Algebra Lineare

Corso di Laurea in Informatica - Università degli studi di Verona

Federico Brutti

Federico Brutti
federico.brutti@studenti.univr.it

Indice

19 | Il Determinante

22 | Applicazioni Lineari

33 | Autovalori e Autovettori

34 | Spazi euclidei

As the student approached the Linear Algebra exam, he stumbled upon a task: Calculate the determinant of the following matrix. The boy, puzzled by its form, asked: "Are you a row-echelon matrix because you have one pivot per column or do you have one pivot per column because you're a row-echelon matrix? And would you lose to the method of Gauss' elimination?" The matrix replied: "If you used matrix operations to simplify the calculations, you might give me a little trouble, but nah, I'd win." It proceeded to use DOMAIN EXPANSION: COMPLEX NUMBERS; almost making the student fall into despair. Indeed, trying to reduce its form with Gauss proved counter-productive. In his dying moments, the student uttered the phrase: "With this treasure I summon; always bet on Laplace". The determinant was trivially calculated with a series of cross-multiplications on the lines and columns that were not ignored and everyone would bare witness to the bare flesh of the one who is free; to the one who left it all behind. Him and his overwhelming utility!.

Introduzione

Prima di iniziare, è doverosa un'introduzione per non continuare spaesati. L'algebra è una branca della matematica che si occupa dello studio di espressioni e strutture algebriche; nello specifico, ovvero il nostro caso, l'**Algebra Lineare** studia anche i sistemi di equazioni lineari, ovvero dove le incognite compaiono con grado 1.

Il nostro scopo è riuscire a trovare le soluzioni dei sistemi dati; queste sono i valori che se sostituiti alle incognite delle equazioni del sistema, le rendono vere. Necessitiamo dunque di un algoritmo per capire quando un sistema ammette soluzioni o meno e, nel caso, di trovarle tutte.

L'elemento di lavoro principale sono i **Polinomi**, espressioni algebriche composte da *incognite*, indicate con x, y e *costanti*, indicate con a, b, c. Li definiamo come segue:

> **Definizione 1.1. Polinomio**
> Espressione algebrica ottenuta manipolando costanti e variabili usando addizione, sottrazione e moltiplicazione.

I polinomi possono poi presentarsi con diversi esponenti; definiamo **Grado di un polinomio** il valore dell'esponente massimo che compare nella scrittura, ed è indicato con $deg(P(x))$. Ci è possibile trovare le soluzioni dei polinomi a una o più variabili e vengono formalmente definite come segue:

> **Definizione 1.2. Radici di un polinomio**
> Valori o il vettore, se in più variabili, che annullano il polinomio, ovvero fanno in modo che risulti:
>
> $$P(x) = 0$$

Come già visto in ogni scuola superiore immaginabile, possiamo avere polinomi di grado 1, con una sola soluzione, di grado 2, con due, trovate con la formula quadratica, e così via. Abbiamo inoltre i soliti polinomi notevoli:

- Quadrato di binomio: $x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$
- Differenza di quadrati: $x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$
- Somma e prodotto: $x^2 + ax + b = (x + x_1)(x + x_2)$, dove $a = x_1 + x_2$, $b = x_1 * x_2$
- Polinomi di grado 3: $x^3 + ax^2 + bx + c$

  Onestamente da rivedere. Una cosa dubbia, questa.

Ok, basta richiami, buttiamoci dentro.

Numeri Complessi

2.1 Numeri immaginari e operazioni in $\mathbb{C}$

Il campo di lavoro dell'Algebra Lineare si espande anche nell'insieme numerico $\mathbb{C}$, ovvero quello dei numeri complessi ed il più grande fra tutti. Qui introduciamo le **unità immaginarie** i, grazie alle quali è possibile scrivere orrori Lovecraftiani come $i^2 = -1$, che potrà essere sempre sostituito a -1, dovessi trovarlo nei tuoi calcoli.
Ci è quindi possibile ottenere qualunque numero in qualunque situazione e da qui, infatti, il seguente teorema.

> **Teorema 2.1. Teorema Fondamentale dell'Algebra**
> Un'equazione polinomiale di grado n della forma $a_0 + a_1 z + ... + a_n z = 0$, dove a_n 0, ammette *n* soluzioni nell'insieme $\mathbb{C}$

Passiamo ordunque alle operazioni dell'insieme numerico. Oltre alle quattro elementari, sarà ancora possibile utilizzare potenze, radici e anche coordinate. In tutti gli esempi seguenti vale la scrittura $z_1 = (a + bi), z_2 = (c + di)$.

- **Addizione**: $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

  Raccogli i e somma tutto il resto.

  > **Esempio.** $(6 + 7i) + (-12 + 17i) = (6 - 12) + (7 + 17)i = -6 + 24i$

- **Sottrazione**: $z_1 - z_2 = (a + bi) + (-c - di) = (a - c) + (b - d)i$

  Non dissimile dall'addizione, al sottraendo si negheranno gli elementi.

  > **Esempio.** $(3 + 2i) - (1 + i) = 2 + i$

- **Moltiplicazione**: $z_1 \times z_2 = (a+bi)(c+di) = ac+adi+bci+bdi^2 = (ac-bd)+(ad+bc)i$

  La classica moltiplicazione fra polinomi.

  > **Esempio.** $(1 - i)(3 + 2i) = 3 + 2i - 3i - 2i^2 = 5 - i$

- **Divisione**: Una razionalizzazione, in sintesi.

  > **Esempio.** $\dfrac{1+2i}{2-i} = \dfrac{1+2i}{2-i} \times \dfrac{2-i}{2-i} = \dfrac{2+i+4i+2i^2}{4+2i-2i-i^2} = \dfrac{8i}{8} = i$

Altri casi particolari di numeri sono:

- **Opposto**: Si dice tale quando sommato algebricamente ad un altro numero riporta 0 come risultato. $z_1 + z_2 = 0$

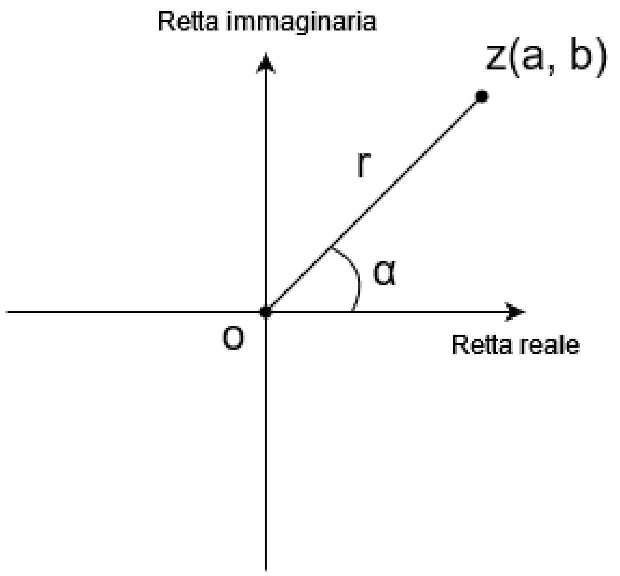
- **Coniugato**: Il numero complesso avente la stessa parte reale e parte immaginaria di segno opposto rispetto a *z*. $z = a + bi, \overline{z} = a - bi$

- **Modulo**: Il numero *z* maggiore di 0 che vale $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Nota. Seguono ora le relative proprietà di quanto appena visto:

- $z_1 \times \overline{z_1} = a^2 + b^2 = |z_1|^2$
- $\overline{z_1 + z_2} = (a + c) - (b + d)i$
- $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$
- $\dfrac{\overline{1}}{z_1} = \dfrac{1}{\overline{z_1}}, z \neq 0$
- $\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = z \times \overline{\dfrac{1}{z_2}} = \overline{z_1} \times \dfrac{1}{z_2} = \overline{z_1} \times \dfrac{1}{\overline{z_2}}, z_2 \neq 0$
- $\dfrac{1}{z_1} = \dfrac{a - bi}{a^2 + b^2} = \dfrac{\overline{z_1}}{|z_2|^2}$

Osserviamo ora che per ogni numero complesso, quando messo su un piano di riferimento, le sue coordinate (a, b) rappresentano parte reale *a* e parte immaginaria *b*. Ci è quindi possibile lavorare sulle **coordinate polari** attraverso le formule trigonometriche.



- r = lunghezza del segmento $\overline{oz}$, ovvero il *raggio polare.*
- α = ampiezza dell'angolo.
- o = Origine del grafico.

