- Analisi Matematica II -

Federico Brutti

March 14, 2025

Inserire citazione inerente alla materia

Contents

Chapter 1

Equazioni Differenziali

1.1 Modelli differenziali

Passiamo da uno studio numerico ad uno particolarmente più astratto. Analisi matematica 2 è una materia molto importante non solo per consolidare le nozioni del predecessore che compongono il toolset necessario per lavorare qui, ma anche perché renderà il resto delle materie di stampo matematico più comprensibili e approcciabili.

Iniziamo riprendendo le funzioni; ne hai viste di ogni tipo, da sole, composte, inverse etc... e adesso lavorerai con famiglie di funzioni.

Definizione 1. ***Equazione differenziale ordinaria***
Definiamo equazione differenziale di ordine n un'equazione del tipo:

$$F(t, y, y', y'', ..., y^n)$$

Dove $y(t)$ è la funzione incognita ed F è una funzione assegnata delle $n+2$ variabili $(t, y, y', y'', ..., y^n)$ a valori reali. Diremo inoltre il suo ***ordine*** *l'ordine massimo di derivata che compare.*

Come potrai immaginare, l'esistenza di un'equazione implica l'esistenza di una soluzione. Non sarà bello, ma per ottenerla sarà necessario l'aiuto degli integrali.

Definizione 2. ***Curva integrale dell'equazione differenziale***
Diciamo curva integrale o soluzione dell'equazione nell'intervallo $I \subset \mathbb{R}$ una funzione $\phi(t)$, definita almeno in I e a valori reali, per cui risulti:

$$F(t, \phi(t), \phi'(t), \phi''(t), ..., \phi^n(t)) = 0,\ \forall t \in I$$

*In merito, ci servirà ottenere l'****integrale generale****, ovvero una formula che rappresenti la famiglia di tutte le soluzioni dell'equazione.*

Concetti di base ottenuti; benvenuto in analisi matematica 2.

1.2 Equazioni differenziali del primo ordine

Definizione 3. ***Equazione differenziale del primo ordine***
Si dice tale qualunque equazione differenziale si presenti con un'incognita, una funzione e una singola derivata. Avrà infatti la forma:

$$F(t, y, y') = 0, \textit{ con } F \textit{ funzione assegnata di } t, y, y' \textit{ a valori reali}$$

Tali equazioni si risolvono attraverso l'integrazione delle stesse. Queste prenderanno una forma generale del tipo:

$$y'(t) = f(t), \textit{ con soluzioni } y(t) = \int f(t)dt + c, \textit{ dove } c \in \mathbb{R}$$

Essendo che l'equazione ha infinite curve integrali distinte dalla costante arbitraria c, ne traiamo che l'insieme delle soluzioni di un'equazione differenziale del primo ordine è costituito da più funzioni, dipendenti dal parametro $c : t \to \phi(t; c)$. Questa scrittura è l'**integrale generale** menzionato prima.

Qua sorge una domanda importante: sarebbe possibile determinarne una curva integrale precisa? Il quesito ha soluzione nell'aggiunta della **condizione di Cauchy**, da qui in poi riferita come *restrizione.* Infatti, applicandola all'integrale generale di un'equazione differenziale, ci consente di determinare il valore della costante arbitraria in sua funzione. Questa aggiunta forma il sovramenzionato costrutto:

Definizione 4. ***Problema di Cauchy***
Chiamiamo problema di Cauchy il processo risolutivo di un'equazione differenziale che detiene una condizione supplementare, con lo scopo ultimo di trovare una soluzione precisa. Assume la forma:

$$\begin{cases} F(t, y, y') = 0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Osserviamo le modalità di risoluzione dei suddetti problemi. Per quanto riguarda il lavoro sulle equazioni differenziali si tratta sempre di determinare prima la curva integrale, per poi applicare ad essa la restrizione del problema.

Esempio 1. ***Risolvere il seguente problema di Cauchy***

$$\begin{cases} y' = -e^{-x} \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

Per prima cosa è necessario trovare la curva integrale dell'equazione differenziale, quindi procediamo con l'integrazione.

$$\int -e^{-x}dx = e^{-x} + c$$

Abbiamo trovato la soluzione generale. Non basta: troviamo quel valore della costante c in funzione della condizione per far sì che torni. Per applicarla, sostituiamo alle x il valore 0 e poniamo l'equazione uguale a 3:

$$e^{-0} + c = 3 \implies 1 + c = 3 \implies c = 2$$

Abbiamo trovato il valore richiesto. Sostituiamolo alla costante nella soluzione generale dell'equazione differenziale per trovare la specifica.

$$Soluzione : y(x) = e^{-x} + 2$$

Lavorando con questo costrutto è cosa buona e giusta ordinare gli elementi dell'equazione. La forma standard più chiara, detta **forma normale**, vede la derivata uguale al resto dei dati, ovvero:

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

Il procedimento osservato per i problemi di Cauchy è generale e varrà per tutti gli argomenti ad esso inerenti, seppur si possano trovare alcune differenze per i casi particolari trattati nelle successive sezioni.

