Logica

Corso di Laurea in Informatica - Università degli studi di Verona

Federico Brutti

Federico Brutti
federico.brutti@studenti.univr.it

Indice

Non ho ancora conosciuto una singola persona a cui sia piaciuta questa materia.

Introduzione

1.1 Che cos'è la logica matematica?

La **Logica Matematica** ha lo scopo di formalizzare concetti matematici in una lingua artificiale, per dare una certezza di significato al linguaggio naturale, il quale risulterebbe ambiguo. Similmente a quest'ultimo, anche i linguaggi della logica si compongono di grammatica, significato e regole, identificati rispettivamente in:

- **Sintassi**: Definisce la corretta scrittura delle formule logiche.
- **Semantica**: Definisce il significato delle formule logiche.
- **Sistemi Deduttivi**: Strumenti sintattici utili a manipolare formule e costruire dimostrazioni, dette derivazioni.

Abbiamo quindi un insieme di parole da assemblare (sintassi) che con diverse combinazioni possono creare sentenze dai diversi significati (semantica) ed il tutto segue un determinato insieme di regole (sistemi deduttivi). Tutto ciò consente di creare teoremi, anch'essi composti da più parti:

- **Enunciato**; Ciò che il teorema vuole esprimere.
- **Dimostrazione**; La prova formalizzata di quanto espresso.

Sarà nostro compito dimostrare gli enunciati in base alle richieste degli esercizi. Servirà specificare una procedura che permetta di ottenere solo risultati veri o falsi in linguaggio logico.

1.2 Connettivi e Quantificatori

Qui sono elencati tutti i connettivi e i quantificatori utilizzati nel corso, con lo scopo di familiarizzare con loro a prescindere da quando verranno o meno utilizzati.

- **Connettivi**
  - **Congiunzione** $\wedge$:
    Ritorna vero solo se tutti gli elementi sono veri.
  - **Disgiunzione** $\vee$:
    Ritorna vero se almeno un elemento è vero.
  - **Negazione** $\neg$:
    Rende falso il vero e viceversa.
  - **Implicazione** $\implies$:
    Corrisponde a "Se, allora", ritorna vero nei casi $0 \to 1$ oppure $1 \to 1$, mentre è falso se $1 \to 0$ oppure $0 \to 0$.

- **Doppia Implicazione** $\iff$:
  Corrisponde a ”se e solo se, allora” e si rappresenta tramite due implicazioni: $(\phi \to \psi) \land (\psi \to \phi)$.
- **Bottom** $\bot$:
  Indica il valore di assurdo, 0.

• **Quantificatori**

- **Esiste** $\exists$:
  Indica l’esistenza di un elemento con una determinata proprietà.
- **Per ogni** $\forall$:
  indica che per ogni caso considerato, esiste un elemento con una data proprietà.

1.3 Strumenti di lavoro

Introduciamo in linguaggio naturale il funzionamento di tutti i nostri strumenti e strategie che utilizzeremo per la dimostrazione dei teoremi:

• **Sentenze**: Combinazioni dei singoli elementi dell’alfabeto. Equivalgono alle proposizioni in linguaggio naturale e possono assumere solamente due valori: vero o falso. Ne esistono di due tipi:

- **Minimale**; Quando non si può scomporre ulteriormente.
- **Composta**; Quando è composta da più sentenze minimali, ed è quindi scomponibile.

• **Induzione Strutturale**: Il principio di induzione è utilizzato per dimostrare la verità dell’enunciato a partire da un passo base semplice, per poi estendere l’ipotesi a ogni istanza successiva. Se l’ipotesi è provata, hai dimostrato l’enunciato.

• **Ricorsione Primitiva**: La ricorsione consiste nella formulazione di funzioni in termini di loro stesse all’interno della loro definizione. Le funzioni di una formula comprendono ogni caso possibile e riportano ad un passo base per terminare il processo.

• **Deduzione Naturale**: Processo di dimostrazione di una data formula a partire da delle ipotesi. Si tratta di un algoritmo basato puramente sulla correttezza sintattica.

• **Tabella di Verità**: Tabella che mostra ogni singolo caso presentabile per un determinato enunciato.

• **Valutazione di Verità**: Nella semantica, il processo di verifica della veridicità di una formula, esaminando il risultato di ogni singola formula presente nell’enunciato.

• **Sostituzione**: La sostituzione con una formulaψ tutte le occorrenze di un simbolo proposizionale o del primo ordine in un’altra formula ϕ.

• **Modello**: Definizione in termini logico-matematici di una data formula o funzione.

• **Contromodello**: Scrittura in termini logico-matematici che prova la fallacia di una data ipotesi iniziale.

Logica Proposizionale

Cominciamo lo studio effettivo della Logica Matematica attraverso la **Logica Proposizionale**. Fondamentalmente è una palestra da utilizzare come trampolino di lancio verso argomenti più complessi, come la Logica del Primo Ordine, che verrà vista in seguito.

Al termine del capitolo bisognerà saper valutare la veridicità di una formula e saper utilizzare la deduzione naturale per derivare sentenze.

2.1 Sintassi

In questo ambito il ragionamento si compone di entità linguistiche collegate dalla relazione "segue da". Queste si chiamano **Sentenze**. Come visto nell'introduzione possono essere minimali o composte, ma entrambe, se esprimono un pensiero completo si dicono **dichiarative**. Queste devono necessariamente avere un valore di vero o falso per essere considerate tali.

Esempio. Tipi di sentenze

- Sentenza minimale: ϕ

  Entità irriducibile.

- Sentenza composta: $\phi \vee \psi$

  Entità riducibile.

Ogni linguaggio logico è basato su un determinato **Alfabeto**, determinante i simboli utilizzabili in esso. Infatti, i linguaggi sono definiti come $\mathsf{L} \subseteq \mathsf{A}^*$, dove quest'ultimo insieme è quello delle **Stringhe**, ovvero tutte le sequenze di simboli generabili tramite l'alfabeto.

Le stringhe appartenenti ad L si dicono sintatticamente corrette. In particolare, definiamo ora l'alfabeto della logica proposizionale che consente la loro composizione:

Definizione 2.1. Alfabeto $\mathsf{L}^{\mathsf{PROP}}$
L'alfabeto della Logica Proposizionale è definito tramite tre unità sintattiche distinte:

- Insieme di simboli proposizionali $\mathsf{AT}^{\mathsf{PROP}}$, i cui elementi saranno indicati con lettere greche.
- Connettivi $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\perp$.
- Simboli ausiliari "(" e ")". Non variano il senso della frase, ma aiutano a renderla più leggibile.

