

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI VERONA

---

---

CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA

# Sistemi

Federico Brutti  
[federico.brutti@studenti.univr.it](mailto:federico.brutti@studenti.univr.it)

*Non riesco a scrivere e parlare contemporaneamente, il mio cervello è un  
pò limitato. - Francesco V.*

# Contents

<b>1</b>	<b>Introduzione al corso</b>	<b>4</b>
1.1	Segnali e sistemi . . . . .	4
1.2	Tipi di segnali . . . . .	7
1.3	Distribuzioni . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Dinamiche dei sistemi</b>	<b>12</b>
2.1	Sistemi Lineari Tempo invariante . . . . .	12
2.2	Calcolo delle risposte . . . . .	13
2.2.1	Calcolo della risposta libera . . . . .	14
2.2.2	Calcolo della risposta forzata . . . . .	16
2.3	Esercizi svolti . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Trasformata di Laplace</b>	<b>21</b>
3.1	Risposta in frequenza . . . . .	21
3.2	Trasformata di Laplace unilatera . . . . .	22
3.3	Trasformate notevoli . . . . .	27
3.4	Utilizzo della TdL per il calcolo delle risposte . . . . .	29
3.5	Antitrasformata di Laplace unilatera . . . . .	33
3.6	Esercizi svolti . . . . .	35
<b>4</b>	<b>Schemi a blocchi</b>	<b>36</b>
4.1	Sistemi a più blocchi . . . . .	36
4.2	Schemi di flusso . . . . .	39
4.3	Esercizi svolti . . . . .	41
<b>5</b>	<b>Diagrammi di Bode</b>	<b>44</b>
5.1	Grafici logaritmici . . . . .	44
5.2	Forma di Bode . . . . .	46
5.3	Grafici della risposta in frequenza . . . . .	48
5.4	Diagramma di Bode totale . . . . .	51
5.5	Esercizi svolti . . . . .	53

<i>CONTENTS</i>	3
-----------------	---

<b>6 Serie e trasformata di Fourier</b>	<b>55</b>
6.1 Serie di Fourier . . . . .	55
6.2 Trasformata di Fourier . . . . .	58
6.3 Trasformate notevoli e proprietà della TdF . . . . .	61
6.4 Campionamento e replicazione . . . . .	62
6.5 Esercizi svolti . . . . .	64
<b>7 Sistemi a tempo discreto</b>	<b>65</b>
7.1 Sistemi LTI a tempo discreto . . . . .	65
7.2 Trasformata Z . . . . .	65
7.3 Trasformate notevoli . . . . .	65
7.4 Antitrasformata Z . . . . .	65

# Chapter 1

## Introduzione al corso

Il corso si propone di dare gli strumenti necessari alla comprensione della ricezione di segnali monodimensionali. Pone le basi per altre materie come elaborazione di segnali e immagini; richiede inoltre competenze di base ottenute da analisi 1 e 2, come anche nozioni di fisica 1. È consigliato iniziare questa materia solamente una volta dopo aver solidificato tali basi, specie riguardo i numeri complessi.

### 1.1 Segnali e sistemi

Partiamo dai concetti di base: **segnali** e **sistemi** sono due entità in stretta correlazione, e non possono esistere da sole. La prima riguarda le informazioni trasmesse nello spazio-tempo, mentre la seconda rappresenta lo strumento con il quale si andrà a elaborare la precedente.

Esistono due tipi di segnali di nostro interesse, quelli a **tempo continuo**, dati dai fenomeni fisici, e quelli a **tempo discreto**, in una forma approssimata per essere elaborati dalla macchina. Risulta finito nel tempo e nei valori.

Come già visto nel corso di Architetture degli Elaboratori, viene seguito il seguente algoritmo per la conversione dei dati e la loro conseguente elaborazione:

1. **Campionamento:** Divide in intervalli uguali il segnale ricevuto, quindi passa da continuo a discreto. Non è un processo distruttivo.
2. **Quantizzazione:** Approssima gli intervalli ottenuti ad un valore leggibile dalla macchina in base alla sua risoluzione. Da qui il segnale non è più revertibile.
3. **Encoding:** Trasforma il segnale quantizzato in dati. Non sarà approfondito.

In questa parte di corso ci concentreremo su segnali unidimensionali non negativi, ovvero rappresentabili tramite funzioni lineari. In successione verranno approfonditi anche i seg-

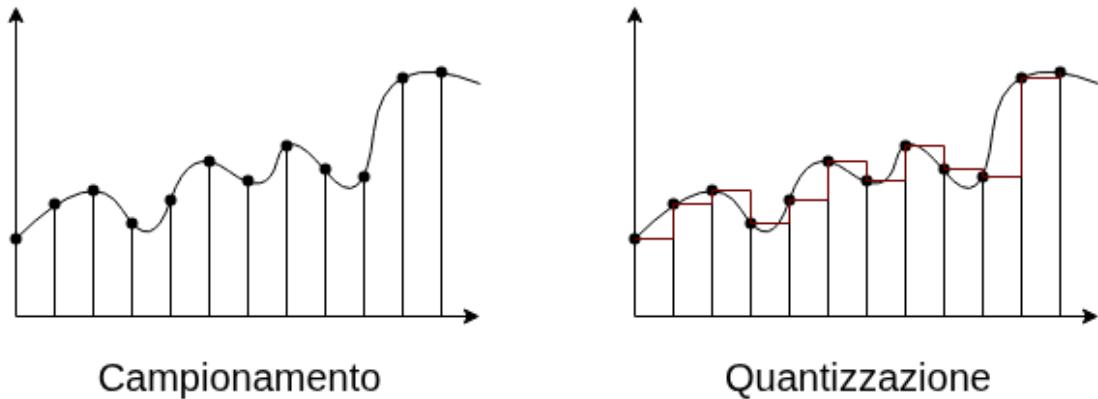


Figure 1.1: Algoritmi di ricezione segnali

nali bidimensionali, usati per la rappresentazione di immagini, e tridimensionali, ovvero le stesse con colori.

Parliamo adesso dei **sistemi**. Questi detengono un'entrata ed un'uscita, anche se spesso viene usato un ulteriore **blocco di retroazione** per ricalibrare o modificare il segnale di output. In tal caso, l'uscita del blocco diventerà la nuova entrata del sistema principale. Un esempio di questo comportamento è il termostato. Di base segnala puramente la temperatura attuale, ma se attivato in automatico, cercherà di bilanciare la suddetta accendendo l'aria condizionata o i termoarredi.

Passiamo ora alle notazioni utilizzate nel corso. I segnali si indicano con la lettera minuscola  $f$ , mentre le maiuscole sono usate per le **Trasformate**, le quali hanno il compito di convertire i segnali. Vedremo più tardi in dettaglio la loro utilità.

Le notazioni per variabili a tempo continuo sono  $t, \tau, t_i$ , mentre per quelle a tempo discreto si usa  $k$ . La scrittura  $f(t)$  indica un segnale a tempo continuo. Per cogliere un istante specifico, si scrive  $f(3)$ , che ritornerà il valore di  $f$  al tempo 3.

I sistemi sono invece rappresentati come una scatola nera, con un'entrata  $u(t)$  ed un'uscita  $v(t)$ . Per loro si usano lettere greche o maiuscole, come  $\Sigma$ . Generalmente lavoreremo con sistemi LTI, ovvero **Linear Tempo Invarianti**, ciò significa che vale la sovrapposizione degli effetti (lineare), e che a prescindere dal punto di ingresso del segnale nel sistema, l'uscita sarà sempre la stessa (tempo invariante).

Il compito che ci poniamo è l'analisi dei sistemi tramite un approccio classico. Partiamo dal segnale, un qualunque evento fisico, e prendiamo per esempio una molla con una massa attaccata ad una sua estremità. Il movimento che questa effettua fino al ritornare

stabile è il nostro segnale. Detto ciò, l'analisi è un processo diviso in quattro fasi:

1. **Definizione del modello:** Per la rappresentazione del sistema verranno utilizzati grafici appositi, mentre per segnali a tempo continuo e discreto si useranno equazioni differenziali ed equazioni alle differenze rispettivamente.

Essendo le equazioni differenziali algoritmamente complesse, più avanti nel corso saranno introdotte le trasformate, che consentono di trasformare equazioni differenziali in equazioni di secondo grado con numeri complessi. In particolare:

- **Trasformata di Laplace:** Più generale, per segnali a tempo continuo.
  - **Trasformata di Fourier:** Sottocategoria della precedente, usata sempre per segnali a tempo continuo.
  - **Trasformata Zeta:** Per segnali a tempo discreto.
2. **Analisi di proprietà e stabilità:** La definizione del modello introduce proprietà ad esso associate. Per esempio, supponiamo che un'auto sia il nostro sistema; il freno, che riduce la sua accelerazione per poi fermare del tutto il veicolo, è una proprietà. Se questa agisce come inteso, il sistema è detto **stabile**.
  3. **Controllo delle proprietà:** Qui si parla di prestazioni, ovvero il costo utilizzato per produrre l'output richiesto. Chiaro che meno costa, meglio è.
  4. **Sintesi del modello:** Non vista nel corso, è utile per la correzione del sistema affinché risulti stabile.

Sebbene siano il nostro principale campo di prova, nella realtà non esistono sistemi lineari. infatti noi prenderemo una parte del segnale il cui comportamento risulta simile ad una funzione lineare, effettuando, in parole povere, un'astrazione del segnale preso in esame.

Approfondiamo ora la stabilità. Generalmente, quando la grandezza di un output non tende ad infinito, è detta stabile, ma ne abbiamo due tipi:

- **Stabilità BIBO:** L'acronimo sta per bounded input, bounded output. Afferma che se ho un input limitato in ampiezza, mi aspetto che lo sarà anche l'uscita. Formalmente:

$$\exists M > 0. |u(t)| < M \forall t \in \mathbb{R} \implies \exists N > 0. |v(t)| < N \forall t \in \mathbb{R}$$

- **Stabilità asintotica:** Afferma che esiste un limite tale per cui il mio valore si annulla. Ciò vale sia in input che output. Quindi se cessa l'input, così farà l'output. Questa stabilità implica la precedente, ma non viceversa.

$$\forall t \text{ di } v(t). t \in \mathbb{R}, \lim_{t_1 \rightarrow \infty} v(t) = 0$$

Abbiamo detto prima che i segnali sono rappresentati mediante equazioni differenziali; infatti il modello generale è dato da una doppia sommatoria con due indici diversi di un coefficiente, moltiplicata per una parte esponenziale ed una parte polinomiale.

**Definizione 1.** *Formula generale per la rappresentazione dei segnali*

$$y(t) = \sum_i \sum_j c_{ij} e^{\alpha t} \frac{t^e}{e!}$$

In questa formula,  $t$  è la variabile del tempo ed  $\alpha$  è un numero complesso. Quest'ultimo è rappresentabile anche come  $\lambda + \omega t$  e quindi scomponibile in due esponenziali. È ovviamente consentito passare in coordinate polari:

- $e^{j\omega} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$ .
- $e^{\alpha t} = \rho(\cos(\omega t) + j\sin(\omega t))$ .

## 1.2 Tipi di segnali

È stato precedentemente menzionato come i due tipi di segnali principali siano quelli a tempo continuo e discreto, è ora di associare il concetto ad effettive funzioni sulle quali andremo a lavorare.

**Segnali sinusoidali:**  $x(t) = A\cos(\omega_o t + \phi)$ ;  $x[n] = A\cos(\Omega_0 n + \phi)$

Le due formule sono usate per l'espressione dei segnali in forma sinusoidale, la prima a tempo continuo, la seconda a tempo discreto. Le componenti sono:

- $A$ : Ampiezza, indica l'altezza dell'onda in base all'asse delle y.
- $\omega_0$ ;  $\Omega_0$ : Frequenza, determinata dalla dilatazione delle singole onde. Si ottiene con  $f = \frac{1}{T}$ , dove  $T$  è il periodo.
- $\phi$ : Fase, punto di inizio del segnale.

Il punto d'intersezione con l'asse delle  $y$  è dato da  $A\cos(\phi)$ , detto **Shift temporale**, mentre il **Periodo**  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$  è la distanza fra le due ampiezze massime delle singole onde. Questo tipo di segnale detiene inoltre proprietà legate al tipo di funzione:

- **Periodicità:** Esiste un certo periodo  $T_0$  che se sommato a  $t$  ritorna lo stesso risultato.  $T_0$  è il numero più piccolo per il quale vale questa proprietà. Per il tempo discreto, non è garantita periodicità in quanto con l'approssimazione si potrebbe arrivare ad una perdita di dati.

- **Time shifting:** Una traslazione temporale, ovvero spostarsi avanti o indietro nel tempo rispetto al segnale, equivale ad un cambio di fase. Dove questa proprietà è sempre vera in segnali a tempo continuo, in quelli a tempo discreto potrebbe non valere.
- **Parità:** Data una fase  $\phi = 0$ , otterremo una funzione coseno, quindi pari. Vale  $x(t) = x(-t)$ .
- **Disparità:** Data una fase  $\phi = -\frac{\pi}{2}$ , otterremo una funzione seno, quindi dispari. Vale  $x(t) = -x(-t)$ .

**Segnali esponenziali reali:**  $x(t) = Ce^{at}; x[n] = Ce^{bn}$

Segnali che seguono le regole delle funzioni esponenziali, quindi cresce o decresce in base al segno dell'esponente. Nelle rispettive formule, abbiamo poi:  $C, a, b \in \mathbb{R}$ .

In caso di time shift, la variabile modificata è  $t$  o  $n$ , per la rispettiva formula, e ne influenza la scala. Si scriverà infatti:  $Ce^{a(t+t_0)}$ .

Per quanto riguarda i segnali discreti, si preferisce passare ad una formula contratta, dove  $\alpha = e^b$ :

$$x[n] = Ce^{bn} \equiv C(e^b \times e^n) \equiv C\alpha^n$$

Abbiamo quattro modi diversi per la loro rappresentazione in base al valore di  $\alpha$  e al suo modulo:

- $\alpha > 0, |\alpha| > 1$ : cresce e tende ad infinito nel primo quadrante.
- $\alpha > 0, |\alpha| < 1$ : Decresce e tende a 0 nel primo quadrante.
- $\alpha < 0, |\alpha| > 1$ : Ha un comportamento oscillatorio, cresce e tende ad infinito nell'asse delle  $x$ .
- $\alpha < 0, |\alpha| < 1$ : Ha un comportamento oscillatorio, decresce e tende a 0 nell'asse delle  $x$ .

**Segnali esponenziali complessi:**  $x(t) = ce^{at}; x[n] = c\alpha^n$

I segnali esponenziali complessi hanno un comportamento oscillatorio, il quale cresce o decresce verso l'asse delle  $x$  in base al segno delle variabili  $r$  e  $|a|$  nelle rispettive formule. Si dice che ha una forma sinusoidale smorzata. Nello specifico, infatti, per il tempo continuo si ha:

- $c = |c|e^{j\theta}$ , con forma polare.
- $a = r + j\omega_0$ , con forma cartesiana.

Che ci fa ottenere, grazie alla formula di Eulero che consente di passare da esponenziale a forma polare del complesso:  $e^{j(\omega_0 t + \theta)} = \cos(\omega_0 t + \phi) + j \sin(\omega_0 t + \phi)$ , quanto segue:

$$\begin{aligned} x(t) &= |c| e^{j\theta} e^{(r+j\omega_0)t} \\ &= |c| e^{rt} e^{j(\omega_0 t + \theta)} \\ &= |c| e^{rt} \cos(\omega_0 t + \phi) + j \sin(\omega_0 t + \phi) \end{aligned} \tag{1.1}$$

Da questa equazione estesa è possibile differenziare i modi in cui si può scrivere graficamente il segnale; se  $r > 0$ , la sinusode crescerà all'infinito, altrimenti decrescerà fino a 0.

Per quanto riguarda invece il tempo discreto, le componenti sono:

- $c = |c| e^{j\theta}$
- $\alpha = |\alpha| e^{j\Omega_0}$

Sostituiamole alla formula contratta per ottenere quella estesa, come prima:

$$\begin{aligned} x[n] &= |c| e^{j\theta} (|\alpha| e^{j\Omega_0})^n \\ &= |c| |\alpha|^n e^{j(\Omega_0 n \theta)} \\ &= |c| |\alpha|^n \cos(\Omega_0 n + \theta) + j \sin(\Omega_0 n + \theta) \end{aligned} \tag{1.2}$$

Il grafico qui dipende dal valore di  $|\alpha|$ . Se maggiore di 0, la sinusode crescerà all'infinito verso l'asse delle  $x$ , altrimenti qui tenderà a 0.

### 1.3 Distribuzioni

Talvolta ci sono delle grandezze non misurabili numericamente e quando ciò ha luogo, ci serviamo dei segnali generalizzati. La loro particolarità riguarda essere definiti all'interno di un'operazione di integrale, il cui risultato ritornerà il valore cercato. Formalmente scriviamo l'**impulso di Dirac**:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sigma(t) \phi(t) dt = N$$

Dove  $\sigma$  è la grandezza,  $\phi$  lo strumento ed  $N$  la misura.

