- Analisi Matematica II -

Federico Brutti

March 28, 2025

"Qui c'è da applicare un procedimento matematico molto importante; si chiama porconare" - Franco Z.

Contents

Chapter 1

Equazioni Differenziali

1.1 Modelli differenziali

Passiamo da uno studio numerico ad uno particolarmente più astratto. Analisi matematica 2 è una materia molto importante non solo per consolidare le nozioni del predecessore che compongono il toolset necessario per lavorare qui, ma anche perché renderà il resto delle materie di stampo matematico più comprensibili e approcciabili.

Iniziamo riprendendo le funzioni; ne hai viste di ogni tipo, da sole, composte, inverse etc... e adesso lavorerai con famiglie di funzioni.

Definizione 1. ***Equazione differenziale ordinaria***
Definiamo equazione differenziale di ordine n un'equazione del tipo:

$$F(t, y, y', y'', ..., y^n)$$

Dove $y(t)$ è la funzione incognita ed F è una funzione assegnata delle $n+2$ variabili $(t, y, y', y'', ..., y^n)$ a valori reali. Diremo inoltre il suo ***ordine*** *l'ordine massimo di derivata che compare.*

Come potrai immaginare, l'esistenza di un'equazione implica l'esistenza di una soluzione. Non sarà bello, ma per ottenerla sarà necessario l'aiuto degli integrali.

Definizione 2. ***Curva integrale dell'equazione differenziale***
Diciamo curva integrale o soluzione dell'equazione nell'intervallo $I \subset \mathbb{R}$ una funzione $\phi(t)$, definita almeno in I e a valori reali, per cui risulti:

$$F(t, \phi(t), \phi'(t), \phi''(t), ..., \phi^n(t)) = 0, \forall t \in I$$

*In merito, ci servirà ottenere l'**integrale generale**, ovvero una formula che rappresenti la famiglia di tutte le soluzioni dell'equazione.*

Concetti di base ottenuti; benvenuto in analisi matematica 2.

1.2 Equazioni differenziali del primo ordine

Definizione 3. ***Equazione differenziale del primo ordine***
Si dice tale qualunque equazione differenziale si presenti con un'incognita, una funzione e una singola derivata. Avrà infatti la forma:

$$F(t, y, y') = 0, \textit{ con } F \textit{ funzione assegnata di } t, y, y' \textit{ a valori reali}$$

Tali equazioni si risolvono attraverso l'integrazione delle stesse. Queste prenderanno una forma generale del tipo:

$$y'(t) = f(t), \textit{ con soluzioni } y(t) = \int f(t)dt + c, \textit{ dove } c \in \mathbb{R}$$

Essendo che l'equazione ha infinite curve integrali distinte dalla costante arbitraria c, ne traiamo che l'insieme delle soluzioni di un'equazione differenziale del primo ordine è costituito da più funzioni, dipendenti dal parametro $c : t \to \phi(t; c)$. Questa scrittura è l'**integrale generale** menzionato prima.

Qua sorge una domanda importante: sarebbe possibile determinarne una curva integrale precisa? Il quesito ha soluzione nell'aggiunta della **condizione di Cauchy**, da qui in poi riferita come *restrizione.* Infatti, applicandola all'integrale generale di un'equazione differenziale, ci consente di determinare il valore della costante arbitraria in sua funzione. Questa aggiunta forma il sovramenzionato costrutto:

Definizione 4. ***Problema di Cauchy***
Chiamiamo problema di Cauchy il processo risolutivo di un'equazione differenziale che detiene una condizione supplementare, con lo scopo ultimo di trovare una soluzione precisa. Assume la forma:

$$\begin{cases} F(t, y, y') = 0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Osserviamo le modalità di risoluzione dei suddetti problemi. Per quanto riguarda il lavoro sulle equazioni differenziali si tratta sempre di determinare prima la curva integrale, per poi applicare ad essa la restrizione del problema.

Esempio 1. ***Risolvere il seguente problema di Cauchy***

$$\begin{cases} y' = -e^{-x} \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

Per prima cosa è necessario trovare la curva integrale dell'equazione differenziale, quindi procediamo con l'integrazione.

$$\int -e^{-x}dx = e^{-x} + c$$

Abbiamo trovato la soluzione generale. Non basta: troviamo quel valore della costante c in funzione della condizione per far sì che torni. Per applicarla, sostituiamo alle x il valore 0 e poniamo l'equazione uguale a 3:

$$e^{-0} + c = 3 \implies 1 + c = 3 \implies c = 2$$

Abbiamo trovato il valore richiesto. Sostituiamolo alla costante nella soluzione generale dell'equazione differenziale per trovare la specifica.

$$Soluzione : y(x) = e^{-x} + 2$$

Lavorando con questo costrutto è cosa buona e giusta ordinare gli elementi dell'equazione. La forma standard più chiara, detta **forma normale**, vede la derivata uguale al resto dei dati, ovvero:

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

Il procedimento osservato per i problemi di Cauchy è generale e varrà per tutti gli argomenti ad esso inerenti, seppur si possano trovare alcune differenze per i casi particolari trattati nelle successive sezioni.