Abbiamo constatato che il linguaggio proposizionale è costituito dall'insieme delle stringhe sintatticamente corrette. Si indica con PROP e si definisce induttivamente come segue:

Definizione 2.2. Insieme delle proposizioni PROP

- $\bot \in \mathsf{PROP}$;
- Se p è un simbolo proposizionale, allora $p \in \mathsf{PROP}$;
- Se $\phi, \psi \in \mathsf{PROP}$, allora valgono le seguenti relazioni:
  $(\phi \wedge \psi) \in \mathsf{PROP}$, $(\phi \vee \psi) \in \mathsf{PROP}$, $(\phi \implies \psi) \in \mathsf{PROP}$, $(\neg\phi) \in \mathsf{PROP}$.
- Null'altro appartiene all'insieme PROP.

Per renderci la vita un pochino più semplice sono state ideate delle convenzioni sulla scrittura delle proposizioni; si possono infatti omettere alcune parentesi nelle formule e fissare un ordine di precedenza tra i connettivi:

- Si omettono le parentesi più esterne di una formula, così al posto di scrivere "$(\phi \wedge \psi)$", si scrive solo "$\phi \wedge \psi$".
- Il connettivo $\neg$ è il più forte e associa il primo simbolo presente a destra, perciò "$\neg\phi \vee \psi$" sarebbe uguale a "$(\neg\phi) \vee \psi$".
- Si assume che $\wedge$ e $\vee$ siano connettivi più forti rispetto a $\implies$ e $\iff$, quindi scrivere "$\phi_1 \wedge \psi_1 \implies \phi_2 \vee \psi_2$" è equivalente a intendere "$(\phi_1 \wedge \psi_1) \implies (\phi_2 \vee \psi_2)$".
- I connettivi $\implies, \wedge, \vee$ associano a destra, perciò scrivere "$\phi \implies \psi \implies \sigma$" equivale a dire: "$(\phi \implies (\psi \implies \sigma))$", mentre "$\phi \wedge \psi \vee \sigma$" sta per "$(\phi \wedge (\psi \vee \sigma))$".

Anche la logica matematica si basa sulla teoria degli insiemi; questo significa che valgono i teoremi inerenti, ma anche il funzionamento delle proprietà di un insieme. Diciamo infatti

Proposizione 2.3. Proprietà P su un insieme A
Se abbiamo un insieme P ed è sottoinsieme proprio o improprio di un altro A abbiamo che:

$$P \subseteq A \implies \text{proprietà } P \text{ su } A.$$

Di conseguenza, se abbiamo un elemento $a \in A$ possiamo dire che gode della proprietà se vale anche la relazione $a \in P$.

Finora abbiamo visto i soli elementi; ora di vedere cosa si può fare per dimostrare gli enunciati. Gli strumenti prendono la forma di **Induzione strutturale** e **Ricorsione primitiva**.

Teorema 2.4. Induzione strutturale su PROP
Considera una proprietà $P \subseteq \mathsf{PROP}$. Supponendo veri i punti:

- $\forall\phi \in \mathsf{AT}$, vale $P[\phi]$
  Se la proprietà vale per ogni formula atomica...
- $\forall\phi, \psi \in \mathsf{PROP}$, valgono $P[\phi], P[\psi]$
  E che se la proprietà vale per ogni formula in PROP...

Allora varranno le relazioni $P[\phi \wedge \psi], P[\phi \vee \psi], P[\phi \implies \psi]$. Di conseguenza vale che $\forall\phi \in \mathsf{PROP}$, vale $P[\phi]$.

Esempio. Costruzione induttiva della formula $P[\phi \implies (\phi \vee \psi)]$
Fondamentalmente devi scomporre l'intera formula. Parti dalle formule atomiche

$$P[\phi], P[\psi]$$

Entrambe valgono, quindi puoi prendere una o l'altra. Puoi inoltre introdurre l'implicazione.

$$P[\phi] \implies P[\phi \vee \psi] := P[\phi \implies (\phi \vee \psi)$$

E hai finito.

Parliamo ora di ricorsione. Premetto che tutte le volte in cui si usa un linguaggio definito induttivamente, è possibile descriverne gli elementi anche ricorsivamente. Sempre. Questo algoritmo genera funzioni in termini di sé stesse all'interno della propria definizione. Risulta più semplice con l'esempio del fattoriale:

Esempio. Funzione fattoriale

$$\mathsf{fatt} = \begin{cases} 0! = 1 \\ n! = n \times (n-1)! \end{cases}$$

Come si può vedere, la funzione comprende ogni singolo caso che si può presentare. Se alla funzione è dato il valore 0 sei nel caso base, mentre in qualunque altra istanza sostituisci il numero dato alla n e poi svolgi i calcoli.

Terminiamo con due ultimi concetti sintattici definiti ricorsivamente:

Definizione 2.5. Rango di una formula
Definiamo $r : \mathsf{PROP} \to \mathbb{N}$ ricevente in input una formula, il valore del suo rango. Si tratta di una quantità statistica utile al fine di vedere una definizione per ricorsione.

- $r[\phi] = 0$, se $\phi \in AT$
- $r[(\neg\phi)] = 1 + r[\phi]$
- $r[(\phi \circ \psi)] = 1 + max\{r[\phi], r[\psi]\}$, con $\circ \in \{\vee, \wedge, \implies\}$

Definizione 2.6. Sottoformula
Si definisce sottoformula $\mathsf{sub} : \mathsf{PROP} \to 2^{\mathsf{PROP}}$ la funzione che prende in input una formula proposizionale e ne restituisce l'insieme delle parti. Compone l'insieme di tutte le sottoformule presenti in una certa formula data.

- $\mathsf{sub}[\phi] = \{\phi\}$, se $\phi \in \mathsf{AT}$
- $\mathsf{sub}[(\neg\phi)] = \{(\neg\phi)\} \cup \mathsf{sub}[\phi]$
- $\mathsf{sub}[(\phi \circ \psi)] = (\phi \circ \psi) \cup \mathsf{sub}[\phi] \cup \mathsf{sub}[\psi]$, con $\circ \in \{\wedge, \vee, \implies\}$

2.2 Semantica

Finora abbiamo studiato il valore sintattico delle frasi, ma non dimentichiamo che, come nella lingua italiana, una composizione di frasi può avere un significato; nel linguaggio logico è necessario analizzare gli enunciati per determinarne eventualmente verità, col valore di 1, o falsità, col valore di 0. Come fare?