Lo strumento di lavoro base per questa misurazione è invece detto **impulso unitario**, ed è una funzione che comprende un **supporto**, quindi la larghezza della funzione, infinitesimo, **altezza** infinita, ed un'**area**, quindi l'integrale, uguale ad 1. Inoltre, è definita in  $[0^-, 0^+]$  e si denota con:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

Chiariamo che la grandezza da misurare è  $\delta t$ , lo strumento è la costante 1 moltiplicata per la grandezza, ed 1 è il risultato. In natura questa funzione non esiste, ma è utile per effettuare approssimazioni e quindi anche il **campionamento**. I casi ricorsivi sono:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty \Rightarrow 0 \\ 0 \end{cases}$$

A partire dall'impulso unitario possiamo definire due funzioni non derivabili, ma fondamentali per l'analisi dei segnali:

- **Finestra rettangolare unitaria**

Un rettangolo di altezza 1 definito nell'intervallo  $[-\frac{t}{2}, \frac{t}{2}]$ . Quest'onda, se ripetuta nel tempo, fa ottenere un'onda quadra. Da un punto di vista pratico è utile per il controllo dei motori. Ricorsivamente è definita come:

$$\pi(t) = \begin{cases} 1 \in [-t/2 \leq t \leq t/2] \\ 0 \end{cases}$$

- **Finestra triangolare unitaria**

Un triangolo di altezza 1 definito nell'intervallo  $[-T, T]$ . Non viene usata per fare controlli particolari, ma funziona per fare filtri migliori. Se ripetuta nel tempo fa ottenere un'onda triangolare e ci aiuterà a generare le sinusoidi. Ricorsivamente è definita come:

$$\begin{cases} 1 - |t| \in [-T \leq t \leq T] \\ 0 \end{cases}$$

Ottenerne il caso generale dalle funzioni unitarie è semplicissimo, basta sostituire il valore preso in esame al posto della costante 1 nella definizione ricorsiva. Ma in generale come è possibile ottenere un impulso?

Trattasi di una serie di funzioni fra cui cambiamo dei valori, ma, per definizione, l'area deve risultare sempre uguale ad 1. La verifica si esegue con la semplice formula della geometria piana:

- **Area del rettangolo:**  $b \times h$ .

- **Area del triangolo:**  $\frac{b \times h}{2}$ .

In particolare, con il triangolo è possibile definire quale sia la derivata dell'impulso, una funzione che cresce e decresce nell'infinitesimo molto vicino al valore 0. Ci sarà utile per definire le **funzioni polinomiali**, segnali definiti come operazioni integrali a partire dall'impulso. Queste sono generalmente definite ricorsivamente come:

$$\delta_{-n}(t) = \begin{cases} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} t \geq 0 \\ 0 \end{cases}$$

A partire dalle definizioni otteniamo le seguenti funzioni:

- **Funzione gradino**, primo integrale. Permette di garantire la causalità:

$$\delta_{-1}(t) = \begin{cases} \frac{t^{1-1}}{(1-1)!} t \geq 0 \\ 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 1t \geq 0 \\ 0 \end{cases}$$

- **Funzione rampa**, secondo integrale:

$$\delta_{-2}(t) = \begin{cases} \frac{t^{2-1}}{2-1} t \geq 0 \\ 0 \end{cases} \implies \begin{cases} t^2 \geq 0 \\ 0 \end{cases}$$

- **Funzione parabola**, terzo integrale, non vista in questo corso.

Lo scopo dei segnali polinomiali riguarda la caratterizzazione del sistema mediante il testing. Per esempio, si dà in input una funzione gradino, misura standard, e si annota il tempo utilizzato per ritornare il valore. In successione vedremo con più precisione come passare da tempo continuo a discreto, ma per ora è sufficiente sapere che è possibile ottenere il valore delle funzioni in un preciso punto  $t_0$  moltiplicando la funzione per un impulso. Si può fare se abbiamo una funzione continua in questo punto. Quindi, per  $t \in \mathbb{R}$ :

$$v(t)\delta(t - t_0) = v(t_0)\delta(t - t_0)$$

La formula può essere anche riscritta come

$$N(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(\tau)\delta(\tau - t_0)d\tau$$

Quindi il valore di una funzione in  $t_0$  è l'integrale della funzione moltiplicata per un impulso traslato in  $t_0$ .

# Chapter 2

## Dinamiche dei sistemi

### 2.1 Sistemi Lineari Tempo invariante

Possiamo ora dare una definizione rigorosa di sistema: si tratta di un modello matematico o formulazione di un processo o fenomeno fisico che permette di trasformare un'entrata in un'uscita determinata. Ne esistono principalmente di due tipi:

- **Single Input Single Output**
- **Multiple Input Multiple Output**, non visti in questo programma.

In base a questi poi ci sono i sistemi dinamici, ovvero con memoria, i quali salvano i dati grazie agli stati. Rammento infine che, come i segnali, i sistemi possono essere a tempo continuo e discreto.

Per quanto riguarda i sistemi LTI, approfondiamo le proprietà menzionate nel capitolo precedente:

- **Linearità**: Partendo da un sistema con due entrate, otterrò in output un risultato equivalente alla combinazione lineare dei singoli input.
- **Tempo-invarianza**: Traslando l'input del sistema prima o dopo nel tempo avrò come output lo stesso risultato traslato prima o dopo nel tempo:

$$u(t) \rightarrow v(t) \implies u(t + \tau) \rightarrow v(t + \tau), \forall \tau \in \mathbb{R}$$

- **Causalità**: L'effetto non precede mai la causa. L'uscita  $v(t)$  all'istante  $\tau$  deve dipendere esclusivamente dall'ingresso  $u(t)$  per  $t \leq \tau$ . Per comodità considereremo solo sistemi a riposo, ovvero con  $\tau = 0$ .

Richiamiamo all'attenzione il concetto di stabilità per formalizzarlo definitivamente. Definiamo:

**Sistema asintoticamente stabile**

Un sistema si dice tale se dopo aver dato l'input, l'output va a morire fino ad arrivare a 0. Formalmente:

$$\exists \tau \in \mathbb{R} \text{ tale che } u(t) = 0, \forall t \geq \tau \implies \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = 0$$

**Sistema BIBO-stabile**

Supponiamo di avere un segnale che oscilla da un certo istante  $\tau$  sempre all'interno di un certo intervallo di ampiezza. Se in output vale la stessa dinamica, il sistema si dice BIBO-stabile. Formalmente:

1. Se  $(\exists \tau \wedge M_u > 0) \in \mathbb{R}$  tali che  $|u(t)| < M_u$
2. Allora:  $\forall t \geq \tau \implies \exists M_v > 0$
3. Infine, quest'ultimo è tale che:  $|v(t)| < M_v \forall t \geq \tau$ .

Prendere nota del fatto che ogni sistema asintoticamente stabile è necessariamente anche BIBO-stabile, in quanto suo caso particolare, ma non vale il contrario.

Ora che conosciamo la teoria, bisogna capire come si modellano effettivamente i sistemi. Come già detto, vengono descritti mediante equazioni differenziali per input e output. Un buon iter di lavoro generale è prima scrivere tutte le equazioni che descrivono le leggi in atto, per poi estendere la scrittura con tutte le componenti richieste. Va ordinata con output a sinistra e input a destra. L'equazione differenziale generale per la rappresentazione dei modelli è:

$$a_n \frac{\partial^n v(t)}{\partial t^n} + a_{n-1} \frac{\partial^{n-1} v(t)}{\partial t} + \dots + \frac{\partial^1 v(t)}{\partial t} + a_0 v(t) = b_m \frac{\partial^m u(t)}{\partial t} + b_{m-1} \frac{\partial^{m-1} u(t)}{\partial t} + \dots + b_1 \frac{\partial u(t)}{\partial t} + b_0 u(t)$$

Qui,  $b_n, a_n \neq 0$  sono due normali coefficienti. La buona notizia è che esiste una forma più compatta, grazie alla sommatoria:

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{\partial^i v(t)}{\partial t} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{\partial^j u(t)}{\partial t}$$

Qui invece  $n, m$  danno l'ordine delle equazioni differenziali, con generalmente  $n \geq m$ . Più precisamente, se  $n > m$ , si dice strettamente proprio e se  $n \geq m$  si dice proprio. Nello schema con la black box, nel sistema si scrive proprio questa seconda equazione.

## 2.2 Calcolo delle risposte

Come precedentemente menzionato, i sistemi sono definiti tramite equazioni differenziali, dove la forma generale mostra a sinistra l'output e a destra l'input. A noi interessa

studiare il comportamento del sistema, quindi le sue risposte. Definiamo quindi **risposta totale**:

$$v = v_l + v_f$$

Dove le componenti sono:

- **Risposta libera:** Comportamento del sistema che dipende solo dalle condizioni iniziali.
- **Risposta forzata:** Comportamento del sistema che dipende solo da un determinato input  $u$ .

Il procedimento da effettuare si traduce nella risoluzione dell'equazione differenziale con specifici vincoli, per ottenere le due componenti ed infine descrivere il comportamento del sistema.

### 2.2.1 Calcolo della risposta libera

I passaggi sono equivalenti a quelli per la risoluzione di un'equazione differenziale associata ad un problema di Cauchy. Quindi:

1. Ottenimento dell'equazione omogenea.
2. Ottenimento del polinomio caratteristico.
3. Risoluzione del suddetto polinomio per ottenere radici, ordine di grandezza e molteplicità algebrica.
4. Sostituzione dei valori nelle opportune variabili nella formula della soluzione generale.
5. Applicazione delle condizioni di Cauchy.
6. Scrittura della risposta libera.

**Esempio 1.** *Calcolare la risposta libera dell'equazione differenziale:*

$$\begin{cases} v(0) = 0 \\ v'(0) = 1 \end{cases}; v''(t) + 3v'(t) - 4v(t) = 5u'(t) - u(t)$$

#### 1. Ottenimento equazione omogenea

L'equazione omogenea associata a quella presa in esame è semplicemente la parte di nostro interesse posta uguale a zero, in questo caso l'output, quindi:

$$v''(t) + 3v'(t) - 4v(t) = 0$$

## 2. Ottenimento polinomio caratteristico

Per ottenere la forma polinomiale bisogna sostituire alla  $t$  una variabile  $s$ , il cui grado è il numero di derivata dell'elemento:

$$s^2 + 3s - 4 = 0$$

## 3. Risoluzione del polinomio ottenuto

Non difficile. Sono i classici passaggi algebrici per le equazioni di secondo grado:

$$s^2 + 3s - 4 = 0 \implies (s + 4)(s - 1) = 0$$

Da questo calcolo ricaviamo due radici distinte, quindi  $r = 2$ , i cui valori sono:  $\lambda_1 = -4$ ,  $\lambda_2 = 1$ , e che le loro molteplicità sono:  $\mu_1 = \mu_2 = 1$ .

## 4. Sostituzione nella formula generale

Abbiamo già detto che la formula della soluzione generale è data da:

$$v_l(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} c_{i,l} \times e^{\lambda_i t} \times \frac{t^l}{l!}$$

Dove  $i, l$  sono coefficienti ottenuti con i vincoli di Cauchy. Sostituiamo:

$$\begin{aligned} v_l(t) &= c_1 \times e^t \times \frac{t^0}{0!} + c_2 \times e^{-4t} \times \frac{t^0}{0!} \\ &= c_1 e^t + c_2 e^{-4t} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Questa equazione sarà la base sulla quale andremo ad applicare le condizioni e derivare ove necessario.

## 5. Applicazione delle condizioni di Cauchy

Osservando le condizioni, è chiaro che saranno applicate prima alla forma normale, poi alla derivata prima. Mettiamo a sistema le due formule, sostituiamo a  $t$  il valore del vincolo e poniamo il tutto al valore richiesto:

$$\begin{cases} v_l(t) = c_{1,0}e^t + c_{2,0}e^{-4t} \\ v'_l(t) = 1c_{1,0}e^t - 4c_{2,0}e^{-4t} \end{cases} \implies \begin{cases} c_{1,0}1 + c_{2,0}1 = 0 \\ c_{1,0} - 4c_{2,0} = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} c_{1,0} + c_{2,0} = 0 \\ c_{1,0} - 4c_{2,0} = 1 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema con passaggi algebrici otteniamo infine che:

$$\begin{cases} c_{1,0} + c_{2,0} = 0 \implies c_{1,0} = 1/5 \\ c_{1,0} - 4c_{2,0} = 1 \implies c_{2,0} = -1/5 \end{cases}$$

Ottenendo così i valori delle  $c$  da sostituire alla formula generale.

### 6. Scrittura della risposta libera

Nulla di più semplice, una sostituzione delle  $c$  nella formula generale:

$$v_l(t) = \frac{1}{5}e^t - \frac{1}{5}e^{-4t}$$

Una cosa interessante che si può ricavare dalla descrizione dell'equazione differenziale è il **modo elementare**, descritto come:

$$m(t) = e^{\lambda t} \frac{t^l}{l!}$$

Risulta utile considerare i suoi tre casi di studio, perché grazie ad essi possiamo trarre conclusioni sulla stabilità di un sistema:

- Il limite per  $t$  che tende ad infinito del modo è uguale a zero solamente se ogni radice del polinomio caratteristico è minore di zero. In tal caso, il sistema è **asintoticamente stabile**.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} m(t) = 0 \iff \lambda_i < 0$$

- Il modo  $m(t)$  è limitato, quindi può prendere solo determinati valori, sull'intervallo  $[0, +\infty)$  solamente se le radici del polinomio caratteristico sono minori o uguali a zero. In tal caso il sistema è detto **semplicemente stabile**.
- Se il limite per  $t$  che tende ad infinito è uguale ad infinito non rientriamo nei primi due casi ed il sistema è detto **instabile**.

#### 2.2.2 Calcolo della risposta forzata

Per il calcolo della risposta forzata ci serviremo di due strumenti: la **risposta impulsiva** e l'**operatore di convoluzione**. La prima per poter prendere un qualunque valore della funzione per descriverla, il secondo invece consente, in presenza di due segnali, di calcolare l'area sottesa del loro prodotto girando rispetto all'asse delle  $y$  uno dei due segnali per poi scorrerlo sull'altro. La risposta forzata  $v_f$  è quindi definita come:

$$\begin{aligned} v_f &= (u * v)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)v(t - \tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} v(\tau)u(t - \tau)d\tau \end{aligned} \tag{2.2}$$

Questo operatore detiene anche la proprietà commutativa, associativa e distributiva rispetto alla somma, consentendo di scegliere a piacere il segnale fermo. Inoltre vedremo

che l'uscita  $v(t)$  di un sistema LTI inizialmente a riposo, in corrispondenza di un ingresso  $u(t)$  è data proprio dalla convoluzione fra quest'ultimo e la risposta impulsiva  $h(t)$ .

$$\begin{aligned} v(t) &= (u * h)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)u(t - \tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)h(t - \tau)d\tau \end{aligned} \quad (2.3)$$

Supponendo sempre un sistema LTI causale e quindi inizialmente a riposo, abbiamo la risposta impulsiva  $h(t) = 0$  quando  $t < 0$ , perché lo stimolo impulsivo  $\delta(t) = 0$  per  $t < 0$ . In questi termini è possibile considerare l'integrale in un determinato intervallo di tempo, semplificando eventualmente i calcoli:

$$\begin{aligned} v(t) &= (u * h)(t) = \int_{0^-}^{+\infty} h(\tau)u(t - \tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{t^+} u(\tau)h(t - \tau)d\tau \end{aligned} \quad (2.4)$$

### - Calcolo della risposta impulsiva

Dato un sistema a riposo, la risposta impulsiva  $h(t)$  è l'output in corrispondenza di un impulso unitario  $\delta(t)$ . La formula generale è:

$$h(t) = d_0\delta(t) + \left[ \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} d_{i,l} \frac{t^l}{l!} e^{\lambda_i t} \right] \delta_{-1}(t)$$

I cui elementi sono:

- $d_0$ : Coefficiente. Risulta uguale a zero esclusivamente se il sistema è proprio, quindi quando gli indici delle due sommatorie  $n, m$  sono uguali.
- $\delta(t)$ : Impulso unitario, già menzionato.
- $d_{i,l}$ : Coefficienti specifici della risposta impulsiva.
- $\frac{t^l}{l!} e^{\lambda_i t}$ : Modi elementari, già menzionati.
- $\delta_{-1}(t)$ : Funzione gradino per garantire la causalità dell'uscita.

**Esempio 2.** *Calcolare la risposta impulsiva dell'equazione differenziale*

$$v'(t) + 2v(t) = u(t) + u(t)$$

### 1. Equazione omogenea, polinomio caratteristico e calcolo delle radici

Notiamo anzitutto che entrambi i lati dell'equazione presentano un numero di coefficienti uguale, quindi è confermato che il sistema è proprio e  $d_0 \neq 0$ . Chiarito ciò poniamo l'output a zero e risolviamo il polinomio caratteristico:

$$v'(t) + 2v(t) = 0 \implies s + 2 = 0 \implies \lambda_1 = -2$$

Da questo risultato notiamo inoltre che abbiamo una sola radice, quindi  $r = 1$  e molteplicità  $\mu_1 = 1$ .

