Logica

Corso di Laurea in Informatica - Università degli studi di Verona

Federico Brutti

Federico Brutti
federico.brutti@studenti.univr.it

Indice

Non ho ancora conosciuto una singola persona a cui sia piaciuta questa materia.

Introduzione

1.1 Che cos'è la logica matematica?

La **Logica Matematica** ha lo scopo di formalizzare concetti matematici in una lingua artificiale, per dare una certezza di significato al linguaggio naturale, il quale risulterebbe ambiguo. Similmente a quest'ultimo, anche i linguaggi della logica si compongono di grammatica, significato e regole, identificati rispettivamente in:

- **Sintassi**: Definisce la corretta scrittura delle formule logiche.
- **Semantica**: Definisce il significato delle formule logiche.
- **Sistemi Deduttivi**: Strumenti sintattici utili a manipolare formule e costruire dimostrazioni, dette derivazioni.

Abbiamo quindi un insieme di parole da assemblare (sintassi) che con diverse combinazioni possono creare sentenze dai diversi significati (semantica) ed il tutto segue un determinato insieme di regole (sistemi deduttivi). Tutto ciò consente di creare teoremi, anch'essi composti da più parti:

- **Enunciato**; Ciò che il teorema vuole esprimere.
- **Dimostrazione**; La prova formalizzata di quanto espresso.

Sarà nostro compito dimostrare gli enunciati in base alle richieste degli esercizi.

1.2 Connettivi e Quantificatori

Qui sono elencati tutti i connettivi e i quantificatori utilizzati nel corso, con lo scopo di familiarizzare con loro a prescindere da quando verranno o meno utilizzati.
Connettivi:

- **Congiunzione** $\land$: Ritorna vero solo se tutti gli elementi sono veri.
- **Disgiunzione** $\lor$: Ritorna vero se almeno un elemento è vero.
- **Negazione** $\neg$: Rende falso il vero e viceversa.
- **Implicazione** $\implies$: Corrisponde a "Se, allora", ritorna vero nei casi $0 \to 1$ oppure $1 \to 1$, mentre è falso se $1 \to 0$ oppure $0 \to 0$.
- **Doppia Implicazione** $\iff$: Corrisponde a "se e solo se, allora" e si rappresenta tramite due implicazioni: $(\phi \to \psi) \land (\psi \to \phi)$.
- **Bottom** $\bot$: Indica il valore di assurdo, 0.

- **Top** $\top$: Indica il valore di verità, 1.

Quantificatori:

- **Esiste** $\exists$: Indica l'esistenza di un elemento con una determinata proprietà.
- **Per ogni** $\forall$: indica che per ogni caso considerato, esiste un elemento con una data proprietà.

1.3 Strumenti di lavoro

Introduciamo in linguaggio naturale il funzionamento di tutti i nostri strumenti e strategie che utilizzeremo per la dimostrazione dei teoremi:

- **Induzione Strutturale**
- **Ricorsione Primitiva**
- **Deduzione Naturale**: Processo di dimostrazione di una data formula a partire da delle ipotesi.
- **Tabella di Verità**: Tabella che mostra ogni singolo caso presentabile per un determinato enunciato.
- **Valutazione di Verità**: Nella semantica, il processo di verifica della veridicità di una formula, esaminando il risultato di ogni singola formula presente nell'enunciato.
- **Sostituzione**
- **Modello**
- **Contromodello**

1.4 Domande di Teoria

1.5 Appunti da rielaborare

Abbiamo a disposizione diverse strategie e strumenti che verranno elencati come segue:

- Principio di induzione
Il principio di induzione matematica è utilizzato per dimostrare sequenze di numeri interi e relative proprietà. Si basa su due passi:

- Passo base; Prova la veridicità di un evento in un caso iniziale semplice.
- Passo induttivo; Prova con un determinato valore incognito n, e quindi in qualunque altro caso, l'evento.

Gli elementi di lavoro in questo caso sono numeri interi non negativi. Un esempio di dimostrazione induttiva è la disequazione di Bernoulli, che probabilmente avrai visto in analisi.

- Sentenze
Sono le combinazioni dei singoli elementi dell'alfabeto ed equivalgono alle proposizioni in lingua vera e possono assumere solamente due valori: vero o falso. Ne esistono di due tipi:

- *Minimale*; Quando non si può scomporre ulteriormente.
- *Composta*; Quando è composta da più sentenze minimali, ed è quindi scomponibile.

