Algebra Lineare

Corso di Laurea in Informatica - Università degli studi di Verona

Federico Brutti

Federico Brutti
federico.brutti@studenti.univr.it

Indice

As the student approached the Linear Algebra exam, he stumbled upon a task: Calculate the determinant of the following matrix. The boy, puzzled by its form, asked: "Are you a row-echelon matrix because you have one pivot per column or do you have one pivot per column because you're a row-echelon matrix? And would you lose to the method of Gauss' elimination?" The matrix replied: "If you used matrix operations to simplify the calculations, you might give me a little trouble, but nah, I'd win." It proceeded to use DOMAIN EXPANSION: COMPLEX NUMBERS; almost making the student fall into despair. Indeed, trying to reduce its form with Gauss proved counter-productive. In his dying moments, the student uttered the phrase: "With this treasure I summon; always bet on Laplace". The determinant was trivially calculated with a series of cross-multiplications on the lines and columns that were not ignored and everyone would bare witness to the bare flesh of the one who is free; to the one who left it all behind. Him and his overwhelming utility!.

Numeri Complessi

1.1 Numeri immaginari e operazioni in $\mathbb{C}$

Il campo di lavoro dell'Algebra Lineare si espande anche nell'insieme numerico $\mathbb{C}$, ovvero quello dei numeri complessi ed il più grande fra tutti. Qui introduciamo le **unità immaginarie** i, grazie alle quali è possibile scrivere orrori Lovecraftiani come $i^2 = -1$, che potrà essere sempre sostituito a -1, dovessi trovarlo nei tuoi calcoli.
Ci è quindi possibile ottenere qualunque numero in qualunque situazione e da qui, infatti, il seguente teorema.

Teorema 1.1. Teorema Fondamentale dell'Algebra
Un'equazione polinomiale di grado n della forma $a_0 + a_1 z + ... + a_n z = 0$, dove a_n 0, ammette *n* soluzioni nell'insieme $\mathbb{C}$

Passiamo ordunque alle operazioni dell'insieme numerico. Oltre alle quattro elementari, sarà ancora possibile utilizzare potenze, radici e anche coordinate. In tutti gli esempi seguenti vale la scrittura $z_1 = (a + bi), z_2 = (c + di)$.

- *Addizione*: Raccogli *i* e somma tutto il resto.

  Esempio. $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
  $(6 + 7i) + (-12 + 17i) = (6 - 12) + (7 + 17)i = -6 + 24i$

- *Sottrazione*: Non dissimile dall'addizione, al sottraendo si negheranno gli elementi.

  Esempio. $z_1 - z_2 = (a + bi) + (-c - di) = (a - c) + (b - d)i$

- *Moltiplicazione*: La classica moltiplicazione fra polinomi.

  Esempio. $z_1 \times z_2 = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$

- *Divisione*: Una razionalizzazione, in sintesi.

  Esempio. $\frac{1+2i}{2-i} = \frac{1+2i}{2-i} \times \frac{2-i}{2-i} = \frac{2+i+4i+2i^2}{4+2i-2i-i^2} = \frac{8i}{8} = i$

Altri casi particolari di numeri sono:

- *Opposto*: Si dice tale quando sommato algebricamente ad un altro numero riporta 0 come risultato. $z_1 + z_2 = 0$

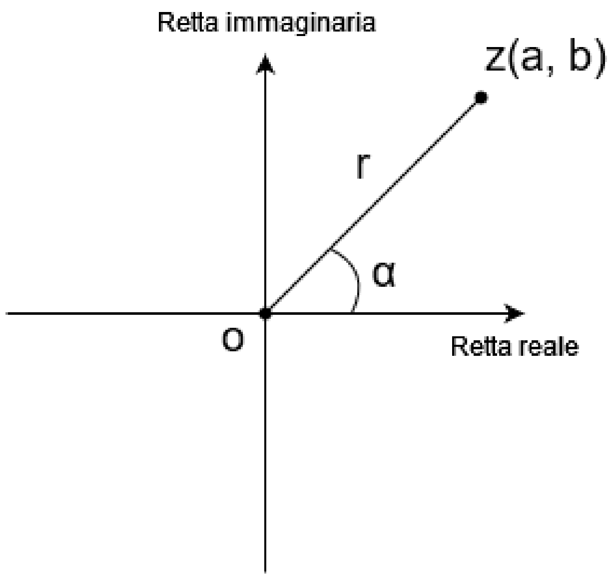
- *Coniugato*: Il numero complesso avente la stessa parte reale e parte immaginaria di segno opposto rispetto a *z*. $z = a + bi, \bar{z} = a - bi$