## 2. Sostituzione valori nei modi elementari

Puri passaggi algebrici:

$$\frac{t^l}{l!} e^{\lambda_i t} \implies \frac{t^0}{0!} e^{-2t} \implies e^{-2t}$$

## 3. Scrittura risposta impulsiva e calcolo derivate necessarie

Prendiamo la formula generale di prima e sostituiamo il valore ottenuto. Poi, in base all'ordine di grandezza dell'equazione, sarà necessario derivare il tutto per ricavare ogni singolo termine. In questo caso, dobbiamo derivare una sola volta.

$$\begin{aligned} h(t) &= d_0\delta(t) + \sum_{i=1}^r \sum_{l=l}^{\mu_1-1} d_{i,l} e^{\lambda_i t} \frac{t^l}{l!} \delta_{-1}(t) \\ &= d_0\delta(t) + d_{1,0}e^{-2t}\delta_{-1}(t) \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$h'(t) = d_0\delta'(t) - 2d_{1,0}e^{-2t}\delta_{-1}(t) + d_{1,0}e^{-2t}\delta(t)$$

## 4. Riscrittura equazione iniziale in termini di impulso

Quindi dobbiamo porre  $v(t) = h(t)$  e  $u(t) = \delta(t)$  e sostituirli all'equazione originale.

$$\begin{aligned} h'(t) + 2h(t) &= \delta'(t) + \delta(t) \\ d_0\delta'(t) - 2d_{1,0}e^{-2t}\delta_{-1}(t) + d_{1,0}e^{-2t}\delta(t) + 2(d_0\delta(t) + d_{1,0}e^{-2t}\delta_{-1}(t)) &= \delta'(t) + \delta(t) \\ d_0\delta'(t) + 2d_0\delta(t) + d_{1,0}e^{-2t}\delta(t) &= \delta'(t) + \delta(t) \end{aligned} \quad (2.6)$$

## 5. Valutazione delle funzioni in $t = 0$

$$\begin{aligned} d_0\delta'(t) + 2d_0\delta(t) + d_{1,0}\delta(t) &= \delta'(t) + \delta(t) \\ d_0\delta'(t) + 2d_0\delta(t) + d_{1,0}\delta(t) - \delta'(t) - \delta(t) &= 0 \\ (d_0 - 1)\delta'(t) + (d_{1,0} + 2d_0 - 1)\delta(t) &= 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

## 6. Risoluzione del sistema di equazioni e soluzione finale

Dall'algebra bisogna ricordarsi il concetto di indipendenza lineare. Possiamo porre a sistema i singoli ordini di grandezza e risolverli per ottenere i valori effettivi di nostro interesse.

$$\begin{cases} (d_0 - 1)\delta'(t) = 0 \\ (d_{1,0} + 2d_0 - 1)\delta(t) = 0 \end{cases} = \begin{cases} d_0 = 1 \\ d_{1,0} = -1 \end{cases}$$

Chiaro che  $d_0 = 1, d_{1,0} = -1$  siano i coefficienti da sostituire nell'equazione originale. Una volta fatto ciò, il processo è concluso.

$$\begin{aligned} h(t) &= d_0\delta(t) + d_{1,0}e^{-2t}\delta_{-1}(t) \\ &= \delta(t) - e^{-2t}\delta_{-1}(t) \end{aligned} \quad (2.8)$$

### - Utilizzo dell'operatore di convoluzione

Ottenuta la risposta impulsiva, è ora possibile ottenere la forzata, la quale dipende esclusivamente da input e per i sistemi LTI causali è descritta come:

$$\begin{aligned} v_f(t) &= (u * h)(t) = \int_{0^-}^{t^+} h(\tau)u(t - \tau)d\tau \\ &= \int_{0^-}^{t^+} u(\tau)h(t - \tau)d\tau \end{aligned} \quad (2.9)$$

**Esempio 3.** Calcolare la risposta forzata  $v_f$  a partire dai seguenti  $h(t), u(t)$

$$h(t) = \frac{1}{2}\delta_0(t) + \frac{7}{4}e^{\frac{1}{2}t}\delta_{-1}(t); u(t) = 3\delta_{-1}(t)$$

Quindi notiamo che l'input è una funzione gradino di altezza 3. Procediamo con la risoluzione dell'integrale. Le forme possibili sono:

$$\begin{aligned} v(f) &= (h * u)(t) = (h * 3\delta_{-1})(t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)3\delta_{-1}(t - \tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} 3\delta_{-1}(\tau)h(t - \tau)d\tau \end{aligned} \quad (2.10)$$

Volendo preservare la nostra sanità mentale, terremo ferma la funzione più complessa, ovvero la risposta impulsiva. I passaggi continuano come segue:

$$\begin{aligned} (h * u)(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)3\delta_{-1}(t - \tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{2}\delta_0(\tau) + \frac{7}{4}e^{\frac{1}{2}\tau}\delta_{-1}(\tau) \right] 3\delta_{-1}(t - \tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}\delta_0(\tau)3\delta_{-1}(t - \tau)d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{7}{4}e^{\frac{1}{2}\tau}\delta_{-1}(\tau)3\delta_{-1}(t - \tau)d\tau \\ &= \frac{3}{2} \int_{0^-}^{0^+} \delta_0(\tau)\delta_{-1}(t - \tau)d\tau + \frac{21}{4} \int_0^{t^+} e^{\frac{1}{2}\tau}\delta_{-1}(\tau)\delta_{-1}(t - \tau)d\tau \\ &= \frac{3}{2} \times 1 + \frac{21}{4} \int_0^{t^+} e^{\frac{1}{2}\tau}d\tau \\ &= \frac{3}{2} + \frac{21}{4} \left[ \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}\tau} \right]_0^{t^+} = \frac{3}{2} + \frac{21}{4} \left( \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2} + \frac{21}{8}e^{2t} - \frac{21}{8} = v_f \end{aligned} \quad (2.11)$$

Notare come gli estremi di integrazione variano ad un certo punto. Questo accade grazie al focus del nostro interesse. Per esempio, nel primo blocco, abbiamo l'intervallo di definizione dell'impulso, per il quale risulta essere sempre uguale ad 1. Così è stato sostituito. Il secondo blocco riguarda invece gli istanti di tempo dopo l'impulso, quindi a partire da 0 all'istante  $t$ .

Un'ultima cosa che è utile menzionare, più perché è richiesta all'esame che altro, è saper definire la stabilità di un sistema. Già menzionato come una stabilità **asintotica** è confermata se la parte reale di ogni radice del polinomio caratteristico è minore di zero, ma per definire un sistema **BIBO-stabile** è necessario verificare che la risposta impulsiva sia integrabile e con un risultato finito.

## 2.3 Esercizi svolti

Qua devono stare esclusivamente quelli del calcolo della risposta libera, le altre sono troppo complesse da fare senza Laplace.

# Chapter 3

## Trasformata di Laplace

### 3.1 Risposta in frequenza

Per risposta in frequenza intendiamo l'output di un sistema quando in ingresso è fornita una funzione sinusoidale. Per lo studio degli input non utilizzeremo questa forma, bensì una di esponenziale complessa, che chiameremo **fasore**, e rappresenta un vettore roteante in una circonferenza unitaria, quindi di raggio 1. Si rappresentano con:

$$u(t) = Ae^{j(\omega_0 t + \phi)} \equiv Ae^{j\omega_0 t} e^{j\phi}$$

Mentre la risposta ha una forma simile a quella forzata, già vista nel capitolo precedente. La differenza di fondo è la presenza del fasore nell'equazione, il quale assume il ruolo di input  $u(t)$  e consente di differenziare le varie frequenze nell'istante di tempo richiesto. Si scrive:

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)u(t - \tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)Ae^{j[\omega_0(t - \tau) + \phi]}d\tau \\ &= Ae^{j(\omega_0 t + \phi)} \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j\omega_0 \tau}d\tau \end{aligned} \tag{3.1}$$

Abbiamo potuto rimuovere le costanti dall'integrale, lasciando al suo interno quella che effettivamente chiamiamo risposta in frequenza  $H(j\omega)$ , rappresentata dall'integrazione della risposta impulsiva con il fasore. Quindi, l'output è descritto come:

$$v(t) = H(j\omega_0)Ae^{j(\omega_0 t + \phi)}$$

Una caratteristica importante da ricordare è che se il modulo di questo output è minore di infinito, allora il sistema converge ed è sicuramente almeno BIBO-stabile.

Finora abbiamo svolto i calcoli facendoci del male con le equazioni differenziali, quindi in questo capitolo verranno introdotte le **trasformate**, il cui scopo è cercare di semplificarci lo svolgimento e la comprensione degli esercizi. Vedremo infatti che la risposta in frequenza risulta essere la **Trasformata di Fourier** della risposta impulsiva di un sistema e quindi anche la **Trasformata di Laplace** della risposta impulsiva ristretta all'asse immaginario. Queste due considerazioni sono equivalenti e si indicano con:

$$H(j\omega) = \mathcal{F}[h(t)](s) = \mathcal{L}[h(t)](s); s = j\omega$$

Le trasformate sono utili per saltare passaggi laboriosi di analisi 2; con Laplace, trasformeremo equazioni differenziali in algebriche con dominio complesso. Vedremo infatti che  $s$  è una variabile complessa.

Tuttavia, per riportare un risultato equivalente a quello che avremmo ottenuto senza l'ausilio della trasformata, sarà necessario attuare una trasformata inversa, o **antitrasformata**, ed infine ottenere la soluzione nel dominio del tempo.

## 3.2 Trasformata di Laplace unilatera

Sia  $v(t)$  una funzione generica con  $t \in \mathbb{R}$ , ottenuta come somma di funzioni reali a variabile reale o complessa. Per far sì che accetti la trasformata di Laplace, deve rispettare i seguenti criteri:

- Funzione localmente sommabile nell'intervallo  $[0, \infty)$ . Quindi che:

$$\int_a^b |v(t)| dt < \infty, \forall a, b \in [0, \infty)$$

- Funzione formata da un insieme finito di segnali polinomiali.

Noi definiamo la **Trasformata di Laplace**, o TdL unilatera come l'integrale della moltiplicazione fra l'output ed il fasore. Si tratta di una funzione che ha sia dominio che codominio in campo complesso e si scrive:

$$V(s) = \int_{0^-}^{+\infty} v(t)e^{-st} dt \equiv L[v(t)](s)$$

Notare che la convenzione di scrittura vede le funzioni trasformate con la lettera maiuscola. Da qui in avanti le funzioni verranno così distinte. Questa formula è fondamentale perché rappresenta la base di ogni trasformata che andremo ad utilizzare. Sebbene esistano tabelle apposite per utilizzarle out of the pocket, in mancanza di esse si dovrebbe partire da qua. Inoltre, attenzione: con una funzione  $v(t)$  generica localmente sommabile, non abbiamo la certezza che lo sia anche la sua trasformata; ragion per cui è necessario definire la **regione di convergenza** di quest'ultima.

Definiamo questa regione  $RdC$  come un semipiano positivo, posto alla destra di un determinato asse  $\alpha$ , considerato come ascissa di convergenza. Scriviamo:

$$RdC = \{s \in C \mid Re(s) > \alpha\}$$

**Dimostrazione 1.  $RdC$  è un semipiano positivo**

Sia  $v(t)$  una combinazione lineare di esponenziali, vogliamo dimostrare che la regione di convergenza della sua trasformata è un semipiano positivo definito come appena visto. Abbiamo quindi:

- $v(t) = \sum_{i=0}^n c_i e^{\lambda_i t}; \lambda_i = \sigma_i + j\omega_i \in \mathbb{C}$
- $RdC = \{s \in C \mid Re(s) > \alpha\}$
- $\mathcal{L}[v(t)](s) = \int_{0^-}^{+\infty} v(t) e^{-st} dt$

Per prima cosa, partiamo dalla definizione di trasformata e sostituiamo a  $v(t)$  la nostra supposizione, ovvero che sia combinazione lineare. Otteniamo:

$$\begin{aligned} V(t) &= \int_{0^-}^{+\infty} \sum_{i=0}^n c_i e^{\lambda_i t} e^{-st} dt \\ &= \sum_{i=0}^n c_i \int_{0^-}^{+\infty} e^{\lambda_i t} e^{-st} dt \end{aligned} \tag{3.2}$$

Prendendo un generico  $i$  possiamo porre le definizioni di numero complesso per  $\lambda_i$  ed  $s$ , dandoci:

$$\lambda_i = \sigma_i + j\omega_i; s = \sigma + j\omega$$

Ciò ci consente di riscrivere l'integrale come segue:

$$\begin{aligned} \int_{0^-}^{+\infty} e^{\sigma_i t} e^{j\omega_i t} e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt &= \int_{0^-}^{+\infty} e^{(\sigma_i - \sigma + j\omega_i - j\omega)t} dt \\ &= \left[ \left( \frac{e^{(\sigma_i - \sigma + j\omega_i - j\omega)t}}{\sigma_i - \sigma + j\omega_i - j\omega} \right) \right]_{0^-}^{+\infty} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{e^{(\sigma_i - \sigma)t} e^{j(\omega_i - \omega)t}}{\sigma_i - \sigma + j\omega_i - j\omega} \right) - \frac{1}{\sigma_i - \sigma + j\omega_i - j\omega} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Possiamo notare che  $e^{j(\omega_i - \omega)t}$  è un fasore, quindi necessariamente uguale ad 1, possiamo quindi rimuoverlo. La vera parte che ci interessa è  $e^{(\sigma_i - \sigma)t}$ , perché saprà dirci se l'integrale converge, perché lo farà se  $\sigma_i < \sigma$ .

$\sigma$  è però la parte reale di  $s$ , mentre  $\sigma_i$  la reale di  $\lambda_i$ , dunque possiamo sostituire i primi termini a questi ultimi e ottenere che:

$$\forall s \in \mathbb{C}, Re(s) > Re(\lambda_i)$$

*Di conseguenza, il semipiano positivo è composto da tutti quei valori di  $s$  che devono necessariamente essere maggiori o uguali delle radici.*

Notare infine che per un sistema LTI stabile, la regione di convergenza conterrà sempre anche l'asse immaginario. Passiamo ora alle **proprietà** della TdL:

- **Linearità**

Siano  $v_1, v_2$  funzioni che ammettono TdL e rispettivamente  $V_1, V_2$  le loro trasformate. Avremo che  $av_1(t) + bv_2(t)$  ammette TdL. Invece, per l'ascisse di convergenza si prenderà il valore più alto fra le due, quindi, in tutto avremo:

$$\mathcal{L}[av_1(t) + bv_2(t)](s) = aV_1(s) + bV_2(s); \alpha \geq \max\{\alpha_1, \alpha_2\}$$

- **Traslazione nel dominio del tempo**

Sia  $v(t)$  funzione che ammette TdL; traslandola avremo  $v(t-\tau)$ , la quale continuerà ad ammettere la trasformata solamente con  $\tau > 0$ . In tal caso definiamo:

$$\mathcal{L}[v(t-\tau)](s) = e^{-st} \mathcal{L}[v(t)](s)$$

La regione di convergenza con questa proprietà rimane immutata.

- **Traslazione nel dominio dei complessi**

Parliamo quindi di moltiplicazioni per una funzione esponenziale complessa. Sia  $v(t)$  che ammette TdL, allora ciò varrà anche per  $e^{\lambda t}v(t)$  e descriveremo la trasformata come

$$\mathcal{L}[e^{\lambda t}v(t)](s) = V(s - \lambda)$$

In questa proprietà, la regione di convergenza viene spostata, di conseguenza, anche l'ascissa diventa

$$\alpha = \alpha_0 + \operatorname{Re}(\lambda)$$

Con  $\lambda$  esponenziale qualsiasi.

- **Cambio di scala**

Sia  $v(t)$  che ammette TdL, allora anche  $v(rt)$  ammette TdL, la quale è definita come

$$\mathcal{L}[v(rt)](s) = \frac{1}{r}V\left(\frac{s}{r}\right)$$

- **Comportamento con le derivate**

Sia  $v(t)$  che ammette TdL ed un limite finito  $v(0^-) = \lim_{t \rightarrow 0^-} v(t)$ . Allora anche la derivata i-esima della funzione ammette TdL.

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^i v(t)}{dt^i}\right] = s^i V(s) - \sum_{k=0}^{i-1} \left[ \frac{d^k v(t)}{dt^k} \right]_{t=0^-} (s^{i-1-k})$$

L'ascissa di convergenza qui è  $\alpha \leq \alpha_0$ , con  $\alpha_0$  ascisse originale. Essendo una proprietà importante, dimostriamone il funzionamento per derivata prima e seconda.

