

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI VERONA

CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA

Sistemi

Federico Brutti
federico.brutti@studenti.univr.it

*Non riesco a scrivere e parlare contemporaneamente, il mio cervello è un
pò limitato. - Francesco V.*

Contents

1	Introduzione al corso	3
1.1	Segnali e sistemi	3
1.2	Tipi di segnali	6
1.3	Distribuzioni	8
2	Dinamiche dei sistemi	11
2.1	Sistemi Lineari Tempo invariante	11
2.2	Calcolo delle risposte	12
2.2.1	Calcolo della risposta libera	13
2.2.2	Calcolo della risposta forzata	15
3	Trasformata di Laplace	20
3.1	Risposta in frequenza	20
3.2	Trasformata di Laplace unilatera	21
3.3	Trasformate notevoli	26
3.4	Utilizzo della TdL per il calcolo delle risposte	28
3.5	Antitrasformata di Laplace unilatera	31
4	Diagrammi di Bode	32

Chapter 1

Introduzione al corso

Il corso si propone di dare gli strumenti necessari alla comprensione della ricezione di segnali monodimensionali. Pone le basi per altre materie come elaborazione di segnali e immagini; richiede inoltre competenze di base ottenute da analisi 1 e 2, come anche nozioni di fisica 1. È consigliato iniziare questa materia solamente una volta dopo aver solidificato tali basi, specie riguardo i numeri complessi.

1.1 Segnali e sistemi

Partiamo dai concetti di base: **segnali** e **sistemi** sono due entità in stretta correlazione, e non possono esistere da sole. La prima riguarda le informazioni trasmesse nello spazio-tempo, mentre la seconda rappresenta lo strumento con il quale si andrà a elaborare la precedente.

Esistono due tipi di segnali di nostro interesse, quelli a **tempo continuo**, dati dai fenomeni fisici, e quelli a **tempo discreto**, in una forma approssimata per essere elaborati dalla macchina. Risulta finito nel tempo e nei valori.

Come già visto nel corso di Architetture degli Elaboratori, viene seguito il seguente algoritmo per la conversione dei dati e la loro conseguente elaborazione:

1. **Campionamento:** Divide in intervalli uguali il segnale ricevuto, quindi passa da continuo a discreto. Non è un processo distruttivo.
2. **Quantizzazione:** Approssima gli intervalli ottenuti ad un valore leggibile dalla macchina in base alla sua risoluzione. Da qui il segnale non è più revertibile.
3. **Encoding:** Trasforma il segnale quantizzato in dati. Non sarà approfondito.

In questa parte di corso ci concentreremo su segnali unidimensionali non negativi, ovvero rappresentabili tramite funzioni lineari. In successione verranno approfonditi anche i seg-

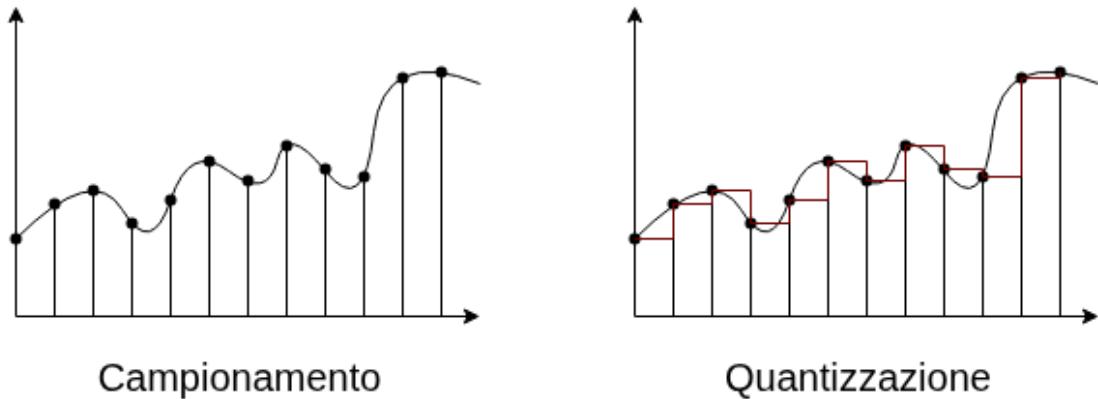


Figure 1.1: Algoritmi di ricezione segnali

nali bidimensionali, usati per la rappresentazione di immagini, e tridimensionali, ovvero le stesse con colori.

Parliamo adesso dei **sistemi**. Questi detengono un’entrata ed un’uscita, anche se spesso viene usato un ulteriore **blocco di retroazione** per ricalibrare o modificare il segnale di output. In tal caso, l’uscita del blocco diventerà la nuova entrata del sistema principale. Un esempio di questo comportamento è il termostato. Di base segnala puramente la temperatura attuale, ma se attivato in automatico, cercherà di bilanciare la suddetta accendendo l’aria condizionata o i termoarredi.

Passiamo ora alle notazioni utilizzate nel corso. I segnali si indicano con la lettera minuscola f , mentre le maiuscole sono usate per le **Trasformate**, le quali hanno il compito di convertire i segnali. Vedremo più tardi in dettaglio la loro utilità.