Il processo di formalizzazione logica si divide in due passi; l'utilizzo di un linguaggio apposito che utilizza solo proposizioni ad-hoc e specificare una procedura che permetta di ottenere solo risultati veri o falsi.

- Segnature
Le segnature servono a mostrare gli elementi di lavoro di un determinato insieme; ovvero quali sono i simboli, i connettivi e quanti sono.

Logica Proposizionale

Cominciamo lo studio effettivo della Logica Matematica attraverso la **Logica Proposizionale**. Fondamentalmente è una palestra da utilizzare come trampolino di lancio verso argomenti più complessi, come la Logica del Primo Ordine, che verrà vista in seguito.

Al termine del capitolo bisognerà saper valutare la veridicità di una formula e saper utilizzare la deduzione naturale per derivare sentenze.

2.1 Sintassi

Alla base di ogni linguaggio è presente un **Alfabeto**, determinante i simboli utilizzabili nel linguaggio. Come nella programmazione è richiesta una scrittura sintatticamente corretta per il funzionamento del codice, allo stesso modo funzionano i linguaggi matematici. Per la logica proposizionale utilizzeremo la seguente definizione:

Definizione 2.1. Alfabeto $\mathsf{L}^{\mathsf{PROP}}$
L'alfabeto della Logica Proposizionale è definito tramite queste tre unità sintattiche distinte:

- Insieme di simboli proposizionali $\mathsf{AT}^{\mathsf{PROP}}$, i cui elementi saranno indicati con lettere greche.
- Connettivi $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\perp$.
- Simboli ausiliari "(" e ")". Non variano il senso della frase, ma aiutano a renderla più leggibile.

I simboli dati dall'alfabeto possono essere legati, creando le stringhe, o **Formule Proposizionali**, e l'insieme che raggruppa tutte quelle sintatticamente corrette si dice **Linguaggio**.

Definizione 2.2. Linguaggio $\mathsf{L} \subseteq \mathsf{A}^*$
Definiamo Linguaggio ogni sottoinsieme L facente parte dell'insieme delle stringhe sintatticamente corrette $A*$.

Ogni formula di un dato linguaggio ha la seguente definizione, vista in un insieme detto PROP:

Definizione 2.3. Insieme PROP

1. $\perp \in \mathsf{PROP}$;
2. Se p è un simbolo proposizionale, allora $\mathsf{p} \in \mathsf{PROP}$;

3. Se $\phi, \psi \in \mathsf{PROP}$, allora valgono le seguenti relazioni:

   $(\phi \wedge \psi) \in \mathsf{PROP}$, $(\phi \vee \psi) \in \mathsf{PROP}$, $(\phi \implies \psi) \in \mathsf{PROP}$, $(\neg\phi) \in \mathsf{PROP}$.

4. Null'altro appartiene all'insieme PROP.

Per renderci la vita un pochino più semplice sono state ideate delle convenzioni sulla scrittura delle proposizioni; si possono infatti omettere alcune parentesi nelle formule e fissare un ordine di precedenza tra i connettivi.

- Si omettono le parentesi più esterne di una formula, così al posto di scrivere "$(\phi \wedge \psi)$", si scrive solo "$\phi \wedge \psi$".
- Il connettivo $\neg$ è il più forte e associa il primo simbolo presente a destra, perciò "$\neg\phi \vee \psi$" sarebbe uguale a "$(\neg\phi) \vee \psi$".
- Si assume che $\wedge$ e $\vee$ siano connettivi più forti rispetto a $\implies$ e $\iff$, quindi scrivere "$\phi_1 \wedge \psi_1 \implies \phi_2 \vee \psi_2$" è equivalente a intendere "$(\phi_1 \wedge \psi_1) \implies (\phi_2 \vee \psi_2)$".
- I connettivi $\implies, \wedge, \vee$ associano a destra, perciò scrivere "$\phi \implies \psi \implies \sigma$" equivale a dire: "$(\phi \implies (\psi \implies \sigma))$", mentre "$\phi \wedge \psi \vee \sigma$" sta per "$(\phi \wedge (\psi \vee \sigma))$".

2.1.1 Induzione e Ricorsione su PROP

2.2 Semantica

2.3 Sistemi Deduttivi

Si tratta della forma più semplice della logica matematica.