1.2.1 Equazioni a variabili separabili

Definizione 5. *Equazioni differenziali a variabili separabili*
Questo è un caso particolare di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine. La derivata è data dal prodotto di due funzioni a, b, la prima continua su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ e la seconda su un intervallo $J \subset \mathbb{R}$. Si presentano nella forma:

$$y' = a(t)b(y)$$

Da questa definizione, vedendo che si parla di prodotti, è necessario distinguere due istanze di lavoro:

- Se il numero $\overline{y}$ è una soluzione dell'equazione $b(y) = 0$, la funzione costante $y(t) = \overline{y}$ è una soluzione valida, detta **integrale singolare**. Il secondo membro si annulla perché $b(\overline{y}) = 0$, come anche il primo, perché la derivata di una costante è 0.

- Supponendo $b(y) \neq 0$ abbiamo il seguente caso più comune ed elaborato, ovvero la forma:

$$a(t) = \frac{y'}{b(y)}$$

È necessario ampliare il discorso sul secondo caso. Prendiamo un'ipotetica soluzione $y(t)$, allora l'equazione soddisferà la seguente identità, la quale prendendo gli integrali definiti di ambo i membri fa ottenere:

$$\frac{y'(t)}{b(y(t))} = a(t) \implies \int \frac{y'(t)}{b(y(t))} dt = \int a(t)dt + c$$

Nell'integrale di sinistra è consentito effettuare un cambio di variabile $y = y(t); dy = y'(t)dt$, ottenendo:

$$\int \frac{dy}{b(y)} = \int a(t)dt + c$$

Che risulta essere l'integrale generale dell'equazione differenziale.

Inoltre, se la funzione $B(y)$ è una primitiva di $\frac{1}{b(y)}$ e $A(t)$ una primitiva di $a(t)$, allora l'integrale generale è assegnato dalla seguente equazione in **forma implicita**:

$$B(y) = A(t) + c, \text{ con } c \text{ costante arbitraria.}$$

Adesso ragioniamo; in che modo il problema di Cauchy si adatta a questo tipo di equazioni? Abbiamo una forma apposita:

Teorema 1. ***Problema di Cauchy per ED a variabili separabili***

$$\begin{cases} y' = a(t)b(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Dove a è continua in un intorno I di t_0 e b è continua in un intorno J di y_0. Esisteranno quindi:

- *Intorno $I' \subset I$ di t_0.*
- *Funzione continua y definita su I'.*
- *Funzione derivata y' continua su I', soluzione del problema.*

Inoltre, se anche b' è una funzione continua su J oppure b ha un rapporto incrementale[1] *limitato in J (anche se non è derivabile), allora la soluzione è* ***unica****.*

Esempio 2. ***Risolvere il problema di Cauchy***

$$\begin{cases} y' = ty^3 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

1. ***Calcola l'integrale generale dell'equazione differenziale***
   Anzitutto, poniamo $y \neq 0$, poiché a noi serve trovare l'integrale generale, non quello singolare. Procediamo con la separazione delle variabili:

   $$y' = ty^3 \implies \frac{dy}{dt} = ty^3 \implies \frac{dy}{y^3} = tdt$$

   Adesso possiamo procedere ad integrare le due parti distinte, quindi:

   $$\int \frac{dy}{y^3} = \int tdt + c \implies -\frac{1}{2y^2} = \frac{t^2}{2} + c$$

   Effettuiamo i passaggi algebrici per ricavare la funzione y:

   - $-\frac{1}{2y^2} = \frac{t^2}{2} + c \implies \left(-\frac{1}{2y^2}\right)^{-1} = \left(\frac{t^2}{2} + c\right)^{-1}$
   - $-2y^2 = \frac{2}{t^2 + 2c} \implies -y^2 = \frac{1}{t^2 + 2c} \implies y^2 = -\frac{1}{t^2 - 2c}$

   Che porta infine ad avere la soluzione generale:

   $$y = \pm \frac{1}{\sqrt{-2c - t^2}}$$

2. ***Imponi la condizione di Cauchy***
   Notiamo che il valore posto della condizione è positivo, di conseguenza la soluzione di y è tale che appartiene all'intervallo $(0, +\infty)$ e considereremo solamente la radice positiva della soluzione generale.

