Università degli Studi di Verona

CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA

Fisica I

Federico Brutti
federico.brutti@studenti.univr.it

Nono, io mi rifiuto, questo fatevelo voi. - Elisa A.

Contents

Chapter 1

Introduzione e strumenti base

La fisica è una scienza naturale che si occupa dei principi primi che spiegano il funzionamento dell'universo e li esprime tramite il linguaggio matematico; pone quindi le basi per lo studio di tutto ciò che ci circonda ed è vastamente utilizzata anche in ambito ingegneristico. Per lo studio ci serviremo dei **modelli di analisi**, approssimazioni di fenomeni reali per renderne la comprensione più semplice e riportare ad una stessa dinamica le varie situazioni. Partiamo con alcuni concetti di base.

1.1 Grandezze fisiche e analisi dimensionale

Diciamo **grandezza fisica** una proprietà misurabile mediante un apposito dispositivo, per esempio, nel misurare il peso di un oggetto ci serviremo di una bilancia. Queste si esprimono con una moltiplicazione fra un valore numerico e la relativa unità di misura: $[1g]$. Distinguiamo le:

- **Fondamentali**: Concetti indipendenti l'uno dall'altro indefinibili in termini di altre grandezze.
- **Derivate**: Definibili mettendo in relazione le grandezze fondamentali.

Grandezze fondamentali	**Grandezze derivate**
Lunghezza $[m]$	Superficie $[L^2]$
Massa $[Kg]$	Volume $[L^3]$
Tempo $[s]$	Velocità $[L/t]$
Intensità di corrente $[i]$	Accelerazione $[L/t^2]$
Temperatura assoluta $[T]$	Forza $[M \times L/t^2]$
	Pressione $[(M \times L/t^2)/L^2]$

Quello utilizzato da noi per le misure è detto **sistema internazionale**, caratterizzato dalla semplicità per ottenere multipli e sottomultipli, attraverso moltiplicazioni e divisioni per 10 rispettivamente. Gli eventuali risultati si scriveranno poi in base al numero di **cifre significative** richiesto, ovvero il totale delle cifre decimali entro le quali deve essere espresso il valore; tuttavia, in presenza di numeri molto grandi o piccoli, è possibile usare la **notazione scientifica**, una scrittura più compatta.

Essendo poi che stiamo lavorando su valori espressi come una moltiplicazione, è necessario prestare attenzione alle unità di misura in gioco. Ciò si fa mediante l'**analisi dimensionale**, un semplice algoritmo che funge da accertamento.

Esempio 1. ***Analisi dimensionale***
Prendiamo la seguente formula indicante una velocità: $v = at$. Per controllare se è dimensionalmente corretta, si sostituiscono ai valori nell'equazione le loro unità di misura. Se le misure sono concordanti, la formula sarà corretta. Abbiamo quindi:

$$v = \tfrac{L}{T},\ a = \tfrac{L}{T^2},\ t = T$$

$$v = at \implies \frac{L}{T} = \frac{L}{T^2} \times T \implies \frac{L}{T} = \frac{L}{T} \tag{1.1}$$

Notiamo che il risultato è un'identità, quindi la misura è corretta.

1.2 Vettori

I **vettori**, indicati con $\overrightarrow{A}$, sono oggetti in un piano di riferimento definiti mediante due misure: la distanza da un punto detto **origine** e la direzione orientata relativamente ad un asse di riferimento. Li utilizziamo per studiare la posizione di un punto materiale in più dimensioni, mediante le siddette **coordinate cartesiane** (x, y) e **coordinate polari** (r, θ), strettamente legate fra loro.

Finora, per esprimere i valori è stato utilizzato puramente un numero; chiamiamo questa una **grandezza scalare**, ma è possibile specificare valori anche con una direzione, creando le **grandezze scalari**. Essendo queste ultime non necessariamente sovrapposte agli assi, è possibile scomporle in parti ad essi associate. Scriviamo infatti in forma generale:

$$\overrightarrow{A} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$$

Dove x, y, z sono le grandezze dei vettori, dette **moduli** nel piano rispettivo e $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ i vettori unitari che danno loro la direzione. In particolare, è possibile introdurre l'aritmetica legata ai vettori. Dove esistono metodi grafici, ci concentreremo sulle apposite formule:

- **Somma algebrica fra vettori**: $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C} = (B_x + C_x)\hat{\imath} + (B_y + C_y)\hat{\jmath}$
- **Moltiplicazione con scalare**: $n\overrightarrow{A}$

- **Coordinate cartesiane in funzione delle polari**: $x = rcos(\theta)$, $y = rsin(\theta)$.
- **Coordinate polari in funzione delle cartesiane**: $\theta = tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

1.3 Esercizi svolti

Esercizio 1: Passaggio fra tipi di coordinate
Supponiamo di avere due punti in coordinate cartesiane $A = (2.00, -4.00)m; B = (-3.00, 3.00)m$. Vogliamo passare a coordinate polari.

Ricordiamo che la forma polare è espressa nella formula (r, θ), dove r è il raggio che passa per l'origine e θ l'ampiezza dell'angolo da esso formato. Abbiamo che:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}; \theta = arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Quindi sostituiamo i valori richiesti alle variabili per il punto A e B:

- $r_A = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 - 4^2} = 4.47m$
- $\theta_A = arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \theta = arctan\left(\frac{-4}{2}\right) = \theta = arctan(-2) = -63.4$
- $r_B = \sqrt{-3^2 + 3^2} = 4.24m$
- $\theta_B = arctan\left(\frac{3}{-3}\right) = arctan(-1) = -45$

Notare che il punto B risiede necessariamente nel secondo quadrante e che quindi dovremo sottrarre $180 - 45 = 135$ per ottenere l'effettivo valore in gradi.

Esercizio 2: Somma nella stessa direzione
Esercizio 3: Somma in direzioni diverse

Chapter 2

Cinematica

2.1 Moti in una dimensione

Iniziamo il percorso con la **cinematica**, la quale tratta il moto dei corpi, visti come un punto materiale, da un punto di vista descrittivo, ignorando le interazioni con l'ambiente circostante. Ciò avviene con il relativo asse di riferimento, il quale per ora sarà rappresentato da un singolo asse.

Pensando ad un corpo in movimento ci si aspetta che abbia una **posizione** in determinati punti e che si possa **spostare** sul piano, magari con una determinata **velocità**. Questi concetti sono strettamente legati e fanno riferimento punto scelto nell'asse. Sono definiti come:

- **Posizione** x: Punto occupato, istante per istante, dal punto materiale rispetto ad un altro punto di riferimento, scelto come origine.
- **Spostamento** $\Delta x = (x_f - x_i)[m]$: Variazione della posizione di un punto materiale, da quella iniziale x_i, a quella finale x_f, in un certo intervallo di tempo.
- **Velocità** $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}[m/s]$: Detta anche velocità media, è il rapporto fra lo spostamento del punto materiale e l'intervallo di tempo in cui ha compiuto tale movimento.