Le notazioni per variabili a tempo continuo sono t, τ, t_i , mentre per quelle a tempo discreto si usa k . La scrittura $f(t)$ indica un segnale a tempo continuo. Per cogliere un istante specifico, si scrive $f(3)$, che ritornerà il valore di f al tempo 3.

I sistemi sono invece rappresentati come una scatola nera, con un’entrata $u(t)$ ed un’uscita $v(t)$. Per loro si usano lettere greche o maiuscole, come Σ . Generalmente lavoreremo con sistemi LTI, ovvero **Linear Tempo Invarianti**, ciò significa che vale la sovrapposizione degli effetti (lineare), e che a prescindere dal punto di ingresso del segnale nel sistema, l’uscita sarà sempre la stessa (tempo invariante).

Il compito che ci poniamo è l’analisi dei sistemi tramite un approccio classico. Partiamo dal segnale, un qualunque evento fisico, e prendiamo per esempio una molla con una massa attaccata ad una sua estremità. Il movimento che questa effettua fino al ritornare

stabile è il nostro segnale. Detto ciò, l'analisi è un processo diviso in quattro fasi:

1. **Definizione del modello:** Per la rappresentazione del sistema verranno utilizzati grafici appositi, mentre per segnali a tempo continuo e discreto si useranno equazioni differenziali ed equazioni alle differenze rispettivamente.

Essendo le equazioni differenziali algoritmamente complesse, più avanti nel corso saranno introdotte le trasformate, che consentono di trasformare equazioni differenziali in equazioni di secondo grado con numeri complessi. In particolare:

- **Trasformata di Laplace:** Più generale, per segnali a tempo continuo.
 - **Trasformata di Fourier:** Sottocategoria della precedente, usata sempre per segnali a tempo continuo.
 - **Trasformata Zeta:** Per segnali a tempo discreto.
2. **Analisi di proprietà e stabilità:** La definizione del modello introduce proprietà ad esso associate. Per esempio, supponiamo che un'auto sia il nostro sistema; il freno, che riduce la sua accelerazione per poi fermare del tutto il veicolo, è una proprietà. Se questa agisce come inteso, il sistema è detto **stabile**.
 3. **Controllo delle proprietà:** Qui si parla di prestazioni, ovvero il costo utilizzato per produrre l'output richiesto. Chiaro che meno costa, meglio è.
 4. **Sintesi del modello:** Non vista nel corso, è utile per la correzione del sistema affinché risulti stabile.

Sebbene siano il nostro principale campo di prova, nella realtà non esistono sistemi lineari. infatti noi prenderemo una parte del segnale il cui comportamento risulta simile ad una funzione lineare, effettuando, in parole povere, un'astrazione del segnale preso in esame.

Approfondiamo ora la stabilità. Generalmente, quando la grandezza di un output non tende ad infinito, è detta stabile, ma ne abbiamo due tipi:

- **Stabilità BIBO:** L'acronimo sta per bounded input, bounded output. Afferma che se ho un input limitato in ampiezza, mi aspetto che lo sarà anche l'uscita. Formalmente:

$$\exists M > 0. |u(t)| < M \forall t \in \mathbb{R} \implies \exists N > 0. |v(t)| < N \forall t \in \mathbb{R}$$

- **Stabilità asintotica:** Afferma che esiste un limite tale per cui il mio valore si annulla. Ciò vale sia in input che output. Quindi se cessa l'input, così farà l'output. Questa stabilità implica la precedente, ma non viceversa.

$$\forall t \text{ di } v(t). t \in \mathbb{R}, \lim_{t_1 \rightarrow \infty} v(t) = 0$$

Abbiamo detto prima che i segnali sono rappresentati mediante equazioni differenziali; infatti il modello generale è dato da una doppia sommatoria con due indici diversi di un coefficiente, moltiplicata per una parte esponenziale ed una parte polinomiale.

Definizione 1. *Formula generale per la rappresentazione dei segnali*

$$y(t) = \sum_i \sum_j c_{ij} e^{\alpha t} \frac{t^e}{e!}$$

In questa formula, t è la variabile del tempo ed α è un numero complesso. Quest'ultimo è rappresentabile anche come $\lambda + \omega t$ e quindi scomponibile in due esponenziali. È ovviamente consentito passare in coordinate polari:

- $e^{j\omega} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$.
- $e^{\alpha t} = \rho(\cos(\omega t) + j\sin(\omega t))$.

1.2 Tipi di segnali

È stato precedentemente menzionato come i due tipi di segnali principali siano quelli a tempo continuo e discreto, è ora di associare il concetto ad effettive funzioni sulle quali andremo a lavorare.

Segnali sinusoidali: $x(t) = A\cos(\omega_o t + \phi)$; $x[n] = A\cos(\Omega_0 n + \phi)$

Le due formule sono usate per l'espressione dei segnali in forma sinusoidale, la prima a tempo continuo, la seconda a tempo discreto. Le componenti sono:

- A : Ampiezza, indica l'altezza dell'onda in base all'asse delle y.
- ω_0 ; Ω_0 : Frequenza, determinata dalla dilatazione delle singole onde. Si ottiene con $f = \frac{1}{T}$, dove T è il periodo.
- ϕ : Fase, punto di inizio del segnale.