   Detto ciò, determiniamo il valore di $y(t)$ applicando la condizione; per renderci la vita ulteriormente facile, applichiamo una piccola sostituzione sulla costante. D'altronde è arbitraria. Dopodiché diamole il valore della condizione.

---
[1] Concetto che misura la velocità con la quale una funzione cresce o decresce in base alla variabile indipendente.

$$\text{for } k = -2c \implies y(t) = \frac{1}{\sqrt{k - t^2}} \implies y(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}$$

Soluzione specifica dell'equazione.

1.2.2 Equazioni lineari del primo ordine

Tipo di equazioni differenziali ordinarie, dove F è lineare in y e y', le cui soluzioni sono espresse mediante uno spazio vettoriale di dimensione 1. Si presentano nella forma:

$$a_1(t)y'(t) + a_2(t)y(t) = g(t)$$

Con a_1, a_2 funzioni continue su un intervallo. L'equazione può presentarsi in due forme diverse, date a ed f funzioni continue sull'intervallo $I \subset R$:

- **Equazione completa o forma normale**; scrivibile se il coefficiente $a_1(t)$ non si annulla.

  $$y'(t) + a(t)y(t) = f(t)$$

  Otteniamo la sua soluzione aggiungendone una particolare alla sua curva integrale, definita da un valore conosciuto della costante arbitraria c.

- **Equazione omogenea**; ottenibile ponendo $f(t) = 0$, presenta la seguente forma:

  $$z'(t) + a(t)z(t) = 0$$

  Notiamo che le y sono sostituite dalle z per chiarire il tipo di equazione presa in esame.

Capiamo quindi che il procedimento da attuare si compone di due passi principali: prima la ricerca di un integrale generale dell'equazione omogenea, poi trovare la soluzione particolare da aggiungere a quella completa. Vediamo un esempio:

Esempio 3. ***Risoluzione equazione differenziale lineare del primo ordine***
Consideriamo la seguente semplice equazione:

$$y'(t) + 3y(t) = 2t, \text{ dove } a(t) = 3, \ f(t) = 2t \text{ e la primitiva } A(t) = 3t$$

1. ***Ricerca della soluzione generale dell'equazione omogenea***
   L'equazione omogenea ha forma $y'(t) + a(t)y(t) = 0$, di conseguenza prenderemo quella iniziale ponendo $f(t) = 0$, per poi moltiplicare tutto per l'esponenziale alla primitiva $A(t)$ ed infine ricavare $z'(t)$

   $$z'(t) + 3z(t) = 0 \implies z'(t)e^{3t} + 3z(t)e^{3t} = 0 \implies z'(t)e^{3t} = 0$$

   Avendo ottenuto una funzione differenziale, necessitiamo di integrarla per ottenere quello che ci serve.

   $$\int z'(t)e^{3t}dt = z(t)e^{3t} + c \implies z(t) = ce^{-3t}$$

   Come dici? Hai sbagliato il segno? Forse devo ricordarti il significato di costante ***arbitraria****. Può essere quello che voglio, quando lo voglio.*

2. ***Metodo di variazione delle costanti per trovare il valore di c***
   Il metodo consiste nel trasformare la costante in una funzione. Abbiamo che la soluzione appena trovata è di forma $\overline{y} = ce^{-3t}$, la quale dovrà prendere il posto delle y nell'equazione iniziale, dando la forma:

   $$e^{-3t}(c'(t) - 3c(t)) + 3c(t)e^{-3t} = 2t \implies e^{-3t}c'(t) = 2t$$

   Ora dobbiamo trovare la funzione $c(t)$, quindi spostiamo gli elementi ed integriamo le due parti.

   $$c'(t) = 2te^{3t} \implies c(t) = \int 2te^{3t}dt \implies c(t) = \frac{2}{3}te^{3t} - \frac{2}{9}e^{3t}$$

   Ora, sperando che quello che sto per fare non sia un abusivismo notazionistico, rimuovo l'esponenziale dall'equazione, siccome la funzione della costante è arbitraria e può essere quello che voglio, ottenendo:

   $$c(t) = \frac{2}{3}t - \frac{2}{9}$$

3. ***Composizione dell'integrale generale dell'equazione completa***
   Adesso abbiamo tutte le equazioni necessarie per scrivere la soluzione:

   - $z(t) = ce^{-3t}$
   - $c(t) = \frac{2}{3}t - \frac{2}{9}$

   $$\textit{Soluzione: } y(t) = ce^{-3t} + \frac{2}{3}t - \frac{2}{9}$$

1.3 Equazioni differenziali lineari del secondo ordine

Un'equazione differenziale è tale se si presenta nella forma:

$$a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = f(t)$$

Dove i coefficienti a_i ed il termine noto f sono funzioni definite in un intervallo I dove sono continue. Come in quelle del primo ordine, se il termine noto è 0, l'equazione si dice **omogenea**, altrimenti è **completa**. Inoltre, se le funzioni a_i sono costanti, la chiameremo **a coefficienti costanti**, in caso contrario sarà a **coefficienti variabili**. Infine, se $a_2(t) \equiv 1$ si dirà in **forma normale**.

