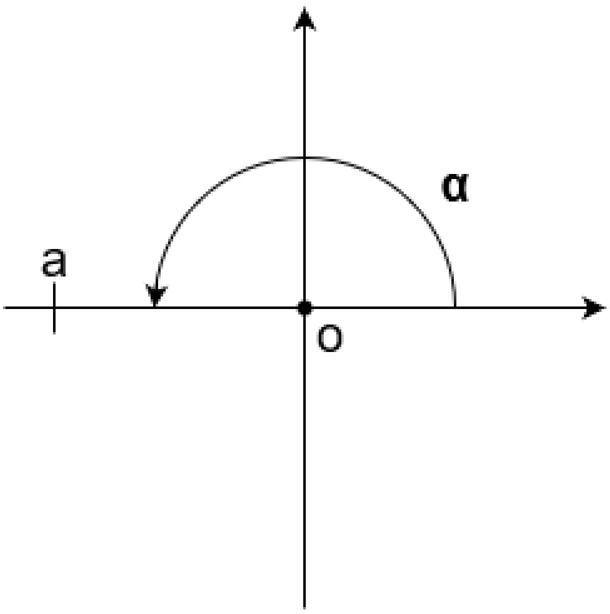


Figura 1.3: Piano del segmento $\overline{ao}$

Il segmento $\overline{ao}$ svolge la medesima funzione di r ed in questo caso vale: $a = (-a)(\cos(\pi) + i\sin(\pi))$
E grazie al teorema delle radici otteniamo le due soluzioni desiderate:

- $z_0 = \sqrt{-a}(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2}) = i\sqrt{-a}$
- $z_1 = \sqrt{-a}(\cos(\frac{3}{2}\pi) + i\sin(\frac{3}{2}\pi) = -i\sqrt{a}$

1.4 Esercizi

1. **Che cos'è un numero complesso? Qual è il suo insieme di definizione e quali elementi ha in più rispetto all'insieme R?**

   Per numero complesso si intende un dato valore i chiamato **Unità immaginaria**. Consente di ottenere risultati che in R risulterebbero impossibili. Detiene la seguente proprietà: $(0, 1) \times (1, 0) = (-1, 0)$, la quale dona la dinamica principale dell'insieme dei complessi: $i^2 = -1$.

   L'insieme di definizione dei numeri complessi C è un sovrainsieme di R.

2. **Che forme possono assumere i numeri complessi e in che modo si ottengono?**

   I numeri complessi possono assumere una **forma algebrica** ed una **forma trigonometrica**. La prima risulta utile quando bisogna effettuare calcoli letterali. Si scrive $z = a + bi$ e usa le seguenti formule:

   - $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + i(b + d)$.

- $(a + bi) \times (c + di) = (ac - bd) + i(ad + bc)$.

Per quanto riguarda la seconda forma, i punti del piano sono identificabili con coordinate cartesiane e polari. In merito alle seconde:

- **Raggio polare**; Semiretta ottenuta tracciando una linea da un dato punto fino all'origine.
- **Angolo polare**; Angolo la cui ampiezza è ottenuta tracciando un semicerchio partendo dall'asse positivo e terminando sul punto.

Si scrive $z = \rho(a + bi)$, dove:

- $a = cos(\Theta)$.
- $b = sin(\Theta)$.

3. **Cosa si intende per coniugato e modulo di un numero complesso?**

   - Coniugato di z; $\bar{z} = a - bi$
   - Modulo di z; $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

4. **Enunciare la formula di De Moivre.**

   La formula di De Moivre consente di ottenere la potenza di un numero complesso espresso in forma trigonometrica. $z^n = r^n(cos(n \times \alpha) + isin(n \times \alpha))$.

5. **Cosa si intende per radici n-esime?**

   Dato un numero complesso y, esistono n radici n-esime complesse $z_0, z_1, ..., z_n$ di y. Inoltre, se in forma trigonometrica, le radici si presenteranno nella seguente forma per $k = 0, ..., n-1$: $z_k = \sqrt[n]{r} \times (cos(\frac{\alpha+k2\pi}{n}) + isin(\frac{\alpha+k2\pi}{n}))$

6. **Enunciare il teorema fondamentale dell'algebra.**

   Dato un qualsiasi polinomio $p(x)$ a coefficienti complessi di grado maggiore o uguale a 1, avrà almeno una radice complessa. Il polinomio è di forma:

   $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, con $n \geq 1$.