Il punto d'intersezione con l'asse delle y è dato da $A\cos(\phi)$, detto **Shift temporale**, mentre il **Periodo** $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ è la distanza fra le due ampiezze massime delle singole onde. Questo tipo di segnale detiene inoltre proprietà legate al tipo di funzione:

- **Periodicità:** Esiste un certo periodo T_0 che se sommato a t ritorna lo stesso risultato. T_0 è il numero più piccolo per il quale vale questa proprietà. Per il tempo discreto, non è garantita periodicità in quanto con l'approssimazione si potrebbe arrivare ad una perdita di dati.

- **Time shifting:** Una traslazione temporale, ovvero spostarsi avanti o indietro nel tempo rispetto al segnale, equivale ad un cambio di fase. Dove questa proprietà è sempre vera in segnali a tempo continuo, in quelli a tempo discreto potrebbe non valere.
- **Parità:** Data una fase $\phi = 0$, otterremo una funzione coseno, quindi pari. Vale $x(t) = x(-t)$.
- **Disparità:** Data una fase $\phi = -\frac{\pi}{2}$, otterremo una funzione seno, quindi dispari. Vale $x(t) = -x(-t)$.

Segnali esponenziali reali: $x(t) = Ce^{at}; x[n] = Ce^{bn}$

Segnali che seguono le regole delle funzioni esponenziali, quindi cresce o decresce in base al segno dell'esponente. Nelle rispettive formule, abbiamo poi: $C, a, b \in \mathbb{R}$.

In caso di time shift, la variabile modificata è t o n , per la rispettiva formula, e ne influenza la scala. Si scriverà infatti: $Ce^{a(t+t_0)}$.

Per quanto riguarda i segnali discreti, si preferisce passare ad una formula contratta, dove $\alpha = e^b$:

$$x[n] = Ce^{bn} \equiv C(e^b \times e^n) \equiv C\alpha^n$$

Abbiamo quattro modi diversi per la loro rappresentazione in base al valore di α e al suo modulo:

- $\alpha > 0, |\alpha| > 1$: cresce e tende ad infinito nel primo quadrante.
- $\alpha > 0, |\alpha| < 1$: Decresce e tende a 0 nel primo quadrante.
- $\alpha < 0, |\alpha| > 1$: Ha un comportamento oscillatorio, cresce e tende ad infinito nell'asse delle x .
- $\alpha < 0, |\alpha| < 1$: Ha un comportamento oscillatorio, decresce e tende a 0 nell'asse delle x .

Segnali esponenziali complessi: $x(t) = ce^{at}; x[n] = c\alpha^n$

I segnali esponenziali complessi hanno un comportamento oscillatorio, il quale cresce o decresce verso l'asse delle x in base al segno delle variabili r e $|a|$ nelle rispettive formule. Si dice che ha una forma sinusoidale smorzata. Nello specifico, infatti, per il tempo continuo si ha:

- $c = |c|e^{j\theta}$, con forma polare.
- $a = r + j\omega_0$, con forma cartesiana.

Che ci fa ottenere, grazie alla formula di Eulero che consente di passare da esponenziale a forma polare del complesso: $e^{j(\omega_0 t + \theta)} = \cos(\omega_0 t + \phi) + j \sin(\omega_0 t + \phi)$, quanto segue:

$$\begin{aligned} x(t) &= |c| e^{j\theta} e^{(r+j\omega_0)t} \\ &= |c| e^{rt} e^{j(\omega_0 t + \theta)} \\ &= |c| e^{rt} \cos(\omega_0 t + \phi) + j \sin(\omega_0 t + \phi) \end{aligned} \tag{1.1}$$

Da questa equazione estesa è possibile differenziare i modi in cui si può scrivere graficamente il segnale; se $r > 0$, la sinusode crescerà all'infinito, altrimenti decrescerà fino a 0.

Per quanto riguarda invece il tempo discreto, le componenti sono:

- $c = |c| e^{j\theta}$
- $\alpha = |\alpha| e^{j\Omega_0}$

Sostituiamole alla formula contratta per ottenere quella estesa, come prima:

$$\begin{aligned} x[n] &= |c| e^{j\theta} (|\alpha| e^{j\Omega_0})^n \\ &= |c| |\alpha|^n e^{j(\Omega_0 n \theta)} \\ &= |c| |\alpha|^n \cos(\Omega_0 n + \theta) + j \sin(\Omega_0 n + \theta) \end{aligned} \tag{1.2}$$

Il grafico qui dipende dal valore di $|\alpha|$. Se maggiore di 0, la sinusode crescerà all'infinito verso l'asse delle x , altrimenti qui tenderà a 0.

1.3 Distribuzioni

Talvolta ci sono delle grandezze non misurabili numericamente e quando ciò ha luogo, ci serviamo dei segnali generalizzati. La loro particolarità riguarda essere definiti all'interno di un'operazione di integrale, il cui risultato ritornerà il valore cercato. Formalmente scriviamo l'**impulso di Dirac**:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sigma(t) \phi(t) dt = N$$

Dove σ è la grandezza, ϕ lo strumento ed N la misura.