- *Modulo*: Il numero *z* maggiore di 0 che vale $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Nota. Seguono ora le relative proprietà di quanto appena visto:

- $z_1 \times \overline{z_1} = a^2 + b^2 = |z_1|^2$
- $\overline{z_1 + z_2} = (a + c) - (b + d)i$
- $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$
- $\frac{\overline{1}}{z_1} = \frac{1}{\overline{z_1}}, z \neq 0$
- $\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = \overline{z \times \frac{1}{z_2}} = \overline{z_1} \times \frac{1}{z_2} = \overline{z_1} \times \frac{1}{\overline{z_2}}, z_2 \neq 0$
- $\frac{1}{z_1} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{\overline{z_1}}{|z_2|^2}$

Osserviamo ora che per ogni numero complesso, quando messo su un piano di riferimento, le sue coordinate (a, b) rappresentano parte reale *a* e parte immaginaria *b*. Ci è quindi possibile lavorare sulle **coordinate polari** attraverso le formule trigonometriche.



- r = lunghezza del segmento $\overline{oz}$, ovvero il *raggio polare*.
- α = ampiezza dell'angolo.
- o = Origine del grafico.

Figura 1.1: Grafico delle coordinate polari

1.2 Forme dei Numeri Complessi

Possiamo ottenere la forma trigonometrica di un numero complesso attraverso la coppia delle coordinate. Per facilitare la comprensione è consigliato guardare il piano di lavoro.

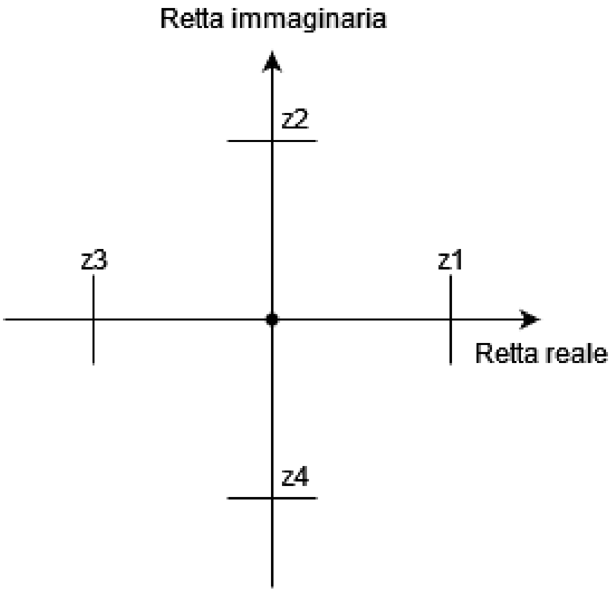


Figura 1.2: Valori nel piano cartesiano

Queste sono le **forme trigonometriche**; tuttavia a noi serve la forma algebrica, ottenibile utilizzando seno e coseno, ovvero:
$\sin(\alpha) = \frac{b}{r}$, $\cos(\alpha) = \frac{a}{r}$
$z = (r\cos(\alpha)) + (r\sin(\alpha))i = r(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$

- $z_1 = (1, 0) = 1$ -> $\cos(0) + i\sin(0)$
- $z_2 = (1, \frac{\pi}{2}) = i$ -> $\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2})$
- $z_3 = (1, \pi) = -1$ -> $\cos(\pi) + i\sin(\pi)$
- $z_4 = (1, \frac{3}{2}\pi) = -i$ -> $\cos(\frac{3}{2}\pi) + i\sin(\frac{3}{2}\pi)$

Similmente al comportamento delle funzioni trigonometriche, per moltiplicare due forme trigonometriche si utilizza la formula di duplicazione.

Esempio. $z_1 = r(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$, $z_2 = s(\cos(\beta) + i\sin(\beta))$
$$\begin{aligned} z_1 \times z_2 &= r \times s(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))(\cos(\beta) + i\sin(\beta)) \\ &= r \times s[(\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)) + (\cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta)i] \\ &= r \times s[\cos(\alpha + \beta) + \sin(\alpha + \beta)i] \end{aligned}$$

1.3 Formula di De Moivre e radici n-esime

Oltre alle quattro operazioni elementari ci è possibile lavorare anche con potenze e radici.