Figura 2.1: Grafico delle coordinate polari

2.2 Forma trigonometrica dei Numeri Complessi

Possiamo ottenere la forma trigonometrica di un numero complesso attraverso la coppia delle coordinate. Per facilitare la comprensione è consigliato guardare il piano di lavoro.

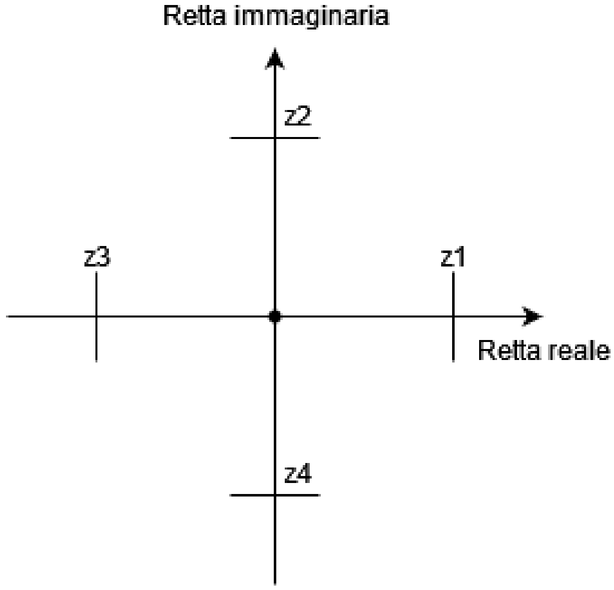


Figura 2.2: Valori nel piano cartesiano

Queste sono le **forme trigonometriche**; tuttavia a noi serve la forma algebrica, ottenibile utilizzando seno e coseno, ovvero:
$\sin(\alpha) = \frac{b}{r}$, $\cos(\alpha) = \frac{a}{r}$
$z = (r\cos(\alpha)) + (r\sin(\alpha))i = r(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$

- $z_1 = (1, 0) = 1$ -> $\cos(0) + i\sin(0)$
- $z_2 = (1, \frac{\pi}{2}) = i$ -> $\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2})$
- $z_3 = (1, \pi) = -1$ -> $\cos(\pi) + i\sin(\pi)$
- $z_4 = (1, \frac{3}{2}\pi) = -i$ -> $\cos(\frac{3}{2}\pi) + i\sin(\frac{3}{2}\pi)$

Similmente al comportamento delle funzioni trigonometriche, per moltiplicare due forme trigonometriche si utilizza la formula di duplicazione.

Esempio. $z_1 = r(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$, $z_2 = s(\cos(\beta) + i\sin(\beta))$

$$\begin{aligned} z_1 \times z_2 &= r \times s(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))(\cos(\beta) + i\sin(\beta)) \\ &= r \times s[(\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)) + (\cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta)i] \\ &= r \times s[\cos(\alpha + \beta) + \sin(\alpha + \beta)i] \end{aligned}$$

2.3 Formula di De Moivre e radici n-esime

Oltre alle quattro operazioni elementari ci è possibile lavorare anche con potenze e radici.

Teorema 2.2. Formula di De Moivre
Consente di calcolare la potenza di un numero complesso espresso in forma trigonometrica o esponenziale.

Esempio. $z = r(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)) \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$.
$z^n = r^n[\cos(n \times \alpha) + i\sin(n \times \alpha)]$

$z = \sqrt{3} + i$

$$z = 2[\cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6})] = z^6 = 2^6[\cos(\pi) + i\sin(\pi)] = 2^6[-1 + i \times 0] = 2^6 \times -1 = -64$$

Si dicono invece radici n-esime di y le soluzioni dell'equazione $x^n = y$, dove $y \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$. Esisteranno poi n radici n-esime complesse $z_0, z_1, ..., z_n$ di y. Verranno utilizzati come dati l'ampiezza α dell'angolo, il valore 2π per le radianti ed un numero k per consentire di "coprire" ogni posizione della circonferenza nel piano; in pratica segna l'istanza di un determinato punto. Si scrivono come segue:
Se $y = r(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$, allora per $k = 0, 1, ..., n-1$ vale la seguente scrittura:
$z_n = \sqrt[n]{r}[\cos(\frac{\alpha + k2\pi}{n}) + i\sin(\frac{\alpha + k2\pi}{n})$
Essendo inoltre nell'insieme $\mathbb{C}$, possono esistere anche le radici quadrate dei numeri negativi, come è anche possibile utilizzare la formula quadratica per trovare le soluzioni.

Teorema 2.3. Teorema delle Radici complesse
Sia $a \in \mathbb{R}$ tale che $a < 0$; esisteranno precisamente due radici quadrate di a in $\mathbb{C}$.

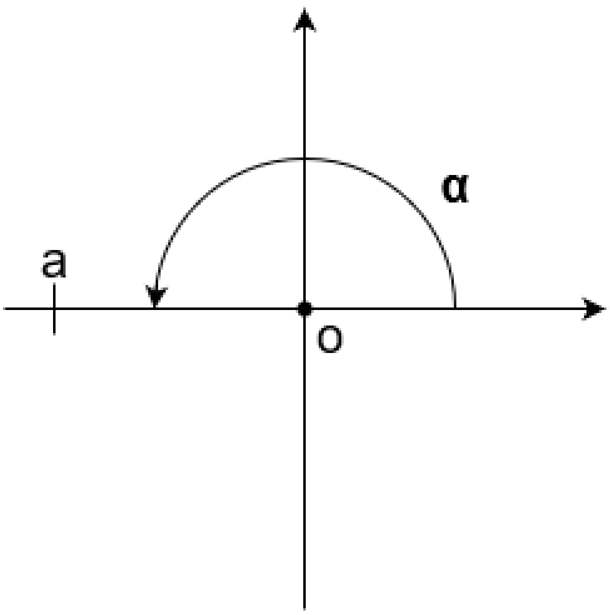


Figura 2.3: Piano del segmento $\overline{ao}$

Il segmento $\overline{ao}$ svolge la medesima funzione di r ed in questo caso vale: $a = (-a)(\cos(\pi) + i\sin(\pi))$
E grazie al teorema delle radici otteniamo le due soluzioni desiderate:

- $z_0 = \sqrt{-a}(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2}) = i\sqrt{-a}$
- $z_1 = \sqrt{-a}(\cos(\frac{3}{2}\pi) + i\sin(\frac{3}{2}\pi) = -i\sqrt{a}$

2.4 Domande di teoria

1. **Che cos'è un numero complesso? Qual è il suo insieme di definizione e quali elementi ha in più rispetto all'insieme R?**

   Per numero complesso si intende un dato valore i chiamato **Unità immaginaria**. Consente di ottenere risultati che in R risulterebbero impossibili. Detiene la seguente proprietà: $(0, 1) \times (1, 0) = (-1, 0)$, la quale dona la dinamica principale dell'insieme dei complessi: $i^2 = -1$.

   L'insieme di definizione dei numeri complessi C è un sovrainsieme di R.

2. **Che forme possono assumere i numeri complessi e in che modo si ottengono?**

   I numeri complessi possono assumere una **forma algebrica** ed una **forma trigonometrica**. La prima risulta utile quando bisogna effettuare calcoli letterali. Si scrive $z = a + bi$ e usa le seguenti formule:

   - $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + i(b + d)$.
   - $(a + bi) \times (c + di) = (ac - bd) + i(ad + bc)$.

   Per quanto riguarda la seconda forma, i punti del piano sono identificabili con coordinate cartesiane e polari. In merito alle seconde:

   - **Raggio polare**; Semiretta ottenuta tracciando una linea da un dato punto fino all'origine.
   - **Angolo polare**; Angolo la cui ampiezza è ottenuta tracciando un semicerchio partendo dall'asse positivo e terminando sul punto.

   Si scrive $z = \rho(a + bi)$, dove:

   - $a = cos(\Theta)$.
   - $b = sin(\Theta)$.

3. **Cosa si intende per coniugato e modulo di un numero complesso?**

   - Coniugato di z; $\bar{z} = a - bi$
   - Modulo di z; $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

4. **Enunciare la formula di De Moivre.**

   La formula di De Moivre consente di ottenere la potenza di un numero complesso espresso in forma trigonometrica. $z^n = r^n(cos(n \times \alpha) + isin(n \times \alpha))$.