1.2.1 Equazioni a variabili separabili

Definizione 5. ***Equazioni differenziali a variabili separabili***
Questo è un caso particolare di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine. La derivata è data dal prodotto di due funzioni a, b, la prima continua su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ e la seconda su un intervallo $J \subset \mathbb{R}$. Si presentano nella forma:

$$y' = a(t)b(y)$$

Da questa definizione, vedendo che si parla di prodotti, è necessario distinguere due istanze di lavoro:

- Se il numero $\overline{y}$ è una soluzione dell'equazione $b(y) = 0$, la funzione costante $y(t) = \overline{y}$ è una soluzione valida, detta **integrale singolare**. Il secondo membro si annulla perché $b(\overline{y}) = 0$, come anche il primo, perché la derivata di una costante è 0.

- Supponendo $b(y) \neq 0$ abbiamo il seguente caso più comune ed elaborato, ovvero la forma:

$$a(t) = \frac{y'}{b(y)}$$

È necessario ampliare il discorso sul secondo caso. Prendiamo un'ipotetica soluzione $y(t)$, allora l'equazione soddisferà la seguente identità, la quale prendendo gli integrali definiti di ambo i membri fa ottenere:

$$\frac{y'(t)}{b(y(t))} = a(t) \implies \int \frac{y'(t)}{b(y(t))} dt = \int a(t) dt + c$$

Nell'integrale di sinistra è consentito effettuare un cambio di variabile $y = y(t); dy = y'(t)dt$, ottenendo:

$$\int \frac{dy}{b(y)} = \int a(t) dt + c$$

Che risulta essere l'integrale generale dell'equazione differenziale.

Inoltre, se la funzione $B(y)$ è una primitiva di $\frac{1}{b(y)}$ e $A(t)$ una primitiva di $a(t)$, allora l'integrale generale è assegnato dalla seguente equazione in **forma implicita**:

$$B(y) = A(t) + c, \text{ con } c \text{ costante arbitraria.}$$

Adesso ragioniamo; in che modo il problema di Cauchy si adatta a questo tipo di equazioni? Abbiamo una forma apposita:

Teorema 1. ***Problema di Cauchy per ED a variabili separabili***

$$\begin{cases} y' = a(t)b(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Dove a è continua in un intorno I di t_0 e b è continua in un intorno J di y_0. Esisteranno quindi:

- *Intorno $I' \subset I$ di t_0.*
- *Funzione continua y definita su I'.*
- *Funzione derivata y' continua su I', soluzione del problema.*

Inoltre, se anche b' è una funzione continua su J oppure b ha un rapporto incrementale[1] *limitato in J (anche se non è derivabile), allora la soluzione è* ***unica****.*

Esempio 2. ***Risolvere il problema di Cauchy***

$$\begin{cases} y' = ty^3 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

1. ***Calcola l'integrale generale dell'equazione differenziale***
   Anzitutto, poniamo $y \neg 0$, poiché a noi serve trovare l'integrale generale, non quello singolare. Procediamo con la separazione delle variabili:

   $$y' = ty^3 \implies \frac{dy}{dt} = ty^3 \implies \frac{dy}{y^3} = tdt$$

   Adesso possiamo procedere ad integrare le due parti distinte, quindi:

   $$\int \frac{dy}{y^3} = \int tdt + c \implies -\frac{1}{2y^2} = \frac{t^2}{2} + c$$

   Effettuiamo i passaggi algebrici per ricavare la funzione y:

   - $-\frac{1}{2y^2} = \frac{t^2}{2} + c \implies \left(-\frac{1}{2y^2}\right)^{-1} = \left(\frac{t^2}{2} + c\right)^{-1}$
   - $-2y^2 = \frac{2}{t^2 + 2c} \implies -y^2 = \frac{1}{t^2 + 2c} \implies y^2 = -\frac{1}{t^2 - 2c}$

   Che porta infine ad avere la soluzione generale:

   $$y = \pm \frac{1}{\sqrt{-2c - t^2}}$$

2. ***Imponi la condizione di Cauchy***
   Notiamo che il valore posto della condizione è positivo, di conseguenza la soluzione di y è tale che appartiene all'intervallo $(0, +\infty)$ e considereremo solamente la radice positiva della soluzione generale.