Lo strumento di lavoro base per questa misurazione è invece detto **impulso unitario**, ed è una funzione che comprende un **supporto**, quindi la larghezza della funzione, infinitesimo, **altezza** infinita, ed un'**area**, quindi l'integrale, uguale ad 1. Inoltre, è definita in $[0^-, 0^+]$ e si denota con:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

Chiariamo che la grandezza da misurare è δt , lo strumento è la costante 1 moltiplicata per la grandezza, ed 1 è il risultato. In natura questa funzione non esiste, ma è utile per effettuare approssimazioni e quindi anche il **campionamento**. I casi ricorsivi sono:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty \Rightarrow 0 \\ 0 \end{cases}$$

A partire dall'impulso unitario possiamo definire due funzioni non derivabili, ma fondamentali per l'analisi dei segnali:

- **Finestra rettangolare unitaria**

Un rettangolo di altezza 1 definito nell'intervallo $[-\frac{t}{2}, \frac{t}{2}]$. Quest'onda, se ripetuta nel tempo, fa ottenere un'onda quadra. Da un punto di vista pratico è utile per il controllo dei motori. Ricorsivamente è definita come:

$$\pi(t) = \begin{cases} 1 \in [-t/2 \leq t \leq t/2] \\ 0 \end{cases}$$

- **Finestra triangolare unitaria**

Un triangolo di altezza 1 definito nell'intervallo $[-T, T]$. Non viene usata per fare controlli particolari, ma funziona per fare filtri migliori. Se ripetuta nel tempo fa ottenere un'onda triangolare e ci aiuterà a generare le sinusoidi. Ricorsivamente è definita come:

$$\begin{cases} 1 - |t| \in [-T \leq t \leq T] \\ 0 \end{cases}$$

Ottenerne il caso generale dalle funzioni unitarie è semplicissimo, basta sostituire il valore preso in esame al posto della costante 1 nella definizione ricorsiva. Ma in generale come è possibile ottenere un impulso?

Trattasi di una serie di funzioni fra cui cambiamo dei valori, ma, per definizione, l'area deve risultare sempre uguale ad 1. La verifica si esegue con la semplice formula della geometria piana:

- **Area del rettangolo:** $b \times h$.

- **Area del triangolo:** $\frac{b \times h}{2}$.

In particolare, con il triangolo è possibile definire quale sia la derivata dell'impulso, una funzione che cresce e decresce nell'infinitesimo molto vicino al valore 0. Ci sarà utile per definire le **funzioni polinomiali**, segnali definiti come operazioni integrali a partire dall'impulso. Queste sono generalmente definite ricorsivamente come:

$$\delta_{-n}(t) = \begin{cases} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} t \geq 0 \\ 0 \end{cases}$$

A partire dalle definizioni otteniamo le seguenti funzioni:

- **Funzione gradino**, primo integrale. Permette di garantire la causalità:

$$\delta_{-1}(t) = \begin{cases} \frac{t^{1-1}}{(1-1)!} t \geq 0 \\ 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 1t \geq 0 \\ 0 \end{cases}$$

- **Funzione rampa**, secondo integrale:

$$\delta_{-2}(t) = \begin{cases} \frac{t^{2-1}}{2-1} t \geq 0 \\ 0 \end{cases} \implies \begin{cases} t^2 \geq 0 \\ 0 \end{cases}$$

- **Funzione parabola**, terzo integrale, non vista in questo corso.

Lo scopo dei segnali polinomiali riguarda la caratterizzazione del sistema mediante il testing. Per esempio, si dà in input una funzione gradino, misura standard, e si annota il tempo utilizzato per ritornare il valore. In successione vedremo con più precisione come passare da tempo continuo a discreto, ma per ora è sufficiente sapere che è possibile ottenere il valore delle funzioni in un preciso punto t_0 moltiplicando la funzione per un impulso. Si può fare se abbiamo una funzione continua in questo punto. Quindi, per $t \in \mathbb{R}$:

$$v(t)\delta(t - t_0) = v(t_0)\delta(t - t_0)$$

La formula può essere anche riscritta come

$$N(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(\tau)\delta(\tau - t_0)d\tau$$

Quindi il valore di una funzione in t_0 è l'integrale della funzione moltiplicata per un impulso traslato in t_0 .

Chapter 2

Dinamiche dei sistemi

2.1 Sistemi Lineari Tempo invariante

Possiamo ora dare una definizione rigorosa di sistema: si tratta di un modello matematico o formulazione di un processo o fenomeno fisico che permette di trasformare un'entrata in un'uscita determinata. Ne esistono principalmente di due tipi:

- **Single Input Single Output**
- **Multiple Input Multiple Output**, non visti in questo programma.

In base a questi poi ci sono i sistemi dinamici, ovvero con memoria, i quali salvano i dati grazie agli stati. Rammento infine che, come i segnali, i sistemi possono essere a tempo continuo e discreto.