Sistemi Lineari e Matrici

2.1 Equazioni, sistemi e operazioni

Risoluzione di sistemi lineari, inoltre

2.2 Metodo di Eliminazione di Gauss

2.3 Rango e Teorema di Roché-Capelli

2.4 Esercizi

1. **Che cos'è un sistema lineare e come si risolve?**
2. **Cosa sono i vettori e che operazioni è possibile effettuare con loro? Come puoi scriverci la soluzione di un sistema?**
3. **In che modo un sistema lineare di equazioni si può scrivere in una matrice? Che operazioni hanno luogo fra matrici e vettori?**
4. **In che modo si trovano le soluzioni di una matrice?**
5. **Che cos'è il rango e come si utilizza nel teorema di Rouché-Capelli?**
6. **In che cosa consiste l'algoritmo di eliminazione di Gauss?**

Tipi di Matrice e operazioni

3.1 Operazioni Matriciali

3.1.1 Tipologie di Matrici

Quadrata, elementare, invertibili, inverse, formule per l'inversa di una matrice

3.1.2 Teorema di Invertibilità

3.2 Applicazioni a sistemi lineari

3.3 Determinante di una Matrice

Aggiungi anche i casi particolari

3.3.1 Teorema di Sarrus

3.3.2 Teorema di Laplace

3.4 Principio di induzione

3.5 Regola di Cramer

3.6 Esercizi

1. **Che cosa e quali sono le operazioni matriciali?**
2. **Quali sono i vari tipi di matrice?**
3. **Che cosa rende una matrice invertibile e come si ottiene?**
4. **Che cosa si intende per matrice trasposta? Quali sono le proprietà di questa forma?**

Spazi e Sottospazi Vettoriali

4.1 Lo spazio Vettoriale

4.2 Combinazione Lineare, Insieme di Generatori

4.3 Il Sottospazio Vettoriale

Anche intersezione e somma di sottospazi

4.4 Spazio delle Colonne e Spazio Nullo

4.5 Esercizi

Dipendenza e Indipendenza Lineare

5.1 Definizioni del merito

5.2 Base di una Matrice

Almeno credo sia di una matrice, il titolo è un placeholder. In ogni caso comprende base come sistema di coordinate e di forma ridotta, ulteriori considerazioni sulla base e teorema di esistenza della base.

5.3 Teorema di Steinitz

5.4 Definizione e Corollario di Dimensione

5.5 Esercizi

Applicazioni Lineari

6.1 Definizione di Applicazione Lineare

6.2 Isomorfismi

6.3 Relazioni con la Dimensione

6.4 Matrice del cambio di base ed associata ad f rispetto a basi

6.5 Esercizi

Rango e Nullità

7.1 Spazio nullo, immagine, dimensioni e teoremi

7.2 Determinazione di basi, rango di applicazione lineare ed insieme soluzioni

7.3 Esercizi

Autovalori e Autovettori

8.1 Definizioni e Polinomio caratteristico

8.2 Teoremi, autospazio, moltiplicazione algebrica e geometrica

8.3 Considerazioni su matrici, indipendenza lineare, similarità e matrici diagonalizzabili

8.4 Esercizi

Diagonalizzazione di matrici

9.1 Proprietà delle matrici simili, Teorema di diagonalizzazione

Osservazioni, lemmi e condizioni di diagonalizzabilità

9.2 Teorema spettrale

9.3 Esercizi

Basi Ortonormali

10.1 Matrice coniugata, H-trasposta, prodotto interno e norma

10.2 Interpretazione geometrica in $\mathbb{R}^2$

10.3 Definizione di Ortogonale

Insieme ortogonale è linearmente indipendente. Coefficienti per base Ortogonale

10.4 Definizione di Ortonormale

C'ha anche il corollario.

10.4.1 Algoritmo di Gram Schmidt

10.5 Esercizi

As the student approached the Linear Algebra exam, he stumbled upon a task: Calculate the determinant of the following matrix. The boy, puzzled by its form, asked: "Are you a row-echelon matrix because you have one pivot per column or do you have one pivot per column because you're a row-echelon matrix? And would you lose to the method of Gauss' elimination?" The matrix replied: "If you used matrix operations to simplify the calculations, you might give me a little trouble, but nah, I'd win." It proceeded to use DOMAIN EXPANSION: COMPLEX NUMBERS; almost making the student fall into despair. Indeed, trying to reduce its form with Gauss proved counter-productive. In his dying moments, the student uttered the phrase: "With this treasure I summon; always bet on Laplace". The determinant was trivially calculated with a series of cross-multiplications on the lines and columns that were not ignored and everyone would bare witness to the bare flesh of the one who is free; to the one who left it all behind. Him and his overwhelming utility!.

Bibliografia

[1] T.M. Apostol. *Introduction to Analytic Number Theory.* Undergraduate Texts in Mathematics. Springer New York, 1998.

[2] Tom M Apostol. *Mathematical analysis; 2nd ed.* Addison-Wesley series in mathematics. Addison-Wesley, Reading, MA, 1974.

[3] The riemann zeta function and tate's thesis, 2021-07-01.