   Detto ciò, determiniamo il valore di $y(t)$ applicando la condizione; per renderci la vita ulteriormente facile, applichiamo una piccola sostituzione sulla costante. D'altronde è arbitraria. Dopodiché diamole il valore della condizione.

[1] Inserire spiegazione

$$\textit{for } k = -2c \implies y(t) = \frac{1}{\sqrt{k - t^2}} \implies y(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}$$

Soluzione specifica dell'equazione.

1.2.2 Equazioni lineari del primo ordine

Tipo di equazioni differenziali ordinarie, dove F è lineare in y e y', le cui soluzioni sono espresse mediante uno spazio vettoriale di dimensione 1. Si presentano nella forma:

$$a_1(t)y'(t) + a_2(t)y(t) = g(t)$$

Con a_1, a_2 funzioni continue su un intervallo. Anch'esse detengono una forma normale, ottenibile se il coefficiente $a_1(t)$ non si annulla.

$$y'(t) + a(t)y(t) = f(t)$$

Anche qui a ed f sono continue sull'intervallo $I \subset R$.

Diciamo inoltre:

- **Equazione completa** se f non è identicamente nulla; la soluzione si ottiene aggiungendo al suo integrale generale una sua soluzione particolare.

- **Equazione omogenea** se $f \equiv 0$; la soluzione è generalmente indicata con le z, quindi: $z'(t) + a(t)z(t) = 0$.

Capiamo quindi che il procedimento da attuare si compone di due passi: prima la ricerca di un integrale generale dell'equazione omogenea, poi trovare la soluzione particolare da aggiungere a quella completa.

La **ricerca della soluzione dell'equazione omogenea** inizia moltiplicando ambo i membri dell'equazione per $e^{A(t)}$, dove $A(t)$ è una primitiva di $a(t)$, quindi vale $A'(t) = a(t)$.

$$z'(t) + a(t)z(t) = 0 \implies z'(t)e^{A(t)} + a(t)z(t)e^{A(t)} = 0 \equiv [z(t)e^{A(t)}]'$$

Ne ricaviamo che: $z(t) = ce^{A(t)} \implies z(t) = ce^{\int a(t)dt}$ e avremo che la forma della soluzione, dove z_0 è una soluzione particolare, sarà:

$$z = cz_0$$

La **ricerca della soluzione particolare dell'equazione completa** si effettua attraverso il metodo generale di **variazione delle costanti**. L'idea è trovare una soluzione simile all'equazione legando la costante alla variabile t, facendola diventare la funzione $c(t)$. Cercheremo quindi la soluzione di forma:

$$\overline{y}(t) = C(t)e^{-A(t)}$$

Il nostro compito è determinare la $c(t)$ tale che la funzione $\overline{y}$ risulti la soluzione dell'equazione completa. Andiamo per passi:

- Otteniamo:

$$\overline{y}'(t) = c'(t)e^{-A(t)} - c(t)a(t)e^{-A(t)}$$

- Inserendo le corrispondenti informazioni nell'equazione completa otteniamo:

$$e^{-A(t)}[c'(t) - c(t)a(t)] + a(t)C(t)e^{-A(t)} = f(t) \implies e^{-A(t)}C'(t) = f(t)$$

- Da cui $C'(t) = f(t)e^{A(t)}$ e quindi:

$$c(t) = \int f(s)e^{A(s)}ds$$

1.3 Equazioni differenziali lineari del secondo ordine

Comprende "Generalità", "Struttura dell'integrale generale"

1.3.1 Equazioni lineari omogenee a coeffcienti costanti

1.3.2 Equazioni lineari non omogenee a coefficienti costanti

Comprende "Metodo di somiglianza"

Chapter 2

Calcolo Infinitesimale

2.1 Pisellp

Assurdo fra finalmente un editor offline

Chapter 3

Calcolo Differenziale

3.1 Pisellp2

Incredibile, eccezionale

Chapter 4

Calcolo integrale

4.1 Pisellp3

Chapter 5

Campi Vettoriali

5.1 Pisellp6

Chapter 6

Serie di Fourier

6.1 PisellpFinale