**Dimostrazione 2. Dimostrazione per derivata prima**

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \left[ \frac{dv(t)}{dt} \right] (s) &= \int_{0^-}^{+\infty} \frac{dv(t)}{dt} e^{-st} dt \\ &= v(t)e^{-st} \Big|_{0^-}^{+\infty} - \left( -s \int_{0^-}^{+\infty} v(t)e^{-st} dt \right) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} v(\epsilon)e^{-s\epsilon} - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^-} v(\epsilon)e^{-s\epsilon} + sV(s) \\ &= sV(s) - v(0^-)\end{aligned}\tag{3.4}$$

**Dimostrazione 3. Dimostrazione per derivata seconda**

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \left[ \frac{d^2v(t)}{dt^2} \right] (s) &= L \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{dv(t)}{dt} \right) \right] (s) \\ &= s\mathcal{L} \left[ \frac{d}{dt}v(t) \right] (s) - \frac{dv(t)}{dt} \Big|_{t=0^-} \\ &= s(s\mathcal{L}[v(t)](s) - v(0^-)) - \frac{dv(t)}{dt} \Big|_{t=0^-} \\ &= s^2V(s) - sv(0^-) - \frac{dv(t)}{dt} \Big|_{t=0^-}\end{aligned}\tag{3.5}$$

• **Moltiplicazione per funzione polinomiale**

Sia  $v(t)$  che ammette TdL, allora lo farà anche  $t^i v(t)$ .

$$\mathcal{L}[t^i v(t)] = (-1)^i \frac{d^i V(s)}{ds^i}$$

**Dimostrazione 4.**

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[tv(s)](s) &= \int_{0^-}^{+\infty} tv(t)e^{-st} dt = - \int_{0^-}^{+\infty} v(t)(-te^{-st}) dt \\ &= - \int_{0^-}^{+\infty} v(t) \frac{de^{-st}}{ds} dt = - \frac{d}{ds} \int_{0^-}^{+\infty} v(t)e^{-st} dt \\ &= - \frac{d}{ds} V(s)\end{aligned}\tag{3.6}$$

• **Integrazione nel dominio del tempo**

Sia  $v(t)$  che ammette TdL, e se è definito  $\psi(t) = \int_{0^-}^t v(t) dt$  suo integrale nel tempo, allora anche quest'ultimo ammette TdL. Qui l'ascissa di convergenza è il massimo fra 0 ed  $\alpha_0$ .

$$\mathcal{L} \left[ \int_{0^-}^\tau v(t) d\tau \right] (s) = \frac{V(s)}{s}$$

**Dimostrazione 5.**

$$\begin{aligned}
v_i(t) &= \int_{0^-}^t v(\tau)d\tau \implies v'_1(t) = v(t) \wedge v(0^-) = \int_{0^-}^{0^-} v(\tau)d\tau = 0 \\
&= \mathcal{L}[v(t)](s) = \mathcal{L}[v'_1(t)](s) \implies s\mathcal{L}[v'_1(t)](s) - v_1(0^-) \\
&= v_1(0^-) = 0 \implies s\mathcal{L}\left[\int_0^t v(\tau)d\tau\right](s) \\
&= \mathcal{L}\left[\int_0^t v(\tau)d\tau\right] = \frac{V(s)}{s}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

**• Integrazione nel dominio dei complessi**

Sia  $v(t)$  che ammette TdL ed esistente  $\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{v(t)}{t}$ , allora vale:

$$\mathcal{L}\left[\frac{v(t)}{t}\right](s) = \int_s^\infty \mathcal{L}[v(t)](\sigma)d\sigma$$

**• Teorema del valore iniziale**

Questa proprietà permette di capire il comportamento asintotico della funzione in 0, poiché ritorna il limite della derivata prima in condizioni nulle. Sia  $v(t)$  che ammette TdL ed esistente finito il  $\lim_{t \rightarrow 0^-} v(t)$ , allora vale:

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} v(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s\mathcal{L}[v(t)](s)$$

**• Teorema del valore finale**

Questa proprietà permette di capire il comportamento asintotico della funzione in infinito guardando il limite in  $0^+$ . Sia  $v(t)$  che ammette TdL ed esistente finito il  $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t)$ , allora:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \lim_{s \rightarrow 0^+} s\mathcal{L}[v(t)](s)$$

**• Convoluzione nel dominio del tempo**

siano  $u(t)$  e  $v(t)$  due funzioni generiche e causali nulle per  $t < 0$  e che ammettono TdL. Allora anche  $(u * v)(t)$  ammetterà TdL e varrà:

$$\mathcal{L}[(u * v)(t)](s) = \mathcal{L}[u(t)](s) \times \mathcal{L}[v(t)](s)$$

**Dimostrazione 6.**

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[(u * v)(t)](s) &= \int_{0^-}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} u(\lambda)v(t-\lambda)d\lambda \right) e^{-st}dt \\
&= \int_{0^-}^{\infty} \int_{0^-}^{\infty} u(\lambda)v(t-\lambda)e^{-st}dt d\lambda \\
&= \int_{0^-}^{\infty} u(\lambda) \left( \int_{0^-}^{+\infty} v(t-\lambda)e^{-st}dt \right) d\lambda
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Sostituiamo ora:  $x = t - \lambda$ ,  $t = x + \lambda$ ,  $dt = dx$ , otteniamo:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[(u * v)(t)](s) &= \int_{0^-}^{\infty} u(\lambda) \left( \int_{0^-}^{+\infty} v(x) e^{-s(x+\lambda)} dx \right) d\lambda \\ &= \int_{0^-}^{+\infty} u(\lambda) e^{-s\lambda} d\lambda \int_{0^-}^{+\infty} v(x) e^{-sx} dx \\ &= \mathcal{L}[u(t)](s)[v(t)](s)\end{aligned}\tag{3.9}$$

### 3.3 Trasformate notevoli

Viste le proprietà e capito il procedimento generale, possiamo ora mostrare quelle che sono le trasformate più di comune utilizzo; annotarle è necessario poiché consentono di trasformare le funzioni in modo più veloce. Ricordare che la funzione può essere anche traslata per tempo e avere ampiezze diverse, quindi esistono trasformate anche per questi due casi. Ringrazia le proprietà di linearità e ritardo nel tempo.

- **Trasformata dell'impulso**  $\delta_0(t)$ :

- Condizione basilare:

$$\mathcal{L}[\delta_0(t)](s) = \int_{0^-}^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = e^{-st} \Big|_{t=0} = 1$$

- Aampiezza considerata:

$$\mathcal{L}[A\delta_0(t)](s) = A\mathcal{L}[\delta_0(t)](s) = A \times 1 = A$$

- Funzione traslata nel tempo:

$$\mathcal{L}[\delta_0(t - \tau)](s) = e^{-s\tau} \mathcal{L}[\delta_0(t)](s) = e^{-s\tau}$$

- **Trasformata del gradino**  $\delta_{-1}(t)$ :

- Condizione basilare:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\delta_{-1}(t)](s) &= \int_{0^-}^{+\infty} \delta_{-1}(t) e^{-st} dt = \int_{0^-}^{+\infty} e^{-st} dt \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow \infty; \mu \rightarrow 0^-} \left( -\frac{e^{st}}{s} \right) \Big|_{t=\mu}^{\epsilon} \\ &= \lim_{\mu \rightarrow 0^-} \frac{e^{-s\mu}}{s} - \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \frac{e^{-s\epsilon}}{s} = \frac{1}{s}\end{aligned}\tag{3.10}$$

- Ampiezza considerata:

$$\mathcal{L}[A\delta_{-1}(t)](s) = \frac{A}{s}$$

- Funzione traslata nel tempo:

$$\mathcal{L}[\delta_{-1}(t - \tau)](s) = \frac{e^{-s\tau}}{s}$$

- **Esponenziale complesso causale**  $v(t) = e^{\lambda t}\delta_{-1}(t)$ :

- Condizione basilare:

$$\mathcal{L}[e^{\lambda t}\delta_{-1}(t)](s) = \mathcal{L}[\delta_{-1}(t)](s - \lambda) = \frac{1}{s - \lambda}$$

- Ampiezza considerata:

$$\mathcal{L}[Ae^{\lambda t}\delta_{-1}(t)](s) = \frac{A}{s - \lambda}$$

- Funzione traslata nel tempo:

$$\mathcal{L}[e^{\lambda(t-\tau)}\delta_{-1}(t - \tau)](s) = \frac{e^{-(s-\lambda)\tau}}{s - \lambda}$$

- **Esponenziale complesso causale moltiplicato per una funzione polinomiale**  $v(t) = \frac{t^l}{l!}e^{\lambda t}\delta_{-1}(t)$ :

- Condizione basilare:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\frac{t^l}{l!}e^{\lambda t}\delta_{-1}(t)\right](s) &= \frac{1}{l!} \times \mathcal{L}[t^l e^{\lambda t}\delta_{-1}(t)](s) \\ &= \frac{(-1)^l}{l!} \times \frac{l^l}{ds^l} \times \mathcal{L}[e^{\lambda t}\delta_{-1}(t)](s) \\ &= \frac{(-1)^l}{l!} \times \frac{l^l}{ds^l} \left(\frac{1}{s - \lambda}\right) \\ &= \frac{(-1)^l}{l!} \times \frac{l!(-1)^l}{(s - \lambda)^{l+1}} \\ &= \frac{1}{(s - \lambda)^{l+1}} \end{aligned} \tag{3.11}$$

- per  $l = 1$ :

$$\mathcal{L}[te^{\lambda t}\delta_{-1}(t)](s) = \frac{1}{(s - \lambda)^2}$$

- per  $l = 2$ :

$$\mathcal{L} \left[ \frac{t^2}{2!} e^{\lambda t} \delta_{-1}(t) \right] (s) = \frac{1}{(s - \lambda)^3}$$

- Manca il primo esponenziale:

$$\mathcal{L} \left[ \frac{t}{l!} \delta_{-1}(t) \right] (s) = \frac{1}{s^{l+1}}$$

- Manca il secondo esponenziale:

$$\mathcal{L}[t\delta_{-1}(t)](s) = \frac{l!}{s^{l+1}}$$

- Manca il polinomio:

$$\mathcal{L}[e^{-\lambda t} \delta_{-1}(t)](s) = \frac{1}{s + \lambda}$$

- **Trasformata per famiglie sinusoidali - Coseno:**

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\cos(\omega t)](s) &= \mathcal{L} \left[ \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2} \right] (s) = \frac{1}{2} \mathcal{L}[e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}](s) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s - j\omega} + \frac{1}{s + j\omega} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{s}{s^2 + \omega^2} \right) \end{aligned} \quad (3.12)$$

- **Trasformata per famiglie sinusoidali - Seno:**

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\sin(\omega t)](s) &= \mathcal{L} \left[ \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \right] (s) = \frac{1}{2j} (\mathcal{L}[e^{j\omega t}](s) - \mathcal{L}[e^{-j\omega t}](s)) \\ &= \frac{1}{2j} \left( \frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega} \right) = \frac{1}{2j} \left( \frac{s + j\omega - s + j\omega}{s^2 + \omega^2} \right) \\ &= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \end{aligned} \quad (3.13)$$

### 3.4 Utilizzo della TdL per il calcolo delle risposte

Come già detto, il passaggio a funzione trasformata è uno step per ottenere la risposta totale, e quindi anche la libera, impulsiva e forzata. Bisogna prima fare dei passi iniziali per ottenere gli strumenti di lavoro della sezione. Richiamiamo quindi alla memoria la scrittura descrivente un sistema:

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j u(t)}{dt^j}$$

Supponiamo ora il grado degli input  $n$  maggiore di quello degli output  $m$ , con  $u(t) = u(t)\delta_{-1}(t)$ , con le seguenti condizioni iniziali:

$$v(0^-); \frac{dv(0^-)}{dt}; \dots; \frac{d^{n-1}v(0^-)}{dt^{n-1}}$$

Se  $u(t)$  ammette TdL, allora lo farà anche  $v(t)$ , per  $t \geq 0$ . Siano ora  $U(s)$  e  $V(s)$  le TdL di  $u(t)$  e  $v(t)$  rispettivamente. Il modello si può riscrivere come:

$$\mathcal{L} \left[ \sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i} \right] (s) = \mathcal{L} \left[ \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j u(t)}{dt^j} \right] (s)$$

Da qui possiamo effettuare alcuni passaggi algebrici grazie alla proprietà viste nella sezione precedente:

- Tiriamo fuori le costanti:

$$\sum_{i=0}^n a_i \mathcal{L} \left[ \frac{d^i v(t)}{dt^i} \right] (s) = \sum_{j=0}^m b_j \mathcal{L} \left[ \frac{d^j u(t)}{dt^j} \right] (s)$$

- Applichiamo  $n+m$  volte la regola della derivata:

$$a_n \left[ s^n V(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{d^k v(t)}{dt^k} \Big|_{t=0^-} (s^{h-1-k}) \right] + a_{n-1} \left[ s^{n-1} V(s) - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{d^k v(t)}{dt^k} \Big|_{t=0^-} (s^{h-2-k}) \right] + \dots + a_0 V(s)$$

- Imponiamo le CE iniziali per  $u(t)|_{t=0^-} = 0$ :

$$b_m s^m U(s) + b_{m-1} s^{m-1} U(s) + \dots + b_0 U(s)$$

- Espandiamo le sommatorie e raccogliamo:

$$\begin{aligned} & (a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0) V(s) + \\ & - a_n v(0^-) s^{n-1} - \left( a_{n-1} v(0^-) + a_n \frac{dv(t)}{dt} \Big|_{t=0} \right) s^{n-2} - \dots - \left( \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} \frac{d^k v(t)}{dt^k} \Big|_{t=0^-} \right) \\ & = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0) U(s). \end{aligned} \tag{3.14}$$

Questa è una scrittura enorme, ragion per cui da qui in poi verrà abbreviata per garantirne un riutilizzo più semplice con:

$$d(s)V(s) - p(s) = n(s)U(s)$$

Le componenti sono:

- $d(s) = (a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0)$ , è un polinomio di grado  $n$ , il quale dipende solo dai coefficienti delle derivate associate all'uscita. È anche il polinomio caratteristico di  $v(t)$ .
- $p(s) = a_n v(0^-) s^{n-1} - (a_{n-1} v(0^-) + a_n \frac{dv(t)}{dt} \Big|_{t=0}) s^{n-2} - \dots - (\sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} \frac{d^k v(t)}{dt^k} \Big|_{t=0^-})$ , si tratta di un polinomio di grado  $n-1$  che contiene le condizioni iniziali.
- $n(s) = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0)$ , polinomio di grado  $m$ . È anche il polinomio caratteristico di  $u(t)$ .

Questa forma ci semplifica enormemente le cose, permettendoci di ricavare più facilmente le varie componenti della risposta totale con le seguenti formule:

- **Risposta totale**

$$V(s) = \frac{n(s)}{d(s)} U(s) + \frac{p(s)}{d(s)}$$

- **Risposta libera**

$$V_l(s) = \frac{p(s)}{d(s)}$$

- **Risposta forzata**

$$V_f(s) = \frac{h(s)}{d(s)} U(s)$$

- **Risposta impulsiva** o funzione di trasferimento

$$H(s) = \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}$$

**Esempio 4.** *Dato il sistema  $v'''(t) + v''(t) = u(t)$ , trovare la risposta totale  $V_t(s)$ . Per raggiungere la forma semplificata, è necessario effettuare passaggi algebrici ed ottenere la formula per  $V_t(s)$ . Grazie alla proprietà della linearità possiamo applicare la trasformata un elemento per volta, dunque:*

$$\begin{aligned} & \left( s^3 V(s) - s^2 v(0^-) - s^1 \frac{dv(0^-)}{dt} - s^0 \frac{d^2 v(0^-)}{dt^2} \right) + \left( s^2 V(s) - s v(0^-) - s^0 \frac{dv(0^-)}{dt} \right) = s U(s) \\ & (s^3 + s^2) V(s) - \left[ s^2 v(0^-) + s \frac{dv(0^-)}{dt} + \frac{d^2 v(0^-)}{dt^2} + s v(0^-) + \frac{dv(0^-)}{dt} \right] = s U(s) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Spostando infine gli elementi per ricavare  $V_t(s)$ , otteniamo quanto richiesto:

$$V(s) = \frac{s}{s^3 + s^2} U(s) + \frac{s^2 v(0^-) + s \left( \frac{dv(0^-)}{dt} + v(0^-) \right) + \left( \frac{d^2 v(0^-)}{dt^2} + \frac{dv(0^-)}{dt} \right)}{s^3 + s^2}$$

*L'esercizio qui è puramente per mostrare il procedimento; in questo momento si dovrebbero applicare le condizioni di Cauchy.*

Ritornando alla funzione di trasferimento, generalmente vedremo che al numeratore il polinomio avrà grado minore o uguale a quello del denominatore; da qui in poi riferiti come  $q \leq m$  ed  $r \leq n$ , dove  $m$  è la sommatoria delle molteplicità delle soluzioni del numeratore ed  $n$  quella del denominatore. Fattorizzandola otteniamo la seguente scrittura:

$$H(s) = \frac{b_m(s - \beta_1)^{\xi_1}(s - \beta_2)^{\xi_2} \cdots (s - \beta_q)^{\xi_q}}{a_n(s - \alpha_1)^{\mu_1}(s - \alpha_2)^{\mu_2} \cdots (s - \alpha_r)^{\mu_r}}$$

Dove le  $\xi$  sono le molteplicità delle soluzioni del numeratore e le  $\mu$  quelle del denominatore, mentre le  $\beta$  e le  $\alpha$  fra le tonde si dicono **zeri** della funzione di trasferimento e **poli**, queste ultime sono le radici del polinomio caratteristico. È possibile compattare ulteriormente la funzione; dicendo  $K = \frac{b_m}{a_n}$  otteniamo:

$$H(s) = K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}$$

### Definizione 2. Zero di una funzione razionale

Definiamo zero di una funzione razionale un qualsiasi numero complesso  $\beta \in \mathbb{C}$  tale per cui  $H(\beta) = 0$ . Inoltre, diciamo  $\beta$  zero di molteplicità algebrica  $\mu$  per  $H(s)$  se valgono:

$$\begin{cases} \lim_{s \rightarrow \beta} \frac{1}{(s - \beta)^\mu} H(\beta) \neq 0 \\ \lim_{s \rightarrow \beta} \frac{1}{(s - \beta)^{\mu-1}} H(\beta) = 0 \end{cases}$$

### Definizione 3. Polo di una funzione razionale

Definiamo polo di una funzione razionale  $H(s)$  è un qualsiasi numero complesso  $\alpha \in \mathbb{C}$  tale per cui  $H(\alpha) = \infty$ . Inoltre, diciamo  $\alpha$  polo di molteplicità algebrica  $\mu$  per  $H(s)$  se valgono:

$$\begin{cases} \lim_{s \rightarrow \alpha} (s - \alpha)^\mu H(\alpha) \neq \infty \\ \lim_{s \rightarrow \alpha} (s - \alpha)^{\mu-1} H(\alpha) = \infty \end{cases}$$

Il fatto che la funzione di trasferimento sia razionale, ammette la presenza di fattori comuni a numeratore e denominatore, consentendoci di rimuoverli e semplificare la funzione. Questa cosa è molto utile anche per poter fare asserzioni sulla stabilità di un sistema.

Supponiamo una  $H(s)$  in forma ridotta, con  $\lambda_i, \dots, \lambda_r$ ;  $r \leq n$  i suoi poli post-semplificazione. Se ogni  $\lambda$  ha parte reale minore di 0, possiamo dire che il sistema è bibostabile. Diciamo quindi che un sistema è BIBO-stabile quando tutti i suoi poli giacciono nel semipiano complesso negativo.

**Esempio 5. Verificare la stabilità del sistema:**  $v'(t) - 3v(t) = u''(t) - 5u'(t) + 4u(t)$   
Notiamo che in questo caso  $n < m$ , quando in genere è l'opposto. Procediamo per passi:

**1. Passaggio a polinomio caratteristico**

$$v'(t) - 3v(t) = u''(t) - 5u'(t) + 4u(t) \implies s - 3 = s^2 - 5s + 4$$

**2. Ricerca di  $H(s)$**

$$H(s) = \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{s^2 - 5s + 4}{s - 3}$$

**3. Fattorizzazione dei polinomi**

$$H(s) = \frac{(s - 1)(s - 4)}{s - 3}$$

È evidente che in quanto  $\lambda_1 = 3$ , il sistema non è asintoticamente stabile. Non potendo rimuovere fattori abbiamo inoltre la conferma che non è nemmeno BIBO-stabile.