Definizione 2.7. Valutazione di verità
Sia la funzione $\mathsf{V} : \mathsf{PROP} \to \{0, 1\}$, ovvero $\mathsf{V} \in \mathsf{PROP}$ che può ritornare uno dei due valori fra $0, 1$. Questa è tale che:

- $\mathsf{V}[\perp] = 0$
- $\mathsf{V}[\neg\psi] = 1 \iff \mathsf{V}[\psi] = 0$
- $\mathsf{V}[\psi \wedge \phi] = 1 \iff \mathsf{V}[\psi] = 1 \wedge \mathsf{V}[\phi] = 1$
- $\mathsf{V}[\psi \vee \phi] = 1 \iff \mathsf{V}[\psi] = 1 \vee \mathsf{V}[\phi] = 1$
- $\mathsf{V}[\psi \to \phi] = 1 \iff \mathsf{V}[\psi] = 0 \vee \mathsf{V}[\phi] = 1$
- $\mathsf{V}[\psi \iff \phi] = 1 \iff \mathsf{V}[\psi] = \mathsf{V}[\phi]$

Si ricorda più facilmente pensando alle tavole di verità delle varie funzioni. Difatti, è la loro definizione ricorsiva.

Ora, considera le variabili che abbiamo usato finora; queste possono indicare composizioni di formule al loro interno, quindi non essere atomiche, si definiscono infatti **metavariabili**, e per conoscere il loro valore semantico è necessario valutare i loro simboli proposizionali. Ciò avviene grazie alla **Valutazione atomica**, la base per definire tutte le valutazioni di verità.

Il concetto è definito in modo astratto, ma fondamentalmente devi scomporre la formula fin quando ogni suo elemento diventa atomico. Dopo aver valutato i singoli valori, ricava il risultato in base ai connettivi usati.

Definizione 2.8. Valutazione atomica
Sia la seguente funzione:

$$\mathsf{V} : \mathsf{AT} \to \{1, 0\} \text{ tale che } \nu[\perp] = 0.$$

Data una valutazione atomica ν, esiste ed è unica una valutazione:

$$[\cdot]_\nu : \mathsf{PROP} \to \{1, 0\}, \text{ Tale che } [\alpha]_\nu = \nu[\alpha] \text{ per } \alpha \in \mathsf{AT}.$$

Nel caso in cui nell'esercizio non venga richiesto se cercare verità o falsità, si valuta ogni singolo caso. Vediamo ora un esempio:

Esempio. Effettuare valutazione di verità sulla formula: $(\phi \wedge \psi) \implies (\neg\psi \vee \phi)$.
Partiamo da un ragionamento semplice: avendo un'implicazione, le uniche istanze che possono riportare un valore vero, data la formula $P \implies Q$, sono $0 \to 1$, $1 \to 1$, $0 \to 0$.

Muoviamoci ora per determinare i valori delle singole formule atomiche, una metavariabile alla volta, in base alle istanze discusse:

- $P = [(\phi \wedge \psi)]_v = 0 \iff [\phi]_v = 0$ OR $[\psi]_v = 0$.
- $Q = [(\neg\psi \vee \phi)]_v = 1 \iff [\neg\psi]_v = 1$ OR $[\phi]_v = 1 \iff [\psi]_v = 0$ OR $[\phi]_v = 1$.

Nella formula P abbiamo ricavato che almeno una delle due variabili deve avere un valore di falsità. Guardando infatti la formula Q, notiamo che $[\psi]_v = 0$. L'ipotesi è confermata e non andando incontro a contraddizioni, abbiamo dimostrato che la formula è **vera**.

Si possono inoltre presentare alcuni casi notevoli davanti alla valutazione del significato di un enunciato, come:

Definizione 2.9. Concordanza e Tautologia

- Dato un insieme finito di proposizioni P, se due valutazioni differenti risultano uguali, si dicono concordanti su P.
- Se una formula proposizionale è vera in ogni caso, si dice **Tautologia** e si indica con $[\alpha]_v = 1$.

Negli esercizi verranno utilizzate le seguenti scritture, con $\alpha \in PROP$ generica:

- $\models \alpha$: Tautologia.
- $\vdash \alpha$: Teorema.

Per dimostrare una tautologia è necessario controllare che sia vera per ogni singolo caso; se in un'istanza si rivela falsa, non è tale.

Teorema 2.10. Tautologie Notevoli

- Leggi di De Morgan:

$$\models \neg(\phi \wedge \psi) \iff (\neg\phi \vee \neg\psi), \models \neg(\phi \vee \psi) \iff (\neg\phi \wedge \neg\psi).$$

- Negazione Involutiva:

$$\models \phi \iff \neg\neg\phi.$$

- Leggi Commutative:

$$\models (\phi \land \psi) \iff (\psi \land \phi), (\phi \lor \psi) \iff (\psi \lor \phi).$$

- Leggi Distributive:

$$\models \phi \land (\psi \lor \gamma) \iff ((\phi \land \psi) \lor (\phi \land \gamma)), \phi \lor (\psi \land \gamma) \iff ((\phi \lor \psi) \land (\phi \lor \gamma)).$$

- Legge Associativa:

$$\models \phi \land (\psi \land \gamma) \iff (\phi \land \psi) \land \gamma, \phi \lor (\psi \lor \gamma) \iff (\phi \lor \psi) \lor \gamma.$$

L'algoritmo di valutazione della verità può essere esteso anche ad un insieme determinato di proposizioni, che chiameremo Γ. Definiamo quindi:

Definizione 2.11. Soddisfacibilità di una formula e conseguenza logica
La valutazione di verità si estende ad un insieme di proposizioni arbitrario Γ tale che:

$$[\Gamma]_v = 1 \iff \forall \alpha \in \Gamma \mid [\alpha]_v = 1.$$

Attenzione, se $[\Gamma]_v \neq 1$, significa che c'è *almeno una* valutazione dove risulta falsa, ma non che lo sono tutte. Se si afferma invece che $[\Gamma]_v = 0$, tutte le valutazioni saranno false.

Da questo insieme di proposizioni è possibile anche trarre delle conclusioni, dette **conseguenze logiche**. Si dice che una proposizione ϕ segue logicamente da un insieme Γ se la verità delle proposizioni in esso contenute implica la verità di ϕ.

Dato infatti l'insieme Γ di formule, si dice ψ conseguenza logica delle formule di Γ e si scrive:

$$\Gamma \models \psi, \text{ ovvero in questo caso: } [\Gamma]_v = 1 \implies [\psi]_v = 1.$$

Inoltre, se un insieme vuoto implica la verità di una formula, abbiamo dimostrato una tautologia.