Teorema 1.2. Formula di De Moivre
Consente di calcolare la potenza di un numero complesso espresso in forma trigonometrica o esponenziale.

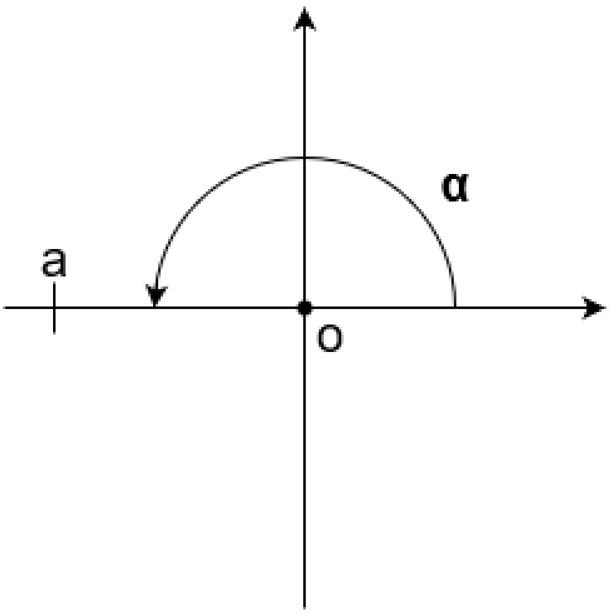
Esempio. $z = r(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)) \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$.
$z^n = r^n[\cos(n \times \alpha) + i\sin(n \times \alpha)]$

$z = \sqrt{3} + i$
$z = 2[\cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6})] = z^6 = 2^6[\cos(\pi) + i\sin(\pi)] = 2^6[-1 + i \times 0] = 2^6 \times -1 = -64$

Si dicono invece radici n-esime di *y* le soluzioni dell'equazione $x^n = y$, dove $y \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$. Esisteranno poi *n* radici n-esime complesse $z_0, z_1, ..., z_n$ di *y*. Verranno utilizzati come dati l'ampiezza α dell'angolo, il valore 2π per le radianti ed un numero *k* per consentire di "coprire"

ogni posizione della circonferenza nel piano; in pratica segna l'istanza di un determinato punto. Si scrivono come segue:
Se $y = r(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$, allora per $k = 0, 1, ..., n - 1$ vale la seguente scrittura:
$z_n = \sqrt[n]{r}[\cos(\frac{\alpha+k2\pi}{n}) + i\sin(\frac{\alpha+k2\pi}{n})$
Essendo inoltre nell'insieme $\mathbb{C}$, possono esistere anche le radici quadrate dei numeri negativi, come è anche possibile utilizzare la formula quadratica per trovare le soluzioni.

Teorema 1.3. Teorema delle Radici complesse
Sia $a \in \mathbb{R}$ tale che $a < 0$; esisteranno precisamente due radici quadrate di a in $\mathbb{C}$.



Il segmento $\overline{ao}$ svolge la medesima funzione di r ed in questo caso vale: $a = (-a)(\cos(\pi) + i\sin(\pi))$
E grazie al teorema delle radici otteniamo le due soluzioni desiderate:

- $z_0 = \sqrt{-a}(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2}) = i\sqrt{-a}$
- $z_1 = \sqrt{-a}(\cos(\frac{3}{2}\pi) + i\sin(\frac{3}{2}\pi) = -i\sqrt{a}$

Figura 1.3: Piano del segmento $\overline{ao}$

1.4 Domande di teoria

1. **Che cos'è un numero complesso? Qual è il suo insieme di definizione e quali elementi ha in più rispetto all'insieme R?**

   Per numero complesso si intende un dato valore i chiamato **Unità immaginaria**. Consente di ottenere risultati che in R risulterebbero impossibili. Detiene la seguente proprietà: $(0, 1) \times (1, 0) = (-1, 0)$, la quale dona la dinamica principale dell'insieme dei complessi: $i^2 = -1$.

   L'insieme di definizione dei numeri complessi C è un sovrainsieme di R.

2. **Che forme possono assumere i numeri complessi e in che modo si ottengono?**

   I numeri complessi possono assumere una **forma algebrica** ed una **forma trigonometrica**. La prima risulta utile quando bisogna effettuare calcoli letterali. Si scrive $z = a + bi$ e usa le seguenti formule:

   - $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + i(b + d)$.