### 3.5 Antitrasformata di Laplace unilatera

Lo scopo dell'antitrasformata è di passare da dominio complesso ottenuto con Laplace a quello del tempo, è l'ultimo passaggio da eseguire. Presupposto il fatto di aver effettuato tutte le trasformazioni e di aver ottenuto la forma della risposta in laplace  $V(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$ , abbiamo due casi possibili:

- **Sistema proprio:**  $\deg(n(s)) \geq \deg(d(s))$

Necessaria divisione polinomiale, fratti semplici e applicazione di antitrasformata.

- **Sistema strettamente proprio:**  $\deg(n(s)) < \deg(d(s))$

Necessari fratti semplici e applicazione di antitrasformata.

**- Divisione polinomiale**

Dati due polinomi, bisogna trovare una costante da moltiplicare al polinomio divisore tale per cui, quando questo è sottratto al dividendo, scompaia il termine di grado più alto. Consente di ottenere:

$$V(s) = \frac{r(s)}{d(s)} + k; \deg(r(s)) < \deg(d(s)); k \in \mathbb{C}$$

**Esempio 6. Divisione polinomiale:**

$$V(s) = \frac{2s^2 + 4s - 3}{s^2 - s - 1}$$

Moltiplicando  $k = 2$  al denominatore  $d(s)$  possiamo rimuovere il primo termine del numeratore  $r(s)$  sottraendogli quanto ottenuto, quindi la nuova forma di  $V(s)$  è:

$$V(s) = \frac{6s - 1}{s^2 - s - 1} + 2$$

### - Decomposizione in fratti semplici

Permette di riscrivere  $\frac{r(s)}{d(s)}$  come sommatoria di frazioni, nella forma:

$$\sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_1-1} \frac{c_{i,l}}{(s - \alpha_i)^{l+1}}$$

Dove esistono due modi, quello preferibile e generale è l'utilizzo di una formula apposita con un limite:

$$c_{i,l} = \lim_{s \rightarrow \alpha_i} \frac{d^{\mu_i-l-1} \left( (s - \alpha_i)^{\mu_i} \frac{r(s)}{d(s)} \right)}{ds^{\mu_i-l-1}}$$

#### Esempio 7. Fratti semplici

Data la risposta  $V(s) = \frac{s-20}{(s+4)(s-2)}$ , notiamo che abbiamo come poli  $\alpha_1 = -4; \alpha_2 = 2$ , con entrambi i gradi  $\mu_1 = \mu_2 = 1$ . La forma da ottenere presenta un singolo fattore per denominatore, quindi:

$$\frac{A}{s+4} + \frac{B}{s-2}$$

Utilizziamo la formula vista prima per il calcolo di ogni valore delle lettere maiuscole, sapendo che  $A$  ha molteplicità  $\mu = 1$  con polo  $\alpha = -4$  e  $B$  ha molteplicità  $\mu = 1$  con polo  $\alpha = 2$ :

$$\begin{aligned} A &= \lim_{s \rightarrow -4} \frac{d^{1-0-1} \left( (s+4)^1 \frac{s-20}{(s+4)(s-2)} \right)}{d^{1-0-1}} = \frac{d^0 \left( (-4+4)^1 \frac{-4-20}{(-4+4)(-4-2)} \right)}{d^0} = \frac{-24}{-6} = 4 \\ B &= \lim_{s \rightarrow 2} \frac{d^{1-0-1} \left( (s-2)^1 \frac{s-20}{(s+4)(s-2)} \right)}{d^{1-0-1}} = -\frac{18}{6} = 3 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Dunque nella forma dei fratti semplici, sostituendo otteniamo:

$$V(s) = \frac{s-20}{(s+4)(s-2)} = \frac{4}{s+4} + \frac{3}{s-2}$$

### - Applicazione dell'antitrasformata

Banalmente il passaggio inverso delle trasformate notevoli. A partire dalla forma ottenuta di  $V(s)$  ritorniamo nel dominio del tempo, ottenendo la forma:

$$v(t) = \mathcal{L}[k](t) + \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_1-1} c_{i,l} \mathcal{L} \left[ \frac{1}{(s - \lambda_i)^{l+1}} \right] (t)$$

Che ci fa infine ottenere:

$$K\delta_0(t) + \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_1-1} c_{i,l} \cdot \frac{t^l}{l!} \cdot e^{\lambda_i t} \cdot \delta_{-1}(t)$$

## 3.6 Esercizi svolti

**Esercizio 1:** Verificare la stabilità del seguente sistema:

$$v''(t) + 3v'(t) + 2v(t) = u''(t) - 4u'(t) + 3u(t)$$

1. **Polinomio caratteristico**

$$v''(t) + 3v'(t) + 2v(t) = u''(t) - 4u'(t) + 3u(t) \implies s^2 + 3s + 2 = s^2 - 4s + 3$$

2. **Trova  $H(s)$**

$$H(s) = \frac{s^2 - 4s + 3}{s^2 + 3s + 2}$$

3. **Fattorizza i polinomi**

$$H(s) = \frac{(s-3)(s-1)}{(s+1)(s+2)}$$

4. **Verifica valore di  $Re(\lambda)$**

$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$ . Il sistema è asintoticamente stabile e come conseguenza diretta, è anche bibostabile.

**Esercizio 2:** Verificare la stabilità del seguente sistema:

$$v'''(t) + 7v''(t) - 2v'(t) + 6v(t) = u''(t) + 3u'(t) - 4u(t)$$

1. **Polinomio caratteristico**

$$v'''(t) + 7v''(t) - 2v'(t) + 6v(t) = u''(t) + 3u'(t) - 4u(t) \implies s^3 + 7s^2 - 2s + 6 = s^2 + 3s - 4$$

2. **Trova  $H(s)$**

$$H(s) = \frac{s^2 + 3s - 4}{s^3 + 7s^2 - 2s + 6}$$

3. **Fattorizza i polinomi**

$$H(s) = \frac{(s+4)(s-1)}{(s+3)(s+2)(s-1)} = \frac{(s+4)}{(s+3)(s+2)}$$

4. **Verifica valore di  $Re(\lambda)$**

$\lambda_3 = +1$ . Non è asintoticamente stabile. Tuttavia, semplificandolo, si rimuove proprio questo fattore, rendendo il sistema bibostabile.

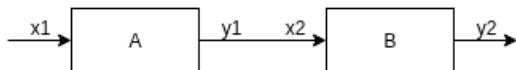
# Chapter 4

## Schemi a blocchi

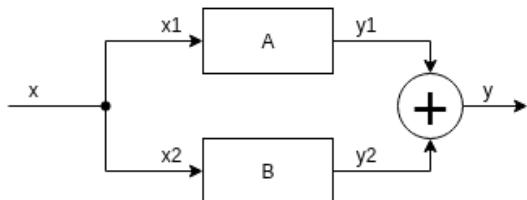
### 4.1 Sistemi a più blocchi

Come già studiato precedentemente, i sistemi sono rappresentati graficamente con un input, un blocco centrale, ed un output, ma questa forma non prende in considerazione istanze più complesse. Normalmente, infatti, un sistema non compie solo un'operazione, ma molteplici. Prendiamo per esempio un sistema di microfono e casse, qui vengono eseguite più operazioni per modificare i segnali ed eventualmente ritornarli in output. Ciò si può rappresentare con più blocchi in un singolo schema, in tre modi diversi:

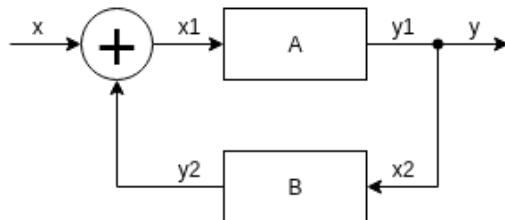
- **A cascata/In parallelo:** Semplicemente uno dopo l'altro.



- **Somma dei sistemi:** L'input si dirama in due sistemi che producono due output, i quali saranno poi sommati per ritornare l'output effettivo.



- **Sistema di retroazione:** Permette di avere un controllo maggiore sui sistemi, è tendenzialmente usato per rimuovere i poli e adattare l'uscita del sistema. Vede un primo blocco ritornare un input, il quale, se non in forma desiderata, passa in un secondo blocco per essere rielaborato. Il tutto sarà inviato al nodo sommatore per riproporre l'output, fin quando non sarà adeguato ai nostri canoni.



Notare che qui abbiamo due elementi di base: i **blocchi** che rappresentano i sistemi, i quali eseguono le operazioni, e i **nodi**, dove i segnali si diramano oppure vengono accumulati con somma o sottrazione. I primi seguono la logica SISO, mentre gli ultimi possono ricevere più input, ma ritornando sempre un singolo output.

Con questa logica è possibile aggiungere dei controlli ai segnali dei sistemi, anche qui abbiamo più possibilità:

- **Controllo ad anello aperto:** Graficamente identico ai blocchi in parallelo, non effettuo controlli sui segnali.
- **Controllo ad anello chiuso:** Graficamente identico alla retroazione, modifico il segnale fin quando non è dentro i canoni desiderati.

Naturalmente vedremo più nel dettaglio quest'ultimo. Anzitutto, quello che si prende come input è detto **segnale di riferimento**  $r$ , il quale subisce un controllo di feed-forward nel primo sistema, cercando di risolvere il problema. Nel caso in cui l'output risultante, detto **segnale di controllo**  $u$ , non torna indietro, abbiamo ottenuto l'**uscita controllata**  $c$ ; in alternativa si procede in un altro sistema detto **elemento di feedback**, il quale esegue operazioni per "conformare il segnale", ritornando in output il **segnale di feedback**  $b$  che è inviato al nodo per la somma o sottrazione posto prima del primo sistema. L'output del nodo è detto infine **segnale di attuazione** o **errore**  $e$ , ed è inviato come input del primo sistema. In particolare diremo che abbiamo un feedback negativo quando  $e = r - b$ , mentre è positivo quando  $e = r + b$ .

Dove questa è la struttura generale, è possibile utilizzare tre tipi di controllori diversi, potenzialmente unendoli fra loro. Come componenti base abbiamo:

- **Controllore proporzionale  $P$ :** Rende l'output proporzionale all'errore, quindi:

$$u = k_P e$$

- **Controllore derivativo  $D$ :** Rende l'uscita proporzionale ad una costante di moltiplicazione rispetto alla derivata dell'errore rispetto al tempo.

$$u = k_D \frac{de}{dt}$$

- **Controllore integrativo  $I$ :** Stessa dinamica, ma con gli integrali.

$$u = k_I \int e(t) dt$$

Pare che i controllori siano linearmente indipendenti fra di loro, ciò significa che per usarne più di uno alla volta basta sommare quello presi. Nel caso più complesso, infatti, avremo:

$$u_{PID} = k_P e + k_D \frac{de}{dt} + k_I \int e(t) dt$$

Ed è proprio grazie a questi controlli che è possibile campionare il segnale a tempo continuo in uno a tempo discreto. Tendenzialmente è presente anche un blocco "zero holder", che mantiene il segnale identico fino all'istante successivo, garantendo che la conversione prenda tutti i dati con la discretizzazione. Verrà ripreso con Fourier.

Quello che interessa a noi è, dato un sistema a blocchi, ottenere la sua **forma canonica**, ovvero la forma uguale a quella del blocco di retroazione, per poi raggiungere un disegno uguale a quello del controllo ad anello libero, dove il sistema comprende ogni singolo controllo e operazione eseguita. In soldoni, parliamo di minimizzazione del sistema. La forma canonica ha le seguenti nomenclature:

- **Funzione di trasferimento diretta  $G$**
- **Funzione di trasferimento di feedback  $H$**
- **Funzione di trasferimento dell'anello  $GH$**
- **funzione di trasferimento dell'anello chiuso**  $\frac{C}{R} = \frac{R}{1 \pm GH}$
- **Rapporto del segnale di attuazione**  $\frac{e}{R} = \frac{1}{1 \pm GH}$
- **Rapporto di feedback**  $\frac{B}{R} = \frac{GH}{1 \pm GH}$

Chiaramente per minimizzare uno schema si utilizzano una sequela di regole apposite, con lo scopo generale di raggruppare, riorganizzare e rimuovere nodi e blocchi. Esistono due metodi per l'ottimizzazione dello schema, queste sono le regole per il primo metodo, che è eccessivamente lungo, quindi le lascio solo per completezza:

- **Combinazione di blocchi in serie/a cascata**

- Combinazione di blocchi in parallelo
- Rimozione di blocco parallelo
- Rimozione di anello di feedback
- Rimozione dal loop
- Riorganizzazione di input nel nodo somma
- Spostamento dei nodi somma prima/dopo del blocco
- Spostamento di nodi qualunque prima/dopo del blocco

## 4.2 Schemi di flusso

Questo è il modo più corretto e conciso per la rappresentazione degli schemi a blocchi; gli **schemi di flusso** sono dei diagrammi rappresentati tramite **nodi**  $x_i$  e **archi**  $A_j$ .

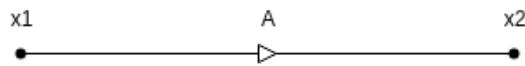


Figure 4.1: Diagramma di flusso base

Come nel metodo precedente abbiamo delle proprietà, nettamente meno numerose:

- **Regola dell'addizione:**  $y = \sum x_i \cdot A_j$

L'uscita  $y$  è data dalla somma di ogni input  $x_i$  elaborato attraverso la funzione  $A_j$  dell'arco attraversato.

- **Regola della trasmissione:**  $y_i = x \cdot A_j$

Uno specifico output  $y_i$  è dato da un input  $x$  trasmesso in un determinato arco con relativa funzione  $A_j$ . Ne consegue che uno stesso input può essere trasmesso in più direzioni.

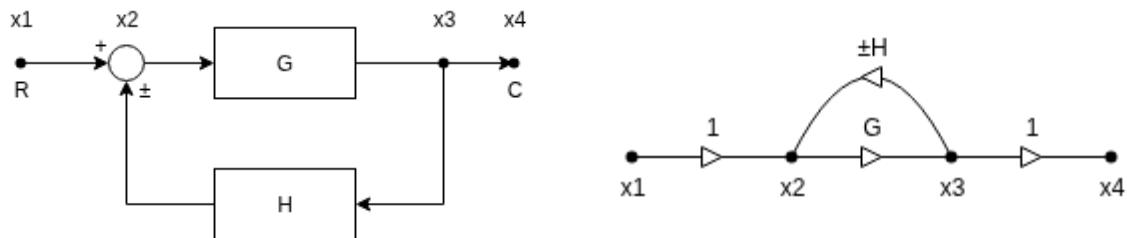
- **Regola della moltiplicazione:**  $y = (x \cdot A) \cdot (x_1 \cdot B) \cdot \dots$

È possibile raggruppare più input  $x, x_1, \dots$  in un singolo output  $y$  rappresentandoli come la moltiplicazione tra le funzioni attraverso le quali passano.

Prima di iniziare a lavorarci è necessario chiarire i concetti di **cammino**, **cammino ad anello**, e **guadagno**. Il primo rappresenta la strada presa nel flusso per arrivare da input a output, il secondo svolge la medesima funzione, ma termina dove ha avuto inizio, mentre il terzo è il valore del prodotto di tutti i pesi degli archi in un dato percorso. Più semplicemente è l'applicazione della terza proprietà.

Ok, ma come si fa a passare da uno schema a blocchi ad un diagramma di flusso? Bisogna compiere alcune operazioni preliminari:

1. **Determinazione dei nodi:** I nodi da trasferire nel flusso sono quelli di input/output, di somma/sottrazione e anche quelli già visibili nello schema a blocchi.
2. **Collegare i nodi con gli archi:** I nodi vanno uniti in base al percorso che corrono. In assenza di elaborazioni fra un elemento e un altro, il peso è posto uguale a 1, mentre se il cammino attraversa un blocco, il peso sarà equivalente alla funzione in esso contenuta. Attenzione ai segni nei nodi di somma e sottrazione.



Come si può vedere dalle immagini, nello schema di flusso i blocchi sono stati sostituiti dagli archi ed è stato aggiunto il segno ove necessario. Il resto dei dati, eccezion fatta per i nodi aggiunti, è rimasto esattamente lo stesso.

Il prossimo passo da compiere ora è la ricerca della **funzione di trasferimento** o trasmittanza; si tratta del rapporto fra:

- La sommatoria di ogni percorso, coi relativi discriminanti:  $\sum_i P_i \Delta_i$   
Dove in particolare  $P_i$  è il guadagno dell'i-esimo cammino in avanti.
- Il discriminante del sistema intero:  $\Delta = 1(-1)^{k+1} \sum_k \sum_j P_{jk}$   
Qui  $P_{jk}$  è il prodotto dei percorsi che non si toccano. Per ogni  $j$  che incrementa, bisognerà prendere unità, coppie, triple e così via.