Potrebbe venirci l'idea o la necessità di misurare la velocità in frazioni più piccoli del moto, ottenendo un valore più preciso della stessa. Seguendo questo ragionamento, possiamo portarlo all'estremo e minimizzare questo intervallo, quindi il tempo. Ciò consente di ottenere la **velocità istantanea**, definita come il limite della stessa quando il tempo tende a zero:

$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Una dinamica particolare ma molto utile della fisica, è che talvolta le componenti delle equazioni sono interpretabili come funzioni o riscrivibili in termini di altre. Prendiamo infatti lo spostamento; questo è un valore dipendente dal tempo, quindi esprimibile in sua funzione. Se riprendiamo infatti la formula della velocità istantanea possiamo dire che, ricavando $v_f = v_i + \Delta t$:

$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t_f) - x(t_i)}{\Delta t} \implies \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t_i + \Delta t) - x(t_i)}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

Facendo attenzione, si noterà che questa è una funzione incrementale, quindi una derivata. Abbiamo appena provato che la velocità istantanea è la derivata della funzione di spostamento rispetto al tempo.

Chiaramente, è possibile andare anche all'indietro, applicando l'integrale alla velocità ricaviamo lo spostamento a partire dalla prima.

$$\frac{dx}{dt} = v_x \implies \int dx = \int v_x dt \implies x = x_0 + v_x t$$

Con questi passaggi abbiamo ottenuto la funzione del tempo $x(t)$, più comunemente conosciuta come **legge oraria**, la quale descrive il moto di un punto materiale con velocità costante.

Lo studio dei fenomeni fisici non si piega ad ogni caratteristica in esso presente; infatti, come premesso nell'introduzione, verranno usati modelli di analisi per approssimarli ad una forma simile e riproducibile. La legge del moto appena ottenuta si applica con il modello di riferimento del **moto rettilineo uniforme**, esprimente la sua dinamica. Come diretta conseguenza, la velocità istantanea sarà sempre uguale indipendentemente dall'istante colto.

E se la velocità cambiasse nel tempo? Non ci si può aspettare che in ogni fenomeno fisico i corpi si muovano a velocità costante; questa infatti può variare, e quando accade, si dice che il corpo **accelera**. Questa, come visto per la velocità, è misurata in un determinato intervallo di tempo, e quindi si può anche studiare nei singoli istanti tramite il limite. Definiamo:

- **Accelerazione** $a = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}[m/s^2]$: Rapporto fra la variazione di velocità rispetto al tempo. Va a 0 quando la velocità del corpo è massima ed è negativa quando la velocità in direzione positiva decresce.

- **Accelerazione istantanea** $a_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t}$: Il limite dell'accelerazione media per il tempo che tende a zero. Coglie il valore in un determinato istante di tempo.

Attuando un ragionamento simile a prima con il calcolo differenziale, possiamo vedere $v(t)$ come la funzione della velocità nel tempo e dire, sapendo che $t_f = t_i + \Delta t$:

$$a_x = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_f) - v(t_i)}{\Delta t} \implies \frac{v(t_i + \Delta t) - v(t_i)}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

Quindi, l'accelerazione è la derivata della funzione di velocità rispetto al tempo. Come già visto, grazie all'integrale possiamo anche ottenere l'equazione che esprime la **velocità** con accelerazione costante:

$$\int dv(t) = \int adt \implies v(t) = v_0 + at$$

Come anche quella per lo **spostamento** negli stessi termini:

$$\int v_0 + atdt = \int v_0 dt + \int atdt \implies x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

Quest'ultima legge del moto è utilizzata nel modello di riferimento **punto materiale ad accelerazione costante**, ed è fondamentalmente un'estensione di quanto visto prima. Qui l'accelerazione media è numericamente uguale a quella istantanea in qualunque intervallo di tempo.

Un caso differente di quanto appena visto è invece il **moto di caduta**. Tutti i corpi sotto effetto della gravità terrestre cadono con la stessa accelerazione costante: $g = 9,8m/s^2$. È possibile usare le equazioni cinematiche del precedente modello di analisi, l'unica differenza sta nel moto, che ha direzione verticale, ed essendo che l'accelerazione va verso il basso, bisognerà indicare la costante gravitazionale con segno negativo.

2.2 Moti in due dimensioni

Prima di iniziare abbiamo la necessità di aggiungere un attributo alle grandezze. Precedentemente, essendo stato il moto in una singola dimensione, potevamo ignorare questa caratteristica e lavorare con quelle che sono chiamate **grandezze scalari**, le quali indicano un solo valore numerico.

Lavorando ora in due dimensioni dobbiamo considerare anche la **direzione** del moto. Andremo quindi ad aggiungere questo attributo alle variabili e le chiameremo **grandezze vettoriali**. Sintatticamente non cambia molto, infatti le formule rimangono le stesse, eccezion fatta che ora le grandezze sono vettoriali, ma è possibile utilizzarle per nuovi modelli di analisi.

- Moto in due dimensioni con accelerazione costante

Il punto materiale è specificato dal vettore posizione $\overrightarrow{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$. Ciò significa che il moto può essere modellizzato in due moti indipendenti lungo rispettivamente l'asse x e l'asse y e quindi, per ottenere i vettori finali richiesti, sarà necessario effettuare la somma fra le parti. Supponendo che l'accelerazione abbia effetto in ambo le dimensioni, possiamo scrivere la legge del moto completa come segue:

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}at^2; y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}at^2$$

Dove naturalmente, le x_0, y_0 sono le posizioni iniziali, si tiene conto della velocità in un certo istante, come anche dell'accelerazione. Tenere a mente che velocità e accelerazione sono ora considerate grandezze vettoriali.

- Moto dei proiettili
Per proiettile si intende un punto materiale che è lanciato in una certa direzione, ed è sempre influenzato dalla gravità per poi arrivare a terra. Ne consegue che il movimento crea una parabola. L'unica differenza rispetto al modello di analisi precedente è come il ruolo dell'accelerazione è assunto dalla costante gravitazionale, esattamente come nel moto di caduta, solo in due dimensioni. Ci sono tuttavia alcuni punti che è interessante analizzare.