La chiamiamo lineare perché introducendo tra gli spazi di funzioni[2] un operatore apposito L al primo membro, possiamo notare che ha una dinamica uguale alle applicazioni lineari viste in algebra. Quindi:

$$L : C^2(I) \to C^0(I)$$
$$L : y \to Ly$$

Noterai sicuramente che $y \in C^2(I)$ e $Ly \in C^0(I)$. Si mantiene lo stesso ragionamento anche per i coefficienti reali λ_i:

$$L(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 Ly_1 + \lambda_2 Ly_2$$

Capiamo che parlando di problemi di Cauchy, l'integrale generale di qualsiasi equazione del secondo ordine avrà necessariamente due parametri arbitrari e due restrizioni. La scrittura completa risulta essere:

$$\begin{cases} y'' + a(t)y' + b(t)y = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases}$$

Dove a, b, f sono funzioni continue nell'intervallo I tale che $t_0 \in I \forall y_0, y_1 \in \mathbb{R}$. Il problema avrà una sola soluzione $y \in C^2(I)$, individuata imponendo le restrizioni.

La nostra fortuna di poter lavorare con un operatore lineare rende semplice trovare la struttura dell'integrale generale; c'è pure il teorema:

Teorema 2. ***Struttura dell'integrale generale dell'equazione lineare completa***

[2]Si tratta del concetto di **classi di funzioni**. La classe C di una funzione indica l'appartenenza della stessa all'insieme delle funzioni derivabili con continuità per n numero di volte.

1. *L'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea $Lz = 0$ in un intervallo I è uno spazio vettoriale e sottospazio di $C^2(I)$.*
2. *L'integrale generale dell'equazione completa si ottiene sommando l'integrale di quella omogenea con una soluzione particolare della prima.*

In particolare, dal primo punto del teorema evinciamo che ci saranno due soluzioni dell'equazione omogenea $z_1(t), z_2(t)$ linearmente indipendenti ed ogni altra soluzione dell'omogenea è combinazione lineare delle $z_i(t)$. Quindi l'integrale generale sarà dato dalla formula:

$$c_1 z_1(t) + c_2 z_2(t), \text{ con } c_i \text{ costanti arbitrarie.}$$

Talvolta risulterà dubbio se le soluzioni sono linearmente dipendenti o meno, ed esattamente per questo ci viene in soccorso l'algebra lineare con la nozione di determinante:

Teorema 3. ***Matrice Wronksiana per controllo indipendenza lineare***

Il controllo è molto semplice; creiamo una matrice 2x2 dove la prima riga è costituita dalle soluzioni, mentre la seconda dalle loro derivate prime. Se il calcolo del determinante $det(Mat) = ad - cb \neq 0$, allora le soluzioni saranno linearmente indipendenti. In caso contrario se ne dovranno cercare delle altre.

$$Mat = \begin{pmatrix} z_1(t) & z_2(t) \\ z_1'(t) & z_2'(t) \end{pmatrix}$$

Esempio 4. ***Determinazione soluzioni dell'equazione omogenea di second'ordine***

Consideriamo la seguente equazione differenziale omogenea di secondo ordine:

$$t^2 z'' - 3tz' + 3z = 0, \text{ per Ansatz: } z_1 = t \text{ e } z_2 = t^3$$

Grazie al nostro approccio avremo di conseguenza:

- $z_1 = t \implies z_1' = 1 \implies z_1'' = 0$
- $z_2 = t^3 \implies z_2' = 3t^2 \implies z_2'' = 6t$

Verifichiamo se sostituendo gli elementi trovati l'equazione si annulla:

- $t^2 z_1'' - 3tz_1' + 3z_1 = 0 \implies t^2 \times 0 - 3t \times 1 + 3 \times t = 0 \implies -3t + 3t = 0$
- $t^2 z_2'' - 3tz_2' + 3z_2 = 0 \implies t^2 \times 6t - 3t \times 3t^2 + 3 \times t^3 \implies 6t^3 - 9t^3 + 3t^3 = 0$