2.4 Sintassi

- Proprietà su un insieme
Dato un insieme A, definiamo la proprietà P su di esso come $P \subseteq A$ e se un elemento $\phi \in A$, anch'esso godrà della proprietà se $\phi \in P$. Se questo evento è vero, si indicherà con P[a].

Esempio. Dato l'insieme $\mathbb{N}$ e la proprietà P = {n | $n \in \mathbb{N}$, n è pari}, dove $P \subseteq \mathbb{N}$.
Possiamo dire che:

- P[5] non gode di P.
- P[6] gode di P.

Passiamo ora a due ultimi concetti sintattici:

Definizione 2.4. Rango di una formula
Definiamo $r : \mathsf{PROP} \to \mathbb{N}$ ricevente in input una formula, il valore del suo rango. Si tratta di una quantità statistica utile al fine di vedere una definizione per ricorsione.

1. $r[\psi] = 0$, se $\psi \in AT$
2. $r[(\neg\psi)] = 1 + r[\psi]$
3. $r[(\psi \circ \phi)] = 1 + max\{r[\psi], r[\phi]\}$, con $\circ \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$

Definizione 2.5. Sottoformula
Si definisce sottoformula $sub : \mathsf{PROP} \rightarrow 2^{\mathsf{PROP}}$ la funzione che prende in input una formula proposizionale e ne restituisce l'insieme delle parti. Compone l'insieme di tutte le sottoformule presenti in una certa formula data.

1. $sub[\psi] = \{\psi\}$, se $\psi \in AT$
2. $sub[(\neg\psi)] = \{(\neg\psi)\} \cup sub[\psi]$
3. $sub[(\phi \circ \psi)] = (\phi \circ \psi) \cup sub[\phi] \cup sub[\psi]$, con $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$.

2.5 Semantica

Finora abbiamo studiato il valore sintattico delle frasi, ma non dimentichiamo che, come nella lingua italiana, una composizione di frasi può avere un significato; qui nel linguaggio logico è necessario analizzare gli enunciati per determinarne eventualmente verità o falsità. Come fare?

Definizione 2.6. Valutazione di verità
Per comodità indichiamo il valore di verità con 1 e quello di falsità con 0; quindi sia la funzione $V : \mathsf{PROP} \rightarrow \{0, 1\}$, tale che valgano le seguenti relazioni:

1. $V[\bot] = 0$
2. $V[\neg\psi] = 1 \iff V[\psi] = 0$
3. $V[\psi \wedge \phi] = 1 \iff V[\psi] = 1 \wedge V[\phi] = 1$
4. $V[\psi \vee \phi] = 1 \iff V[\psi] = 1 \vee V[\phi] = 1$
5. $V[\psi \rightarrow \phi] = 1 \iff V[\psi] = 0 \vee V[\phi] = 1$
6. $V[\psi \iff \phi] = 1 \iff V[\psi] = V[\phi]$

Queste relazioni sono riassumibili in tabelle di verità, molto utili in ogni caso ci si presenti davanti. Ora, considera le variabili che abbiamo usato finora; queste possono indicare composizioni di formule al loro interno, quindi non essere atomiche, si definiscono infatti **metavariabili**, e per conoscere il loro valore semantico è necessario valutare i loro simboli proposizionali. Ciò avviene grazie alla **Valutazione atomica**, la base per definire tutte le valutazioni di verità.

Definizione 2.7. Valutazione atomica

Sia la funzione $V : AT \to \{1, 0\}$ tale che $v[\bot] = 0$

Seguirà la valutazione come risultato:
$[\cdot]_v : PROP \to \{1, 0\}$ Tale che $[\alpha]_v = v[\alpha]$ per $\alpha \in AT$.

Si possono presentare alcuni casi notevoli davanti alla valutazione del significato di un enunciato, come:

Definizione 2.8. Concordanza
Dato un insieme finito di proposizioni P, se due valutazioni sono uguali, si dicono concordanti su P. Nel caso in cui una formula proposizionale è vera in ogni caso, si dice **Tautologia** e si indica con $[\alpha]_v = 1$.

Negli esercizi verranno utilizzate le seguenti scritture, con $\alpha \in PROP$ generica:

- $\vDash \alpha$: Tautologia.
- $\vdash \alpha$: Teorema.

Per dimostrare una tautologia è necessario controllare che sia vera per ogni singolo caso; se in un'istanza si rivela falsa, non è tautologia.