Per prima cosa, è necessario notare come il movimento del punto materiale nell'asse delle x ha sempre velocità costante, mentre in quello delle y influisce l'accelerazione gravitazionale. Dunque possiamo vedere il primo come un moto rettilineo uniforme ed il secondo come un uniformemente accelerato, dandoci:

- **Velocità iniziale di** x: $v_{0x} = v_0 cos\theta$
- **Velocità iniziale di** y: $v_{0y} = v_0 sin\theta$
- **Legge di** x: $x = x_0 + v_{0x}t$
- **Legge di** y: $y = y_0 - v_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2$

Questo modello di analisi introduce anche due nuovi concetti nelle forme di **altezza massima** $h_{max} = \frac{v_{0y}^2}{2g}$, con relativo istante di tempo, e **gittata orizzontale**. La prima rappresenta il massimo della funzione e si ottiene ragionando sulla velocità del vettore verticale. Quando questa è uguale a zero, ne consegue che il proiettile è arrivato al massimo. La seconda, invece, è la distanza raggiunta dal proiettile una volta ritornato a terra dopo il lancio.

Per quanto riguarda il primo concetto, possiamo subito ottenere il valore dell'istante del tempo in cui la particella raggiunge il suo massimo, grazie alla legge del moto diciamo:

$$t_{max} = \frac{v_0 sin\theta}{g} = \frac{v_{0y}}{g}$$

Era la componente mancante per la legge del moto, pensa te. Sostituendola alla t, otteniamo quindi la posizione delle y all'istante del tempo dove la funzione ha massimo:

$$y = h_{max} = \frac{v_{0y}}{g} - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_{0y}}{g}\right)^2 \implies h_{max} = \frac{v_{0y}^2}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{v_{0y}^2}{g}\right) = \frac{v_{0y}^2}{2g}$$

Per quanto riguarda la gittata, invece, possiamo fare un ragionamento sulla natura del fenomeno e notare che a prescindere dal modo in cui è lanciato, il moto sarà sempre una parabola perfettamente simmetrica. Dunque, il tempo che ha usato per arrivare al suo massimo è la metà di quello usato per ritoccare terra. Più semplicemente, $2t$. Sostituendolo alla legge oraria usata per x, otterremo infatti:

$$R = \frac{2(v_{0x}v_{0y})}{g}$$

- Punto materiale in moto circolare uniforme
Questo modello di analisi vede un punto materiale muoversi con una velocità scalare costante in senso circolare. Qui il vettore velocità, sempre tangente alla traiettoria, cambia continuamente direzione; inoltre, l'accelerazione è perpendicolare alla traiettoria e punta verso il centro del cerchio. I concetti da ricordare qui sono:

- **Accelerazione centripeta** $a_c = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$: Accelerazione con direzione perpendicolare al vettore della velocità, verso il centro della circonferenza.
- **Periodo del moto** $T = \frac{2\pi r}{v}$: Intervallo di tempo richiesto al moto per compiere un giro completo.
- **Velocità angolare** $\omega = \frac{2\pi}{T}$: Prodotto fra la frequenza e la lunghezza della circonferenza, è misurata in radianti.

Esiste inoltre una relazione fra la velocità angolare e la velocità con cui il punto si muove lungo la traiettoria circolare:

$$\omega = 2\pi\frac{v}{2\pi r} = \frac{v}{r} \implies v = r\omega$$

Questo ci è particolarmente comodo, perché in questo modo possiamo esprimere l'accelerazione centripeta con una formula molto più semplice e compatta:

$$a_c = \frac{v^2}{r} \implies a_c = \frac{(r\omega)^2}{r} = r\omega^2$$

Presta attenzione; se i vettori possono essere rappresentati attraverso le loro componenti rispetto agli assi, allora è possibile anche ottenere quello dell'**accelerazione totale**, considerando quello dell'accelerazione centripeta e quello dell'accelerazione tangente alla circonferenza. Più precisamente abbiamo:

- **Accelerazione radiale** $a_r = -a_c = -\frac{v^2}{r}$: L'inverso dell'accelerazione centripeta, sicché sia un valore positivo.
- **Accelerazione tangenziale** $a_t = \left|\frac{dv}{dt}\right|$: Come detto dal nome, il vettore tangente al vettore della velocità istantanea, quindi una derivata.

- **Accelerazione totale** $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_t}$: La somma totale delle due accelerazioni appena viste.

Come ultimo concetto del capitolo, supponiamo di avere due osservatori A, B di uno stesso fenomeno posti in posizioni diverse. Ciò significa che osserveranno l'evento con due origini differenti. Questo è un tipo di problema spesso utilizzato e necessita dei concetti di velocità e accelerazione **relative**.

Definiamo qui un tempo $t = 0$ dove le origini coincidono; andando avanti nel tempo fino a t si troveranno ad una distanza $v_{BA}t$ l'una dall'altra, sotto il punto di vista dell'osservatore B. Diciamo di volere la posizione del vettore della posizione relativa ad A. Avremo che:

$$\overrightarrow{r}_A = \overrightarrow{r}_B + \overrightarrow{v}_{BA}t$$

Essendo questa la formula che mostra la posizione finale e quindi uno spostamento, possiamo ragionare con il calcolo differenziale per poter ottenere anche la velocità e l'accelerazione, derivando rispettivamente una o due volte la formula.

2.3 Esercizi svolti

Esercizio 1: Moto rettilineo uniforme
Una studiosa misura la velocità di un atleta che corre a ritmo costante su una strada rettilinea. Fa partire il cronometro quando arriva in un dato punto e lo ferma quando arriva $20m$ più avanti. Registra un tempo di $4,0s$.

- **Qual è la velocità dell'atleta?**

  Richiesta esplicita, possiamo prendere direttamente la formula apposita senza usare criteri di equivalenza.

  $$v_x = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{20m - 0m}{4,0s} = 5,0m/s$$

- **Se l'atleta continua a correre per altri $10s$, quale sarà la sua posizione allora?**

  Fondamentalmente ci sta chiedendo la posizione dell'atleta alla fine di questi $10s$. Possiamo prendere anche qui la formula senza cambiare nulla.

  $$x_f = x_i + v_x t = 0m + 5m/s \times 10s = 50m$$

Esercizio 2: Punto materiale ad accelerazione costante
Un aereo atterra alla velocità di $140mi/h$.