Abbiamo confermato che quelle trovate sono soluzioni valide per l'equazione omogenea. Sono tuttavia linearmente dipendenti? Effettuiamo il check con la matrice Wronskiana:

$$Mat = \begin{pmatrix} z_1(t) & z_2(t) \\ z_1'(t) & z_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & t^3 \\ 1 & 3t^2 \end{pmatrix}$$

$$det(Mat) = ad - cb = (t \times 3t^2) - (1 \times t^3) = 2t^2 \neq 0$$

Soluzioni valide e linearmente indipendenti. Meglio di così? Resta solo scrivere la soluzione generale dell'omogenea:

$$z(t) = c_1 z_1 + c_2 z_2 = c_1 t + c_2 t^3$$

Premetto che non sarà sempre possibile risolvere un'equazione differenziale di secondo ordine, ma è normale che sia così; non ci vogliamo ancora così male. Per questa ragione ci soffermeremo solamente sui due casi particolari trattati nelle successive sezioni; tuttavia il seguente procedimento generale per gli esercizi trattati è universale. Facciamone il punto:

1. Determinare la curva integrale generale dell'equazione omogenea, trovando due sub-soluzioni z_1, z_2 linearmente indipendenti.

2. Determinare la soluzione particolare dell'equazione completa.

3. Scrivere la curva integrale generale dell'equazione completa in forma: $y(t) = \overline{y}(t) + c_1 z_1(t) + c_2 z_2(t)$

1.3.1 Equazioni lineari omogenee a coeffcienti costanti

Nominata all'inizio della sezione, riprendiamo l'equazione differenziale lineare del secondo ordine **a coefficienti costanti**:

$$z''(t) + az'(t) + bz(t) = 0, \text{ dove } a, b \text{ sono valori costanti.}$$

Come in quelle di primo ordine, risulta comodo ricercare soluzioni di tipo esponenziale $t \to e^{rt}$, con $r \in \mathbb{C}$. La prima furbata sta qui; la derivata dell'esponenziale non varia, quindi se sostituiamo e^{rt} ad ogni z, potremo raccogliere il primo, per poi rimuoverlo completamente dall'equazione in quanto valore sicuramente positivo.

$$e^{rt}(r^2 + ar + b) = 0 \implies r^2 + ar + b = 0$$

Questa equazione ottenuta si dice **equazione caratteristica** ed è risolvibile come una normalissima equazione di secondo grado, con la formula quadratica. In tal merito, ci è possibile distinguere tre casi in base al valore del discriminante:

- $\Delta > 0$; L'equazione caratteristica avrà due radici reali e distinte r_1, r_2, quindi le funzioni $z_1(t) = e^{r_1 t}$ e $z_2(t) = e^{r_2 t}$ saranno due soluzioni distinte e indipendenti dell'equazione omogenea. Si tratta del caso più semplice e l'integrale si scrive come:

$$z(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

- $\Delta = 0$; L'equazione caratteristica avrà una sola radice con doppia molteplicità, quindi $r = -\frac{a}{2}$. Abbiamo quantomeno la sicurezza che una soluzione è data da:

$$z(t) = ce^{-\frac{a}{2}t}$$

  Mentre per l'altra sarà necessario utilizzare il metodo di variazioni delle costanti, ponendo il valore $c(t)$. Otteniamo:

$$z(t) = c(t)e^{rt}, \text{ dove } r = -\frac{a}{2}$$

  Da cui derivata prima e seconda sono:

  - $z'(t) = e^{rt}(rc(t) + c'(t))$
  - $z''(t) = e^{rt}(r^2 c(t) + 2rc'(t) + c''(t)$

  E sostituendo tutto all'equazione iniziale otteniamo:

$$e^{rt}[(r^2 + ar + b)c(t) + (2r + a)c'(t) + c''(t)] = 0$$

  Notiamo in primis che r è soluzione dell'equazione caratteristica, quindi il coefficiente $c(t)$ si annulla, come d'altronde lo fa anche $c'(t)$, perché risulta $a - a = 0$. Quindi la nostra equazione omogenea "variata" deve risultare necessariamente $c''(t) = 0$, da cui $c(t) = c_2 t + c_1$. Scriveremo quindi come segue la soluzione generale dell'omogenea:

$$z(t) = e^{-\frac{a}{2}t}(c_2 t + c_1)$$

- $\Delta < 0$; L'equazione caratteristica avrà due radici complesse e coniugate $r_1 = a + bi$ e $r_2 = a - bi$, date dalle relative funzioni:

  - $z_1(t) = e^{(a+bi)t} = e^{at}(cos(bt) + isin(bt))$
  - $z_2(t) = e^{(a-bi)t} = e^{at}(cos(bt) - isin(bt))$