5. **Cosa si intende per radici n-esime?**

   Dato un numero complesso y, esistono n radici n-esime complesse $z_0, z_1, ..., z_n$ di y. Inoltre, se in forma trigonometrica, le radici si presenteranno nella seguente forma per $k = 0, ..., n - 1$: $z_k = \sqrt[n]{r} \times (cos(\frac{\alpha + k2\pi}{n}) + isin(\frac{\alpha + k2\pi}{n}))$

6. **Enunciare il teorema fondamentale dell'algebra.**

   Dato un qualsiasi polinomio $p(x)$ a coefficienti complessi di grado maggiore o uguale a 1, avrà almeno una radice complessa. Il polinomio è di forma:

   $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, con $n \geq 1$.

2.5 Argomenti

1.1 Insiemi di numeri 1.1 Numeri immaginari 1.1 Operazioni tra numeri complessi (addizione, moltiplicazione, sottrazione, divisione + teorema fondamentale dell'algebra) 1.1 Coniugato e modulo 1.2 Coordinate polari 1.2 Forma trigonometrica di un numero complesso 1.2 Prodotto di numeri complessi in forma trigonometrica 1.3 La Formula di De Moivre 1.3 Definizione: radici n-esime 1.3 Teorema sulle radici n-esime 1.3 Radici quadrate di numeri reali negativi

Sistemi Lineari, Vettori e Matrici

3.1 Equazioni, sistemi e operazioni

Risoluzione di sistemi lineari, inoltre

3.2 Metodo di Eliminazione di Gauss

3.3 Rango e Teorema di Roché-Capelli

3.4 Esercizi

1. **Che cos'è un sistema lineare e come si risolve?**
2. **Cosa sono i vettori e che operazioni è possibile effettuare con loro? Come puoi scriverci la soluzione di un sistema?**
3. **In che modo un sistema lineare di equazioni si può scrivere in una matrice? Che operazioni hanno luogo fra matrici e vettori?**
4. **In che modo si trovano le soluzioni di una matrice?**
5. **Che cos'è il rango e come si utilizza nel teorema di Rouché-Capelli?**
6. **In che cosa consiste l'algoritmo di eliminazione di Gauss?**

3.5 Argomenti

2.1 Sistemi lineari (esempio, definizione, sistema lineare omogeneo, soluzione) 2.1 Matrici (definizione, coefficienti/entrate, Mm×n(C), Mm×n(R)) 2.1 Forma matriciale (matrice dei coefficienti, vettore delle incognite, vettore dei termini noti, matrice aumentata) 2.1 Operazioni elementari: Scambiare righe, moltiplicare una riga per uno scalare non nullo, sommare una riga con un multiplo di un altra riga. 2.1 Linee in R2: 1, 0 o ∞ soluzione. 2.2 Metodo dei eliminazione di Gauss (EG). Definizioni di pivot, forma ridotta e colonne dominanti. 2.2 Risoluzione di un sistema lineare. Definizioni di variabile dominante e variabile libera. Ogni sistema ha 1, 0 o ∞ soluzione. 2.3 Definizione rango. 2.3 Teorema di Roche-Capelli

Algebra delle Matrici

4.1 Operazioni Matriciali

4.2 Tipologie di Matrici

Quadrata, elementare, invertibili, inverse, formule per l'inversa di una matrice

4.3 Matrici invertibili

4.4 Domande di teoria

1. **Che cosa e quali sono le operazioni matriciali?**
2. **Quali sono i vari tipi di matrice?**
3. **Che cosa rende una matrice invertibile e come si ottiene?**
4. **Che cosa si intende per matrice trasposta? Quali sono le proprietà di questa forma?**

4.5 Argomenti

3.1 Definizione e propriet'a: somma di due matrici 3.1 Definizione e propriet'a: prodotto di una matrice per uno scalare 3.1 Definizione e propriet'a: trasposta di una matrice 3.1 Definizione e propriet'a: prodotto di due matrici 3.1 Osservazione: sistema lineare in forma matriciale 'e un prodotto di matrici 3.2 Definizioni: matrice quadrata, matrice diagonale, matrice triangolare inferiore/superiore 3.2 Matrici elementari 3.2 Moltiplicazione con matrici elementari
3.3 MATRICI INVERTIBILI 3.3 Definizione: matrice invertibile 3.3 Inverse di matrici elementari 3.3 Proposizione: un sistema lineare Ax = b 'e equivalente al sistema lineare U x = c dove (U |c) 'e una forma ridotta di (A|b). 3.3 Proposizione: un sistema lineare ammette una soluzione se e solo se il rango 'e massimo 3.3 Formula per l'inversa 3.3 Proposizione: invertible se e solo se esiste una sequenza di matrici elementari 3.3 Il calcolo della matrice inversa 3.3 Teorema della matrice invertibile

Spazi e Sottospazi Vettoriali

5.1 Lo spazio Vettoriale

Iniziamo ora un argomento più complesso e astratto rispetto agli altri; abbiamo visto che i sistemi lineari si possono scrivere sotto forma matriciale e che l'insieme soluzione è esprimibile mediante vettori. Un insieme di questi vettori, spartanamente, viene chiamato **Spazio Vettoriale** su un determinato campo. Formalmente:

Definizione 5.1. Spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$
Uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ è un insieme V, i cui elementi sono detti vettori v ed è dotato delle seguenti due operazioni:

- **Somma di vettori**

  Dati due vettori $v, w \in V$, quest'operazione interna associa un terzo vettore $u \in V$ alla somma dei primi due e si scrive $u = v + w$.

- **Moltiplicazione per scalare**

  Dato uno scalare $t \in \mathbb{K}$ ed un vettore $v \in V$, quest'operazione esterna associa un nuovo vettore $u \in V$ al prodotto fra i primi due elementi e si scrive $u = t \times v$.

Come potrai immaginare, la presenza di operazioni implica anche l'esistenza di relative proprietà. Qui le elenchiamo tutte, anche le più ovvie, dove $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $u, v, w \in V$:

Proposizione 5.2. Proprietà delle operazioni negli spazi vettoriali

- **Proprietà commutativa**

  L'ordine in cui sono effettuate le operazioni non cambia il risultato.

  $$v + w = w + v.$$

- **Proprietà associativa**

  Ci è possibile effettuare un'operazione prima dell'altra e non cambiare il risultato.

  $$(v + u) + w = v + (u + w), \ (\alpha \times \beta)v = \alpha(\beta \times v).$$

- **Proprietà distributiva**

  Nel moltiplicare più elementi per uno scalare, il moltiplicatore viene distribuito a tutti loro.

$$\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w, \ (\alpha \times \beta)v = \alpha v + \beta v.$$

- **Elemento neutro**

  Elemento tale per cui la sua somma o moltiplicazione per scalare con un vettore restituisce il vettore stesso.

  $$v + v_0 = v, \ v \times 1 = v.$$

- **Elementi inversi**

  Elemento tale per cui se sommato al primo risulta zero.

  $$w + v = 0 \iff v = -w.$$

Queste proprietà valgono anche se si volesse spostare il focus su matrici, insiemi numerici, insiemi di polinomi e successioni. Vale addirittura la somma fra vettori geometrica. Puoi provare a dimostrarlo ma è inutilmente tedioso, quindi prendilo per assioma.

5.2 Combinazione Lineare, Insieme di Generatori

Quando abbiamo un vettore risultante dalla moltiplicazione di una serie di vettori con una serie di scalari, si dice **Combinazione lineare** dei vettori $v_1, ..., v_n$ con coefficienti $t_1, ..., t_n$. Lo definiamo formalmente come:

Definizione 5.3. Combinazione lineare
Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e siano i vettori $v_1, ..., v_n \in V$ con $t_1, ..., t_n \in \mathbb{K}$. Il vettore risultante dalla loro moltiplicazione è:

$$v = t_1v_1 + t_2v_2 + ... + t_nv_n$$

ed è detto combinazione lineare dei vettori v_n con coefficienti della combinazione t_n.