Teorema 2.9. Tautologie Notevoli - Inserire formule

- Legge di De Morgan
- Negazione Involutiva
- Legge Commutativa
- Legge Distributiva
- Legge Associativa

Questo concetto e ragionamento può essere esteso anche ad un insieme determinato di proposizioni, che chiameremo Γ. Definiamo quindi:

Definizione 2.10. Soddisfacibilità di una formula e conseguenza logica
La valutazione di verità si estende ad un insieme di proposizioni arbitrario Γ tale che: $[\Gamma]_v = 1 \iff \forall \alpha \in \Gamma \mid [\alpha]_v = 1$[a].

Da questo insieme di proposizioni è possibile anche trarre delle conclusioni, dette *conseguenze logiche*. Si dice che una proposizione ψ segue logicamente da un insieme Γ se la verità delle proposizioni in esso contenute implica la verità di ψ; formalmente:
Dato l'insieme Γ di formule, si dice ψ conseguenza logica delle formule di Γ e si scrive $\Gamma \vDash \psi$. Se $[\Gamma]_v = 1 \to [\psi]_v = 1$. Se l'insieme vuoto implica una valutazione positiva di α,

abbiamo una tautologia.

[a]Inoltre, se $[\Gamma]_\nu \neq 1$, significa che c'è almeno una valutazione dove risulta falsa, non che lo sono tutte. Se si afferma invece che $[\Gamma]_\nu = 0$, tutte le valutazioni saranno false.

Diremo infine che una formula ψ è detta *soddisfacibile* se esiste una valutazione *v* per cui risulti vera, altrimenti è *insoddisfacibile*. A sua volta, questo concetto si può applicare agli insiemi di proposizioni. Γ si dice soddisfacibile quando una sua formula ψ è sempre vera data una certa valutazione, altrimenti è insoddisfacibile.

Esempio. Soddisfacibilità di un insieme Γ

- Se $\{p\} \in \Gamma$, $[p]_\nu = 1$ e quindi l'insieme è soddisfacibile.
- Se $\{p, \neg p\} \in \Gamma$, non tutte le valutazioni di *p* sono vere in quanto contraddittorie e quindi l'insieme non è soddisfacibile.

La **Sostituzione** è invece un'utile tecnica per sostituire variabili sotto un unico simbolo e rendere la scrittura più leggibile e semplice. Mettiamo di avere diverse variabili, tutte scritte in modo diverso, ma alcune di queste hanno lo stesso identico valore di altre; qui è possibile usufruire di questa tecnica.

Definizione 2.11. Sostituzione Proposizionale
Sia la formula: $\phi = ((p1 \to (p5 \vee p1)) \wedge p3)$. Qui è possibile sostituire tutti i p1 con ψ. Il passaggio intermedio si scrive $\phi[\psi/p1]$[a] e risulta con:
$\phi = ((\psi \to (p5 \vee \psi)) \wedge p3)$.

Se un termine nella formula presa in esame non compare affatto, è ovvio che la sostituzione non avrà alcuno scopo.

[a]Significa che ψ sostituirà il valore p1.

Teorema 2.12. Proprietà della sostituzione
Siano ψ_1, ψ_2 due formule e $p \in AT$. Se $\models \psi_1 \iff \psi_2$, prendendo una formula generica ϕ otteniamo che:
$\models \phi[\psi_1/p] \iff \phi[\psi_2/p]$.

Ci è quindi possibile tirar fuori dal cappello magico nuove formule, perché questa scrittura è equivalente alla prima.

Formalizziamo infine il concetto di **Relazione di equivalenza**. Molto semplicemente, i simboli $\leftrightarrow$, $\iff$ Rappresentano rispettivamente equivalenza semantica e sintattica; sono una scrittura compatta del seguente concetto: $\phi \iff \psi = (\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)$. Restituisce il valore di vero solamente quando entrambe le formule sono vere.[1]
Una relazione di equivalenza R si scrive $\approx$ ed è tale se vengono rispettati questi tre criteri:

[1]Ciò implica anche che se le formule sono equivalenti e la valutazione di una delle due è vera, lo sarà per forza anche l'altra.

1. *Riflessività*; $\forall a \in A \mid aRa$.
2. *Transitività*; $\forall a, b, c \in A \mid (aRb \wedge bRc) \rightarrow aRc$.
3. *Simmetria*; $\forall a, b \in A \mid aRb \rightarrow bRa$.