Diremo infine che una formula ψ è detta **soddisfacibile** se esiste una valutazione ν per cui risulti vera, altrimenti è **insoddisfacibile**. Il concetto si può estendere agli insiemi di proposizioni; Γ si dice soddisfacibile quando una sua formula ψ è sempre vera data una certa valutazione, altrimenti è insoddisfacibile. Formalmente:

Esempio. Soddisfacibilità di un insieme Γ

- Se $\{p\} \in \Gamma$, $[p]_v = 1$ e quindi l'insieme è soddisfacibile.
- Se $\{p, \neg p\} \in \Gamma$, non tutte le valutazioni di *p* sono vere in quanto contraddittorie e quindi l'insieme non è soddisfacibile.

Le proprietà della conseguenza logica saranno riprese in seguito nella sezione dei sistemi deduttivi, in quanto saranno usate per la deduzione naturale. Parliamo ora invece di **Sostituzione proposizionale**, una tecnica che consente, in una formula ϕ, di sostituire tutte le occorrenze di una formula p_1 con un'altra ψ.

Definizione 2.12. Sostituzione proposizionale

$$\text{Sia la formula: } \phi = ((p_1 \to (p_5 \vee p_1)) \wedge p_3).$$

Qui è possibile sostituire tutti i simboli p_1 con ψ. Il passaggio intermedio si scrive $\phi[\psi/p_1]$, ovvero che ψ sostituirà il valore p_1. Risulterà:

$$\phi = ((\psi \to (p_5 \vee \psi)) \wedge p_3).$$

Se un termine nella formula presa in esame non compare affatto, è ovvio che la sostituzione non avrà alcuno scopo o effetto.

Seguono ora le proprietà dell'algoritmo appena discusso:

Proposizione 2.13. Sia la funzione $[\psi/p] : \mathsf{PROP} \to \mathsf{PROP}$ tale che:

- $\phi[\psi/p] = \bot$ se $\phi = \bot$.
- $\phi[\psi/p] = \phi$ se $\phi \in \mathsf{AT} \wedge \phi \neq p$.
- $\phi[\psi/p] = \psi$ se $\phi = p$.
- $\neg(\phi)[\psi/p] = \neg(\phi[\psi/p])$.
- $(\phi_1 \circ \phi_2)[\psi/p] = (\phi_1[\psi/p] \circ \phi_2[\psi/p])$, dove $\circ = \{\wedge, \vee, \implies\}$.

E ora sblocchiamo il vero potenziale della sostituzione. Ragiona: se due formule risultano uguali, avranno egual valore nelle valutazioni. Se sono tali, sono intercambiabili, o anche meglio, scriverle allo stesso modo. Ciò ci consente di raggruppare più formule **equivalenti** sotto uno stesso termine, rendendo l'enunciato nettamente più semplice, infatti:

Proposizione 2.14. Sostituzione di formule equivalenti
Siano due formule ϕ_1 ϕ_2 e $p \in \mathsf{AT}$. Se le prime due formule sono equivalenti sintatticamente, ovvero $\models \phi_1 \longleftrightarrow \phi_2$, prendendo una formula generica ψ possiamo scrivere:

$$\psi[\phi_1/p] \longleftrightarrow \psi[\phi_2/p].$$

La relazione di **equivalenza sintattica** $\longleftrightarrow$ è data dalle seguenti proprietà:

$$\text{Siano } \models \phi_1 \longleftrightarrow \phi_1', \models \phi_2 \longleftrightarrow \phi_2'$$

Varranno le seguenti relazioni:

- $\models \phi_1 \implies \phi_2 \longleftrightarrow \phi_1' \implies \phi_2$.
- $\models \phi_1 \wedge \phi_2 \longleftrightarrow \phi_1' \wedge \phi_2'$.
- $\models \phi_1 \vee \phi_2 \longleftrightarrow \phi_1' \vee \phi_2'$.

Formalizziamo infine il concetto di **Relazione di equivalenza**. Molto semplicemente, i simboli $\longleftrightarrow$, $\iff$ Rappresentano rispettivamente equivalenza sintattica e semantica; sono una scrittura compatta del seguente concetto:

$$\phi \iff \psi = (\phi \to \psi) \land (\psi \to \phi).$$

Restituisce il valore di vero solamente quando entrambe le formule sono vere.[1]
Una relazione di equivalenza R si scrive $\approx$ ed è tale se vengono rispettati questi tre criteri:

1. **Riflessività**; $\forall a \in A \mid aRa$.
2. **Transitività**; $\forall a, b, c \in A \mid (aRb \land bRc) \to aRc$.
3. **Simmetria**; $\forall a, b \in A \mid aRb \to bRa$.

Teorema 2.15. Relazione di equivalenza

Date due formule $\phi, \psi \in \mathsf{PROP}$, se $\models \phi \leftrightarrow \psi$, si scriverà $\phi \approx \psi$.

2.3 Sistemi Deduttivi

Prima di iniziare a lavorare, è necessario introdurre il concetto di **Sistema Deduttivo**. Si tratta di un costrutto che fornisce una struttura formale di regole inferenziali, le quali permettono di derivare una conclusione a partire da alcune premesse.

Nell'enunciare un teorema, è necessario fornire anche la sua dimostrazione, poiché, senza di essa, definiamo il primo **congettura**. La dimostrazione di un teorema è definita come un algoritmo: sequenza di passi non ambigui mirati ad arrivare alla tesi partendo dalle ipotesi. I passi sono tutto lo svolgimento che effettueremo per dimostrare l'enunciato e si chiama **deduzione**.

Definizione 2.16. Deduzione Naturale
Metodo di ragionamento puramente sintattico. Si effettua stabilendo:

- **Assunzioni**; Ragionamenti temporanei.
- **Derivazioni**; Dalle formule è possibile effettuare derivazioni attraverso determinate leggi. Ogni passaggio si dice **Passo di derivazione**.
- **Scaricamento**; La chiusura delle assunzioni fatte all'inizio.

Ogni derivazione è rappresentata tramite **alberi**, dove le **foglie** sono le ipotesi e la **radice** l'enunciato. Una dimostrazione si dice completa quando ogni foglia è chiusa, ovvero quando si è scaricata ogni ipotesi; si indica con $\mathsf{Hp}[\mathsf{D}] = \emptyset$.
La scrittura significa che l'insieme delle ipotesi della derivazione D è vuoto. Possono inoltre esistere più derivazioni per un singolo teorema.