- **Qual è l'accelerazione dell'aereo, se il cavo di arresto lo ferma in $2s$?**

  Essendo l'accelerazione supposta costante, possiamo utilizzare direttamente la formula. Bisogna solo convertire le miglie orarie a metri al secondo: $140mi/h = \frac{140}{2,237} \approx 63m/s$.

  $$a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{0 - 63m/s}{2,0s - 0} = -32m/s^2$$

- **Se l'aereo aggancia il cavo quando si trova in $x_i = 0$, quale sarà la sua posizione finale?**

  Molto semplicemente si tratta di una sostituzione dei dati alla formula per la posizione finale:

  $$x_f = x_i + \frac{1}{2}(v_{xi} + v_{xf})t = 0 + \frac{1}{2}(63m/s^2 + 0)2,0s = 63m$$

Esercizio 3: Corpo in caduta libera
Dal tetto di un palazzo una pietra è lanciata verso l'alto e la sua velocità iniziale è di $20m/s$. Il lancio avviene da un'altezza di $50m$ rispetto al suolo, per poi cadere a terra.

- **Se t_A è l'istante iniziale in cui la pietra lascia la mano del lanciatore, trovare l'istante in cui la pietra raggiunge la massima altezza.**

  Ci aspettiamo che, essendo la pietra lanciata verso l'alto, la velocità sia inizialmente positiva. Una volta raggiunta la massima altezza questa sarà a zero, mentre nel cadere avrà valore negativo. L'accelerazione avrà la stessa dinamica.

  Per trovare l'istante preciso in cui l'altezza è massima bisogna prima ricavare l'equazione per ottenere t:

  $$v_{yf} = v_{yi} + a_y t \implies t = \frac{v_{yf} - v_{yi}}{a_y} = \frac{0 - 20m/s}{-9,8m/s^2} = 2,04s$$

- **Trovare l'altezza massima raggiunta dalla pietra**

  Risulta comodo considerare due istanze, la seconda come finale. Sapendo questo possiamo usare la formula apposita:

  $$y_f = y_i + v_{xi}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = 0 + (20m/s)(2,04m) + \frac{1}{2}(-9,8m/s^2)(2,04s)^2 = 20,4m$$

- **Calcolare la velocità della pietra quando ripassa per l'altezza da cui era stata lanciata**

  Il punto iniziale è lo stesso, mentre il finale è la medesima altezza mentre la pietra cade verso il basso. Sarà necessario utilizzare l'equazione in base alla posizione:

  $$v_{yf}^2 = v_{yi}^2 + 2a_y(y_f - y_i) = (20m/s)^2 + 2(-8,8m/s^2)(0) = 400m^2/s^2$$

Vogliamo tuttavia la velocità a grado uno, quindi usiamo la radice quadrata:

$$\sqrt{v_{yf}^2} = \sqrt{400m^2/s^2} \implies v_{yf} = -20m/s$$

Sebbene il risultato dalla radice quadrata sia positivo, bisogna tenere a mente che il movimento della pietra nella posizione finale è verso il basso, ragion per cui ha velocità negativa.

- **Trovare velocità e posizione della pietra al tempo $t = 5s$.**

  Il punto iniziale è sempre il solito, mentre adesso quello finale è la posizione a tempo $t = 5s$. Prima calcoliamo la velocità in quest'ultima:

  $$v_{yf} = v_{yi} + a_y t = 20m/s + (-9,8m/s^2)5s = -29m/s$$

  E adesso la posizione effettiva:

  $$y_f = y_i + v_{yi}t + \frac{1}{2}a_y t = 0 + (20m/s)5s + \frac{1}{2}(-9,8m/s^2)5s = -22,5m$$

Chapter 3

Basi della dinamica

3.1 Leggi di Newton

Il concetto che governa le dinamiche di questo mondo è la **forza**, della quale esistono due tipi:

- **Forze di contatto**: Esercitate mediante il contatto fisico fra due oggetti.
- **Forze di campo**: Agiscono mediante lo spazio vuoto.

Le forze $\overrightarrow{F}$ sono annotate come vettori, poiché vanno in una determinata direzione con un certo valore scalare. Un altro concetto fondamentale per questa sezione è la **massa**, la quale misura quanta resistenza un corpo mostra ai cambiamenti della sua velocità. In linguaggio comune è chiamata "peso".

Diciamo di voler spingere un corpo di massa $3kg$ con una certa forza che produce un'accelerazione di $4m/s^2$. Se applichiamo la stessa forza ad un corpo di massa differente, così lo sarà l'accelerazione. Diciamo infatti che il modulo dell'accelerazione del corpo è inversamente proporzionale alla sua massa. A partire da questi concetti, possiamo definire le **Leggi di Newton**:

Teorema 1. ***Prima legge di Newton***
*Chiamata anche legge d'inerzia, definisce dei sistemi di riferimento detti **sistemi inerziali**. Afferma che se un corpo non interagisce con altri corpi, si può trovare un sistema di riferimento nel quale la sua accelerazione è nulla. Inoltre, quando su di un corpo non agiscono forze, la sua accelerazione è nulla. Risponde alla domanda "Cosa succede a un corpo se non gli vengono applicate forze?"*

Teorema 2. ***Seconda legge di Newton***
L'accelerazione di un corpo è dovuta alla forza risultante, ovvero la somma vettoriale delle forze, esercitata su un corpo. Risponde alla domanda "Cosa succede a un corpo se

gli viene applicata una o più forze?"

$$\sum \overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}$$

Grazie alla seconda legge, è possibile definire anche la forza gravitazionale esercitata dalla Terra. Molto semplicemente, come visto nel moto di caduta, si sostituisce la costante gravitazionale g al posto dell'accelerazione. Chiamiamo questo valore **forza peso**.

Teorema 3. ***Terza legge di Newton***
Ad ogni forza esercitata ne corrisponde una uguale e contraria. Infatti, una forza $\overrightarrow{F}_{12}$ *esercitata da un corpo* 1 *su un corpo* 2 *è uguale in intensità ed è opposta in verso alla forza* $\overrightarrow{F}_{21}$*, esercitata dal secondo corpo sul primo.*

$$\overrightarrow{F}_{12} = -\overrightarrow{F}_{21}$$

Se consideri un oggetto poggiato su un tavolo, noterai che non viene accelerato, distruggendo ogni cosa nel suo cammino verso il centro della terra. Questo è perché il tavolo esercita una forza che annulla quella del peso, chiamata **forza normale**, poiché porta il corpo ad essere in quiete. Le forze sono infine misurate con l'unità **Newton**, dove $1N = 1kg \times m/s^2$. Passiamo ora ai modelli di analisi che utilizzano quanto appena visto:

- Punto materiale in equilibrio
Se l'accelerazione di un corpo schematizzato come punto materiale è nulla, stiamo parlando di un corpo in equilibrio e la forza risultante deve necessariamente essere uguale a zero.