Insomma la forma finale della trasmittanza è data dalla formula:

$$T = \frac{\sum_i P_i \Delta_i}{\Delta}$$

Per ottenere i componenti della formula è necessario compiere alcuni passaggi:

- **Ricerca di tutti i percorsi in avanti:** Parliamo infatti di ogni permutazione di cammino percorribile in avanti, i quali partono dall'input per terminare in output. Nel caso del grafo appena ottenuto abbiamo un singolo percorso, dato da:

$$P_1 = (x_1, x_2, x_3, x_4) = 1 \cdot G \cdot 1 = G$$

- **Controllo di presenza anelli:** Quindi vedere se c'è qualche istanza in cui il segnale può tornare da dove è iniziato. Gli anelli che non si toccano e che quindi non hanno nulla in comune possono essere accorpati. Qui abbiamo solo:

$$A_{1,1} = (x_2, x_3) = -GH$$

- **Calcolo del discriminante:** Un solo percorso, una sola sommatoria:

$$\Delta = 1 - (P_{1,1}) + 0 = 1 + GH$$

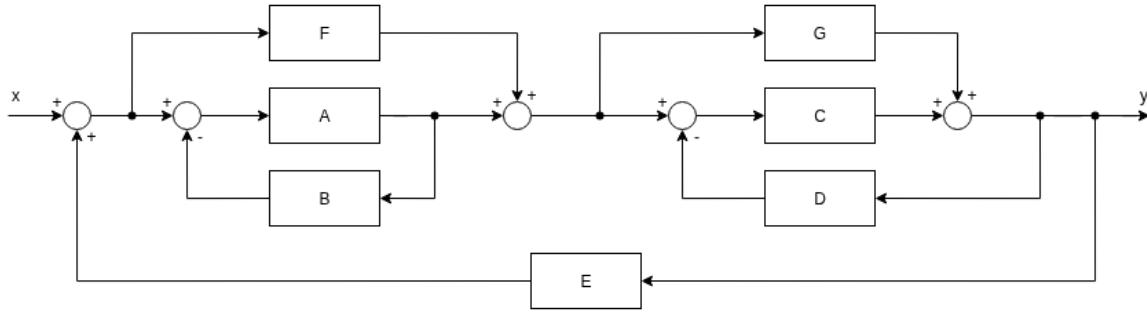
Il discriminante del percorso specifico è invece 1 perché gli anelli che toccano il percorso vanno annullati.

Con questi dati abbiamo confermato che la funzione di trasferimento  $T$  è data da:

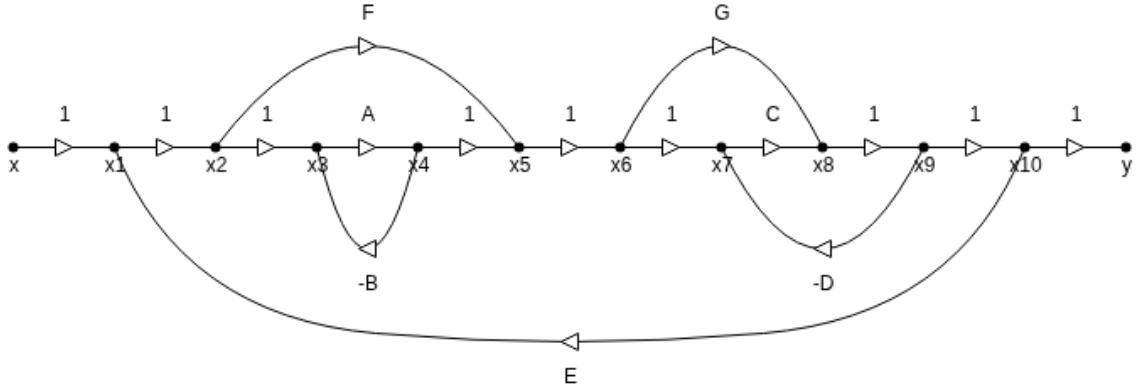
$$T = \frac{P_1 \cdot \Delta_1}{\Delta} = \frac{G}{1 + GH}$$

### 4.3 Esercizi svolti

**Esecizio 1:** Calcolare trasmittanza del seguente sistema a blocchi:



Prendiamo i nodi esistenti e ricaviamo quelli dati dai blocchi di somma. Otteniamo  $x, \dots, x_{10}, y$  nodi, e collegandoli con gli archi corretti otteniamo il seguente schema di flusso:



Adesso è necessario descrivere ogni permutazione di percorso in avanti, ottenendo:

$$\begin{aligned}
 P_1 &= (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}) = AC \\
 P_2 &= (x_1, x_2, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}) = FC \\
 P_3 &= (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_8, x_9, x_{10}) = AG \\
 P_4 &= (x_1, x_2, x_5, x_6, x_8, x_9, x_{10}) = FG
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Ora valutiamo la (palese) presenza di anelli, dunque:

$$\begin{aligned}
 A_{1,1} &= (x_3, x_4) = -AB \\
 A_{2,1} &= (x_7, x_8, x_9) = -CD \\
 A_{3,1} &= (x_1, x_2, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}) = FCE \\
 A_{4,1} &= (x_1, x_2, x_5, x_6, x_8, x_9, x_{10}) = FGE \\
 A_{5,1} &= (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}) = ACE \\
 A_{6,1} &= (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_8, x_9, x_{10}) = AGE
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Accorpiamo le coppie di anelli che non hanno nodi in comune:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_{10}$
$A_{1,1}$			✓	✓						
$A_{2,1}$						✓	✓	✓		
$A_{3,1}$	✓	✓			✓	✓	✓	✓	✓	✓
$A_{4,1}$	✓	✓			✓	✓		✓	✓	✓
$A_{5,1}$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
$A_{6,1}$	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓

Otteniamo quindi gli anelli di ordine 2:

$$\begin{aligned} A_{1,2} &= (A_{1,1} \cdot A_{2,1}) = ABCD \\ A_{2,2} &= (A_{1,1} \cdot A_{3,1}) = -ABC E \\ A_{3,2} &= (A_{1,1} \cdot A_{4,1}) = -ABFGE \end{aligned} \quad (4.3)$$

Non è più possibile continuare l'accorpamento in quanto le triple vanno sempre a toccarsi in qualche modo. Quindi possiamo procedere al calcolo del discriminante del sistema. Effettuiamo la somma fra tutti i guadagni di ogni anello, per poi applicare quanto ottenuto ai singoli percorsi:

$$\begin{aligned} \Delta &= 1 - [-AB - CD + FCE + FGE + ACE + AGE] + [ABCD - ABCEF - ABEG] \\ \Delta_1 &= 1 \\ \Delta_2 &= 1 + AB \\ \Delta_3 &= 1 \\ \Delta_4 &= 1 + AB \end{aligned} \quad (4.4)$$

E finalmente otteniamo la funzione di trasferimento, gesù cristo:

$$T = \frac{AC(1) + FC(1 + AB) + AG(1) + FG(1 + AB)}{1 + AB + CD - FCE - FGE - ACE - AGE + ABCD - ABCEF - ABEG}$$

# Chapter 5

## Diagrammi di Bode

### 5.1 Grafici logaritmici

Abbiamo notato come ogni segnale può essere rappresentato come una somma di sinusoidi, e che ai sistemi LTI bibostabili, quando dato in input sinusoidale, ritorneranno un output della stessa forma e frequenza, ma con ampiezza e fase diverse.

Quella di Bode è una rappresentazione grafica eseguita mediante **grafici logaritmici** che sfrutta proprio questa caratteristica, mostrando ampiezza e fase della funzione di trasferimento del sistema al variare della frequenza.

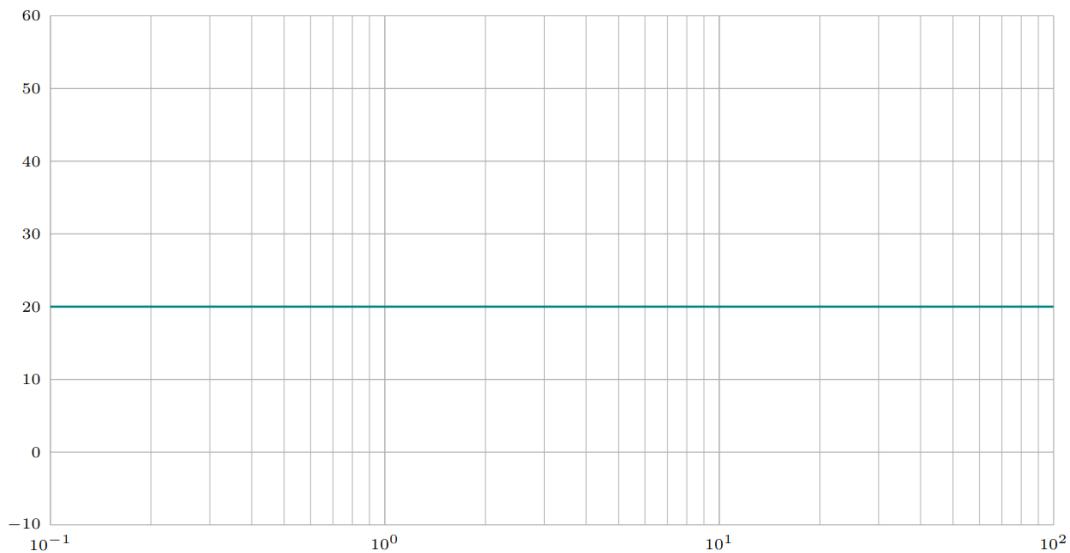


Figure 5.1: Grafico logaritmico

Più precisamente, per i **diagrammi di Bode** vengono utilizzati due grafici semi-logaritmici,

i quali presentano le pulsazioni  $\omega[\text{rad/s}]$  sull'asse delle  $x$ , mentre sulle  $y$  descrivono le ampiezze  $A[\text{dB} = 20\log_{10}(|A|)]$  o le fasi  $\phi[\text{deg}]$ , in due grafici diversi.

Essendo i grafici in una scala logaritmica sull'asse delle  $x$ , avremo intervalli dati dalle potenze di 10, chiamati **decadi**; i valori coperti sono di frequenza arbitrariamente piccola o grande, ma non include mai lo zero. Gli intervalli di decadi sono graficamente definiti dallo spazio di 10 quadrati del grafico.

Stiamo ragionando in termini di risposta in frequenza, quindi partiamo da un sistema che divide l'input in due parti per andare in due blocchi diversi. Poi somma questi due output per ritornare l'uscita. Supponiamo che:

- $u(t) = \sin(\frac{1}{2}t)$
- $v(t) = 2.83^\circ \cdot \sin(\frac{1}{2}t - 0.785^\circ)$
- $\omega = \frac{1}{2}$

Ora applicheremo la trasformata di Laplace passando al dominio dei complessi:

$$\frac{V(s)}{U(s)} = \frac{2s + 1}{s} \implies \frac{2j\omega + 1}{j\omega} = 2 - \frac{1}{\omega}j$$

Ottenuto il comportamento in frequenza, sappiamo che la parte reale è 2 e l'immaginaria è  $-\frac{1}{\omega}j$ , quindi prendiamo il piano cartesiano con la parte reale (x) e l'immaginaria (y), andando a scrivere i puntini al variare della frequenza  $\omega$ . A partire da questo piano possiamo calcolare ampiezza  $l$  e fase  $\theta$  della funzione, dove:

- $l = \sqrt{Re^2 + Im^2} = |\sigma + j\omega| = |\sigma|$
- $\theta = Arg(\sigma + j\omega) = atan2(\sigma, j\omega)$

La funzione *atan2* e quindi la funzione **argomento** *Arg* è definita generalmente come:

$$Arg(\sigma + j\omega) = \begin{cases} \sigma > 0 \implies arctan(\frac{\omega}{\sigma}) \\ \sigma = 0, \omega > 0 \implies \frac{\pi}{2} \\ \sigma = 0, \omega < 0 \implies -\frac{\pi}{2} \\ \sigma < 0, \omega \geq 0 \implies arctan(\frac{\omega}{\sigma}) + \pi \\ \sigma < 0, \omega < 0 \implies arctan(\frac{\omega}{\sigma}) - \pi \end{cases}$$

Tuttavia, usando la funzione segno, otteniamo una forma di *Arg* più compatta, definita come:

$$sgn(\alpha) = \begin{cases} \alpha > 0 \implies 1 \\ 0 \end{cases} \implies Arg(\sigma + j\omega) = \begin{cases} \sigma > 0 \implies arctan(\frac{\omega}{\sigma}) \\ \sigma = 0, \omega \neq 0 \implies sgn(\omega \cdot \frac{\pi}{2}) \\ \sigma < 0 \implies arctan(\frac{\omega}{\sigma}) + sgn(\omega) \cdot \pi \end{cases}$$

Dove nell'ultimo caso specifichiamo che  $\operatorname{sgn}(\omega) = 1$  se  $\omega = 0$ . Ci è poi particolarmente utile andare a verificare il comportamento della funzione ai suoi estremi, quindi esaminiamo cosa succede con valori minimi e massimi.

Nel caso preso in esame, variando la frequenza e quindi portando il punto all'estremità in basso e in alto, avremo gradi minimi di  $-90^\circ$  e  $0^\circ$ . Questi sono i confini per i gradi nel diagramma di Bode, mentre per quanto riguarda le ampiezze, minore è la frequenza, più grande sarà il vettore. Questo metodo, seppur funzionale, tuttavia, risulta essere estremamente lento, perché bisogna verificare tutte le frequenze; ripetere questo processo ogni volta è atroce.

La soluzione più agevole vede la trasformazione della risposta nella **forma di Bode**, che discuteremo nella prossima sezione; ma prima è necessario chiarire alcuni presupposti sui numeri complessi per lavorarci:

- **Moltiplicazione:**  $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ ,  $\operatorname{Arg}(a \cdot b) = \operatorname{Arg}(a) + \operatorname{Arg}(b)$
- **Divisione:**  $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ ,  $\operatorname{Arg}\left(\frac{a}{b}\right) = \operatorname{Arg}(a) - \operatorname{Arg}(b)$
- **Esponenziali:**  $|a^\mu| = |a|^\mu$ ,  $\operatorname{Arg}(a^\mu) = \mu \cdot \operatorname{Arg}(a)$
- **Logaritmi:** Leggermente più complicato. Bisogna ricordare

$$\log s = x \iff s = e^x; s = \rho e^{j\theta}, x = \sigma + j\omega$$

Ne deduciamo quindi che:

$$s = e^x \implies \rho e^{j\theta} = e^{\sigma + j\omega} \implies e^{\log \rho} e^{j\theta} = e^\sigma e^{j\omega}$$

Arriviamo infine a  $\log \rho = \sigma$ ,  $\theta = \omega$ . Dunque:

$$\log s = x \implies \log \rho + j\omega \implies \log |s| + j \cdot \operatorname{Arg}(s)$$

## 5.2 Forma di Bode

Chiariti i presupposti delle operazioni nel campo dei complessi, introduciamo la **Forma di Bode**. Si tratta di una scrittura che ha lo scopo di arrivare agli omonimi diagrammi senza dover sostituire il valore della frequenza per ogni singolo punto.

Partiamo dalla funzione di trasferimento in laplace  $H(s)$ , in una forma dove sono espansi gli zeri e i poli. Ridefiniamo la costante  $K$  come  $K_b$ , dove porteremo ogni singola costante dei fattori, facendoci ottenere:

$$H(s) = K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} = K_b \frac{\prod_i (1 + s\tau'_i)^{\mu'_i} \prod_k \left(1 + 2\zeta'_k \cdot \frac{s}{\omega'_{n,k}} + \frac{s^2}{(\omega'_{n,k})^2}\right)^{\mu'_k}}{(s^\nu) \prod_i (1 + s\tau_i)^{\mu_i} \prod_k \left(1 + 2\zeta_k \cdot \frac{s}{\omega_{n,k}} + \frac{s^2}{(\omega_{n,k})^2}\right)^{\mu_k}}$$

Questa forma si può sempre ottenere con i sistemi LTI e presenta le seguenti componenti:

- $K_b$ : Detto **guadagno di Bode**, è il termine costante che racchiuderà tutte le altre costanti prese dai fattori.
- $s^\nu$ : Raggruppa tutte le radici nulle, per esempio  $\frac{s^5}{s^4} = s^1$
- $(1 + s\tau_i)^{\mu_i}$ : Raggruppa una radice reale, come  $(s + 1)$
- $\left(1 + 2\zeta_k \frac{s}{\omega_{n,k}} + \frac{s^2}{(\omega_{n,k})^2}\right)^{\mu_k}$ : Raggruppa una radice complessa coniugata, ovvero quel trinomio che non si può scomporre.

Vediamo come è possibile arrivare alla forma di Bode partendo dalla funzione di trasferimento in frequenza  $H(s)$ . Supponiamo di avere la seguente:

$$H(s) = \frac{s^3 - 2s^2 - 8s}{s^4 - 2s^3 + 2s^2}$$

Come primo passaggio è necessario **raccogliere** ed eventualmente semplificare le  $s$  presenti nella funzione. Qui otteniamo:

$$H(s) = \frac{s^3 - 2s^2 - 8s}{s^4 - 2s^3 + 2s^2} = \frac{s(s^2 - 2s - 8)}{s^2(s^2 - 2s + 2)} = \frac{(s - 4)(s + 2)}{s(s - (1 - j))(s - (1 + j))}$$

Abbiamo ottenuto al numeratore due zeri reali, mentre al denominatore abbiamo un polo nullo e una coppia di poli complessi e coniugati. Possiamo procedere con la prossima manipolazione che è il **raccoglimento delle costanti**.