Per quanto riguarda i sistemi LTI, approfondiamo le proprietà menzionate nel capitolo precedente:

- **Linearità**: Partendo da un sistema con due entrate, otterrò in output un risultato equivalente alla combinazione lineare dei singoli input.
- **Tempo-invarianza**: Traslando l'input del sistema prima o dopo nel tempo avrò come output lo stesso risultato traslato prima o dopo nel tempo:

$$u(t) \rightarrow v(t) \implies u(t + \tau) \rightarrow v(t + \tau), \forall \tau \in \mathbb{R}$$

- **Causalità**: L'effetto non precede mai la causa. L'uscita $v(t)$ all'istante τ deve dipendere esclusivamente dall'ingresso $u(t)$ per $t \leq \tau$. Per comodità considereremo solo sistemi a riposo, ovvero con $\tau = 0$.

Richiamiamo all'attenzione il concetto di stabilità per formalizzarlo definitivamente. Definiamo:

Sistema asintoticamente stabile

Un sistema si dice tale se dopo aver dato l'input, l'output va a morire fino ad arrivare a 0. Formalmente:

$$\exists \tau \in \mathbb{R} \text{ tale che } u(t) = 0, \forall t \geq \tau \implies \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = 0$$

Sistema BIBO-stabile

Supponiamo di avere un segnale che oscilla da un certo istante τ sempre all'interno di un certo intervallo di ampiezza. Se in output vale la stessa dinamica, il sistema si dice BIBO-stabile. Formalmente:

1. Se $(\exists \tau \wedge M_u > 0) \in \mathbb{R}$ tali che $|u(t)| < M_u$
2. Allora: $\forall t \geq \tau \implies \exists M_v > 0$
3. Infine, quest'ultimo è tale che: $|v(t)| < M_v \forall t \geq \tau$.

Prendere nota del fatto che ogni sistema asintoticamente stabile è necessariamente anche BIBO-stabile, in quanto suo caso particolare, ma non vale il contrario.

Ora che conosciamo la teoria, bisogna capire come si modellano effettivamente i sistemi. Come già detto, vengono descritti mediante equazioni differenziali per input e output. Un buon iter di lavoro generale è prima scrivere tutte le equazioni che descrivono le leggi in atto, per poi estendere la scrittura con tutte le componenti richieste. Va ordinata con output a sinistra e input a destra. L'equazione differenziale generale per la rappresentazione dei modelli è:

$$a_n \frac{\partial^n v(t)}{\partial t^n} + a_{n-1} \frac{\partial^{n-1} v(t)}{\partial t} + \dots + \frac{\partial^1 v(t)}{\partial t} + a_0 v(t) = b_m \frac{\partial^m u(t)}{\partial t} + b_{m-1} \frac{\partial^{m-1} u(t)}{\partial t} + \dots + b_1 \frac{\partial u(t)}{\partial t} + b_0 u(t)$$

Qui, $b_n, a_n \neq 0$ sono due normali coefficienti. La buona notizia è che esiste una forma più compatta, grazie alla sommatoria:

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{\partial^i v(t)}{\partial t} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{\partial^j u(t)}{\partial t}$$

Qui invece n, m danno l'ordine delle equazioni differenziali, con generalmente $n \geq m$. Più precisamente, se $n > m$, si dice strettamente proprio e se $n \geq m$ si dice proprio. Nello schema con la black box, nel sistema si scrive proprio questa seconda equazione.

2.2 Calcolo delle risposte

Come precedentemente menzionato, i sistemi sono definiti tramite equazioni differenziali, dove la forma generale mostra a sinistra l'output e a destra l'input. A noi interessa

studiare il comportamento del sistema, quindi le sue risposte. Definiamo quindi **risposta totale**:

$$v = v_l + v_f$$

Dove le componenti sono:

- **Risposta libera:** Comportamento del sistema che dipende solo dalle condizioni iniziali.
- **Risposta forzata:** Comportamento del sistema che dipende solo da un determinato input u .

Il procedimento da effettuare si traduce nella risoluzione dell'equazione differenziale con specifici vincoli, per ottenere le due componenti ed infine descrivere il comportamento del sistema.

2.2.1 Calcolo della risposta libera

I passaggi sono equivalenti a quelli per la risoluzione di un'equazione differenziale associata ad un problema di Cauchy. Quindi:

1. Ottenimento dell'equazione omogenea.
2. Ottenimento del polinomio caratteristico.
3. Risoluzione del suddetto polinomio per ottenere radici, ordine di grandezza e molteplicità algebrica.
4. Sostituzione dei valori nelle opportune variabili nella formula della soluzione generale.
5. Applicazione delle condizioni di Cauchy.
6. Scrittura della risposta libera.