- $(a + bi) \times (c + di) = (ac - bd) + i(ad + bc)$.

Per quanto riguarda la seconda forma, i punti del piano sono identificabili con coordinate cartesiane e polari. In merito alle seconde:

- **Raggio polare**; Semiretta ottenuta tracciando una linea da un dato punto fino all'origine.
- **Angolo polare**; Angolo la cui ampiezza è ottenuta tracciando un semicerchio partendo dall'asse positivo e terminando sul punto.

Si scrive $z = \rho(a + bi)$, dove:

- $a = cos(\Theta)$.
- $b = sin(\Theta)$.

3. **Cosa si intende per coniugato e modulo di un numero complesso?**
   - Coniugato di z; $\bar{z} = a - bi$
   - Modulo di z; $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
4. **Enunciare la formula di De Moivre.**

   La formula di De Moivre consente di ottenere la potenza di un numero complesso espresso in forma trigonometrica. $z^n = r^n(cos(n \times \alpha) + isin(n \times \alpha))$.
5. **Cosa si intende per radici n-esime?**

   Dato un numero complesso y, esistono n radici n-esime complesse $z_0, z_1, ..., z_n$ di y. Inoltre, se in forma trigonometrica, le radici si presenteranno nella seguente forma per $k = 0, ..., n - 1$: $z_k = \sqrt[n]{r} \times (cos(\frac{\alpha+k2\pi}{n}) + isin(\frac{\alpha+k2\pi}{n}))$
6. **Enunciare il teorema fondamentale dell'algebra.**

   Dato un qualsiasi polinomio $p(x)$ a coefficienti complessi di grado maggiore o uguale a 1, avrà almeno una radice complessa. Il polinomio è di forma:

   $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, con $n \geq 1$.

1.5 Argomenti

1.1 Insiemi di numeri 1.1 Numeri immaginari 1.1 Operazioni tra numeri complessi (addizione, moltiplicazione, sottrazione, divisione + teorema fondamentale dell'algebra) 1.1 Coniugato e modulo 1.2 Coordinate polari 1.2 Forma trigonometrica di un numero complesso 1.2 Prodotto di numeri complessi in forma trigonometrica 1.3 La Formula di De Moivre 1.3 Definizione: radici n-esime 1.3 Teorema sulle radici n-esime 1.3 Radici quadrate di numeri reali negativi

Sistemi Lineari, Vettori e Matrici

2.1 Equazioni, sistemi e operazioni

Risoluzione di sistemi lineari, inoltre

2.2 Metodo di Eliminazione di Gauss

2.3 Rango e Teorema di Roché-Capelli

2.4 Esercizi

1. **Che cos'è un sistema lineare e come si risolve?**
2. **Cosa sono i vettori e che operazioni è possibile effettuare con loro? Come puoi scriverci la soluzione di un sistema?**
3. **In che modo un sistema lineare di equazioni si può scrivere in una matrice? Che operazioni hanno luogo fra matrici e vettori?**
4. **In che modo si trovano le soluzioni di una matrice?**
5. **Che cos'è il rango e come si utilizza nel teorema di Rouché-Capelli?**
6. **In che cosa consiste l'algoritmo di eliminazione di Gauss?**

2.5 Argomenti

2.1 Sistemi lineari (esempio, definizione, sistema lineare omogeneo, soluzione) 2.1 Matrici (definizione, coefficienti/entrate, Mm×n(C), Mm×n(R)) 2.1 Forma matriciale (matrice dei coefficienti, vettore delle incognite, vettore dei termini noti, matrice aumentata) 2.1 Operazioni elementari: Scambiare righe, moltiplicare una riga per uno scalare non nullo, sommare una riga con un multiplo di un altra riga. 2.1 Linee in R2: 1, 0 o ∞ soluzione. 2.2 Metodo dei eliminazione di Gauss (EG). Definizioni di pivot, forma ridotta e colonne dominanti. 2.2 Risoluzione di un sistema lineare. Definizioni di variabile dominante e variabile libera. Ogni sistema ha 1, 0 o ∞ soluzione. 2.3 Definizione rango. 2.3 Teorema di Roche-Capelli