Supponiamo quindi un corpo con una determinata massa m, il quale è appeso con una fune che si dirama poi in altre due, attaccate al soffitto. Le forze risultanti si equivalgono ed il corpo rimane sospeso in aria. Dalla terza legge di Newton sappiamo che alla forza peso esercitata dal corpo ne corrisponde una uguale e contraria, ed in questo caso prende il nome di **tensione** T, dunque:

$$P - T = 0$$

Abbiamo supposto che la corda attaccata al corpo si dirami in altre due; ciò significa che il valore della tensione è la somma delle tensioni esercitate dalle due funi. Essendo infine le forze dei valori vettoriali, si possono ottenere le loro componenti coi metodi già visti.

- Sistema di carrucole
Supponiamo una fune retta da una carrucola con due corpi attaccati alle sue estremità. Avremo necessariamente due masse diverse indipendenti e due tensioni legate una all'altra. Ciò crea un sistema di forze descritto come

$$\begin{cases} T - m_1 g = m_1 a \\ m_2 g - T = m_2 a \end{cases}$$

Dove i segni negativi sono presenti per tenere conto del movimento in direzione inversa che compie un corpo rispetto all'altro. Quando uno sale, l'altro scende e viceversa.

Tuttavia finora abbiamo compiuto delle grandi approssimazioni. Nella vita vera, quando un corpo è posto su una superficie, viene attuata la **forza di attrito**, una resistenza al moto con direzione opposta rispetto al movimento del corpo. Questa è descritta con

$$F_A = \mu \cdot mg$$

Dove m è la massa, g la costante gravitazionale, e μ la **costante di attrito**, determinata in base alle superfici e per la quale ne esistono due tipi:

- **Attrito statico** μ_s: Attuata finché il corpo è fermo.
- **Attrito dinamico** μ_d: Attuata su corpi in movimento.

Che cosa cambia nei modelli di analisi visti in precedenza? Che fondamentalmente bisogna considerare una nuova forza nella sommatoria da calcolare. Supponiamo nuovamente un corpo di massa m posto su un piano inclinato di angolo θ e che il corpo non si muova. Abbiamo la forza peso, le cui componenti sono date da $P_y = mgsin\theta$ e $P_x = mgcos\theta$, dove quest'ultima spinge il corpo contro la superficie.

La forza di attrito, come già menzionato, è scomponibile nelle sue componenti, e quella che impedisce il movimento al corpo, sta sull'asse delle x. È data da: $F_a = \mu_s cos\theta$. Possiamo infine ricavare la costante di attrito con alcuni semplici passaggi algebrici:

$$mgsin\theta - F_A = 0 \implies mgsin\theta - \mu_s mgcos\theta = 0 \implies sin\theta = \mu_s cos\theta \implies \mu_s = tan\theta$$

3.2 Concetto di energia

Per poter lavorare con il concetto di **energia** è necessario chiarire che ci troviamo all'interno di un sistema, dove è ben definito il confine. Questo perché l'energia è un valore scalare che si **conserva** all'interno di un determinato ambiente confinato e di conseguenza il suo totale è costante.

Notiamo che cambiando lo stato di quiete di un corpo varierà anche il suo valore di energia. Ciò è calcolato tramite il **lavoro**, misurato in **Joule** $[1J = N \cdot m]$ e dato dall'equazione:

$$L = \Delta E = Fs \cdot cos\theta$$

Dove F è il modulo della forza applicata, s il suo spostamento, mentre θ la direzione della forza. Notare che se $\theta = 0$, il lavoro è massimo.

Bisogna pensarlo come un trasferimento di energia, poiché questa si conserva nei vari corpi del sistema e mai scompare. Infatti, se il valore è positivo diciamo che l'energia è trasferita al sistema, mentre se è negativo viene passata dal sistema al corpo.

Prendiamo ora come esempio un sistema costituito da un singolo corpo. Siamo coscienti del fatto che spostando questo corpo, per la seconda legge di Newton, si abbia anche un'accelerazione, dunque possiamo ricondurre il lavoro, e quindi la variazione dell'energia, ad una forza totale applicata in una determinata area; svolgendo i passaggi algebrici dell'integrale possiamo ottenere quella che è chiamata **energia cinetica** E_c:

$$\Delta E = \int m \cdot a ds = \int m \cdot \frac{dv}{dt} ds = \int m \cdot \frac{dv}{dt} \cdot \frac{ds}{dt} dt = \int m v dv = \frac{1}{2} m v^2$$

Questa energia, essendo espressa in funzione della velocità, ne è anche influenzata. Naturalmente, nel punto iniziale equivale a zero.

Supponiamo invece di avere un sistema con due corpi, composto dal terreno e un libro. Sollevando quest'ultimo da terra si ha una variazione di energia, la quale sarà conservata nella massa; più si alza, maggiore sarà, e verrà ritrasferita al sistema lasciando cadere l'oggetto sotto forma di energia cinetica. L'energia immagazzinata dal libro è detta **energia potenziale** E_p, dipende dalla forza in gioco e la sua equazione può cambiare forma in base all'evento preso in esame. Ovviamente nel punto finale, l'energia potenziale è uguale a zero.

Per esempio, se la variazione di energia è verticale come nel caso del libro, diremo che il lavoro è dato dalla massa, l'accelerazione gravitazionale e l'altezza alla quale è posto il corpo:

$$L = mgh$$

Generalmente, se è nostra intenzione calcolare l'energia potenziale di qualunque forza anche non costante, la si deve integrare, in qualunque sua forma. Prendiamo infatti la forza elastica data da $F = -kx$; in tal caso la sua energia potenziale sarà data da:

$$L = \int -k \cdot x ds \implies L = \frac{1}{2} k x_i^2 - \frac{1}{2} k x_f^2$$

Man mano che l'energia potenziale diminuisce, il suo valore si trasferisce alla cinetica. Quindi abbiamo un valore di E_{tot} dato dalla somma di questi due recipienti, il quale, giustamente, rimane sempre costante. Inoltre, è possibile ricavare la velocità finale con una formula diretta:

- **Per forze generali**: $v_f = \sqrt{2gh}$
- **Per le molle**: $v_f = \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot s$

Introduciamo ora una piccola tassonomia delle forze; definiamo infatti **conservative** quelle forze il cui lavoro dipende esclusivamente dal punto di inizio e di fine; quindi, indipendentemente dal percorso, se si termina nello stesso punto finale avrà lo stesso valore. Ne consegue che se il percorso inizia da un dato punto per far lì ritorno, il lavoro sarà uguale a zero.