Diremo infine che date due formule $\phi, \psi \in \mathsf{PROP}$, se $\models \phi \leftrightarrow \psi$, si scriverà $\phi \approx \psi$.

2.6 Lavorare con la Logica Proposizionale

Prima di iniziare a lavorare, è necessario introdurre il concetto di **Sistema Deduttivo**. Si tratta di un costrutto che fornisce una struttura formale di regole inferenziali che permettono di derivare una conclusione a partire da alcune premesse.

Che cosa consente tutto ciò? Ora possiamo effettuare lavori di deduzione per verificare la veridicità di una formula data.

2.6.1 Induzione e Ricorsione

Le dimostrazioni per **induzione strutturale** e **ricorsione primitiva** sono concetti fondamentali che ti verranno sicuramente richiesti all'esame; quindi vediamoli nello specifico.

Teorema 2.13. Principio di Induzione strutturale sull'insieme PROP
Considera una proprietà P da provare su PROP, quindi $\mathsf{P} \subseteq \mathsf{PROP}$ supponendo veri ambo gli enunciati:

- $\forall \psi \in AT$, vale $\mathsf{P}[\phi]$.
- $\forall \psi, \phi \in \mathsf{PROP}$, valgono $\mathsf{P}[\psi], \mathsf{P}[\phi]$

Varranno quindi le relazioni $(\psi \wedge \phi), (\psi \vee \phi), (\psi \rightarrow \phi)$.

Allora, noi dobbiamo provare la formula P su PROP. Supponiamo che per ogni formula atomica e per ogni elemento di PROP valga la proprietà. Ne consegue che sarà valida anche su $(\psi \wedge \phi), (\psi \vee \phi), (\psi \rightarrow \phi)$, comportando al fatto che $\forall \psi \in \mathsf{PROP}$ valga $\mathsf{P}[\psi]$.

Dimostrazione. Basta dimostrare che $\mathsf{PROP} \subseteq \mathsf{P}$. Nota che P gode delle tre proprietà di PROP e di conseguenza, per minimalità di PROP, si ha la dimostrazione. □

Questo era un esempio teorico, vediamo un esercizio:

Esempio. Si dimostri per induzione strutturale la formula $p_2 \rightarrow (p_3 \vee p_2)$ che gode della proprietà P

1. $\mathsf{P}[p_2]$, $\mathsf{P}[p_3 \vee p_2]$
2. $\mathsf{P}[p_2 \rightarrow (p_3 \vee p_2)]$ - Finito.

Se si ha un linguaggio definito tramite induzione è sicuramente possibile utilizzare anche la ricorsione primitiva, che vedremo adesso. Se hai prestato attenzione alle lezioni di programmazione, ti sarà tutto molto più comprensibile.
La ricorsione si occupa di partire da una determinata formula per arrivare ad un caso base; vediamo un esempio messo a paragone con il linguaggio C:

Esempio. Cifre pari nel numero $\alpha = 25781$
Definiamo la proprietà P, la quale ricevuto un numero α, riporta quante sono le sue cifre pari.

1. $P[\alpha] = n = P[\alpha]$, se $\alpha\%2 \neq 0$.
2. $P[\alpha] = n = P[\alpha] + 1$, se $\alpha\%2 = 0$.
3. $P[\alpha] = \alpha/10$, se $\alpha > 10$
4. $P[\alpha] = n$, se $\alpha < 10$

In C, questa funzione ricorsiva riceverebbe in input il numero 25781 e mediante l'operazione "modulo 2" è possibile capire se un numero è pari o dispari dipendentemente dal resto della divisione per 2. Se il numero è maggiore di 10, significa che ci sono altre cifre da controllare, quindi ritorna il valore del numero diviso 10 per passare alla successiva a sinistra. Se il numero è minore di 10, dopo l'ultimo controllo ritornerà il valore di n, ovvero le cifre pari di cui abbiamo bisogno.

Descrivere il caso base appropriatamente è di fondamentale importanza; poiché senza di esso, la ricorsione andrebbe avanti ad infinitum.