In questo caso, dobbiamo lavorare esclusivamente sugli zeri, poiché sono gli unici fattori che presentano una costante diversa da 1:

$$\frac{(s - 4)(s + 2)}{s(s - (1 - j))(s - (1 + j))} = \frac{-4\left(1 + \frac{s}{-4}\right) \cdot 2\left(1 + \frac{s}{2}\right)}{s(s - (1 - j))(s - (1 + j))} = -8 \frac{\left(1 + \frac{s}{-4}\right)\left(1 + \frac{s}{2}\right)}{s(s - (1 - j))(s - (1 + j))}$$

Per ottenere una forma più compatta possiamo dire inoltre che  $\tau'_1 = -\frac{1}{4}$  e  $\tau'_2 = \frac{1}{2}$ :

$$H(s) = -8 \frac{(1 + s\tau'_1)(1 + s\tau'_2)}{s(s - (1 - j))(s - (1 + j))}$$

Adesso bisogna manipolare la coppia di poli complessi e coniugati. Sì, l'abbiamo scomposto prima per sicurezza, ma è più semplice raccogliere la costante quando sviluppato. Otteniamo:

$$s(s - (1 - j))(s - (1 + j)) = s^2 - 2s + 2 = 2\left(1 - s + \frac{s^2}{2}\right)$$

Vedendo la forma capiamo dall'ultimo termine che  $\omega_n^2 = 2 \implies \omega_n = \sqrt{2}$ . È evidente poi che  $\frac{2\zeta}{\omega_n} = -1 \implies \zeta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$  dal secondo termine. Dunque, riscrivendo quanto ottenuto nella forma richiesta:

$$\left(1 + 2\zeta_k \frac{s}{\omega_{n,k}} + \frac{s^2}{(\omega_{n,k})^2}\right)^{\mu_k} \implies 2 \left(1 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{s^2}{(\sqrt{2})^2}\right)$$

Abbiamo finalmente ottenuto la forma di Bode della funzione di trasferimento richiesta:

$$H(s) = -16 \frac{(1 + \frac{s}{-4})(1 + \frac{s}{2})}{1 \left(1 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{s^2}{(\sqrt{2})^2}\right)} = K_b \frac{(1 + s\tau'_1)(1 + s\tau'_2)}{s^\nu \left(1 + 2\zeta_1 \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right)}$$

### 5.3 Grafici della risposta in frequenza

Come già menzionato, i diagrammi di Bode sono due, uno per l'ampiezza e l'altro per la fase. Questi possono rappresentare ogni singolo fattore nella relativa forma di Bode che si suppone ottenuta dalla funzione di trasferimento tramite passaggi algebrici. Ciò significa che esistono diagrammi per rappresentare:

- **Guadagno di Bode**  $K_b$ .
- **Zeri/Poli nulli** come  $s^\mu$ , con molteplicità  $\mu$ .
- **Zeri/Poli reali** come  $(1 + \tau s)^\mu$ , con  $\tau$  costante di tempo.
- **Zeri/Poli complessi e coniugati** come  $\left(1 + 2\zeta \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right)^\mu$ , dove  $\zeta$  è detto **coefficiente di smorzamento** e  $\omega$  la **pulsazione naturale**.

Ognuno di loro ha una definizione particolare riguardo al disegno. Studiamoli uno per volta.

- **Termine costante:** Il guadagno di Bode è un numero reale tale per cui la parte immaginaria è nulla e si denota come:

$$|H(j\omega)| = |K_b|$$

Ciò significa che il modulo è in decibel e la funzione giace sull'asse dei reali.

- **Ampiezza:** Retta orizzontale data da:

$$A(\omega) = |H(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |K_b|$$

- **Fase:** Retta orizzontale posizionata in base a segno positivo o negativo:

$$\phi(\omega) = 0^\circ \vee \phi(\omega) = -180^\circ$$

- **Zeri/Poli nulli:** Fissato  $\omega \in \mathbb{R}$ , il polo/zero nullo è, a seconda della potenza  $\nu \in \mathbb{Z}$ , o un reale puro, positivo o negativo, o un immaginario puro, positivo o negativo. Viene annotato come:

$$H(j\omega) = (j\omega)^\nu$$

- **Aampiezza:** Retta che cresce o decresce di  $20dB$  ogni decade in base al valore della potenza  $\nu$  a partire da dove il valore si annulla:

$$A(\omega) = |H(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}(\omega^\nu) = 20\nu\log_{10}(\omega)$$

- **Fase:** Retta orizzontale data da:

$$\phi(\omega) = \text{Arg}(j\omega)^\nu = \nu \text{Arg}(j\omega) = \nu 90^\circ$$

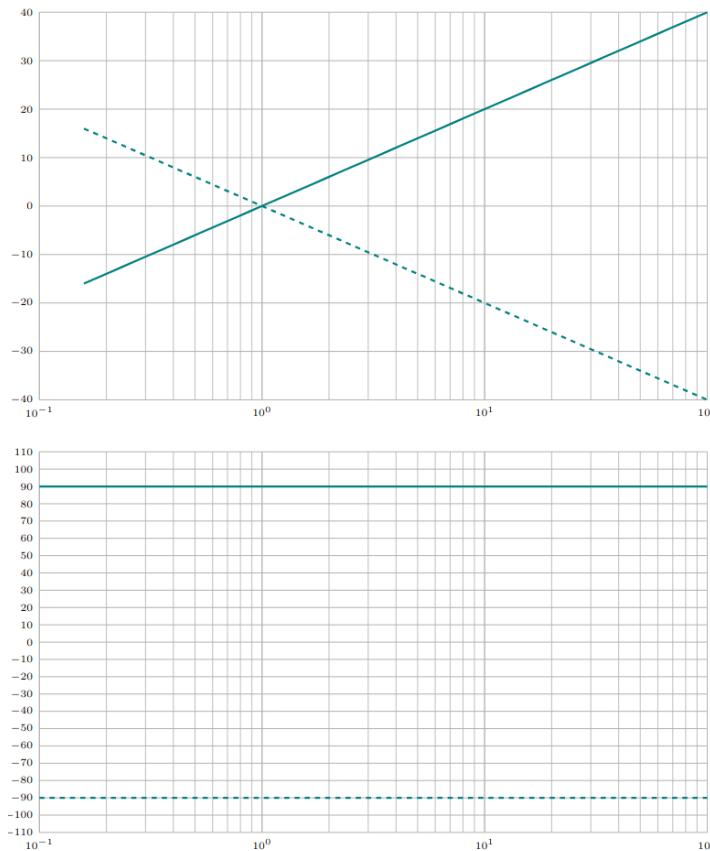


Figure 5.2: Grafico di zeri/poli nulli

- **Zeri/Poli reali:** Per agevolare la rappresentazione del termine binomio è consigliato approfondire il relativo comportamento asintotico, per poi rappresentarlo realmente. Si annota come:

$$H(j\omega) = (1 + j\omega\tau)^\mu \equiv H(s) = (1 + s\tau)^\mu$$

Definiamo ora per studiare l'asintoticità, la **pulsazione di spezzata**:

$$\omega_0 = \frac{1}{|\tau|}$$

- **Aampiezza:** Se zero reale hai  $\mu > 0$ , la funzione cresce di  $20dB/\text{decade}$ , in alternativa,  $\mu < 0$  e la funzione decresce allo stesso valore. Descritta generalmente da:

$$A(\omega) = 20\mu \log_{10} \sqrt{1 + (\omega\tau)^2}$$

E per la quale possiamo avere i seguenti valori in base al comportamento asintotico, con  $\mu = 1$ :

$$\begin{cases} \omega \ll \omega_0 & \Rightarrow A(\omega) = 20\mu \log_{10}(1) = 0 \\ \omega = \omega_0 & \Rightarrow A(\omega) = 20\mu \log_{10}(\sqrt{2}) = \pm 3dB \\ \omega \gg \omega_0 & \Rightarrow A(\omega) = 20\mu \log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = \pm 20dB/\text{decade} \end{cases}$$

- **Fase:** Descritta generalmente da:

$$\phi(\omega) = \text{atan2}\left(-\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

L'asintoticità genera i seguenti valori:

$$\begin{cases} \omega \ll \omega_0 & \Rightarrow \phi(\omega) = \text{atan2}(0) = 0 \\ \omega = \omega_0 & \Rightarrow \phi(\omega) = \text{atan2}(-1) = -45^\circ \\ \omega \gg \omega_0 & \Rightarrow \phi(\omega) = \text{atan2}(-\infty) = -90^\circ \end{cases}$$

- **Zeri/Poli complessi e coniugati:** Anche per quanto riguarda il termine trinomio è consigliato studiare il suo comportamento asintotico. Questi si indicano come:

$$H(s) = \left(1 + 2\zeta \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right)^\mu$$

Dove  $\omega_n$  è la pulsazione naturale, mentre  $\zeta$  è il **coefficiente di smorzamento**.

- **Ampiezza:** Con uno zero, la funzione cresce di  $40dB/\text{decade}$ , in alternativa decresce dello stesso valore. Data la formula generale:

$$A(\omega) = 20\mu \log_{10}(2\zeta)$$

L'asintoticità fa risultare:

$$\begin{cases} \omega \ll \omega_0 & \Rightarrow A(\omega) = -20\log_{10}(1) = 0 \\ \omega \gg \omega_0 & \Rightarrow A(\omega) = -20\log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = -40\log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \end{cases}$$

in particolare, nel caso di  $\omega = \omega_0$  abbiamo:

$$\begin{cases} \zeta = 0.5 & \Rightarrow A(\omega) = 0 \\ \zeta > 0.5 & \Rightarrow \text{Nessuna risonanza, grafico passa per } \omega_0 \\ \zeta < 0.5 & \Rightarrow \text{Picco di risonanza: } \omega_r = 20\mu \log_{10}(2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}) \\ \zeta = 0 & \Rightarrow \text{Discontinuità} \end{cases}$$

- **Fase:** Presenta i seguenti casi:

$$\begin{cases} \omega \ll \omega_0 & \Rightarrow \phi(\omega) = \text{atan}2(0) = 0^\circ \\ \omega = \omega_0 & \Rightarrow \phi(\omega) = -90^\circ \\ \omega \gg \omega_0 & \Rightarrow \phi(\omega) = \text{atan}2\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_0}\right) = -180^\circ \end{cases}$$

## 5.4 Diagramma di Bode totale

Il diagramma di Bode totale è la rappresentazione grafica, nella sua interezza, di tutti gli elementi nell'omonima forma, condensati in un singolo grafico. Useremo un esempio pratico; supponiamo la funzione di trasferimento:

$$H(s) = \frac{s^2(s+1)(s^2+3s+16)}{2s-1}$$

Seguiamo dunque i passaggi discussi nelle sezioni precedenti:

1. **Passaggio alla forma di Bode:** Passaggi algebrici per raggruppare tutti i termini costanti sotto  $k_B$

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{s^2(s+1)(s^2+3s+16)}{2s-1} \\ &= \frac{s^2(1+s) \cdot 16(1 + \frac{3}{16}s + \frac{s^2}{16})^2}{-1(1-2s)} \\ &= -16 \frac{s^2(1+s)(1 + \frac{3}{16}s + \frac{s^2}{16})}{1-2s} \end{aligned} \tag{5.1}$$

Da cui abbiamo ricavato:

- **Guadagno:**  $k_B = -16$
- **Zero nullo:**  $s^2$
- **Zero reale:**  $(1 + s)$
- **Polo reale:**  $(1 - 2s)$
- **Zero complesso coniugato:**  $(1 + \frac{3}{16}s + \frac{s^2}{16})$

## 2. Diagramma del termine costante

$$A = 20 \log_{10} |k_B| = 20 \log_{10}(16) = 24dB; \quad \phi = -180^\circ$$

Dunque l'ampiezza è rappresentata da una retta orizzontale a 24dB, mentre la fase è di  $-180^\circ$  perché il guadagno è negativo.

## 3. Diagramma dello zero nullo

Ricordare che qua  $\omega$  non influisce in quanto assente e notare la molteplicità  $\mu = 2$ . In tal caso:

$$A = 20\mu \log_{10}(\omega) = 40dB; \quad \phi = \mu \cdot 90^\circ = 180^\circ$$

Dunque per l'ampiezza avremo una retta crescente di 40dB a decade che passa per 0dB a  $\omega = 1$ , mentre la fase è una retta orizzontale posta a  $180^\circ$ .

## 4. Diagramma dello zero reale

Dato  $(s + 1)$  notiamo molteplicità  $\mu = 1$  e il termine moltiplicato per la  $s$ :  $\tau = 1$ , vedendo la frequenza di taglio:  $\omega = \frac{1}{|\tau|} = 1$ .

Prima del taglio, ovvero a  $\omega \ll \omega_0$ , l'ampiezza e la fase sono nulle, mentre dopo sono date da:

$$\omega \gg \omega_0 \implies A = 20 \log_{10}(\omega|\tau|) = 20dB; \quad \phi = \mu \cdot \text{seg}(\tau)90^\circ = 90^\circ$$

Dunque il grafico dell'ampiezza sarà una retta orizzontale ad ampiezza nulla fino al taglio, per poi crescere di 20dB per decade, mentre la fase è rappresentata da una funzione segno, dove la parte a sinistra è posta a zero gradi e quella a destra a  $90^\circ$ . Il collegamento fra queste due ultime rette avviene in un intervallo composto da due decadi.

## 5. Diagramma del polo reale

Stesso procedimento dello zero appena visto, abbiamo  $\mu = -1$  e  $\tau = -2$  con frequenza di taglio  $\omega = \frac{1}{|\tau|} = \frac{1}{2}$ . Risulta quindi:

$$A = 20\mu \log_{10}(\omega|\tau|) = -20dB; \quad \phi = \mu \cdot \text{sgn}(|\tau|)90^\circ = -90^\circ$$

Ampiezza e fase nulle prima del taglio  $\omega$ , mentre dopo vediamo l'ampiezza decrescere di  $-20dB$  e la fase posizionata a  $90^\circ$ .

### 6. Diagramma dello zero complesso e coniugato

Dato  $(1 + \frac{3}{16}s + \frac{s^2}{16})$  abbiamo  $\mu = 1$  e  $\omega_n = \sqrt{16} = 4$ , preso dal denominatore del coefficiente con  $s^2$ , con coefficiente di smorzamento  $\frac{2\zeta}{\omega_n} = \frac{3}{16} \implies \zeta = \frac{3}{16} \cdot \frac{\omega_n}{2} = \frac{3}{8}$

Dopo il taglio, ampiezza e fase sono dati da:

$$\omega \gg \omega_0 \implies A = 20\mu \log_{10} \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right) = 40dB; \quad \phi = 180\mu \cdot \text{sgn}(\zeta) = 180^\circ$$

Per disegnare l'ampiezza si usa come riferimento la posizione  $10^0$  per convenzione e ci spostiamo al quarto quadratino dato  $\omega_n = 4$ . Prima del taglio, ampiezza e fase sono nulle, mentre dopo l'ampiezza cresce di  $40dB$  a decade, mentre la fase sarà posta a  $180^\circ$ .

Ottenuti i grafici, bisogna mostrare il comportamento totale del sistema in forma di Bode, sommando tutti i grafici. Bisognerà scrivere le frequenze  $\omega_n$  trovate finora per ogni elemento, dunque abbiamo:

- Guadagno  $k_B$ , ininfluente in questo caso.
- Zero nullo, con  $\omega_n = 10^0$
- Zero reale, con  $\omega_n = 10^0$
- Zero complesso e coniugato, con  $\omega_n = 4$
- Polo reale, con  $\omega_n = 0.5$

Questi dati vanno confinati in una tabella i cui estremi sono dati dalle decadi più vicine al loro valore; in questo caso avremo un intervallo completo diviso fra i seguenti membri:

$$[10^{-1}, 0.5, 10^0, 4, 10^1]$$

Calcoliamo ora l'andamento della funzione per ogni blocco di intervallo, coi valori espressi in  $dB/\text{decade}$ : Trovato l'andamento, facciamo la stessa cosa per i grafici delle ampiezze, coi valori espressi in  $dB$ : Ora si considera la tabella delle fasi, con i valori espressi in gradi:

## 5.5 Esercizi svolti

Decade	$10^{-1}$	0.5	$10^0$	4	$10^1$
Guadagno $K_b$	0	0	0	0	0
Zero reale	0	0	0	20	20
Zero nullo	40	40	40	40	40
Zero complesso e coniugato	0	0	0	0	40
Polo reale	0	0	-20	-20	-20
Andamento in intervallo	40	40	20	40	80

Table 5.1: Tabella dell'andamento

Decade	$10^{-1}$	0.5	$10^0$	4	$10^1$
Guadagno $K_b$	24	24	24	24	24
Zero reale	0	0	0	12	20
Zero nullo	-40	-12	0	24	40
Zero complesso e coniugato	0	0	0	0	16
Polo reale	0	0	-6	-18	-26
Aampiezza	-16	12	18	42	74

Table 5.2: Tabella delle ampiezze

Decade	$10^{-1}$	0.5	$10^0$	4	$10^1$
Guadagno $K_b$	-180	-180	-180	-180	-180
Zero reale	0	0	0	90	90
Zero nullo	180	180	180	180	180
Zero complesso e coniugato	0	0	0	0	180
Polo reale	0	0	90	90	90
Fase	0	0	180	180	360

Table 5.3: Tabella delle fasi

# Chapter 6

## Serie e trasformata di Fourier

### 6.1 Serie di Fourier

Come si sarà capito, i sistemi LTI trasformano fasori o segnali sinusoidali  $u(t)$  in un output  $v(t)$  sinusoidale e alla stessa frequenza, ma con ampiezza e fase diverse. Questa dinamica rende lo studio delle risposte di un sistema notevolmente semplificata, poiché basterebbe determinare come vengono modificate ampiezza e fase; questo è un concetto fondamentale della teoria dei sistemi, perché è possibile **rappresentare ogni segnale periodico sufficientemente regolare come somma di sinusoidi**.

Quindi, presa l'entrata in forma periodica, serve studiare i cambiamenti su ampiezza e fase per poter descrivere appropriatamente il comportamento di un sistema. Utilizzeremo la **serie di Fourier** con segnali periodici e più in avanti la **trasformata di Fourier** con segnali non periodici.

Definiamo anzitutto **segnale periodico** una funzione  $v(t) = v(t + T_0)$  di valori reali o complessi, con  $\forall t \in \mathbb{R}$ , la quale ha un periodo  $T_0$ , una frequenza  $f_0$  ed una pulsazione  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi f_0$ .

Le funzioni di questo tipo sono utilizzate come base di espansione per la rappresentazione dei segnali e devono soddisfare opportune condizioni di regolarità; in particolare, dato un segnale periodico  $v(t)$  diciamo che è **sommabile** o **al quadrato sommabile** rispettivamente se:

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} |v(t)| dt < \infty; \int_{t_0}^{t_0+T_0} |v(t)|^2 dt < \infty$$

Tali condizioni garantiscono l'esistenza dei coefficienti della serie di Fourier e la convergenza della rappresentazione del segnale.