Diciamo invece forze **non conservative** quelle la cui variazione dell'energia dipende dallo spostamento, e definiremo **energia meccanica** del sistema la somma fra le energie cinetica e potenziale:

$$E_{mecc} = E_c + E_p$$

Infine, come ultimo concetto, legando il lavoro eseguito ad un determinato intervallo di tempo, è possibile misurare la **potenza** P di un dato evento fisico, la cui unità di misura è il **Watt**. $[1W = 1J/s]$

$$P = \frac{L}{t}$$

Un'altra cosa importante è come la potenza è la derivata dell'energia rispetto al tempo e che di conseguenza la variazione dell'energia è l'integrale della forza per lo spostamento. In questi termini, possiamo scrivere la potenza come prodotto vettoriale fra forza e velocità.

$$P = \frac{dE}{dt}; \Delta E = \int F \cdot ds \implies dE = F \cdot ds$$

$$P = \frac{F \cdot ds}{dt} = F \cdot \frac{ds}{dt} = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v}$$

E in questi termini, la forza è rappresentabile anche come la variazione dell'energia rispetto allo spazio:

$$F = \frac{dE}{ds}$$

3.3 Quantità di moto e urti

La **quantità di moto** di un oggetto è definita come il prodotto della sua massa con la sua velocità. Si tratta di una grandezza vettoriale, la quale, per la terza legge di Newton, si conserva. Naturalmente è un valore che si misura avendo più corpi a disposizione; infatti la quantità di moto totale $\overrightarrow{p}_{tot}$ è data dalla somma vettoriale dell'interazione fra i due corpi e si chiama **urto**. Partendo dal presupposto che prima di scontrarsi, i corpi hanno una determinata energia cinetica definita come:

$$\frac{\Delta}{2} m_1 v_1^2; \frac{\Delta}{2} m_2 v_2^2$$

Abbiamo che la dinamica degli urti presenta due casi limite:

- **Urti anelastici**: I corpi rimangono attaccati insieme e si spostano in una direzione con una velocità uguale. L'energia cinetica non si conserva ed una sua parte è trasferita nell'urto.
- **Urti elastici**: I corpi urtano, prendono velocità diverse e poi vanno in direzioni differenti con altrettante velocità diverse. L'energia cinetica è perfettamente conservata.

Analizziamo meglio i casi presentati; nell'urto anelastico abbiamo capito di avere due corpi m_1, m_2 con rispettive velocità v_1, v_2, i quali, scontrandosi, restano uniti e si muovono in una sola direzione a velocità v_f. Essendo la quantità di moto costante, abbiamo che: $\overrightarrow{p_i} = \overrightarrow{p_f}$, e la dinamica è descritta dall'equazione:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)v_f$$

Dove, in particolare:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = \overrightarrow{p_i}; (m_1 + m_2)v_f = \overrightarrow{p_f}$$

Inoltre è possibile ricavare la velocità finale in un solo passaggio conoscendo massa e velocità di ambo i corpi:

$$v_f = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}$$

Per quanto riguarda l'urto elastico, invece, dati due corpi m_1, m_2 con due velocità v_1, v_2; scontrandosi vanno in direzioni opposte con due velocità diverse v_{1f}, v_{2f}. L'energia cinetica totale qui è conservata ed è costante, come anche la quantità di moto totale. Abbiamo di conseguenza due equazioni:

- **Quantità di moto totale**: $p_{tot} \implies m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_{1f} + m_2v_{2f}$
- **Energia totale**: $E_{tot} \implies \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2f}^2$

Un nuovo concetto importante, che ci consente di iniziare a considerare i corpi come effettive forme e non come punto materiale è il **centro di massa**. Supponiamo una forma nel piano cartesiano che si estende da m_1 a m_2; allora esiste un punto, detto centro di massa C_m con coordinate (x_{C_m}, y_{C_m}) definito dal sistema:

$$\begin{cases} x_{C_m} = \frac{\sum_{i=1} x_i m_i}{\sum_{i=1} m_i} \\ y_{C_m} = \frac{\sum_{i=1} y_i m_i}{\sum_{i=1} m_i} \end{cases}$$

Più semplicemente si tratta della sommatoria del prodotto del modulo dei corpi con la loro massa, divisa per la sommatoria di tutte le masse. Considerando quindi non più particelle informi, è necessario aggiornare l'utilizzo di tutte le formule viste finora che concernono la presenza della massa. La cosa positiva è che le relative dinamiche rimangono immutate. Per la **velocità** sarà necessario fare la derivata della posizione del centro di massa rispetto al tempo:

$$\overrightarrow{v_{C_m}} = \frac{\sum_i m_i \overrightarrow{v_i}}{\sum_i m_i}$$

L'accelerazione sarà quindi la derivata della velocità, ma, in particolare, con un semplice passaggio algebrico, notiamo che il prodotto fra massa totale e accelerazione del centro di massa corrisponde alla sommatoria delle forze che attua ogni punto:

$$\overrightarrow{a_{cm}} = \frac{1}{m_{tot}} \sum_i m_i \overrightarrow{a_i} \implies m_{tot}\overrightarrow{v_{C_m}} = \sum_i m_i \overrightarrow{a_i} = \sum_i \overrightarrow{F_i}$$

Possiamo poi calcolare la quantità di moto del centro di massa moltiplicandolo con la sua velocità:

$$\overrightarrow{p} = m_{tot} \cdot \overrightarrow{v_{cm}}$$

Ed infine, la stessa dinamica di sostituzione si presenta anche con l'energia. L'energia cinetica è infatti vista come il quoziente fra il prodotto della massa totale con la velocità del centro di massa al quadrato e 2.

$$K_{tot} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \cdot m_{tot} v_{Cm}^2$$

3.4 Esercizi svolti

Chapter 4

Moto rotazionale e gravitazione

4.1 Rotazione di un corpo rigido attorno a un asse fisso

Nello scorso capitolo è stato introdotto il concetto di centro di massa, il quale ci consente di iniziare a vedere i corpi non più come particelle, bensì aventi una forma. Tuttavia, ora che i corpi possiedono uno spessore, avranno anche una dinamica di **rotazione** che si attiva quando sono in moto.