Volendo noi preferibilmente soluzioni reali piuttosto che complesse e ricordando che ogni combinazione lineare è una soluzione, possiamo prendere rispettivamente, grazie ad un magheggio algebrico: $\frac{1}{2}(z_1 + z_2)$ e $\frac{1}{2i}(z_1 - z_2)$, ovvero la forma che userai al posto delle altre:

$$z_1(t) = e^{at}cos(bt),\ z_2(t) = e^{at}sin(bt)$$

Le quali formano l'integrale generale $z(t)$:

$$z(t) = e^{at}(c_1cos(bt) + c_2sin(bt))$$

Esempio 5. ***Risoluzione equazioni omogenee per ogni caso***

- $\Delta > 0$:

  Consideriamo l'equazione $z'' - 2z' - 3z = 0$. Facendoci furbi potremmo usare l'algebra, ma mostrerò il procedimento generale con la formula quadratica. Anzitutto, passiamo all'equazione caratteristica:

  $$z'' - 2z' - 3z = 0 \implies r^2 - 2r - 3 = 0$$

  Definiamo ora le parti della formula quadratica come $a = 1$, $b = -2$, $c = -3$ e svolgiamo i calcoli:

  $$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \implies \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2}$$

  Che ci darà rispettivamente:

  - $r_1 = 3$
  - $r_2 = -1$

  Ora abbiamo tutti gli elementi per la formula dell'integrale generale:

  $$z(t) = c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t} \implies c_1e^{3t} + c_2e^{-t}$$

- $\Delta = 0$:

  Consideriamo l'equazione $z'' + 6z' + 9z = 0 \implies r^2 + 6r + 9 = 0$. Facendoci furbi e notando che questo è un trinomio particolare, otteniamo che ha due soluzioni perfettamente uguali:

  - $r_1 = -3$

   - $r_2 = -3$

  Quindi che fare? Teniamo r_1 *e facciamo dipendere* r_2 *dall'incognita* t*. Molto semplicemente otteniamo che:*

$$z(t) = c_1 e^{r_1} + c_2 t e^{r_1} \implies c_1 e^{-3t} + c_2 t e^{-3t} \equiv e^{-3t}(c_1 + c_2 t)$$

- $\Delta < 0$*:*

  Comsideriamo l'equazione $z'' + 2z' + 5z = 0 \implies r^2 + 2r + 5 = 0$*. Notiamo che usando la formula quadratica, risulta un discriminante che ha senso solo nel campo dei complessi. Ne agiamo di conseguenza:*

$$z_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-2 \pm 4i}{2}$$

  Avremo di conseguenza le due soluzioni:

   - $r_1 = a + bi \implies r_1 = -1 + 2i$
   - $r_2 = a - bi \implies r_2 = -1 - 2i$

  Siccome a noi interessa avere soluzioni reali, considereremo solamente tali valori delle soluzioni, ottenendo $\alpha = -1$, $\beta = 2$*. Ora possiamo scrivere la formula generale:*

$$z(t) = c_1 e^{\alpha t} cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t} sin(\beta t) \implies e^{-t}(c_1 cos(2t) + c_2 sin(2t))$$

1.3.2 Equazioni lineari non omogenee a coefficienti costanti

Il nostro scopo qui è trovare l'integrale particolare dell'equazione completa. Non differisce molto dal metodo per le equazioni del primo ordine, questo è come il secondo passaggio. La forma da trovare è:

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t), \text{ con } a, b \text{ valori costanti.}$$

Ci troviamo di fronte a due strade in base all'esercizio proposto; nel caso in cui f avesse una forma semplice, ovvero un polinomio oppure un polinomio moltiplicato per un esponenziale, è consigliato ricercare una soluzione che gli somigli, mediante il **metodo di somiglianza**. In alternativa, è sempre possibile usare il metodo di variazione delle costanti visto per il precedente ordine, anche se risulta più oberoso a livello di calcoli.

Definizione 6. ***Metodo di somiglianza - caso polinomiale***
Sia $f(t) = p_r(t)$*, dove quest'ultimo è un polinomio di grado* r*. Cercheremo una soluzione di tipo polinomiale come segue:*

- *Se* $(b \neq 0) \implies y(t) = q_r(t)$.
- *Se* $(b = 0 \wedge a \neq 0) \implies y(t) = tq_r(t)$.
- *Se* $(b = 0 \wedge a = 0) \implies y(t) = t^2 q_r(t)$.