Risulta un pò difficile da immaginare in senso pratico, quindi propongo il seguente esempio:

Esempio. Combinazione lineare

$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ è la combinazione lineare dei vettori: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

I coefficienti di combinazione sono rispettivamente $1, 2, 3$; infatti risulta che:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hai potuto osservare che la combinazione lineare è *generata* da un insieme di vettori. Nello specifico questo viene chiamato **Insieme di generatori**. Alcuni spazi vettoriali sono determinati da un insieme finito, come quello nell'esempio, e vengono definiti come spazi **finitamente**

generati. Ci è inoltre possibile dimostrare, partendo da una combinazione lineare, se è o meno un insieme di generatori di un dato spazio V. Generalmente:

Proposizione 5.4. Quando una combinazione lineare è un insieme di generatori? Diciamo che la combinazione dei vettori elementari $\{e_1, ..., e_n\}$ è un insieme di generatori dello spazio $\mathbb{K}^n$ se e solo se ogni vettore elementare presenta il valore 1 in una sola riga, il quale verrà moltiplicato per uno scalare, ed in tutte le altre il valore 0.

Esempio. Dato lo spazio $V = \mathbb{K}^3$ diciamo che il seguente insieme è un insieme di generatori di V:

$$\left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Ciò vale solamente se vale la seguente operazione:

$$v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3 = V = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Bisogna infatti prendere i vettori dell'insieme; moltiplicare loro un qualsiasi vettore V e se il risultato postumo alla somma è uguale al vettore iniziale, hai dimostrato che l'insieme è un insieme di generatori di V.

Esempio. Ma qual è la logica dietro i vettori da moltiplicare scelti? Prova a vedere l'insieme supposto di generatori come un sistema lineare dove ogni caso deve essere uguale a 1, perché deve ritornare il vettore V. Procediamo dunque con un secondo esempio, dato $V = \mathbb{R}^2$ diciamo che il seguente insieme è un insieme di generatori di V:

$$\left\{ r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, r_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, r_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Quindi, testiamolo. Immaginiamo l'insieme supposto di generatori come un sistema lineare e poniamo ogni equazione ad 1:

$$\begin{cases} 1x_1 + 1x_2 + 0 = 1 \iff x_1 = 0 \\ 3x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 1 \iff x_3 = -3x_1 \end{cases}$$

Ora che sappiamo cosa ottenere, rifletti su *come* ottenerli. Noti che la prima riga dell'insieme ha i valori $1 + 1 + 0$, quindi per arrivare ad 1 servirà moltiplicare per un numero negativo. Prendiamo quindi il vettore $(v_1 - v_2)$.

Nella seconda riga abbiamo che per ottenere 1, dobbiamo rimuovere quel 3, quindi moltiplicheremo una colonna per -3, prendiamo il vettore $(v_2 - v_1)$. Risolviamo.

$$(v_1 - v_2)(r_1) + (v_2)(r_2) + 3(v_2 - v_1)(r_3) = \begin{pmatrix} v_1 - v_2 + v_2 + 0 \\ 3(v_1 - v_2) + v_2 + 3(v_2 - v_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Abbiamo la conferma che è un insieme di generatori.

5.3 Il Sottospazio Vettoriale

Può capitare che uno spazio vettoriale ne contenga altri; in tal caso lo chiameremo **Sottospazio vettoriale**. Per far sì che siano tali devono valere le seguenti proprietà:

- Somma vettoriale e moltiplicazione per scalare.
- Deve essere un insieme non vuoto.

Esistono anche altri tipi di spazi, appositi per polinomi, serie e applicazioni; anche in questi casi sussistono queste proprietà. Inoltre, come gli spazi normali, anche questi possono essere generati da un insieme. Definiamo infatti:

Definizione 5.5. Sottospazio generato da un insieme, intersezione
Il sottospazio $< v_1, ..., v_n >$ dello spazio V si dice sottospazio generato dall'insieme $v_1, ...v_n$, dove quest'ultimo comprende tutte le combinazioni dei vettori in esso contenuto.

Da questa definizione deriviamo due operazioni che prendono la forma di intersezione e unione di sottospazi vettoriali.

- **Intersezione**
  Siano due sottospazi U, W sullo spazio $V \in \mathbb{K}$. L'intersezione fra i due sarà anch'essa un sottospazio di V e si scrive:

  $$U \cap W := \{v \in V | v \in U \wedge v \in W\}$$

  Esempio. Dato lo spazio $V = \mathbb{R}^2$ e due sottospazi U, W, dove:

  $$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ n \end{pmatrix} \right\rangle, W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \right\rangle$$

  Abbiamo che l'intersezione è: $U \cap W = \{0_v\}$ perché non hanno punti in comune.

- **Unione**
  Siano due sottospazi U, W sullo spazio $V \in K$. L'unione è generalmente definita come:

  $$U \cup W = \{v \in V | v \in U \vee v \in W\}$$

  Tuttavia, il risultato non è un sottospazio vettoriale di V.

  Esempio. Dato lo spazio $V = \mathbb{R}^2$ e due sottospazi U, W, dove:

  $$U = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix}, W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ dove per entrambi } \alpha \in \mathbb{R}.$$

  Prendiamo un singolo vettore determinato per entrambi i sottospazi; avremo che:

- $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to u \in U \cup W$.
- $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to w \in U \cup W$.

Tuttavia la somma fra i vettori u, w risulterà non appartenente all'unione dei sottospazi U, W, quindi è dimostrato che l'unione non è un sottospazio vettoriale di V.

5.4 Spazio delle Colonne e Spazio Nullo

Possiamo aggiungere le matrici all'equazione? Ma non vedo perché no. Per questi casi riguardanti i sottospazi definiamo:

Definizione 5.6. Spazio delle colonne
Sia una matrice $A_{m\times n} = (a_{ij})$ sullo spazio $\mathbb{K}$ generato da ogni singola colonna di A. Diciamo che il sottospazio $C(A)$ di $\mathbb{K}^m$ è lo spazio delle colonne di A e si scrive:

$$C(A) = \left\langle \begin{pmatrix} a_{11} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\rangle$$

Più semplicemente, ogni colonna della matrice A è vista come un vettore del sottospazio ed il loro insieme è lo spazio delle colonne.

Inoltre, lo spazio delle colonne $C(A)$ consiste di tutti i vettori $b \in \mathbb{K}$ per i quali il sistema lineare $Ax = b$ ammette soluzione.

Propongo quindi direttamente un esempio pratico data la complessità di una dimostrazione generale:

Esempio. Lo spazio delle colonne $C(A)$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}$
Sia uno spazio vettoriale $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e la matrice A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Avremo quindi il seguente spazio delle colonne $C(A)$:

$$C(A) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 | \exists x, y, z \in \mathbb{R} | \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

Svolgiamo i calcoli per ottenere il vettore dai coefficienti a, b:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 5y + 6z \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x + 2y \\ 5y + 6z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Quindi gli elementi di $C(A)$ sono i vettori dai coefficienti $a, b \in \mathbb{R}$ tali che il seguente sistema lineare abbia una soluzione:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Troviamoli, dunque. Se il vettore con coefficienti x, y, z è soluzione del sistema, allora avremo per definizione che la somma delle colonne della matrice risulterà il vettore con coefficienti a, b, ovvero la combinazione lineare delle colonne.

Penserai ora alla teoria degli insiemi e agli argomenti appena visti. Ogni insieme contiene anche il vuoto, ovvero l'elemento neutro. Bella pensata, ce l'hai anche qua. Definiamo:

Definizione 5.7. Spazio nullo
Sia una matrice $A = (a_{ij})$ sullo spazio $\mathbb{K}$. Diciamo spazio nullo di A il seguente insieme:

$$N(A) := \{v \in \mathbb{K}^n | Av = 0\}$$

Si tratta in parole povere di un vettore dove ogni coefficiente è uguale a 0. Capirai che se gli moltiplichi una matrice otterrai una matrice con soli zeri. Si tratta inoltre di un sottospazio di $\mathbb{K}^n$.

5.5 Esercizi

Il Determinante

6.1 Definizione e calcolo

Il **Determinante** di una matrice è un numero utile per la descrizione di alcune proprietà algebriche e e geometriche della stessa. Si ottiene di base in questi tre modi:

Definizione 6.1. Calcolo del determinante di una matrice
Chiariamo che serve necessariamente avere una matrice quadrata, dove n indica il numero di righe o colonne.

- Se $n = 1$, la matrice avrà una singola entrata.

  $A = (a)$, $det A = a$.

- Se $n = 2$, la matrice avrà quattro entrate

  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $det A = ad - bc$.

- Se $n \geq 3$, la matrice avrà nove entrate o più. Vale la formula generale

  $A = (a_{ij})_{1 \leq ij \leq n}$, $det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \times a_{1j} \times det A_{1j}$.