Supponiamo dunque un corpo che ruota, il quale avrà necessariamente un punto alla sua estremità che misura una distanza R dal centro di massa. Ruotando, effettua uno spostamento Δs in un intervallo di tempo Δt ad una velocità $\frac{\Delta s}{\Delta v}$. Lo spostamento crea un arco; grazie alla geometria euclidea possiamo dire che $\Delta s = R\theta$, dove θ è l'ampiezza dell'angolo. Ciò fa ricavare quella che è conosciuta come **velocità angolare**, ovvero la variazione dell'angolo rispetto al tempo:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{R\Delta\theta}{\Delta t} = R\omega$$

La velocità angolare è costante, perché non dipende dalla posizione del punto nel raggio. Facendone la derivata otteniamo poi l'**accelerazione angolare** α:

$$\alpha = \frac{dv}{dt} = \frac{d(R\omega)}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\frac{d^2\theta}{dt^2} = R\alpha$$

In breve, al posto dello spazio, velocità e accelerazione abbiamo le loro controparti angolari. Sostituendole alle equazioni del moto otteniamo il comportamento relativo agli angoli. Prendiamo per esempio un corpo composto da tante piccole massette m_i, ognuna con una posizione s_i; possiamo passare dal moto traslazionale all'angolare dicendo $s = R\theta$ e sarà possibile riutilizzare tutte le leggi del moto viste in precedenza.

È corretto pensare che, in quanto movimento, un corpo possa resistere alla rotazione. Questa capacità è misurata con il **momento di inerzia** I, in due modi diversi in base al numero di masse del corpo. Se questo è finito, usiamo:

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

Mentre se parliamo di un numero continuo, avremo:

$$I = \int r_i^2 \cdot dm$$

dove r_i è la posizione di ogni massa e dm una massa infinitesima. La misura del momento di inerzia dipende anche dalla forma dell'oggetto, vedasi l'esempio di lanciare un coltello, che rotea più facilmente in base al modo in cui è lanciato. Infatti l'energia cinetica dipende anche dal momento di inerzia, ed è descritta come:

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Supponiamo ora di applicare una forza ad un corpo rigido attaccato a un asse fisso da una delle sue estremità; questo allora ruoterà attorno all'asse. In termini simili, chiamiamo la lunghezza del corpo a partire dall'asse **braccio** r, e la capacità di una forza di porre in rotazione un corpo è detta **momento della forza** $\overrightarrow{\tau}$, determinato da:

$$\overrightarrow{\tau} = rFsin\theta = Fd$$

Dove r è la distanza fra l'asse di rotazione ed il punto in cui è applicata la forza, e d la distanza fra l'asse di rotazione e il vettore della forza. Il $\sin\theta$ è poi l'angolazione che determina l'efficacia della forza. Difatti, esercitando una forza parallela al braccio, non ruota, mentre se è perpendicolare si avrà massimo effetto.

A partire dalla definizione di momento della forza, possiamo sostituire la definizione di forza vista nella seconda legge di Newton con le sue componenti angolari:

$$\tau_i = r_i F_i = r_i m_i a_i = r_i m_i r_i \alpha = r_i^2 m_i \alpha$$

In necessità di calcolare il momento totale, si farà la sommatoria dei τ, che risulta essere:

$$\tau_{tot} = I\alpha$$

In parole povere, stiamo sostituendo le variabili da termini di traslazione in termini rotazionali:

- $K = \frac{1}{2}mv^2 \implies K = \frac{1}{2}I\omega^2$

- $F = ma \implies \tau I\alpha$

Quindi il momento di inerzia prende il posto della massa e il momento di una forza sostituisce la forza. Abbiamo tuttavia un terzo elemento; il **momento angolare**, usato al posto della quantità di moto:

$$\overrightarrow{L} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{p}$$

Il momento angolare si conserva, quindi è costante in assenza di forze.

4.2 Legge di gravitazione universale

La **legge di gravitazione universale** di Newton afferma che ogni punto materiale attrae ogni altro punto materiale con una forza direttamente proporzionale al prodotto delle loro masse, ed inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza reciproca.

Più semplicemente, ogni corpo esercita un'attrazione gravitazionale su altri oggetti. La legge esprime un valore vettoriale con la formula:

$$F_g = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Dove m_1, m_2 sono le due masse, r è la distanza fra di loro, e G è la **costante di gravitazione universale**, corrispondente al valore $6.7 * 10^{-11}[N \cdot m^2/kg^2]$. Essendo quest'ultimo un valore molto piccolo, è banale capire che solo corpi enormi sono capaci di esercitare questa forza attrattiva in modo significativo e percepibile. Infatti normalmente una delle due masse sarà indicata come M_T, ovvero massa della terra.

Tuttavia, attenzione: questa legge esprime una forza, ed in quanto tale possiamo sostituire nell'equazione la sua definizione data dalla seconda legge di Newton. In questi termini possiamo ricavare l'accelerazione, qui chiamata **di caduta libera**, ed è quella del singolo corpo:

$$ma = G\frac{M_T \cdot m}{r^2} \implies a = G\frac{M_T}{r^2} \implies g = G\frac{M_T}{r^2}$$

Possiamo naturalmente ragionare in termini energetici anche con la gravità. Sostituiamo quindi la definizione di attrazione gravitazionale alla forza nell'integrale discusso nelle sezioni precedenti, ottenendo la formula per l'energia potenziale:

$$L = \Delta E = \int F \cdot ds = \int_{r_1}^{r_2} G\frac{M_T \cdot m}{r^2} = -\frac{G \cdot M_T \cdot m}{r}\Big|_{r_1}^{r_2}$$

Possiamo notare come più ci si allontana dalla massa, minore sarà il valore della forza gravitazionale, fino ad arrivare a zero. Passiamo ora però ad analizzare il moto dei pianeti in un sistema solare; questo è descritto tramite le tre **leggi di Keplero**, le quali affermano che:

1. Tutti i pianeti percorrono un'orbita ellitica ed il sole occupa uno dei due fuochi. Il punto dell'orbita più vicino al sole è detto perielio, mentre quello più lontano è l'afelio.

2. Nel moto, il raggio vettore che unisce il sole ad un pianeta descrive aree uguali in tempi uguali. Ciò significa che, dati due intervalli di tempo uguali, un pianeta copre distanze diverse in base alla vicinanza che ha col sole. In ogni caso, l'area coperta dallo spostamento sarà la stessa.

   Ne consegue che l'energia si conserva, perché il prodotto vettoriale fra la distanza r e la quantità di moto della massa deve sempre dare lo stesso valore.

3. Il quadrato del periodo di rivoluzione è direttamente proporzionale al cubo del semiasse maggiore dell'orbita. Dunque tanto più grande è l'orbita, tanto più tempo ci si impiegherà a percorrerla.