**Definizione 4. Rappresentazione dei segnali in serie di Fourier**

Sia  $v(t)$  una funzione a valori reali o complessi, con  $t \in \mathbb{R}$ , periodica di periodo  $T_0$  e quindi frequenza  $f_0$ . Se:

- $v(t)$  è generalmente continua.
- $v(t)$  è generalmente derivabile e la derivata prima è generalmente continua e limitata su ogni intervallo  $[t_0, t_0 + T_0]$ .

Allora la funzione è sia sommabile che al quadrato sommabile su un periodo ed è sviluppabile in serie di Fourier. In tal caso diciamo che per ogni punto  $t$  in cui la funzione è continua si ha la seguente **equazione di sintesi**:

$$v(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk2\pi f_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

Con il coefficiente  $a_k$  dato dall'**equazione di analisi**:

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} v(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Inoltre, per ogni punto in cui non è continua, vale:

$$\frac{v(t^-) + v(t)^+}{2} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

Per approfondire, spieghiamo come è possibile arrivare all'equazione di analisi a partire dall'equazione di sintesi. Dato un segnale periodico  $x(t)$  che ammette la rappresentazione in serie di Fourier, per determinare i singoli coefficienti  $a_k$  si sfrutta l'ortogonalità delle esponenziali complesse su un periodo  $T_0$ . Moltiplicando entrambi i membri dell'equazione per  $e^{-jN\omega_0 t}$  e integrando sul periodo, otteniamo:

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) \cdot e^{-jN\omega_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{jk\omega_0 t} dt$$

Per l'ortogonalità delle esponenziali complesse, l'integrale è nullo per  $k \neq N$  e vale  $T_0$  per  $k = N$ , da cui segue l'equazione di analisi:

$$a_N = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) \cdot e^{-jN\omega_0 t} dt$$

Possiamo dunque rappresentare un segnale periodico come una somma infinita di sinusoidi con frequenze multiple della frequenza fondamentale, indicizzate dall'indice armonico  $k$ .

Nella rappresentazione complessa compaiono anche frequenze negative, che non hanno un significato fisico autonomo, ma sono necessarie per garantire che il segnale risultante sia reale, grazie alla simmetria coniugata dei coefficienti. Inoltre, poiché la serie di Fourier utilizza esponenziali complessi, è possibile applicare la formula di Eulero:

$$e^{jk\omega_0 t} = \cos(k\omega_0 t) + j \sin(k\omega_0 t)$$

Questo con lo scopo di ottenere una rappresentazione reale. Esistono più scritture per la serie di Fourier, ma useremo esclusivamente quella sinusoidale per la formula di Eulero, notevolmente più intuitiva rispetto alle altre:

$$v(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|a_k| \cdot \cos(2\pi f_0 kt + \arg(a_k))$$

Nel caso di segnali periodici è utile considerare le proprietà di parità delle funzioni, poiché impongono vincoli sulla forma della serie di Fourier e ne semplificano la rappresentazione:

- **Segnali dispari**  $v(-t) = -v(t)$ : Per segnali reali e dispari, il coefficiente medio  $a_0$  è nullo e la serie di Fourier contiene esclusivamente termini di tipo seno, assumendo la forma:

$$v(t) = 0 + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin(\omega_0 kt)$$

Con coefficienti reali  $B_k$ .

Nella rappresentazione complessa, ciò equivale a coefficienti  $B_k$  puramente immaginari e antisimmetrici, ovvero  $B_{-k} = -B_k$ . Come esempio, consideriamo il segnale periodico definito da:

$$v(t) = \begin{cases} -1, & t \in \left(-\frac{T_0}{2}, 0\right) \\ 1, & t \in \left(0, \frac{T_0}{2}\right) \end{cases}$$

I coefficienti della serie di Fourier si ottengono tramite l'equazione di analisi e risultano:

$$B_k = \frac{1}{j\pi k} (1 - (-1)^k)$$

I quali sono non nulli solo per  $k$  dispari.

- **Segnali pari**  $v(-t) = v(t)$ : Per segnali reali e pari, i coefficienti  $A_k$  sono reali e simmetrici, quindi  $A_{-k} = A_k$  e la serie di Fourier contiene esclusivamente termini di tipo coseno, assumendo la forma:

$$v(t) = v_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(\omega_0 kt)$$

Come esempio, consideriamo un segnale reale e pari con periodo  $T_0$ . I coefficienti della serie di Fourier sono:

$$A_k = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = 0 \\ \frac{\sin(\frac{\pi k}{2})}{\pi k}, & k \neq 0 \end{cases}$$

Nella pratica non è possibile sommare un numero infinito di termini, quindi si utilizza una **serie troncata**, considerando solo un numero finito  $2N + 1$  di componenti:

$$v_N(t) = \sum_{k=-N}^N a_k e^{j\omega_0 kt}$$

Con  $a_k \in \mathbb{C}$ ,  $\omega_0, t \in \mathbb{R}$ . La troncatura, tuttavia, introduce un errore di approssimazione, che può essere quantificato tramite l'**errore quadrattico medio**:

$$MSE(v(t), v_N(t)) = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} |v(t) - v_N(t)|^2 dt$$

Il quale misura l'energia dell'errore tra il segnale originale e l'approssimazione. Inoltre, quando il segnale presenta discontinuità, la serie troncata mostra oscillazioni locali vicino ai punti di salto. Questo comportamento è noto come **fenomeno di Gibbs**.

## 6.2 Trasformata di Fourier

La **Trasformata di Fourier** consente di effettuare l'analisi in frequenza dei segnali non periodici, generalizzando l'omonima serie per ogni tipo di segnale con la seguente idea di fondo:

1. Preso un segnale non periodico  $v(t)$  compreso in un intervallo  $[-T_1, T_1]$ , possiamo considerare quest'ultimo come l'intero periodo e dire che la funzione  $\tilde{v}(t)$  è in esso periodica.
2. Applichiamo la serie di Fourier al neo-periodico segnale  $\tilde{v}(t)$ :

$$\tilde{v}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}, \quad a_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \tilde{v}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

3. Leghiamo i coefficienti alla frequenza continua e otteniamo:

$$T_0 a_k = V(k\omega_0), \quad \text{dove} \quad V(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{-j\omega t} dt$$

$V(\omega)$  è l'inviluppo di  $T_0 a_k$  e corrisponde alla trasformata di Fourier.

Facendo poi tendere il periodo  $T_0 \rightarrow \infty$ , il passo tra le frequenze  $\omega_0 \rightarrow 0$  e la somma discreta diventa un integrale continuo:

$$v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

che è l'**Antitrasformata di Fourier**. In questo modo,  $V(\omega)$  assume il ruolo di equazione di analisi e  $v(t)$  quello di equazione di sintesi. Formalmente le definiamo come:

**Definizione 5. Trasformata di Fourier**

Sia  $v(t)$ , con  $t \in \mathbb{R}$  una funzione a valori reali o complessi. La relativa TdF è data da:

$$\mathcal{F}[v(t)](f) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{-j2\pi ft} dt = V(f)$$

$V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , funzione della variabile reale  $f$ . Corrisponde all'equazione di analisi.

**Definizione 6. Antitrasformata di Fourier**

Data una funzione  $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , definiamo la relativa Anti-TdF:

$$\mathcal{F}^{-1}[V(f)](t) = \int_{-\infty}^{\infty} V(f) e^{j2\pi ft} df = v(t)$$

$v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , funzione della variabile reale  $t$ . Corrisponde all'equazione di sintesi.

Possiamo quindi mettere in relazione i segnali non periodici con quelli periodici, mostrando come la serie di Fourier diventi l'omonima trasformata nel limite  $T_0 \rightarrow \infty$ . Infatti, se il segnale  $\tilde{v}(t)$  è periodico, la sua TdF non è continua, bensì consiste in un **treno di impulsi**:

$$\tilde{V}(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

Dove  $a_k$  sono i coefficienti di Fourier e l'elemento fra le tonde il treno di impulsi. In tal caso, l'antitrasformata si ricava come:

$$\tilde{v}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{V}(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \omega_0 k) e^{j\omega t} d\omega$$

Riassumendo, abbiamo i seguenti casi di studio possibili:

- **Segnale non periodico  $v(t)$ :** Il segnale ammette una Trasformata di Fourier continua  $V(\omega)$ , che ne descrive il contenuto in frequenza:

$$V(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{-j\omega t} dt$$

La rappresentazione nel dominio del tempo si ottiene tramite l'antitrasformata:

$$v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

- **Segnale periodico**  $\tilde{v}(t)$  di periodo  $T_0$ : Il segnale è descritto tramite la serie di Fourier:

$$\tilde{v}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

La sua Trasformata di Fourier non è continua, ma consiste in un **treno di impulsi**:

$$\tilde{V}(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k, \quad \delta(\omega - k\omega_0)$$

- **Relazione tra segnali periodici e non periodici**: Se  $v(t)$  rappresenta un singolo periodo di un segnale periodico  $\tilde{v}(t)$ , allora i coefficienti della serie di Fourier sono proporzionali ai campioni della TdF di  $v(t)$ :

$$a_k = \frac{1}{T_0} V(k\omega_0)$$

Al crescere del periodo  $T_0$ , lo spettro discreto si infittisce e tende allo spettro continuo del segnale non periodico. Quindi si torna a tempo continuo facendo tendere  $T_0 \rightarrow \infty$ .

La trasformata di Fourier è tuttavia soggetta a delle condizioni di esistenza. Sia  $v(t)$ , con  $t \in \mathbb{R}$  un segnale a valori reali o complessi; se almeno una delle seguenti condizioni è vera, allora la funzione accetta la trasformata:

1.  $v(t)$  è sommabile e a variabile limitata su ogni intervallo finito di  $\mathbb{R}$ . Quindi è esprimibile come differenza di funzioni limitate non decrescenti.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |v(t)| dt < \infty$$

2.  $v(t)$  è un segnale di energia, ovvero che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |v(t)|^2 dt < \infty$$

3.  $v(t)$  è un segnale di potenza, con

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |v(t)|^2 dt < \infty$$

In questo caso bisognerà finestrare il segnale (moltiplicare il segnale per una finestra rettangolare), considerandolo in un intervallo (la finestra) ben preciso.

### 6.3 Trasformate notevoli e proprietà della TdF

Segue la lista delle trasformate notevoli da usare nello svolgimento degli esercizi:

- **Impulso:**

$$\mathcal{F}[A\delta_0(t)](f) = A$$

- **Esponenziale complesso causale:** Supponendo che  $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$  e siccome  $\delta_{-1} = 0$  per  $t < 0$ , abbiamo:

$$\mathcal{F}[Ae^{j\Phi}e^{\lambda t}\delta_{-1}(t)](f) = \frac{Ae^{j\Phi}}{j2\pi f - \lambda}$$

- **Finestra rettangolare di altezza A e supporto T:**

$$\mathcal{F}\left[A\Pi\left(\frac{t}{T}\right)\right](f) = ATsinc(fT)$$

Dove  $sinc()$  è una funzione oscillante non periodica che all'aumentare/diminuire delle frequenze tende a convergere verso l'asse reale delle  $x$ . per supporto invece si intende la "larghezza" del segnale.

- **Funzione costante:** Se  $v(t) = A$ , la sua versione finestrata è data da  $v_T(t) = A\Pi(t/T)$ , dunque:

$$\mathcal{F}[v_T(t)](f) = \mathcal{F}\left[A\Pi\left(\frac{t}{T}\right)\right](f) = ATsinc(fT)$$

E allora:

$$\mathcal{F}[v(t)](f) = A\delta(f)$$

- **Funzione fasore:** Data  $v(t) = Ae^{j2\pi f_0 t}$ , la moltiplichiamo per la finestra, ottenendo  $v_T(t) = Ae^{j2\pi f_0 t}\Pi(t/T)$ . Quindi:

$$\mathcal{F}[v_T(t)](f) = \mathcal{F}\left[Ae^{j2\pi f_0 t}\Pi\left(\frac{t}{T}\right)\right](f) = ATsinc((f - f_0)T)$$

Inoltre:

$$\mathcal{F}[v(t)](f) = A\delta(f - f_0)$$

- **Funzione seno:** Sia  $v(t) = A \sin(2\pi f_0 t)$ . Per la formula di Eulero otterremo due impulsi specchiati, rappresentabili nel piano immaginario.

$$\mathcal{F}[v(t)](f) = \frac{A}{2j}(\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0))$$

- **Funzione coseno:** Sia  $v(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$ . Per la formula di Eulero otterremo due impulsi specchiati rappresentabili nel piano reale.

$$\mathcal{F}[v(t)](f) = \frac{A}{2}(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0))$$

E qui la lista delle proprietà, non poco simili a quelle viste per Laplace:

1. **Linearità:**

$$av_1(t) + bv_2(t) \implies aV_1(f) + bV_2(f)$$

2. **Riflessione e coniugazione:**

$$v(-t) \implies V(-f) \quad \overline{v(t)} \implies \overline{V(-f)} \quad \overline{v(-t)} \implies \overline{V(f)}$$

3. **Convoluzione nel dominio del tempo:** La convoluzione nel dominio del tempo diventa un prodotto in quello delle frequenze.

$$[v_1 * v_2](t) \implies V_1(f) \cdot V_2(f)$$

4. **Traslazione nel dominio del tempo:**

$$v(t - \tau) \implies e^{-j2\pi f \tau} V(f)$$

5. **Modulazione del segnale nel dominio del tempo:**

$$v_1(t) \cdot v_2(t) \implies [V_1 * V_2](f)$$

6. **Traslazione nel dominio delle frequenze:**

$$e^{j2\pi f_0 t} v(t) \implies V(f - f_0)$$

## 6.4 Campionamento e replicazione

Il **campionamento** è l'operazione che consente di passare da un segnale a tempo continuo a una rappresentazione discreta nel tempo. Prima di introdurlo bisogna avere presenti alcuni concetti preliminari: supponiamo un segnale continuo  $v(t)$ , e sia  $T_c > 0$  il relativo **periodo di campionamento**, con **frequenza di campionamento**  $f_c = 1/T_c$ ; definiamo il **treno di impulsi**:

$$\hat{\delta}_{T_c} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_c)$$

Ed è una sequenza infinita di impulsi traslati nel tempo ad intervalli  $T_c$ . In particolare, per Fourier, abbiamo le seguenti relazioni:

$$\hat{\delta}_{T_c}(t) \implies \frac{1}{T_c} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_c}\right) \implies \frac{1}{T_c} \hat{\delta}_{\frac{1}{T_c}}(f)$$

Possiamo concludere che la TdF del treno di impulsi ideale è sempre un treno di impulsi, ma in frequenza, dove gli impulsi hanno l'area  $1/T$  e sono equispaziati alla frequenza  $1/T$ . In questi termini possiamo definire il segnale campionato.

### Definizione 7. *Campionamento*

*Dato un segnale  $v(t)$  con  $t \in \mathbb{R}$ ,  $0 < T_c \in \mathbb{R}$ , definiamo campionamento del segnale  $v(t)$  come:*

$$[samp_{T_c}v](t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v(kT_c)$$

*Il quale, per proprietà del campionamento dell'impulso diventa:*

$$[samp_{T_c}v](t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v(t)\delta(t - kT_c) = v(t)\hat{\delta}_{T_c}(t)$$

*Il risultato è dunque un segnale continuo costituito da impulsi separati in intervalli di  $T_c$ , le cui ampiezze sono uguali ai singoli campioni presi dall'originale.*

Quando si lavora con segnali ripetuti periodicamente nel tempo allora si parla di **replicazione**, la quale è formalmente definita come:

### Definizione 8. *Replicazione*

*Sia un segnale  $v(t)$  con  $t \in \mathbb{R}$  e periodo di campionamento  $0 < T_c \in \mathbb{R}$ ; definiamo replicazione del segnale  $v(t)$  come:*

$$[rep_{T_c}v](t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v(t - kT_c) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v(t) * \delta(t - kT_c) = [v * \hat{\delta}_{T_c}](t)$$

Queste due operazioni sono duali nel dominio delle frequenze, campionando nel tempo si otterrà una replicazione in frequenza:

$$[samp_{T_c}v](t) \iff \frac{1}{T_c} [rep_{T_c}V](f)$$

Mentre se si replica nel tempo si otterrà un campionamento in frequenza:

$$[rep_{T_c}v](t) \iff \frac{1}{T_c} [samp_{T_c}V](f)$$

Tuttavia, attenzione: non sempre è possibile revertire il segnale a quello originale dopo il processo di campionamento. La condizione che definisce questa dinamica è data dal **teorema del campionamento Shannon-Nyquist**, dove supponiamo un segnale  $v_0(t)$  limitato in banda, ovvero  $V_0(f) = 0$  per  $|f| > B$ . Se la frequenza di campionamento soddisfa:

$$f_c > 2B$$

Allora il segnale può essere riportato all'originale tramite un filtro di **ricostruzione**  $H_r$ , definito come:

$$H_r(f) = T_c \Pi\left(\frac{f}{2f_L}\right) = \frac{1}{f_c} \Pi\left(\frac{f}{2f_L}\right)$$

Con  $B < f_L < f_c - B$ . Quindi il segnale originale sarà uguale alla convoluzione fra il segnale campionato e l'antitrasformata del filtro:

$$v_0(t) = [(samp_{T_c} v_0) * h_r](t)$$

In caso di  $f_c < 2B$ , invece, si ha quello che è noto come **fenomeno di aliasing**, e non si ritornerà ad un segnale uguale all'originale.

## 6.5 Esercizi svolti

# **Chapter 7**

## **Sistemi a tempo discreto**

**7.1 Sistemi LTI a tempo discreto**

**7.2 Trasformata Z**

**7.3 Trasformate notevoli**

**7.4 Antitrasformata Z**