  Dove A_{1j} è la matrice ottenuta da A cancellando la prima riga e la colonna j. Tuttavia siccome la scrittura del terzo caso è illeggibile (Cristo ti sfido a capirla), propongo un esempio pratico.

Esempio. Calcolo del determinante di una matrice A dove $n = 3$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Tieni a mente la formula e sostituisci:

$$det A = (-1)^{1+1} \times 1_{11} \times \ det \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ \cancel{0} & 1 & 3 \\ \cancel{1} & 2 & 0 \end{pmatrix} + (-1)^{2+1} \times 2_{12} \times \ det \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ 0 & \cancel{1} & 3 \\ 1 & \cancel{2} & 0 \end{pmatrix} + (-1)^{3+1} \times 3_{13} \times$$

$$det \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ 0 & 1 & \cancel{3} \\ 1 & 2 & \cancel{0} \end{pmatrix} = +1 \times 1(1 \times 0) - (2 \times 3)] + [-2 \times 2(0 \times 0) - (1 \times 3)] + [1 \times 3(0 \times 2) - (1 \times 1)] =$$

$$-6 + 6 - 3 = -3$$

So che può sembrare un casino, ma se lo leggi piano e con calma potrai capirne i segreti.

Tuttavia quello del calcolo del determinante è un processo particolarmente tedioso, ed è per questo che introduciamo i due teoremi seguenti.

6.1.1 Teorema di Sarrus

A detta del Dr. Er Lucertola, nemmeno Sarrus usava Sarrus, ma nel caso in cui ti trovassi davanti ad una matrice quadrata 3x3, riesce a semplificare di molto i calcoli attraverso il seguente algoritmo:

Definizione 6.2. Teorema di Sarrus
Data una matrice quadrata 3x3, è possibile calcolare il determinante attraverso la formula:

$$\det A = (a_{11} \times a_{22} \times a_{33}) + (a_{12} \times a_{23} \times a_{31}) + (a_{13} \times a_{21} \times a_{32}) - (a_{13} \times a_{22} \times a_{31}) - (a_{11} \times a_{23} \times a_{32}) - (a_{12} \times a_{21} \times a_{33}).$$

In forma matriciale, dove + indica gli elementi da sommare e − quelli da sottrarre, per una visione più chiara:

$$\begin{pmatrix} +a_{11} & +a_{12} & +a_{13}- \\ a_{21} & +a_{22}- & +a_{23}- \\ a_{31}- & a_{32}- & +a_{33}- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}- & a_{12}- \\ +a_{21}- & a_{22} \\ +a_{31} & +a_{32} \end{pmatrix}$$

Qua è da trovare una forma per mostrarlo diversa, sai.

Esempio. Calcolo del determinante di una matrice mediante il teorema di Sarrus

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$det A = 0 + 6 + 0 - 3 - 6 - 0 = -3$$

Che è corretto.

6.1.2 Teorema di Laplace

L'algoritmo di Laplace è invece universalmente utile, per questo è il più forte, mio padre. Vale per ogni matrice quadrata nxn e il determinante può essere sviluppato per ogni riga o colonna.

Definizione 6.3. Algoritmo di Laplace
Data una qualunque matrice quadrata nxn, è possibile ottenere il determinante di una matrice A in uno di questi due modi:

- Se sviluppi per riga i

  INSERISCI FORMULA

- Se sviluppi per colonna j

  INSERISCI FORMULA

MANCA TUTTO IL RESTO.

6.2 Utilizzi del determinante

6.3 Esercizi

5.1.2 Teorema di Laplace
5.2 UTILIZZI DEL DETERMINANTE 5.2 Determinante e la trasposta 5.2 Proposizione: Det di matrici triangolari 5.2 Teorema: Det di un prodotto con una matrice elementare 5.2 Corollario: invertibile se e solo se Det non-nullo 5.2 Corollario: Det di un prodotto di matrici 5.2 Teorema: invertibile se e solo se Det non-nullo (2x2) 5.2 La regola di Cramer

Applicazioni Lineari

7.1 Dipendenza e Indipendenza Lineare

Partiamo subito con un concetto necessario per introdurre l'argomento della sezione; è possibile che gli insiemi di generatori abbiano a loro volta dei sottoinsiemi. Prendiamo infatti lo spazio dei valori reali $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^2$ e il seguente insieme di generatori:

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

I coefficienti per generare i vettori x, y non sono univocamente determinati, infatti puoi arrivare ad una soluzione con più strade, basta pensare a come sono definiti gli insiemi numerici: ogni numero può essere rappresentato come somma o sottrazione di altri.

Se si trovano soluzioni più efficienti per arrivare al vettore richiesto, ci si trova di fronte ad un **sottoinsieme di generatori**, i cui elementi devono necessariamente essere capaci di ricreare i vettori dell'insieme non utilizzati. In tal merito diciamo che C è **linearmente dipendente**, poiché un suo vettore può essere espresso come combinazione lineare degli altri. Facciamo ora una piccola osservazione:

Proposizione 7.1. Se $\{v_1, ..., v_n\}$ è un insieme di generatori di uno spazio vettoriale V e se v_n è combinazione lineare di $v_1, ..., v_{n-1}$, allora quest'ultimo insieme è un insieme di generatori di V. Di conseguenza, ciò che viene applicato agli insiemi di generatori vale anche per i loro sottoinsiemi.

Ora possiamo definire formalmente l'argomento della sezione:

Definizione 7.2. Dipendenza e Indipendenza Lineare
Dati i vettori di uno spazio vettoriale, quindi $v_1, ..., v_n \in V$, il loro insieme si dice linearmente **dipendente** se almeno uno di quei vettori è una combinazione lineare degli altri. Ne consegue inoltre che se un insieme non è linearmente dipendente, sarà linearmente **indipendente**.

Per dimostrare che un insieme di vettori è linearmente indipendente si utilizzano tre teoremi, tutti perfettamente equivalenti l'uno con l'altro.

Teorema 7.3. Siano i vettori $v_1, ..., v_n \in \mathbb{V}$, allora:

1. L'insieme $\{v_1, ..., v_n\}$ è linearmente indipendente.
2. Se $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i$, per $\alpha_1, ..., \alpha_n$ e $\beta_1, ..., \beta_n$, entrambi appartenenti allo spazio $\mathbb{K}$, allora $\alpha_i = \beta_i \forall 1 \leq i \leq n$.

3. Se i valori $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$ sono tali per cui $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = 0_v$, allora tutte le alfa saranno uguali a 0.

Se valgono tutte e tre queste condizioni, hai dimostrato un'indipendenza lineare.

Dimostrazione. Essendo che sono equivalenti, è possibile dimostrare uno a partire dall'altro, ma esiste una strategia migliore per contrarre i passaggi. Pay attention.
Prima dimostra che $2 \to 3$, poi che $\neg 2 \to \neg 1 \to \neg 3$. Iniziamo.

- $\text{Th}(2) \to \text{Th}(3)$

  Se la somma di prodotti dello spazio vettoriale è uguale a 0, allora ogni scalare $\alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$. Dimostrato.

- $\neg\text{Th}(2) \to \neg\text{Th}(1)$

  Supponiamo esistano scalari $\alpha_1, ..., \alpha_n$ e $\beta_1, ..., \beta_n$, entrambi nello spazio $\mathbb{K}$ tali che $(\exists j.1 \leq j \leq n)$ per il quale: $[(\alpha_j \neq \beta_j) \wedge (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i)]$.

  Abbiamo quindi che $0_v = (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i - \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i)$, che per proprietà associativa è uguale a $[\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i - \beta_i)v_i]$, da cui $(\alpha_j - \beta_j \neq 0)$.

  Possiamo quindi dire che $0_v = \left[\sum_{i=1}^{n}(\frac{\alpha_i - \beta_i}{\alpha_j - \beta_j})v_i\right]$.

  In tal caso, avremo un $v_j = \left[\sum_{i=1}^{j-1}(\frac{\beta_i - \alpha_i}{\alpha_j - \beta_j})v_i\right] + \left[\sum_{i=j+1}^{n}(\frac{\beta_i - \alpha_i}{\alpha_j - \beta_j})v_i\right]$.

- $\neg\text{Th}(1) \to \neg\text{Th}(3)$

  Raggiunte le nostre ipotesi, teniamo buona la j supposta e aggiungiamo che:

  $(\exists \alpha_1, ..., \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, ..., \alpha_n \in \mathbb{K})$ tali che $v_j = [(\sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i v_i) + (\sum_{i=j+1}^{n} \alpha_i v_i)]$

  Controlliamo dunque $0_v = v_j - v_j = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_j v_j + ... + \alpha_n v_n$.