Dove $q_r(t)$ *è un polinomio di grado* r *di cui occorre determinare i coefficienti.*

Esempio 6. *Si consideri l'equazione differenziale* $y'' - 3y' + 2y = 1 + t^2$. *La forma della soluzione è:*

$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} + \phi(t)$$

Dove r_i *sono le radici dell'equazione omogenea e* $\phi(t)$ *indica una forma simile al membro dell'equazione differenziale di destra. Affrontiamo i due passaggi:*

1. ***Ricerca delle radici dell'equazione omogenea***

   Come visto prima, ricerchiamo l'equazione caratteristica:

   $$z''(t) - 3z'(t) + 2z(t) = 0 \implies r^2 - 3r + 2 = 0$$

   Risolviamola come una semplice equazione di secondo grado, con l'algebra:

   $$r^2 - 3r + 2 = 0 \implies (r-2)(r-1) = 0 \implies r_1 = 2,\, r_2 = 1$$

   La soluzione generale dell'equazione omogenea sarà quindi:

   $$z(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^t$$

2. ***Ricerca della soluzione completa***

   Ora cerchiamo l'altra parte necessaria per la curva integrale particolare; il metodo della somiglianza dice di prendere un polinomio simile a quello dato, dello stesso grado. In tal caso prenderemo la forma generale del polinomio di secondo grado, ottenendo:

   $$\overline{y}(t) = at^2 + bt + c,\, \overline{y'}(t) = 2at + bt,\, \overline{y''}(t) = 2a$$

   Queste tre funzioni vanno ora sostituite alle loro corrispondenti nell'equazione differenziale iniziale, quindi:

   $$y'' - 3y' + 2y = 1 + t^2 \implies 2a - 3(2at + b) + 2(at^2 + bt + c) = 1 + t^2$$

   La quale, effettuando qualche calcolo, diventa:

$$(2a)t^2 - (6a - 2b)t + (2a - 3b + 2c) = 1 + t^2$$

Ora utilizzeremo l'algebra per renderci le cose più semplici. La ragione per cui ho voluto confinare i valori noti delle parti dell'equazione è per rendere quali coefficienti debbano essere presi e messi a sistema, eguagliati al loro corrispettivo valore con lo stesso grado.

Se non risulta chiaro è normale. Bisogna immaginare che al membro di destra siano presenti sempre tutti i coefficienti per ogni grado, quindi nel nostro caso: $1t^2, 0t^1, 1t^0 \implies 1, 0, 1$. *Questi tre numeri vanno eguagliati ai polinomi con lo stesso grado; quindi:*

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ -6a + 2b = 0 \\ 2a - 3b + 2c = 1 \end{cases} = \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{3}{2} \\ c = \frac{9}{4} \end{cases}$$

Questi tre valori vengono ora sostituiti alle corrispondenti lettere nell'equazione $\overline{y}$, *la quale ci darà la soluzione particolare che ci serve.*

$$\overline{y} = at^2 + bt + c \implies \overline{y} = \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{3}{2}t + \tfrac{9}{4}$$

La soluzione completa è infatti data da:

$$y(t) = c_1e^{2t} + c_2e^t + (\tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{3}{2}t + \tfrac{9}{4})$$

Definizione 7. ***Metodo di somiglianza - caso polinomiale ed esponente***
Sia $f(t) = Ae^{\lambda t}$, *con* $\lambda \in \mathbb{C}$. *Cercheremo una soluzione in forma* $y(t) = e^{\lambda t}\gamma(t)$. *Troviamo che:*

$$\gamma'' + \gamma'(2\lambda + a) + \gamma(\lambda^2 + a\lambda + b) = A$$

Ci basta trovare una qualsiasi $\gamma(t)$ *che soddisfi la forma appena vista; ma anche qui abbiamo alcuni casi su cui ragionare.*

- *Se* $\lambda^2 + a\lambda + b \neq 0$, *quindi* λ *non è radice dell'equazione caratteristica avremo:*

$$\textit{Costante } \gamma(t) = \frac{A}{\lambda^2 + a\lambda + b} \implies y(t) = \frac{Ae^{\lambda t}}{\lambda^2 + a\lambda + b}.$$

- *Se* $(\lambda^2 + a\lambda + b = 0) \wedge (2\lambda + a \neq 0)$, *prenderemo:*

$$\text{Costante } \gamma'(t) = \frac{A}{2\lambda + a} \implies \left(\gamma(t) = \frac{At}{2\lambda + a}\right) \wedge \left(y(t) = \frac{Ate^{\lambda t}}{2\lambda + a}\right).$$

- *Se* $(\lambda^2 + a\lambda + b = 0) \wedge (2\lambda + a = 0)$ *diremo che l'equazione iniziale è* $\gamma'' = A$, *da cui otteniamo:*

$$\left(\gamma(t) = \frac{A}{2}t^2\right) \wedge \left(y(t) = \frac{A}{2}t^2 e^{\lambda t}\right)$$

Esempio 7. *Consideriamo l'equazione differenziale* $y'' + y' - 2y = 3e^{-t}$ *ed effettuiamo i classici passaggi:*

1. ***Ricerca della soluzione generale omogenea***

   Mi sbrigo un attimo con i passaggi, dai, ora hai capito come gira.