Passiamo ora alle **Regole deduttive**. Si tratta di algoritmi utili per la derivazione delle formule nella deduzione naturale. Si dividono in due tipi:

[1] Ciò implica anche che se le formule sono equivalenti e la valutazione di una delle due è vera, lo sarà per forza anche l'altra.

- **Introduzione**; Premesse collegate introducendo un connettivo logico.
- **Eliminazione**; Dalle premesse è possibile rimuovere un connettivo logico.

Negli esercizi, le regole deduttive consentono di effettuare i passi di derivazione e sono rappresentati in forma di frazione. Sopra stanno le premesse, sotto la conclusione e a fianco la regola utilizzata. Le formule all'interno di parentesi quadre sono poi ipotesi assunte/scaricate da una determinata regola di derivazione, la quale dovrà essere appropriatamente numerata. Vediamo come fare insieme alla rappresentazione delle regole a nostra disposizione:

- **Regole dell'implicazione** ($\rightarrow$)
  - **Introduzione dell'implicazione**
    Se dall'ipotesi α segue β, con una certa derivazione D, allora si deriva $\alpha \rightarrow \beta$ tramite l'introduzione dell'implicazione. Questa regola assume/scarica come ipotesi l'implicante dell'implicazione.

    $$\frac{[\beta]^1}{\alpha \rightarrow \beta} \rightarrow \mathrm{I}^1$$

  - **Eliminazione dell'implicazione**
    Chiamato anche *modus ponens*, se da due derivazioni D_1, D_2 otteniamo α e $\alpha \rightarrow \beta$, possiamo concludere β eliminando il connettivo.

    $$\frac{\alpha \qquad \alpha \rightarrow \beta}{\beta} \rightarrow E^1$$

  - **Indebolimento**
    Caso particolare nell'introduzione dell'implicazione. Nel caso in cui $\alpha \notin Hp(D)$ e si possiede già come ipotesi la formula dell'implicato, si può accettare la formula senza scaricare α.

    Fondamentalmente, se hai una formula tipo $\alpha \implies (\beta \implies \alpha)$, puoi evitare di derivare beta, perché stai già considerando il caso $\alpha = 1$.

    $$\frac{\dfrac{[\alpha]^1}{\beta \rightarrow \alpha} \rightarrow \mathrm{I}}{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)} \rightarrow \mathrm{I}^1$$

- **Regole della congiunzione** ($\wedge$)
  - **Introduzione dell'AND**
    Se da due derivazioni si arriva ad ottenere α e β, possiamo derivarli introducendo AND.

    $$\frac{\alpha \qquad \beta}{\alpha \wedge \beta} \wedge \mathrm{I}$$

  - **Eliminazione dell'AND**
    Se da una derivazione arriviamo alla formula $\alpha \wedge \beta$ è possibile derivare una di queste due variabili e si dirà rispettivamente eliminazione dell'and a sinistra o destra.

    $$\frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha} \wedge E_l$$

$$\frac{\alpha \wedge \beta}{\beta} \wedge E_r$$

- **Regole del bottom** ($\perp$)
  - **Riduzione ad assurdo (RAA)**
    Se da un'ipotesi $\neg\alpha$ deriviamo $\perp$, ed è possibile farlo perché $\neg\alpha = \alpha \to \perp$, possiamo derivare α dall'assurdo.

$$\cfrac{\cfrac{[\neg\alpha]^1}{\perp} \to I}{\alpha} \; RAA^1$$

  - **Eliminazione del bottom**
    Ex falso quod libet - Dall'assurdo tutto è derivabile. Eliminando il bottom puoi derivare qualunque formula ti pare... purché non sia composta.

$$\frac{\perp}{\alpha} \perp_i$$

- **Regole della disgiunzione** ($\vee$)
  - **Introduzione dell'OR**
    Se dalla derivazione si arriva ad una formula α, è possibile derivare $\alpha \vee \beta$ introducendo OR. La cosa funziona anche se arrivi a beta.

$$\frac{\alpha}{\alpha \vee \beta} \vee I_l$$

$$\frac{\beta}{\alpha \vee \beta} \vee I_r$$

  - **Eliminazione dell'OR**
    Qui le cose iniziano a farsi più complicate; la formula usa un ragionamento per casi, dove $P \to U$, $Q \to U$. Pensandoci, ne consegue direttamente che se prendi $P \vee Q$, implicherai sempre U. La stessa cosa fa l'eliminazione di OR.

    Diciamo quindi di ottenere la formula $\alpha \vee \beta$ da una derivazione. Le due variabili diventeranno le foglie da chiudere per concludere una formula γ.

    Riassumendo: prima derivi la formula all'estrema sinistra, che lega le due formule con OR. Poi prendi singolarmente le due variabili legate e lavora su di esse per derivare la formula gamma. Fatto ciò, potrai concludere gamma.

$$\cfrac{\alpha \vee \beta \qquad \cfrac{\cfrac{[\alpha]^1}{\cdots}}{\gamma} \qquad \cfrac{\cfrac{[\beta]^1}{\cdots}}{\gamma}}{\gamma} \vee E^1$$

- **Regole della doppia implicazione** ($\leftrightarrow$)
  - **Introduzione della doppia implicazione**
    Se partendo da un'ipotesi α derivi β e da un'altra ipotesi β derivi α, è possibile derivare una doppia implicazione.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{[\alpha]^1}{\cdots}}{\beta} \qquad \cfrac{\cfrac{[\beta]^1}{\cdots}}{\alpha}}{\alpha \leftrightarrow \beta} \leftrightarrow I^1$$

- **Eliminazione della doppia implicazione**

  Se da due derivazioni si ottengono una formula α e una doppia implicazione contenente tale formula, è possibile derivare l'altro ramo della doppia implicazione. Quindi:

$$\frac{\alpha \qquad \alpha \leftrightarrow \beta}{\beta} \leftrightarrow E^1$$

$$\frac{\beta \qquad \beta \leftrightarrow \alpha}{\alpha} \leftrightarrow E^1$$

2.4 Correttezza e Completezza

T'è mai capitato di chiederti se ci fosse una qualche relazione fra conseguenza logica $\Gamma \vDash \phi$ e derivabilità $\Gamma \vdash \phi$? Ebbene, questa domanda mette in dubbio la veridicità del sistema di deduzione naturale tutto. Come facciamo a sapere che non è contradditorio?

Allo scopo di rimuovere ogni dubbio, procediamo con la dimostrazione di come la deduzione naturale è **corretta**.