  Proprio qui la moltiplicazione fra $\alpha_j v_j \neq 0$, perché $\alpha_j = -1$. Assurdo. $\text{Th}(3)$ non vale.

Non valgono le ipotesi false, di conseguenza è stato dimostrato che i teoremi sono equivalenti e utilizzabili per dimostrare indipendenza lineare. □

Esempio. Dimostrazione di indipendenza lineare
Dato lo spazio degli scalari $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e lo spazio vettoriale $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$, dimostriamo che l'insieme seguente è linearmente indipendente:

$$\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\right\}$$

Moltiplichiamo il vettore 0_v ad ogni elemento dell'insieme, il quale farà le veci per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Ogni soluzione trovata sarà per forza uguale a 0. Per verificarlo moltiplica l'alfa corrispondente al vettore, noterai che risulterà sempre 0. Per questo teorema, l'insieme è linearmente indipendente.

L'esempio appena visto è applicabile anche alle matrici, pure con coefficienti complessi. Basterà semplicemente sostituire ad ogni alfa una matrice i cui elementi sono tutti uguali a 0. Inoltre, generalmente diciamo che:

- Un insieme $\{v\} \subseteq V$ è linearmente indipendente se s.se $v \neq 0_v$.
- Un insieme $\{v_1, v_2\} \subseteq V$ è linearmente dipendente s.se $\exists \alpha \in \mathbb{K}. v_1 = \alpha v_2$ o viceversa.

Andiamo avanti, perché ora possiamo parlare di **Basi** di uno spazio vettoriale. Diamone subito una definizione formale.

Definizione 7.4. Base di uno spazio vettoriale
Sia $\mathbb{V}$ uno spazio vettoriale e $v_1, ..., v_n \in \mathbb{V}$ i suoi elementi. L'insieme $B = \{v_1, ..., v_n\}$ è detto base di $\mathbb{V}$ se:

- B è un insieme di generatori.
- B è linearmente indipendente.

In merito, B è base di $\mathbb{V}$ s.se ogni vettore di $\mathbb{V}$ può essere scritto in modo unico come combinazione lineare degli elementi di B. Possiamo di conseguenza vedere la base come **sistema di coordinate** di $\mathbb{V}$. Possiamo infatti scrivere:

$$v = (\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n), \text{ con } \alpha_1, ..., \alpha_n \text{ univocamente determinati.}$$

Notazione: $[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ ... \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ - Le alfa sono univocamente determinate perché B è una base.

Dato ora lo spazio $\mathbb{V} = \mathbb{K}^n$, diremo infine che l'insieme $\mathcal{E}_n$ seguente, è la **Base canonica** dell'insieme $\mathbb{K}^n$.

$$\mathcal{E}_n = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, ..., e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Esempio. Determinare se C è una base dello spazio $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$
Per prima cosa bisogna dimostrare che C è un insieme di generatori.

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \implies \begin{cases} 0 + 3 = v_1 \\ 1 + 2 = v_2 \end{cases}$$

Noti che puoi ottenere v_1 moltiplicando per $\dfrac{v_1}{3}$ la seconda colonna, modificando in tal modo il sistema:

$$\begin{cases} 0 + \frac{3}{3} v_1 = v_1 \\ 1 + \frac{2}{3} v_1 = v_2 \end{cases} \implies \begin{cases} v_1 = v_1 \\ 1 + \frac{2}{3} v_1 = v_2 \end{cases}$$

Ora bisogna pensare a come ottenere v_2 con l'altra colonna. Hai la fortuna di avere un 1, quindi puoi direttamente moltiplicare per v_2, che è la variabile necessaria, ma anche per $-\frac{2}{3}v_1$, per rimuovere la zavorra. Quindi:

$$\begin{cases} v_1 = v_1 \\ v_2 - \frac{2}{3}v_1 + \frac{2}{3}v_1 = v_2 \end{cases} \implies \begin{cases} v_1 = v_1 \\ v_2 = v_2 \end{cases} \text{Confermato insieme di generatori.}$$

$$\text{Operazioni eseguite: } (r_1)(v_2 - \frac{2}{3}v_1) + (r_2)(\frac{1}{3}v_1).$$

Per il punto 3 del teorema 7.3, C è una base di $\mathbb{V}$. Useremo infine la notazione apposita per scrivere la base di uno spazio:

$$[v]_C = \begin{pmatrix} v_2 - \frac{2}{3}v_1 \\ \frac{1}{3}v_1 \end{pmatrix}$$

E hai finito.

Proposizione 7.5. Base di una matrice ridotta
Considera la seguente matrice ridotta U. Le sue colonne dominanti formano una base dell'insieme di tutte le colonne $C(U)$:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = B$$

Dimostrare indipendenza lineare è presto detto grazie al punto 3 del teorema 7.3. Per dimostrare che B è un insieme di generatori, invece, bisogna notare che i vettori di $C(U)$ sono combinazioni lineari dei vettori in B. Altrimenti puoi dimostrare la cosa facendo appello alla proposizione 7.1. Hai finito.

Un'altra informazione importante è che le *colonne* non nulle di una matrice ridotta U^T, ovvero le *righe* non nulle di U, formano una base di $C(U^T)$. Non è finita qui; avendo una base di uno spazio vettoriale possiamo aggiungere questo corollario:

Corollario 7.6. Sia $B = \{v_1, ..., v_n\}$ una base dello spazio vettoriale V su $\mathbb{K}$. Allora:

- Diremo che B è un **insieme di generatori minimo**, ovvero che nessun sottoinsieme proprio di B è un insieme di generatori.
- B è **massimamente linearmente dipendente**, ovvero che nessun insieme di vettori che contiene propriamente B è linearmente indipendente.

Un altro teorema molto comodo da ricordare è come qualunque spazio vettoriale non vuoto e finitamente generato abbia necessariamente una base. Segue teorema e dimostrazione.

Teorema 7.7. Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato. Se non è nullo, ovvero che $V \neq \{0_v\}$, allora ha una base.

Dimostrazione. Sia $B_n = \{v_1, ..., v_n\}$ un insieme di generatori. Se è anche linearmente indipendente, sussistono le condizioni per dire che è di conseguenza una base.

In caso contrario, uno dei vettori dell'insieme deve essere combinazione lineare degli altri. □

Aggiungiamo un ulteriore attrezzo all'officina; il **Teorema di Steinitz**, per il quale eviteremo la dimostrazione.

Teorema 7.8. Teorema di Steinitz
Siano V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e:

- $G = \{v_1, ..., v_n\}$ un insieme di generatori di V.
- $L = \{u_1, ..., u_m\}$ un insieme linearmente indipendente.

Allora possiamo dire che $m \leq n$ ed esiste un insieme di generatori di V formato da L e da $n - m$ vettori di G.

Corollario 7.9. Ogni base di uno stesso spazio ha lo stesso numero di elementi
Siano due basi $B_1 = \{v_1, ..., v_n\}, B_2 = \{u_1, ..., u_m\}$. Se sono entrambe basi di uno spazio V su $\mathbb{K}$, allora $m = n$.

Dimostrazione. Procediamo con la dimostrazione di quanto enunciato utilizzando il Teorema di Steinitz. Abbiamo che:

- Se $G = B_1 \wedge L = B_2 \rightarrow m \leq n$.
- Se $G = B_2 \wedge L = B_1 \rightarrow n \leq m$.

Ambo le condizioni ritornano che n, m sono minori o uguali all'altro. Per logica saranno necessariamente uguali. □

Procediamo con una nuova nozione partendo sempre da uno spazio vettoriale. Possono essere quantificati in qualche modo? In questo caso entra in gioco la **dimensione** di uno spazio.

Definizione 7.10. Dimensione di uno spazio vettoriale
Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato su $\mathbb{K}$. Il numero di vettori che formano una base di V è chiamato dimensione di V e si scrive con la notazione $\dim_{\mathbb{K}} V$.