Algebra delle Matrici

3.1 Operazioni Matriciali

3.2 Tipologie di Matrici

Quadrata, elementare, invertibili, inverse, formule per l'inversa di una matrice

3.3 Matrici invertibili

3.4 Domande di teoria

1. **Che cosa e quali sono le operazioni matriciali?**
2. **Quali sono i vari tipi di matrice?**
3. **Che cosa rende una matrice invertibile e come si ottiene?**
4. **Che cosa si intende per matrice trasposta? Quali sono le proprietà di questa forma?**

3.5 Argomenti

3.1 Definizione e propriet'a: somma di due matrici 3.1 Definizione e propriet'a: prodotto di una matrice per uno scalare 3.1 Definizione e propriet'a: trasposta di una matrice 3.1 Definizione e propriet'a: prodotto di due matrici 3.1 Osservazione: sistema lineare in forma matriciale 'e un prodotto di matrici 3.2 Definizioni: matrice quadrata, matrice diagonale, matrice triangolare inferiore/superiore 3.2 Matrici elementari 3.2 Moltiplicazione con matrici elementari
3.3 MATRICI INVERTIBILI 3.3 Definizione: matrice invertibile 3.3 Inverse di matrici elementari 3.3 Proposizione: un sistema lineare Ax = b 'e equivalente al sistema lineare U x = c dove (U |c) 'e una forma ridotta di (A|b). 3.3 Proposizione: un sistema lineare ammette una soluzione se e solo se il rango 'e massimo 3.3 Formula per l'inversa 3.3 Proposizione: invertible se e solo se esiste una sequenza di matrici elementari 3.3 Il calcolo della matrice inversa 3.3 Teorema della matrice invertibile

Spazi e Sottospazi Vettoriali

4.1 Lo spazio Vettoriale

4.2 Combinazione Lineare, Insieme di Generatori

4.3 Il Sottospazio Vettoriale

Anche intersezione e somma di sottospazi

4.4 Spazio delle Colonne e Spazio Nullo

4.5 Esercizi

4.1 Definizione di spazio vettoriale 4.1 Osservazioni 4.2 Definizione: combinazione lineare 4.2 Definizioni: insieme di generatori, finitamente generato 4.3 Definizione: sottospazio 4.3 Definizione: sottospazio generato da un insieme 4.3 Definizione: intersezione e somma di sottospazi 4.4 Definizione: spazio delle colonne 4.4 Proposizione: spazio delle colonne e sistemi lineari 4.4 Definizione: spazio nullo 4.4 Proposizione: spazio nullo ‘e un sottospazio

Il Determinante

5.1 Definizione e calcolo

Il **Determinante** di una matrice è un numero utile per la descrizione di alcune proprietà algebriche e e geometriche della stessa. Si ottiene di base in questi tre modi:

Definizione 5.1. Calcolo del determinante di una matrice
Chiariamo che serve necessariamente avere una matrice quadrata, dove n indica il numero di righe o colonne.

- Se $n = 1$, la matrice avrà una singola entrata.
  $A = (a)$, $det A = a$.
- Se $n = 2$, la matrice avrà quattro entrate
  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $det A = ad - bc$.
- Se $n \geq 3$, la matrice avrà nove entrate o più. Vale la formula generale
  $A = (a_{ij})_{1 \leq ij \leq n}$, $det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \times a_{1j} \times det A_{1j}$.
  Dove A_{1j} è la matrice ottenuta da A cancellando la prima riga e la colonna j. Tuttavia siccome la scrittura del terzo caso è illeggibile (Cristo ti sfido a capirla), propongo un esempio pratico.

Esempio. Calcolo del determinante di una matrice A dove $n = 3$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Tieni a mente la formula e sostituisci:

$$det A = (-1)^{1+1} \times 1_{11} \times \; det \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ \cancel{0} & 1 & 3 \\ \cancel{1} & 2 & 0 \end{pmatrix} + (-1)^{2+1} \times 2_{12} \times \; det \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ 0 & \cancel{1} & 3 \\ 1 & \cancel{2} & 0 \end{pmatrix} + (-1)^{3+1} \times 3_{13} \times$$

$$det \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ 0 & 1 & \cancel{3} \\ 1 & 2 & \cancel{0} \end{pmatrix} = +1 \times 1(1 \times 0) - (2 \times 3)] + [-2 \times 2(0 \times 0) - (1 \times 3)] + [1 \times 3(0 \times 2) - (1 \times 1)] =$$

$$-6 + 6 - 3 = -3$$

So che può sembrare un casino, ma se lo leggi piano e con calma potrai capirne i segreti.