Teorema 2.17. Teorema di Correttezza per la deduzione naturale
Se dall'insieme Γ deriviamo una formula ϕ, questa è anche sua conseguenza logica.

$$\Gamma \vdash \phi \implies \Gamma \vDash \phi.$$

Dimostrazione. La dimostrazione procede per induzione sull'altezza delle derivazioni. Scriviamo

- Passo base: Se $D = \phi$, siccome $\phi \vDash \phi$, abbiamo la tesi.
- Passo induttivo: Consideriamo ogni regola vista per la deduzione naturale e procediamo a definirle. Se tutte risultano vere, hai dimostrato la correttezza.

1. **AND introduction**:

   Abbiamo derivazione $D = \wedge I$. Le due derivazioni $D_1, D_2 \in Hp(D)$. Per il lemma sulla conseguenza logica abbiamo che $Hp(D_1), Hp(D_2) \vDash \phi \wedge \psi$. Effettuando un'unione avremo che $Hp(D_1) \cup Hp(D_2) = Hp(D)$. Ne consegue che $Hp(D) \vDash \phi \wedge \psi$.
2. AND elimination
3. IMPLIES introduction
4. IMPLIES elimination
5. OR introduction
6. OR elimination
7. RAA
8. BOTTOM elimination

Hai finito. Inoltre, come diretta conseguenza immediata abbiamo l'assenza di contraddizioni nell'insieme delle deduzioni naturali. Prova a supporre $\vdash \bot$. Per la correttezza avremmo $\models \bot$, che è impossibile. □

E questa è la prima parte, la quale riguarda la sintassi. Ora dobbiamo **completare** il cerchio, provando che:7

Teorema 2.18. Teorema di completezza per la deduzione naturale
Tutto ciò che si può dire semanticamente, lo si può dire anche sintatticamente.

$$\Gamma \models \phi \implies \Gamma \vdash \phi.$$

Per dolor nostro, non è possibile dimostrare questo teorema senza pensare. Dobbiamo prima introdurre il concetto di **Consistenza**. Diremo che un insieme è consistente quando non deriva assurdità, altrimenti è inconsistente. Segue quindi che:

Proposizione 2.19. Relazioni di consistenza

- $\Gamma \vdash \bot$
- $\forall \phi, \Gamma \vdash \phi$
- $\exists \phi, \Gamma \vdash \phi \land \Gamma \vdash \neg\phi$

Diremo poi che se un insieme è consistente, allora sarà soddisfacibile e viceversa. Possiamo estendere il concetto e raggiungere insiemi massimali consistenti, sui quali si basa il teorema di completezza.

Definizione 2.20. Insiemi massimali consistenti
Un insieme di formule Γ si dice massimale consistente se è consistente e non esiste alcun insieme consistente $\Delta \neq \Gamma$ che è anche $\Gamma \subseteq \Delta$.

Inoltre, ogni insieme consistente Γ è contenuto in almeno un insieme massimale consistente.

2.5 Esercizi

Logica del Primo Ordine

La **Logica del Primo Ordine**, o dei Predicati è un'espansione della Logica Proposizionale. La novità principale è la presenza di due nuovi simboli detti **Quantificatori**, i quali legano più di ogni altro connettivo e ci consentiranno di descrivere strutture matematiche:

- **Per ogni** - $\forall$

  Introduce una proprietà valida per ogni variabile a lui legata.

- **Esiste** - $\exists$

  Introduce l'esistenza di un elemento con una data proprietà.

Da qui in poi intenderò "logica dei predicati" con l'acronimo **FOL**, ovvero First Order Logic.

3.1 Sintassi

Essendo la FOL un'espansione della logica proposizionale, è corretto pensare che tutte le entità sintattiche studiate finora siano presenti anche in questo linguaggio.
Più precisamente è formato da:

- **Connettivi**; $\wedge, \vee, \rightarrow, \bot$.

- **Quantificatori**; Visti poco fa, $\forall, \exists$.

- **Simboli di variabili**; Insieme numerabile $Var = \{v_0, v_1, ...\}$, i cui elementi si dicono variabili. Queste verranno indicate con una lettera ed indicizzate.

- **Simboli di relazione**; Sono tutti i simboli n-ari utilizzati per le relazioni.

  > **Esempio.** Arietà delle relazioni
  >
  > Ritengo necessario approfondire, quindi ascoltami bene. Abbiamo un insieme di simboli che indicano relazioni fra variabili di un numero potenzialmente infinito, ragion per cui n-arie. In precedenza ho menzionato il significato di **arietà**, ovvero quante variabili può contenere una data relazione. Diremo, per capire meglio:
  >
  > - **Relazione un-aria** $R^{(1)}$
  >   Relazione che coinvolge una singola variabile, come una semplice proprietà. L'essere un numero pari è una proprietà.
  > - **Relazione bin-aria** $R^{(2)}$
  >   Relazione che coinvolge due variabili. In questo caso possiamo parlare di operazioni come l'addizione o la moltiplicazione; infatti per eseguirle abbiamo bisogno di due variabili. Le operazioni menzionate sono dunque relazioni binarie.

- **Simboli di funzione**; Simboli n-ari utilizzati come argomento per le variabili nell'insieme di lavoro. Prendiamo per esempio ogni $n \in \mathbb{N}$; avremo di conseguenza un insieme delle funzioni F^n dove alla n sostituiremo il numero apposito.

- **Simbolo opzionale**; Relazione binaria non appartenente a $R^{(2)}$. Se esiste un $n \geq 1$ tale che $F^{(n)} \neq \emptyset$, allora l'alfabeto L deve contenere il simbolo =.

- **Simbolo ausiliare**; Parentesi tonde "()", punto "." e virgola ",".

Avremo infine un insieme delle **costanti**, corrispondente a $F^{(0)}$ e denotato con **C** e l'insieme **L-stringhe**, il quale contiene tutte le stringhe componibili usando i simboli appena visti.

Un'ulteriore novità della FOL sono i **termini**; il punto di partenza per l'ottenimento delle formule logiche.

Definizione 3.1. L-termini
Dato l'alfabeto L, l'insieme $TERM_L$ dei termini è il più piccolo insieme X tale che:

- $Var \in X$.
- $C \in X$.
- Se $t_1, ..., t_n \in X$ e f è un simbolo di funzione n-aria, allora $f(t_1, ..., t_n) \in X$.

Definizione 3.2. L-formule
Dato l'alfabeto L, l'insieme $FORM_L$ delle formule è il più piccolo insieme X tale che:

- $\perp \in X$.
- Se $t_1, t_2 \in TERM_L$, allora $t_1 = t_2 \in X$.
- Se P è una relazione k-aria e $t_1, ..., t_k \in TERM_L$, allora $P(t_1, ..., t_k) \in X$.
- Se $\phi, \psi \in X$, allora $\phi \circ \psi \in X$, dove $circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$.
- Se $x \in Var$ e $\phi \in X$, allora $Qx.(\phi) \in X$, dove $Q \in \{\forall, \exists\}$.