Non è un concetto difficile da immaginare, basti pensare per esempio alla base canonica dello spazio $\mathbb{K}^n$, che indovina un pò, è uguale a n. La dimensione infatti dipende da $\mathbb{K}$. Un'ulteriore nozione comoda, partendo da uno spazio vettoriale V su $\mathbb{K}$ finitamente generato, è che ogni insieme linearmente indipendente può essere completato ad una sua base. Infatti:

Dimostrazione. Completamento ad una base di insieme linearmente indipendente
Siano gli insiemi:

- $G = \{v_1, ..., v_n\}$ una base di V.
- $L = \{u_1, ..., u_m\}$ un insieme linearmente indipendente.

Per il teorema di Steinitz, abbiamo che esiste un insieme di generatori $B = L \cup G'$, dove l'insieme $G' \subseteq G$ ed il cui numero di elementi è dato da $n - m$.

Noti che B è una base. Difatti, se fosse linearmente dipendente, conterrebbe una base di V formata da meno di n vettori. □

Corollario 7.11. A ciò possiamo aggiungere i seguenti enunciati, partendo dal solito spazio di dimensione n:

- Un insieme con più di n vettori è linearmente dipendente.
- Se n vettori sono linearmente indipendenti, allora formano una base.
- Ogni insieme di generatori consiste di almeno n vettori.

Se ciò funziona per gli spazi, sicuramente andrà bene per i sottospazi. Prendiamo infatti uno spazio V, dove $\dim_{\mathbb{K}} V = n$. Allora ogni sottospazio $U \subseteq V$ ha come dimensione $\dim_{\mathbb{K}} U \leq n$. Inoltre, se il sottospazio è uguale allo spazio, avremo che la dimensione del primo è uguale ad n. Quindi che:

$$\dim_{\mathbb{K}} U = n \iff U = V$$

7.2 Applicazioni Lineari

Iniziamo ora a parlare di vere e proprie applicazioni lineari. Per evitare confusione a causa della scuola superiore, questo argomento riguarda le **funzioni**, ma noi siamo bravih e utilizzeremo i termini appropriati. Inoltre, da ora, ogni spazio vettoriale menzionato sarà finitamente generato.

Ma bando alle ciance, iniziamo col dare la definizione di applicazione lineare.

Definizione 7.12. Applicazione lineare
Siano U, V due spazi vettoriali su $\mathbb{K}$. Un'applicazione $f : U \to V$ si dice **lineare** se per ogni $u, u' \in U$ e ogni $\alpha \in \mathbb{K}$ valgono i seguenti enunciati:

- $f(u + u') = f(u) + f(u')$.
- $f(\alpha u) = \alpha f(u)$.

Proposizione 7.13. In merito, sia un'applicazione lineare $f : U \to V$. Valgono le seguenti relazioni:

- $f(0_v) = f(0 \times 0_v) = 0 \times f(0_v) = 0_v$.
- Se $u \in U \to -u \in U$
  $f(-u) = f(-1 \times u) = -1 \times f(u) = -f(u)$

Proviamo adesso a vedere un esempio di come funzionino le applicazioni lineari e le modalità di dimostrazione. Tieni a mente che quanto si vedrà ora vale non solo per vettori e spazi vettoriali, bensì anche per le matrici, per le quali sarà lasciato un esercizio a fondo sezione.

Esempio. Siano l'applicazione $f : U \to V$ e gli spazi U, V tali che:

- $U = \mathbb{R}_2[x] = \{p = a_0 + a_1x + a_2x^2 | a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$
- $V = \mathbb{R}^2$

Applichiamo il polinomio di U alla funzione, la quale ritornerà un risultato in V. Effettuiamo quindi l'operazione:

$$p \to f(p) = \begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Fondamentalmente bisognerà sostituire il numero nelle parentesi di p al posto delle x. Mettiamo che il polinomio di U sia $p = -x^2 + 3x + 1$. Allora:

$$f(p) = \begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0^2 + 3 \times 0 + 1 \\ -1^2 + 3 \times 1 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Per confermare che l'applicazione sia lineare ora bisogna verificare che reggano le due proprietà viste prima. Siano due polinomi: $p = a_0 + a_1x + a_2x^2$, $q = b_0 + b_1x + b_2x^2$ entrambi sullo spazio U.

- $f(p + q) = f(p) + f(q)$:

  $$f(p+q) = \begin{bmatrix} a_0 + b_0 \\ a_0 + b_0 + a_1 + b_1 + a_2 + b_2 \end{bmatrix}$$

  $$f(p) + f(q) = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_0 + b_1 + b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 + b_0 \\ a_0 + b_0 + a_1 + b_1 + a_2 + b_2 \end{bmatrix} \text{ Ok.}$$

- $f(\alpha p) = \alpha f(p)$:

  $$f(\alpha p) = \begin{bmatrix} \alpha a_0 \\ \alpha a_0 + \alpha a_1 + \alpha a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_0 \\ \alpha(a_0 + a_1 + a_2) \end{bmatrix}$$

  $$\alpha f(p) = \alpha \begin{bmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_0 \\ \alpha a_0 + \alpha a_1 + \alpha a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_0 \\ \alpha(a_0 + a_1 + a_2) \end{bmatrix} \text{ Also ok.}$$

Abbiamo dimostrato che l'applicazione $f : U \to V$ è lineare perché valgono le due relazioni supposte.

Inoltre, generalmente, per ogni applicazione lineare del tipo $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ e per ogni vettore $v \in \mathbb{K}^n$ abbiamo le seguenti relazioni equivalenti:

- $f(v) = f(v_1e_1 + v_2e_2 + ... + v_ne_n)$
- $f(v) = v_1f(e_1) + v_2f(e_2) + ... + v_nf(e_n)$
- $f(v) = (f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n)) \times (v_1, ..., v_n)$

Ovvero che $f = f_A$, dove $A = (f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n)) \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Questa matrice si chiama **associata ad f rispetto alla base canonica**.

Poi, sia B una base di V su $\mathbb{K}$. Ogni vettore v può essere scritto in modo unico con la seguente formula:

$$v = \alpha_1 b_1 + ... + \alpha_n b_n, \text{ dove } \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}.$$

Una scrittura unica? Inutile girarci intorno; possiamo usarla come sistema di coordinate.

Definizione 7.14. Applicazione delle coordinate rispetto a una base
Definiamo $[v]_B$. L'applicazione $c_B : V \to \mathbb{K}^n$ è lineare.

$$[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ ... \\ \alpha_n \end{pmatrix} = c_B(v)$$

Per dimostrarlo, è sufficiente verificare le due relazioni di prima. Fidati che risultano vere. Grazie a ciò chiamiamo l'applicazione lineare c_B l'**applicazione delle coordinate rispetto alla base ordinata B**.

Esempio. Sia lo spazio $V = \mathbb{R}_2[x]$ e la base $B = \{b_1 = 1 + x, b_2 = 1 + x^2, b_3 = x + x^2\}$ Prendiamo il vettore utile $v = 3 + 2x - x^2 \in V$, che sarà utilizzato poi come vettore soluzioni, e calcoliamo lo spazio delle colonne $c_B(v)$, che sarà la base, quindi è $[v]_B$. Capiamo che B è una base di v, sappiamo che esistono tre scalari $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tali che:

$$v = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3$$

Ovvero che, sostituendo alle b i loro rispettivi valori otteniamo:

$$v = \alpha_1(1 + x) + \alpha_2(1 + x^2) + \alpha_3(x + x^2) = (\alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_1 + \alpha_3)x + (\alpha_2 + \alpha_3)x^2$$

Abbiamo quindi gli scalari e le soluzioni. Cosa possiamo creare? Che domande, ma una matrice aumentata, ovviamente. Da qua puoi ridurla al minimo con Gauss come al solito.

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 3 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 2 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = -1 \end{cases} \implies \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Adesso possiamo risolvere il sistema lineare preso dalla matrice aumentata ridotta.

$$\begin{cases} \alpha_1 = 3 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = -1 \end{cases} \implies v = 3b_1 + 0b_2 - b_3 \implies [v]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Un'altra cosa utile da tenere a mente è che generalmente, se una base $B = \{b_1, ..., b_n\}$ è una base di $\mathbb{K}^n$, allora la matrice $A = (b_1, ..., b_n)$ è invertibile e $c_B = f_{A^{-1}}$.

Passiamo al prossimo macroargomento: gli **isomorfismi**; i quali ci consentiranno di espandere le nostre competenze usando funzioni inverse.

Definizione 7.15. Isomorfismo
Sia un'applicazione lineare $f : V \to W$. Questa è detta **isomorfismo** se esiste un'altra applicazione lineare $g : W \to V$ tale che:

- $gf(v) = v$ per ogni $v \in V$.
- $fg(w) = w$ per ogni $w \in W$.