Tuttavia quello del calcolo del determinante è un processo particolarmente tedioso, ed è per questo che introduciamo i due teoremi seguenti.

5.1.1 Teorema di Sarrus

A detta del Dr. Er Lucertola, nemmeno Sarrus usava Sarrus, ma nel caso in cui ti trovassi davanti ad una matrice quadrata 3x3, riesce a semplificare di molto i calcoli attraverso il seguente algoritmo:

Definizione 5.2. Teorema di Sarrus
Data una matrice quadrata 3x3, è possibile calcolare il determinante attraverso la formula:

$$\det A = (a_{11} \times a_{22} \times a_{33}) + (a_{12} \times a_{23} \times a_{31}) + (a_{13} \times a_{21} \times a_{32}) - (a_{13} \times a_{22} \times a_{31}) - (a_{11} \times a_{23} \times a_{32}) - (a_{12} \times a_{21} \times a_{33}).$$

In forma matriciale, dove $+$ indica gli elementi da sommare e $-$ quelli da sottrarre, per una visione più chiara:

$$\begin{pmatrix} +a_{11} & +a_{12} & +a_{13}- \\ a_{21} & +a_{22}- & +a_{23}- \\ a_{31}- & a_{32}- & +a_{33}- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}- & a_{12}- \\ +a_{21}- & a_{22} \\ +a_{31} & +a_{32} \end{pmatrix}$$

Qua è da trovare una forma per mostrarlo diversa, sai.

Esempio. Calcolo del determinante di una matrice mediante il teorema di Sarrus

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$detA = 0 + 6 + 0 - 3 - 6 - 0 = -3$$

Che è corretto.

5.1.2 Teorema di Laplace

L'algoritmo di Laplace è invece universalmente utile, per questo è il più forte, mio padre. Vale per ogni matrice quadrata nxn e il determinante può essere sviluppato per ogni riga o colonna.

Definizione 5.3. Algoritmo di Laplace
Data una qualunque matrice quadrata nxn, è possibile ottenere il determinante di una matrice A in uno di questi due modi:

- Se sviluppi per riga i

  INSERISCI FORMULA

- Se sviluppi per colonna j

  INSERISCI FORMULA

MANCA TUTTO IL RESTO.

5.2 Utilizzi del determinante

5.3 Esercizi

5.1.2 Teorema di Laplace
5.2 UTILIZZI DEL DETERMINANTE 5.2 Determinante e la trasposta 5.2 Proposizione: Det di matrici triangolari 5.2 Teorema: Det di un prodotto con una matrice elementare 5.2 Corollario: invertibile se e solo se Det non-nullo 5.2 Corollario: Det di un prodotto di matrici 5.2 Teorema: invertibile se e solo se Det non-nullo (2x2) 5.2 La regola di Cramer

Applicazioni Lineari

6.1 Dipendenza e Indipendenza Lineare

§6. Dipendenza e indipendenza lineare (vedi [GS, Capitolo II]) 6.1 Proposizione 6.2 Definizione: linearmente dipendente 6.3 Teorema: linear indipendenza 6.4 Definizione: base 6.5 Osservazione: base ‘e come un sistema di coordinate 6.6 Base di C(U), U una matrice in forma ridotta 11/04/24 6.7 Proposizione: base, insieme di generatori minimo, insieme massimamente linearmente indipen- dente 6.8 Teorema: esistenza della base 6.9 Teorema di Steinitz: ogni insieme linearmente indipendente pu‘o essere completato a una base 6.10 Corollario: ogni base ha lo stesso numero di elementi 6.11 Definizione: dimensione 6.12 Corollario 6.13 Proposizione: dimensioni di sottospazi

6.2 Applicazioni Lineari

§7. Applicazioni lineari (vedi [GS, Capitolo II]) 7.1 Definizione: applicazione lineare 7.2 Esempi e matrice associata a un’applicazione lineare (rispetto alla base canonica) 15/04/24 7.3 Definizione: isomorfismo 7.4 Definizione: applicazione delle coordinate rispetto a una base 7.5 Applicazione delle coordinate Kn → Kn 7.6 Teorema: l’applicazione delle coordinate ‘e un isomorfismo 7.7 Osservazione: isomorfismi e dimensione 7.8 Corollario: due spazi vettoriali sono isomorfismi se e solo se hanno la stessa dimensione 18/04/24 7.9 Teorema e definizione: matrice del cambio di base 7.10 Teorema e definizione: matrice associata a f rispetto a basi