Ovviamente l'esistenza di questi due concetti implica la presenza di **sottotermini** e **sottoformule**, dove tuttavia spiegarli risulta ridondante. Parliamo ora invece delle istanze in cui si possono trovare le variabili; ovvero **libere** e **legate**. Considera la seguente formula:

$$\forall x.(P(x, y)) \rightarrow \forall z.(Q(z, x))$$

Puoi osservare che nel primo ramo la variabile x è legata dal quantificatore per ogni, mentre y no, risultando quindi libera. Nel secondo ramo invece z risulta quella legata. Tieni a mente inoltre che se una variabile è legata in un ramo, ciò vale solo per la specifica zona.

Definizione 3.3. Occorrenze libere, insieme FV
Sia $\phi \in FORM_L$, allora si dice che un'occorrenza di $x \in Var$ è libera se non occorre in una sottoformula del tipo $Qx.y$, dove Q è il quantificatore.
Indichiamo infine l'insieme delle variabili libere con la notazione $FV[\phi]$, dove nelle parentesi

quadre si inserisce il simbolo indicante una formula. Infatti con la notazione si intende il concetto di "Variabili libere nella formula ϕ". In merito, definiamo con precisione:

Definizione 3.4. Insieme delle variabili libere

- Sull'insieme dei termini $TERM_L$:

  $FV[c] = \emptyset$.

  $FV[x] = \{x\}$.

  $FV[f(t_1, ..., t_n)] = FV[t_1] \cup FV[t_2] \cup ... \cup FV[t_n]$.

- Sull'insieme delle formule $FORM_L$:

  $FV[\perp] = \emptyset$.

  $FV[t_1 = t_2] = FV[t_1] \cup FV[t_2]$.

  $FV[P(t_1, ..., t_n)] = FV[t_1] \cup ... \cup FV[t_n]$.

  $FV[\phi \circ \psi] = FV[\phi] \cup FV[\psi]$, dove $\circ = \{\rightarrow, \wedge, \vee\}$

  $FV[Qx.\phi] = FV[\phi]/\{x\}$, dove $Q \in \{\forall, \exists\}$.

Definizione 3.5. Insieme delle variabili chiuse

- Sull'insieme dei termini $TERM_L$:

  $BV[t] = \emptyset$.

  Un termine $t \in TERM_L$ si dice chiuso quando l'insieme delle variabili libere riguardante il termine è vuoto, quindi $FV[t] = \emptyset$.

- Sull'insieme delle formule $FORM_L$:

  $BV[\perp] = BV[t = u] = FV[R(t_1, ..., t_n)] = \emptyset$.

  $BV[\phi \circ \psi] = BV[\phi] \cup BV[\psi]$, dove $\circ = \{\rightarrow, \wedge, \vee\}$

  $BV[Qx.\phi] = BV[\phi] \cup \{x\}$, dove $Q \in \{\forall, \exists\}$.

  Una formula $\phi \in FORM_L$ si dice chiusa quando al suo interno non ci sono variabili libere, quindi $FV[\phi] = \emptyset$. In questo caso si parla di **enunciato**.

Il concetto di variabile libera e legata porta con sé tutto un nuovo set di regole per la sintassi, i sistemi deduttivi e anche la semantica, perché limita lo spazio di manovra che avevamo prima, aggiungendo condizioni da rispettare. In particolare, definiamo ora la sostituzione come tale:

Definizione 3.6. Sostituzione di una variabile
Per quanto riguarda i termini, definiamo ricorsivamente la sostituzione di una variabile x con un termine t in un termine u come:

- $c[t/x] = c$. Che vuoi, sostituire una costante?

- $x[t/x] = t$.

- $y[t/x] = y$, per $y \neq x$.
- $f(t_1, ..., t_n)[t/x] = f(t_1[t/x], ..., t_n[t/x])$.

La sostituzione di una variabile x con un termine t in una formula ϕ è invece induttivamente definita assumendo che t sia libero per x in ϕ, altrimenti l'operazione di sostituzione è indefinita.

- $\perp[t/x] = \perp$. Davvero, sostituire una variabile in una formula assurda non ha senso.
- $(t_1 = t_2)[t/x] = (t_1[t/x] = t_2[t/x])$. Associatività.
- $R(t_1, ..., t_n)[t/x] = R(t_1[t/x], ..., t_n[t/x])$.
- $(\phi \circ \psi)[t/x] = (\phi[t/x] \circ \psi[t/x])$, dove $\circ = \{\rightarrow, \wedge, \vee\}$.
- Con $Q \in \{\forall, \exists\}$ abbiamo i seguenti due casi:
  1. Se $y = x \implies (Qx.\phi)[t/x] = (Qx.\phi)$.
  2. Se $y \neq x \implies (Qy.\phi)[t/x] = (Qy.\phi[t/x])$.

E questi sono i casi utili per sostituire variabili in termini e formule. Abbiamo parlato di vincoli, però; quali sono? Ebbene, sono fortunatamente solo due:

- Non è possibile sostituire variabili legate a un quantificatore.
- Non è possibile creare vincoli diversi da quelli statati inizialmente. Ciò significa che non tutti i termini possono essere utilizzati per la sostituzione.

In merito al secondo caso, possiamo trarre una conclusione: l'unico modo per non creare ulteriori vincoli è lavorare su **termini liberi**.

Diciamo che un termine t è libero per x in ϕ, dopo la sostituzione $\phi[t/x]$ se tutte le occorrenze delle variabili in t sono libere. Vediamo ora qualche esempio:

Esempio. Sostituzioni di termini per variabili in una formula
Sia la formula $\sigma = \forall x.(R(z, x))$. Proviamo ad effettuare le seguenti sostituzioni:

1. $\forall x.(R(z, x))[f(z)/z] \rightarrow \forall x.(R(f(z), x)$. Valida, rispetta i vincoli.
2. $\forall x.(R(z, x))[f(x)/z] \rightarrow \forall x.(R(f(x), x)$. Non va bene, crea un nuovo legame per $f(x)$. Infatti non era libero per x in σ.
3. $\forall x.(R(z, x))[f(z)/x] \rightarrow \forall x.(R(z, x))$. La sostituzione non ha effetto.