Esempio 1. *Calcolare la risposta libera dell'equazione differenziale:*

$$\begin{cases} v(0) = 0 \\ v'(0) = 1 \end{cases}; v''(t) + 3v'(t) - 4v(t) = 5u'(t) - u(t)$$

1. Ottenimento equazione omogenea

L'equazione omogenea associata a quella presa in esame è semplicemente la parte di nostro interesse posta uguale a zero, in questo caso l'output, quindi:

$$v''(t) + 3v'(t) - 4v(t) = 0$$

2. Ottenimento polinomio caratteristico

Per ottenere la forma polinomiale bisogna sostituire alla t una variabile s , il cui grado è il numero di derivata dell'elemento:

$$s^2 + 3s - 4 = 0$$

3. Risoluzione del polinomio ottenuto

Non difficile. Sono i classici passaggi algebrici per le equazioni di secondo grado:

$$s^2 + 3s - 4 = 0 \implies (s + 4)(s - 1) = 0$$

Da questo calcolo ricaviamo due radici distinte, quindi $r = 2$, i cui valori sono: $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = 1$, e che le loro molteplicità sono: $\mu_1 = \mu_2 = 1$.

4. Sostituzione nella formula generale

Abbiamo già detto che la formula della soluzione generale è data da:

$$v_l(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} c_{i,l} \times e^{\lambda_i t} \times \frac{t^l}{l!}$$

Dove i, l sono coefficienti ottenuti con i vincoli di Cauchy. Sostituiamo:

$$\begin{aligned} v_l(t) &= c_1 \times e^t \times \frac{t^0}{0!} + c_2 \times e^{-4t} \times \frac{t^0}{0!} \\ &= c_1 e^t + c_2 e^{-4t} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Questa equazione sarà la base sulla quale andremo ad applicare le condizioni e derivare ove necessario.

5. Applicazione delle condizioni di Cauchy

Osservando le condizioni, è chiaro che saranno applicate prima alla forma normale, poi alla derivata prima. Mettiamo a sistema le due formule, sostituiamo a t il valore del vincolo e poniamo il tutto al valore richiesto:

$$\begin{cases} v_l(t) = c_{1,0}e^t + c_{2,0}e^{-4t} \\ v'_l(t) = 1c_{1,0}e^t - 4c_{2,0}e^{-4t} \end{cases} \implies \begin{cases} c_{1,0}1 + c_{2,0}1 = 0 \\ c_{1,0} - 4c_{2,0} = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} c_{1,0} + c_{2,0} = 0 \\ c_{1,0} - 4c_{2,0} = 1 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema con passaggi algebrici otteniamo infine che:

$$\begin{cases} c_{1,0} + c_{2,0} = 0 \implies c_{1,0} = 1/5 \\ c_{1,0} - 4c_{2,0} = 1 \implies c_{2,0} = -1/5 \end{cases}$$

Ottenendo così i valori delle c da sostituire alla formula generale.

6. Scrittura della risposta libera

Nulla di più semplice, una sostituzione delle c nella formula generale:

$$v_l(t) = \frac{1}{5}e^t - \frac{1}{5}e^{-4t}$$

Una cosa interessante che si può ricavare dalla descrizione dell'equazione differenziale è il **modo elementare**, descritto come:

$$m(t) = e^{\lambda t} \frac{t^l}{l!}$$

Risulta utile considerare i suoi tre casi di studio, perché grazie ad essi possiamo trarre conclusioni sulla stabilità di un sistema:

- Il limite per t che tende ad infinito del modo è uguale a zero solamente se ogni radice del polinomio caratteristico è minore di zero. In tal caso, il sistema è **asintoticamente stabile**.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} m(t) = 0 \iff \lambda_i < 0$$

- Il modo $m(t)$ è limitato, quindi può prendere solo determinati valori, sull'intervallo $[0, +\infty)$ solamente se le radici del polinomio caratteristico sono minori o uguali a zero. In tal caso il sistema è detto **semplicemente stabile**.
- Se il limite per t che tende ad infinito è uguale ad infinito non rientriamo nei primi due casi ed il sistema è detto **instabile**.

2.2.2 Calcolo della risposta forzata

Per il calcolo della risposta forzata ci serviremo di due strumenti: la **risposta impulsiva** e l'**operatore di convoluzione**. La prima per poter prendere un qualunque valore della funzione per descriverla, il secondo invece consente, in presenza di due segnali, di calcolare l'area sottesa del loro prodotto girando rispetto all'asse delle y uno dei due segnali per poi scorrerlo sull'altro. La risposta forzata v_f è quindi definita come:

$$\begin{aligned} v_f &= (u * v)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)v(t - \tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} v(\tau)u(t - \tau)d\tau \end{aligned} \tag{2.2}$$

Questo operatore detiene anche la proprietà commutativa, associativa e distributiva rispetto alla somma, consentendo di scegliere a piacere il segnale fermo. Inoltre vedremo

che l'uscita $v(t)$ di un sistema LTI inizialmente a riposo, in corrispondenza di un ingresso $u(t)$ è data proprio dalla convoluzione fra quest'ultimo e la risposta impulsiva $h(t)$.

$$\begin{aligned} v(t) &= (u * h)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)u(t - \tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)h(t - \tau)d\tau \end{aligned} \quad (2.3)$$