   Questa relazione si ricava sostituendo nella seconda legge di Newton la forza con quella gravitazionale e la massa con quella del pianeta. Dunque:

   $$F_g = M_p a \implies \frac{G \cdot M_s \cdot M_p}{r^2} = M_p \left(\frac{v^2}{r}\right)$$

   Abbiamo visto come nei moti circolari la velocità è data da $2\pi r/T$, con T periodo di rivoluzione; cerchiamo quindi di isolare la velocità e sostituirla con questo valore:

   $$\frac{G \cdot M_s \cdot M_p}{r^2} = M_p \left(\frac{v^2}{r}\right) \implies \frac{G \cdot M_s}{r} = v^2 \implies \frac{G \cdot M_s}{r} = \frac{(2\pi r)^2}{T^2}$$

   E adesso possiamo isolare il quadrato del periodo di rivoluzione per verificare la legge:

   $$\frac{G \cdot M_s}{r} = \frac{(2\pi r)^2}{T^2} \implies T^2 = (2\pi r)^2 \frac{r}{G \cdot M_s} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_s} r^3$$

   Il quadrato del periodo T è quindi direttamente al cubo del semiasse maggiore r^3.

Restiamo sempre in ambito energetico e supponiamo di avere un pianeta ed un corpo di massa m, lanciato verso l'alto a partire dal terreno. Possiamo sfruttare l'energia per determinare il valore minimo della velocità necessaria per arrivare ad una determinata distanza dal centro del pianeta.

Riprendiamo quindi la formula dell'energia totale e sostituiamo le componenti con le loro relative definizioni:

$$E_{tot} = K + U_g \implies E_{tot} = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{G \cdot M \cdot m}{r}$$

In caso di un sistema isolato costituito solo dalle due masse M, m l'energia meccanica del sistema è anche il valore dell'energia totale, in quanto si conserva, e possiamo dire che si trasferisce da una all'altra in caso di movimenti:

$$\Delta K + \Delta U_g = 0 \implies E_i = E_f$$

Dunque, se il corpo m si sposta da un punto ad un altro l'energia totale del sistema è costante, e possiamo dire, sostituendo le definizioni alle energie iniziale e finale:

$$\frac{1}{2}mv_i^2 - \frac{G \cdot M \cdot m}{r_i} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{G \cdot M \cdot m}{r_f}$$

Quando l'oggetto è ad altezza minima, quindi si trova sulla superficie della Terra, diciamo: $v = v_i$, $r = r_i = r_T$, mentre quando raggiunge la quota massima: $v = v_f = 0$, $r = r_f = r_{max}$. In questi termini, possiamo sostituire questi valori all'equazione che eguaglia l'energia iniziale a quella finale e ricavare il valore della velocità con alcuni passaggi algebrici:

$$\frac{1}{2}mv_i^2 - \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r_T} = 0 - \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r_{max}} \implies v_i^2 = 2GM_T\left(\frac{1}{r_T} - \frac{1}{r_{max}}\right)$$

Questa espressione è utilizzata per calcolare la **velocità di fuga**, ovvero la velocità minima che il corpo deve avere sulla superficie terrestre per poter sfuggire all'influenza del campo gravitazionale del pianeta.

$$v_{fuga} = \sqrt{\frac{2GM_T}{r_T}}$$

Ne consegue che se la velocità non è sufficiente per sfuggire, il corpo ritornerà verso la terra ed il suo moto descriverà una parabola.

4.3 Esercizi svolti

Chapter 5

Moto oscillatorio

5.1 Moto di un corpo attaccato ad una molla

Stiamo ora iniziando a considerare sistemi di riferimento costituito da un blocco di massa m attaccato all'estremità di una molla, con il primo che risulta essere libero di muoversi su un piano orizzontale privo di attrito. Quando la molla è in quiete, non è compressa o estesa, si dice che il sistema è nella sua **posizione di equilibrio**, generalmente identificata come $x = 0$.

Si osserva che esercitando delle forze sulla massa, spostandola dalla posizione x, questa oscillerà fino a ritornare alla posizione di equilibrio. Muovendosi, la molla esercita una forza sul blocco, ed è descritta dalla **Legge di Hooke**:

$$F_s = -k(x - x_0)$$

Questa forza è detta **di richiamo**, poiché è sempre diretta verso la posizione di equilibrio e quindi opposta allo spostamento del blocco, mentre la k è detta **costante elastica**.

Ricavare lo spostamento dalla legge del moto richiederebbe risolvere un'equazione differenziale del secondo ordine, ma è estremamente doloroso e tedioso, quindi la sua soluzione è data da:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

Dove A è l'**ampiezza** della sinusoide, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ è detta **pulsazione**, mentre ϕ è un'ampiezza di angolo che quando sommata a ω determina la **fase** del moto. Una cosa molto utile è che ogni moto oscillatorio condivide la stessa legge del moto; l'unica eventuale differenza sarà data dalla pulsazione.

Naturalmente, per ricavare velocità e accelerazione si dovrà derivare la legge del moto, come al solito; otteniamo:

- **Velocità**: $v = -\omega A\sin(\omega t + \phi)$

- **Accelerazione**: $a = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi)$

Altre due misure importanti per questo modello di analisi sono il **periodo** T e la **frequenza** f del moto, date rispettivamente dalle formule:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}; f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Naturalmente anche qui possiamo fare considerazioni con l'energia; sostituendo le componenti alle definizioni otteniamo:

- **Energia cinetica**: $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi)$
- **Energia potenziale**: $U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \phi)$
- **Energia totale**: $E_{tot} = K + U = \frac{1}{2}kA^2[\sin^2(\omega t + \phi) + cos^2(\omega t + \phi)]$

5.2 Pendolo

Per pendolo intendiamo un sistema composto da corpo di massa m attaccato all'estremità di un filo di lunghezza L, dove sono esercitate forza peso e conseguente tensione. La prima delle due forze è l'unica ad avere componente tangenziale, ed è quella che tende a riportare il pendolo all'angolazione $\theta = 0$, comportando la sua assunzione del ruolo di forza di richiamo. Applicando la seconda legge di Newton lungo la direzione tangenziale possiamo dire che:

$$F = ma \implies -mg\sin\theta = m\frac{d^2s}{dt^2}$$

Dove s è lo spostamento misurato lungo l'arco, ed il segno negativo è necessario per dire che punta verso la posizione di equilibrio. Inoltre, in quanto $s = L\theta$, possiamo sostituire, ottenendo:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta$$

Essendo poi le forze parallela e perpendicolare in relazione, come visto in precedenza, è possibile gestire le forze tramite il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} T - mgcos\theta = 0 \\ ma = mgsin\theta \end{cases}$$

5.3 Oscillatore armonico

5.4 Esercizi svolti

Chapter 6

Meccanica dei fluidi

6.1 Pressione e profondità

6.2 Spinta di Archimede

6.3 Dinamica dei fluidi

6.4 Equazione di Bernoulli e comportamento nei tubi

6.5 Esercizi svolti

Chapter 7

Termodinamica

7

Chapter 8

Onde

8