   - *Equazione caratteristica:* $r^2 + r - 2 = 0$, *con soluzioni* $r_1 = -2$, $r_2 = 1$.
   - *Soluzione generale:* $z(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^t$

2. ***Applichiamo il metodo di somiglianza***

   Qui abbiamo un polinomio di grado zero moltiplicato per un esponenziale; la sua forma generale è data da:

   - $\overline{y}(t) = ae^{-t}$, *l'esponenziale preso è lo stesso della ED.*
   - $\overline{y'}(t) = -ae^{-t}$
   - $\overline{y''}(t) = ae^{-t}$

   Sostituendo opportunamente, otteniamo:

   $$ae^{-t} - ae^{-t} - 2ae^{-t} = 3e^{-t} \implies e^{-t}(-2a - 3) = 0 \implies a = -\tfrac{3}{2}$$

   Sostituendo a $\overline{y}$ *quanto trovato, otteniamo* $-\frac{3}{2}e^{-t}$, *ottenendo la soluzione completa che segue:*

   $$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^t - \tfrac{3}{2}e^{-t}$$

Esempio 8. *Consideriamo l'equazione differenziale* $y'' + y' - 2y = 3e^t$. *Questo risulta essere un caso particolare, perché almeno una delle radici dell'omogenea ha lo stesso identico valore dell'esponente nella ED. L'equazione è quasi uguale a quella del precedente esempio, se hai lamentele, guarda il procedimento su.*

1. ***Per l'omogenea***
   - *Equazione caratteristica:* $r^2 + r - 2 = 0$
   - *Radici del polinomio:* $r_1 = -2$, $r_2 = 1$
   - *Soluzione generale:* $z(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^t$
2. ***Per la curva completa***

   Noterai che almeno una delle radici è uguale all'esponente del membro di destra della ED; non apportare modifiche è un errore, quindi che fare?

   Risulta necessario far dipendere l'esponenziale da una t di grado uguale alla molteplicità algebrica[3] *dell'esponenziale, quindi:*

   $$\overline{y}(t) = ate^t,\ \overline{y'}(t) = ae^t + ate^t,\ \overline{y''}(t) = ae^t + ae^t + ate^t$$

   Sostituendo e svolgendo i calcoli otteniamo:

   $$ae^t + ae^t + ate^t + ae^t + ate^t - 2(ate^t) = 3e^t \implies a = 1 \implies \overline{y}(t) = te^t$$

   Otteniamo finalmente la curva integrale particolare data da:

   $$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^t + te^t$$

Notare che nella classe di termini noti $Ae^{\lambda t}$, con $\lambda \in \mathbb{C}$, appartengono anche le seguenti categorie:

$$cos\omega t,\ sin\omega t,\ e^{\lambda t}cos\omega t,\ e^{\lambda t}sin\omega t, \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Definizione 8. ***Metodo di sovrapposizione***
Nel caso in cui $f(t)$ sia una combinazione lineare di termini appartenenti a due tipi di funzione diversi[4]*, per linearità allora:*

1. *Troviamo una soluzione dell'equazione che ha come termine noto il primo elemento di quello originario.*
2. *Troviamo una soluzione dell'equazione che ha come termine noto il secondo elemento di quello originario.*
3. *Troviamo una soluzione dell'equazione di partenza, che sarà la somma delle due soluzioni prima trovate.*

Esempio 9. *Inserisci esempio*

---

[3] Si tratta del numero di volte in cui compare il valore nel polinomio

[4] Un esempio è la somma di un polinomio con un esponenziale, oppure un esponenziale sommato con una funzione trigonometrica.

Chapter 2

Calcolo Infinitesimale

2.1 Calcolo infinitesimale per le curve

Assurdo fra finalmente un editor offline

2.2 Calcolo infinitesimale per funzioni reali di più variabili

Chapter 3

Calcolo Differenziale

3.1 Calcolo differenziale per funzioni reali di più variabili

Incredibile, eccezionale

3.2 Calcolo differenziale per funzioni di più variabili a valori vettoriali

Chapter 4

Ottimizzazione - Estremi Liberi

4.1 Generalità

Chapter 5

Calcolo integrale

5.1 Pisellp4

Chapter 6

Campi Vettoriali

6.1 Pisellp5

Chapter 7

Serie di Fourier

7.1 PisellpFinale