Diremo quindi che g è l'inversa di f e la denoteremo come f^{-1}. Inoltre gli spazi W, V sono isomorfi e vengono indicati con $V \cong W$.

Proposizione 7.16. Egual dimensione
Siano ora $V, W \in \mathbb{K}$ due spazi vettoriali e $f : V \to W$ un isomorfismo.

Se $B = \{b_1, ..., b_n\}$ è una base di V, allora $C = \{f(b_1), ..., f(b_n)\}$ è una base di W, ed in particolare $\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} W = n$. Non a caso valgono queste due relaizoni:

- C è un insieme di generatori di W.

  Infatti per ogni $w \in W$ esistono n scalari in $\mathbb{K}$ tali che $f^{-1} \in V$, $f^{-1} = \alpha_1 b_1 + ... + \alpha_n b_n$, da cui:

  $$w = ff^{-1}(w) = f(\alpha_1 b_1 + ... + \alpha_n b_n) = \alpha_1 f(b_1) + ... + \alpha_n f(b_n).$$

- C è linearmente indipendente.

  Considera, se $0_w = \alpha_1 f(b_1) + ... + \alpha_n f(b_n)$, proviamo a trovare $0_v = f^{-1}(0_w)$.

  $$f^{-1}(0_w) = f^{-1}(\alpha_1 f(b_1) + ... + \alpha_n f(b_n), \text{ raccogliendo la f...}$$
  $$f^{-1} f(\alpha_1 b_1 + ... + \alpha_n b_n)$$

  Ora, siccome B è una base di V, abbiamo che tutti gli scalari sono uguali a 0, quindi $\alpha_1, ..., \alpha_n = 0$, confermando l'indipendenza lineare.

Proposizione 7.17. Matrici associate alle applicazioni
Diciamo ora di avere un isomorfismo $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ e A la matrice ad esso associata, quindi che $f(v) = f_A(v) = Av$, dove $v \in \mathbb{K}^n$.

Consideriamo ora la funzione inversa di f, che esiste necessariamente in quanto isomorfismo, e la matrice B ad essa associata, quindi $f^{-1}(w) = f_B(w) = Bw$, dove $w \in \mathbb{K}^m$. Tutto ciò porta ad avere:

- Per ogni $v \in \mathbb{K}^n$: $v = f^{-1}f(v) = f^{-1}Av = BAv \implies BA = I_n$.
- Per ogni $w \in \mathbb{K}^m$: $w = ff^{-1}(w) = fBw = ABw \implies AB = I_m$.

Possiamo concludere che f_A è un isomorfismo poiché abbiamo capito che A è una matrice invertibile, **condizione necessaria e sufficiente** per il fatto. Proviamolo:

- Per ogni $v \in \mathbb{K}^n$: $f_{A^{-1}}f_A(v) = A^{-1}Av = v$.
- Per ogni $w \in \mathbb{K}^m$: $f_A f_{A^{-1}}(w) = AA^{-1}w = w$.

Abbiamo parlato di scritture univocamente determinate, no? Possiamo passare finalmente all'applicazione delle coordinate sugli spazi. Diamone inizialmente una definizione.

Teorema 7.18. Applicazione di coordinate è un isomorfismo
Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e $B = \{b_1, ..., b_n\}$ una sua base. L'applicazione delle coordinate seguente è un isomorfismo:

$$c_B : V \rightarrow \mathbb{K}^n.$$

Dimostrazione. Come dimostrare un isomorfismo? Trovare un'applicazione lineare inversa di quella fra le nostre mani. Quindi che esista:

$$g_B : \mathbb{K}^n \rightarrow V, \text{ dove } \mathbb{K}^n = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ ... \\ \alpha_n \end{pmatrix}, V = g_B(\textstyle\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i)$$

Procediamo, dunque, a dimostrare che g_B è l'inversa di c_B:

$$c_B g_B \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ ... \\ \alpha_n \end{pmatrix} = c_B(\textstyle\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i) = [\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ ... \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Sia ora $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \in V$, allora:

$$g_B c_B(v) = g_B([\textstyle\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i]) = g_B \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ ... \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i = v.$$

Abbiamo ottenuto v, CVD, c_B è un isoformismo e g_B la sua inversa. □

Corollario 7.19. Isomorfismo e dimensione
Diciamo che due spazi vettoriali V, W sono isomorfi se e solo se hanno egual dimensione, quindi $\dim V = \dim W$.

Dimostrazione. Supponiamo esista un isomorfismo $f : V \to W$, B base di V e D base di W. Possiamo usare l'isomorfismo c_B e ottenere la scrittura:

$$c_D f g_B = c_D f c_B^{-1} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$$

C'è roba da aggiungere qua. □

7.9 Teorema e definizione: matrice del cambio di base 7.10 Teorema e definizione: matrice associata a f rispetto a basi

7.3 Rango e Nullità

§8. Rango e nullit'a (vedi [GS, Capitolo II]) 8.1 Spazio nullo e immagine di un'applicazione lineare 22/04/24 8.2 Teorema: nullit'a + rango 8.3 Dimensione di C(A) 8.4 Dimensione di N (A) 8.5 Procedimento per determinare basi di C(A) e N (A) 8.6 Proposizione e definizione: rango di un'applicazione lineare 8.7 Teorema: insieme di soluzioni di un sistema lineare

7.4 Esercizi

Autovalori e Autovettori

8.1 Definizione

§9. Autovalori e autovettori (vedi [GS, Capitolo V]) 9.1 Definizione: autovalore e autovettore 9.2 Osservazione: autovettori sono soluzioni di un sistema lineare

8.2 Polinomio caratteristico

9.3 Definizione: polinomio caratteristico 9.4 Teorema: autovalori sono radici e autovettori sono elementi di spazi nulli (autospazi) 9.5 Corollario: matrici su C possiedono autovalori 9.6 Definizioni: autospazio, moltiplicit'a algebrica e geometrica 9.7 Osservazione: se esiste una base B formata di autovettori di A, allora la matrice associata a A rispetto a B nel dominio e codominio 'e diagonale. 9.8 Proposizione: autovettori linearmente indipendenti 9.9 Definizioni: matrici simili, matrice diagonalizzabile

8.3 Esercizi

Spazi euclidei

9.1 Diagonalizzazione di una Matrice

§10. Diagonalizzazione di una matrice (vedi [GS, Capitolo V]) 10.1 Proposizione: Propriet'a delle matrici simili 10.2 Teorema: diagonalizabile se e solo se esiste una base di autovettori 10.3 Corollario: autovettori distinti diagonalizzabile 10.4 Osservazione: non 'e necessario 10.5 Lemma 10.6 Teorema: condizioni per diagonalizzabilit'a 09/05/24 10.7 Algoritmo per diagonalizzazione 10.8 Osservazione: diagonalizzazione su R 10.9 Teorema Spettrale

9.2 Basi Ortonormali

§11. Basi ortonormali (vedi [GS, Capitolo III]) 11.1 Definizione: matrice coniugata, H-trasposta e prodotto interno 11.2 Definizione: norma (euclidea) 11.3 Interpretazione geometrica in R2 11.4 Definizione: ortogonale 11.5 Proposizione: insieme ortogonale 'e linearmente indipendente 11.6 Osservazione: coefficienti per base ortogonale 23/05/24 11.7 Definizione: ortonormale 11.8 Algoritmo di Gram-Schmidt 11.9 Corollario: ogni sottospazio possiede una base ortonormale

9.3 Esercizi

As the student approached the Linear Algebra exam, he stumbled upon a task: Calculate the determinant of the following matrix. The boy, puzzled by its form, asked: "Are you a row-echelon matrix because you have one pivot per column or do you have one pivot per column because you're a row-echelon matrix? And would you lose to the method of Gauss' elimination?" The matrix replied: "If you used matrix operations to simplify the calculations, you might give me a little trouble, but nah, I'd win." It proceeded to use DOMAIN EXPANSION: COMPLEX NUMBERS; almost making the student fall into despair. Indeed, trying to reduce its form with Gauss proved counter-productive. In his dying moments, the student uttered the phrase: "With this treasure I summon; always bet on Laplace". The determinant was trivially calculated with a series of cross-multiplications on the lines and columns that were not ignored and everyone would bare witness to the bare flesh of the one who is free; to the one who left it all behind. Him and his overwhelming utility!.

Bibliografia