Supponendo sempre un sistema LTI causale e quindi inizialmente a riposo, abbiamo la risposta impulsiva $h(t) = 0$ quando $t < 0$, perché lo stimolo impulsivo $\delta(t) = 0$ per $t < 0$. In questi termini è possibile considerare l'integrale in un determinato intervallo di tempo, semplificando eventualmente i calcoli:

$$\begin{aligned} v(t) &= (u * h)(t) = \int_{0^-}^{+\infty} h(\tau)u(t - \tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{t^+} u(\tau)h(t - \tau)d\tau \end{aligned} \quad (2.4)$$

- Calcolo della risposta impulsiva

Dato un sistema a riposo, la risposta impulsiva $h(t)$ è l'output in corrispondenza di un impulso unitario $\delta(t)$. La formula generale è:

$$h(t) = d_0\delta(t) + \left[\sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} d_{i,l} \frac{t^l}{l!} e^{\lambda_i t} \right] \delta_{-1}(t)$$

I cui elementi sono:

- d_0 : Coefficiente. Risulta uguale a zero esclusivamente se il sistema è proprio, quindi quando gli indici delle due sommatorie n, m sono uguali.
- $\delta(t)$: Impulso unitario, già menzionato.
- $d_{i,l}$: Coefficienti specifici della risposta impulsiva.
- $\frac{t^l}{l!} e^{\lambda_i t}$: Modi elementari, già menzionati.
- $\delta_{-1}(t)$: Funzione gradino per garantire la causalità dell'uscita.

Esempio 2. *Calcolare la risposta impulsiva dell'equazione differenziale*

$$v'(t) + 2v(t) = u(t) + u(t)$$

1. Equazione omogenea, polinomio caratteristico e calcolo delle radici

Notiamo anzitutto che entrambi i lati dell'equazione presentano un numero di coefficienti uguale, quindi è confermato che il sistema è proprio e $d_0 \neq 0$. Chiarito ciò poniamo l'output a zero e risolviamo il polinomio caratteristico:

$$v'(t) + 2v(t) = 0 \implies s + 2 = 0 \implies \lambda_1 = -2$$

Da questo risultato notiamo inoltre che abbiamo una sola radice, quindi $r = 1$ e molteplicità $\mu_1 = 1$.

2. Sostituzione valori nei modi elementari

Puri passaggi algebrici:

$$\frac{t^l}{l!} e^{\lambda_i t} \implies \frac{t^0}{0!} e^{-2t} \implies e^{-2t}$$

3. Scrittura risposta impulsiva e calcolo derivate necessarie

Prendiamo la formula generale di prima e sostituiamo il valore ottenuto. Poi, in base all'ordine di grandezza dell'equazione, sarà necessario derivare il tutto per ricavare ogni singolo termine. In questo caso, dobbiamo derivare una sola volta.

$$\begin{aligned} h(t) &= d_0\delta(t) + \sum_{i=1}^r \sum_{l=l}^{\mu_1-1} d_{i,l} e^{\lambda_i t} \frac{t^l}{l!} \delta_{-1}(t) \\ &= d_0\delta(t) + d_{1,0}e^{-2t}\delta_{-1}(t) \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$h'(t) = d_0\delta'(t) - 2d_{1,0}e^{-2t}\delta_{-1}(t) + d_{1,0}e^{-2t}\delta(t)$$

4. Riscrittura equazione iniziale in termini di impulso

Quindi dobbiamo porre $v(t) = h(t)$ e $u(t) = \delta(t)$ e sostituirli all'equazione originale.

$$\begin{aligned} h'(t) + 2h(t) &= \delta'(t) + \delta(t) \\ d_0\delta'(t) - 2d_{1,0}e^{-2t}\delta_{-1}(t) + d_{1,0}e^{-2t}\delta(t) + 2(d_0\delta(t) + d_{1,0}e^{-2t}\delta_{-1}(t)) &= \delta'(t) + \delta(t) \\ d_0\delta'(t) + 2d_0\delta(t) + d_{1,0}e^{-2t}\delta(t) &= \delta'(t) + \delta(t) \end{aligned} \quad (2.6)$$

5. Valutazione delle funzioni in $t = 0$

$$\begin{aligned} d_0\delta'(t) + 2d_0\delta(t) + d_{1,0}\delta(t) &= \delta'(t) + \delta(t) \\ d_0\delta'(t) + 2d_0\delta(t) + d_{1,0}\delta(t) - \delta'(t) - \delta(t) &= 0 \\ (d_0 - 1)\delta'(t) + (d_{1,0} + 2d_0 - 1)\delta(t) &= 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

6. Risoluzione del sistema di equazioni e soluzione finale

Dall'algebra bisogna ricordarsi il concetto di indipendenza lineare. Possiamo porre a sistema i singoli ordini di grandezza e risolverli per ottenere i valori effettivi di nostro interesse.

$$\begin{cases} (d_0 - 1)\delta'(t) = 0 \\ (d_{1,0} + 2d_0 - 1)\delta(t) = 0 \end{cases} = \begin{cases} d_0 = 1 \\ d_{1,0} = -1 \end{cases}$$

Chiaro che $d_0 = 1, d_{1,0} = -1$ siano i coefficienti da sostituire nell'equazione originale. Una volta fatto ciò, il processo è concluso.