6.3 Rango e Nullità

§8. Rango e nullit‘a (vedi [GS, Capitolo II]) 8.1 Spazio nullo e immagine di un’applicazione lineare 22/04/24 8.2 Teorema: nullit‘a + rango 8.3 Dimensione di C(A) 8.4 Dimensione di N (A) 8.5 Procedimento per determinare basi di C(A) e N (A) 8.6 Proposizione e definizione: rango di un’applicazione lineare 8.7 Teorema: insieme di soluzioni di un sistema lineare

6.4 Esercizi

Autovalori e Autovettori

7.1 Definizione

§9. Autovalori e autovettori (vedi [GS, Capitolo V]) 9.1 Definizione: autovalore e autovettore 9.2 Osservazione: autovettori sono soluzioni di un sistema lineare

7.2 Polinomio caratteristico

9.3 Definizione: polinomio caratteristico 9.4 Teorema: autovalori sono radici e autovettori sono elementi di spazi nulli (autospazi) 9.5 Corollario: matrici su C possiedono autovalori 9.6 Definizioni: autospazio, moltiplicit'a algebrica e geometrica 9.7 Osservazione: se esiste una base B formata di autovettori di A, allora la matrice associata a A rispetto a B nel dominio e codominio 'e diagonale. 9.8 Proposizione: autovettori linearmente indipendenti 9.9 Definizioni: matrici simili, matrice diagonalizzabile

7.3 Esercizi

Spazi euclidei

8.1 Diagonalizzazione di una Matrice

§10. Diagonalizzazione di una matrice (vedi [GS, Capitolo V]) 10.1 Proposizione: Propriet‘a delle matrici simili 10.2 Teorema: diagonalizabile se e solo se esiste una base di autovettori 10.3 Corollario: autovettori distinti diagonalizzabile 10.4 Osservazione: non ‘e necessario 10.5 Lemma 10.6 Teorema: condizioni per diagonalizzabilit‘a 09/05/24 10.7 Algoritmo per diagonalizzazione 10.8 Osservazione: diagonalizzazione su R 10.9 Teorema Spettrale

8.2 Basi Ortonormali

§11. Basi ortonormali (vedi [GS, Capitolo III]) 11.1 Definizione: matrice coniugata, H-trasposta e prodotto interno 11.2 Definizione: norma (euclidea) 11.3 Interpretazione geometrica in R2 11.4 Definizione: ortogonale 11.5 Proposizione: insieme ortogonale ‘e linearmente indipendente 11.6 Osservazione: coefficienti per base ortogonale 23/05/24 11.7 Definizione: ortonormale 11.8 Algoritmo di Gram-Schmidt 11.9 Corollario: ogni sottospazio possiede una base ortonormale

8.3 Esercizi

As the student approached the Linear Algebra exam, he stumbled upon a task: Calculate the determinant of the following matrix. The boy, puzzled by its form, asked: "Are you a row-echelon matrix because you have one pivot per column or do you have one pivot per column because you're a row-echelon matrix? And would you lose to the method of Gauss' elimination?" The matrix replied: "If you used matrix operations to simplify the calculations, you might give me a little trouble, but nah, I'd win." It proceeded to use DOMAIN EXPANSION: COMPLEX NUMBERS; almost making the student fall into despair. Indeed, trying to reduce its form with Gauss proved counter-productive. In his dying moments, the student uttered the phrase: "With this treasure I summon; always bet on Laplace". The determinant was trivially calculated with a series of cross-multiplications on the lines and columns that were not ignored and everyone would bare witness to the bare flesh of the one who is free; to the one who left it all behind. Him and his overwhelming utility!.

Bibliografia

[1] T.M. Apostol. *Introduction to Analytic Number Theory.* Undergraduate Texts in Mathematics. Springer New York, 1998.

[2] Tom M Apostol. *Mathematical analysis; 2nd ed.* Addison-Wesley series in mathematics. Addison-Wesley, Reading, MA, 1974.

[3] The riemann zeta function and tate's thesis, 2021-07-01.