3.2 Sistemi Deduttivi

Ribadisco che in quanto *estensione* della logica proposizionale, la FOL mantiene tutte le regole per la deduzione naturale studiate finora, aggiungendo solamente quelle per i quantificatori.

- **Regole di per ogni** - $\forall$:

- Introduzione di $\forall$:

  Per poter introdurre il per ogni, occorre che la variabile x nella formula ϕ possa assumere un valore generico e quindi *non vincolato* da nessuna delle ipotesi della derivazione, ovvero x **non deve comparire libera nelle ipotesi**.

  Il procedimento effettua una sostituzione in y per x nella ϕ, come segue:

$$\dfrac{\dfrac{\dots}{\phi(x)}}{\forall y.\phi(y)}\ \forall I$$

  La sostituzione è corretta perché $x \notin Hp(D)$, ma è stata derivata. Ci è inoltre possibile derivare $\forall x.\phi(x)$ da quanto ottenuto, perché ogni variabile è libera per sé stessa; quindi:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dots}{\phi(x)}}{\forall y.\phi(y)}\ \forall I}{\forall x.\phi(x)}\ [x/y]$$

- Eliminazione di $\forall$:

  Se vale $\forall x.\phi(x)$, allora ϕ vale per qualunque valore di x e quindi per un valore t corrispondente ad un valore di x. $\phi(t)$ deve quindi valere per ogni termine t libero per x in ϕ.

$$\dfrac{\dfrac{\dots}{\forall x.\phi(x)}}{\phi(t)}\ \forall E$$

  Non ci sono problemi per quanto riguarda l'ipotesi. Puoi eliminare il per ogni anche se parti da quella formula.

- **Regole di esiste** - $\exists$:

  - Introduzione di $\exists$:

    Diciamo che se è possibile derivare $\phi(t)$ per un termine t, si deduce che esista una x tale per cui valga $\phi(x)$.

    Quindi, se una proprietà vale per t, allora esiste un valore x per cui continua a valere dove t è libero per x nella proprietà.

$$\dfrac{\dfrac{\dots}{\phi(t)}}{\exists x.\phi(x)}\ \exists I$$

  - Eliminazione di $\exists$:

    Resa più comprensibile se vista come la scrittura compatta di $[\phi(0) \vee \phi(1) \vee \dots \vee \phi(n)]$, dove almeno una di queste proprietà è valida sull'insieme di lavoro.

$$\dfrac{\exists x.\phi(x) \qquad \dfrac{\dfrac{[\phi[t/x]]^k}{\dots}}{\gamma}}{\gamma}\ \exists E^k$$

    In questa formula è necessario aver derivato $\exists x.\phi(x)$. Siccome non si hanno informazioni aggiuntive su quale valore faccia valere ϕ, allora non è possibile avere una regola generale che faccia derivare $\phi(t)$ da questa formula per un termine t.

    Più semplicemente, deriva $\exists x.\phi(x)$ per poter concludere la formula γ.

3.3 Semantica

Per poter lavorare con il significato della FOL, è necessario prima introdurre il concetto di struttura matematica.

Definizione 3.7. Struttura matematica
Quadrupla del tipo: $\mathfrak{U} = \langle A, \mathbb{R}, \mathbb{F}, \mathbb{C} \rangle$, dove:

- A è l'insieme rappresentante il dominio della struttura, il quale non deve essere vuoto.
- $\mathbb{R}$ è l'insieme delle relazioni sul dominio.
- $\mathbb{F}$ è l'insieme delle funzioni sul dominio.
- $\mathbb{C}$ è un sottoinsieme del dominio che contiene gli elementi costanti.

Esempio. Considera una quadrupla coi seguenti campi:

- $A = \mathbb{N}$, ovvero l'insieme dei numeri naturali.
- $\mathbb{R} = \{\leq\}$, ovvero l'insieme delle relazioni della struttura è composto dalla sola relazione di maggiore o uguale.
- $\mathbb{F} = \{+, \times, succ\}$, ovvero le funzioni attuabili sull'insieme sono somma, moltiplicazione e successivo.
- $\mathbb{C} = \{0, 1\}$, ovvero che le costanti di questo insieme sono i numeri $0, 1$.

A queste strutture è possibile associare un linguaggio della FOL; introducendo il concetto di **L-Struttura**, la quale sarà poi semanticamente interpretata mediante una **U-Valutazione**.

Definizione 3.8. L-Struttura/L-Interpretazione
Corrisponde ad ogni coppia $\mathfrak{U} = \left\langle A, (\_)^{\mathfrak{U}} \right\rangle$ con dominio $A \neq \emptyset$ e funzione $(\_)^{\mathfrak{U}}$ la quale assegna un'interpretazione agli oggetti base del linguaggio. Espandendo:

- $\forall c \in C$ assegna un elemento $c^{\mathfrak{U}} \in A$.
- $\forall f \in F^k$, con $k > 0$, assegna una funzione $f^{\mathfrak{U}} : A^k \to A \in \mathbb{F}$.
- $\forall R \in R^n$, con $n > 0$, assegna una relazione $R^{\mathfrak{U}} \subseteq A^n \in \mathbb{R}$.

Definizione 3.9. U-Valutazione
Data una L-struttura $\mathfrak{U}$, la $\mathfrak{U}$-valutazione è una funzione $\rho : Var \to |\mathfrak{U}|$, dove la scrittura $|\mathfrak{U}|$ indica il dominio della struttura.

Useremo la notazione $\rho_{\mathfrak{U}}$ per indicare una valutazione sulla struttura $\mathfrak{U}$. Se si considera una L-struttura $\mathfrak{U}$ e un elemento $a \in |\mathfrak{U}|$, con $\rho[a/x]$, allora possiamo denotare la valutazione come:

$$\rho_U[a/x](y) = \begin{cases} x \neq y \rightarrow \rho_U(y) \\ a \end{cases}$$

Definizione 3.10. Interpretazione dei termini
Dato un linguaggio L ed una L-struttura U, definiamo ricorsivamente la funzione di interpretazione $[\_]^U : \mathcal{E}_U \rightarrow TERM_L \rightarrow |U|$.

- $[c]^U_{\rho_U} = c^U$.
- $[x]^U_{\rho_U} = \rho_U(x)$
- $[f(t_1, ..., t_n)]^U_{\rho_U} = f^U([t_1]^U_{\rho_U}, ..., [t_n]^U_{\rho_U})$.

3.4 Esercizi

3.5 Appunti

3.5.1 Derivazione Semantica

3.5.2 Teoremi di Correttezza e Completezza

formalizzazione, contromodello, struttura di Peano