Dimostrazione. Si trovi quante cifre pari sono contenute nel numero $\alpha = 25781$

1. $25781\%2 \neq 0 \rightarrow n = 0,\ \alpha = \alpha/10$
2. $2578\%2 = 0 \rightarrow n = 0 + 1,\ \alpha = \alpha/10$
3. $257\%2 \neq 0 \rightarrow n = 1 + 0,\ \alpha = \alpha/10$
4. $25\%2 \neq 0 \rightarrow n = 1 + 0,\ \alpha = \alpha/10$
5. $2\%2 = 0 \rightarrow n = 1 + 1,\ \alpha = \alpha/10$, arrivati al caso base.

Numeri pari $n \in \alpha = 2$ □

2.6.2 Tabelle di Verità

2.6.3 Deduzione Naturale

La **Deduzione naturale** è un metodo di ragionamento puramente sintattico. Si effettua stabilendo:

- *Assunzioni*; Ragionamenti temporanei.
- *Derivazioni*; Dalle formule è possibile effettuare derivazioni attraverso determinate leggi. Ogni passaggio si dice **Passo di derivazione**.

- *Scaricamento*; La chiusura delle assunzioni fatte all'inizio.

Tutte le derivazioni sono rappresentate graficamente tramite **alberi**, dove in cima stanno le *foglie*, ovvero le assunzioni e alla base la *radice*, che è la formula da derivare. Una derivazione è conclusa solamente quando ogni foglia è stata *chiusa*, quindi scaricata.

> **Definizione 2.14. Teorema**
> Una determinata formula ψ si dice teorema se esiste una derivazione per cui l'insieme delle ipotesi $\mathsf{Hp}[\mathsf{D}] = \emptyset$, ovvero quando è vuoto poiché tutte le foglie sono state chiuse. Possono inoltre esistere più derivazioni per un singolo teorema.

Passiamo ora alle **Regole deduttive**. Si tratta di algoritmi utili per la derivazione delle formule nella deduzione naturale. Si dividono in due tipi:

- *Introduzione*; Premesse collegate introducendo un connettivo logico.
- *Eliminazione*; Dalle premesse è possibile rimuovere un connettivo logico.

Negli esercizi, le regole deduttive consentono di effettuare i passi di derivazione e sono rappresentati in forma di frazione. Sopra stanno le premesse, sotto la conclusione e a fianco la regola utilizzata. Le formule all'interno di parentesi quadre sono poi ipotesi assunte/scaricate da una determinata regola di derivazione, la quale dovrà essere appropriatamente numerata. Vedremo come fare insieme alla rappresentazione delle regole a nostra disposizione:

- **Regole dell'implicazione** ($\rightarrow$)
  - **Introduzione dell'implicazione**
    Se dall'ipotesi α segue β, con una certa derivazione D, allora si deriva $\alpha \rightarrow \beta$ tramite l'introduzione dell'implicazione.
    Questa regola assume/scarica come ipotesi l'implicante dell'implicazione, indicando quella formula tra le parentesi quadre e un indice.
    $$\frac{[\beta]^1}{\alpha \rightarrow \beta} \mathrm{I}^1$$
  - **Eliminazione dell'implicazione**
  - **Indebolimento**
- **Regole della congiunzione** ($\wedge$)
  - **Introduzione dell'AND**
  - **Eliminazione dell'AND**
- **Regole del bottom** ($\perp$)
  - **Riduzione ad assurdo (RAA)**
  - **Eliminazione del bottom**
- **Regole della disgiunzione** ($\vee$)

  - **Introduzione dell'OR**
  - **Eliminazione dell'OR**

- **Regole della doppia implicazione** ($\leftrightarrow$)
  - **Introduzione della doppia implicazione**
  - **Eliminazione della doppia implicazione**

- **Assiomi**

assiomi, prove indirette, derivabilità.

2.6.4 Teoremi di Correttezza e Completezza

Logica del Primo Ordine

La **Logica del Primo Ordine**, o dei Predicati è un'espansione della Logica Proposizionale. La novità principale è la presenza di due nuovi simboli detti **Quantificatori**: *Per ogni* $\forall$ ed *Esiste* $\exists$, con i quali sarà possibile descrivere strutture matematiche. La loro particolarità è che legano più di ogni altro connettivo.

3.1 Sintassi

3.2 Semantica

formalizzazione, contromodello, struttura di peano

3.2.1 Strutture e Tipi di Similarità

3.3 Derivazione Semantica

3.4 Deduzione Naturale

3.5 Teoremi di Correttezza e Completezza