$$\begin{aligned} h(t) &= d_0\delta(t) + d_{1,0}e^{-2t}\delta_{-1}(t) \\ &= \delta(t) - e^{-2t}\delta_{-1}(t) \end{aligned} \quad (2.8)$$

- Utilizzo dell'operatore di convoluzione

Ottenuta la risposta impulsiva, è ora possibile ottenere la forzata, la quale dipende esclusivamente da input e per i sistemi LTI causali è descritta come:

$$\begin{aligned} v_f(t) &= (u * h)(t) = \int_{0^-}^{t^+} h(\tau)u(t - \tau)d\tau \\ &= \int_{0^-}^{t^+} u(\tau)h(t - \tau)d\tau \end{aligned} \quad (2.9)$$

Esempio 3. Calcolare la risposta forzata v_f a partire dai seguenti $h(t), u(t)$

$$h(t) = \frac{1}{2}\delta_0(t) + \frac{7}{4}e^{\frac{1}{2}t}\delta_{-1}(t); u(t) = 3\delta_{-1}(t)$$

Quindi notiamo che l'input è una funzione gradino di altezza 3. Procediamo con la risoluzione dell'integrale. Le forme possibili sono:

$$\begin{aligned} v(f) &= (h * u)(t) = (h * 3\delta_{-1})(t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)3\delta_{-1}(t - \tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} 3\delta_{-1}(\tau)h(t - \tau)d\tau \end{aligned} \quad (2.10)$$

Volendo preservare la nostra sanità mentale, terremo ferma la funzione più complessa, ovvero la risposta impulsiva. I passaggi continuano come segue:

$$\begin{aligned} (h * u)(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)3\delta_{-1}(t - \tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2}\delta_0(\tau) + \frac{7}{4}e^{\frac{1}{2}\tau}\delta_{-1}(\tau) \right] 3\delta_{-1}(t - \tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}\delta_0(\tau)3\delta_{-1}(t - \tau)d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{7}{4}e^{\frac{1}{2}\tau}\delta_{-1}(\tau)3\delta_{-1}(t - \tau)d\tau \\ &= \frac{3}{2} \int_{0^-}^{0^+} \delta_0(\tau)\delta_{-1}(t - \tau)d\tau + \frac{21}{4} \int_0^{t^+} e^{\frac{1}{2}\tau}\delta_{-1}(\tau)\delta_{-1}(t - \tau)d\tau \\ &= \frac{3}{2} \times 1 + \frac{21}{4} \int_0^{t^+} e^{\frac{1}{2}\tau}d\tau \\ &= \frac{3}{2} + \frac{21}{4} \left[\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}\tau} \right]_0^{t^+} = \frac{3}{2} + \frac{21}{4} \left(\frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2} + \frac{21}{8}e^{2t} - \frac{21}{8} = v_f \end{aligned} \quad (2.11)$$

Notare come gli estremi di integrazione variano ad un certo punto. Questo accade grazie al focus del nostro interesse. Per esempio, nel primo blocco, abbiamo l'intervallo di definizione dell'impulso, per il quale risulta essere sempre uguale ad 1. Così è stato sostituito. Il secondo blocco riguarda invece gli istanti di tempo dopo l'impulso, quindi a partire da 0 all'istante t .

Un'ultima cosa che è utile menzionare, più perché è richiesta all'esame che altro, è saper definire la stabilità di un sistema. Già menzionato come una stabilità **asintotica** è confermata se la parte reale di ogni radice del polinomio caratteristico è minore di zero, ma per definire un sistema **BIBO-stabile** è necessario verificare che la risposta impulsiva sia integrabile e con un risultato finito.

Chapter 3

Trasformata di Laplace

3.1 Risposta in frequenza

Per risposta in frequenza intendiamo l'output di un sistema quando in ingresso è fornita una funzione sinusoidale. Per lo studio degli input non utilizzeremo questa forma, bensì una di esponenziale complessa, che chiameremo **fasore**, e rappresenta un vettore roteante in una circonferenza unitaria, quindi di raggio 1. Si rappresentano con:

$$u(t) = Ae^{j(\omega_0 t + \phi)} \equiv Ae^{j\omega_0 t} e^{j\phi}$$

Mentre la risposta ha una forma simile a quella forzata, già vista nel capitolo precedente. La differenza di fondo è la presenza del fasore nell'equazione, il quale assume il ruolo di input $u(t)$ e consente di differenziare le varie frequenze nell'istante di tempo richiesto. Si scrive:

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) u(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) A e^{j[\omega_0(t-\tau)+\phi]} d\tau \\ &= Ae^{j(\omega_0 t + \phi)} \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j\omega_0 \tau} d\tau \end{aligned} \tag{3.1}$$

Abbiamo potuto rimuovere le costanti dall'integrale, lasciando al suo interno quella che effettivamente chiamiamo risposta in frequenza $H(j\omega)$, rappresentata dall'integrazione della risposta impulsiva con il fasore. Quindi, l'output è descritto come:

$$v(t) = H(j\omega_0) A e^{j(\omega_0 t + \phi)}$$

Una caratteristica importante da ricordare è che se il modulo di questo output è minore di infinito, allora il sistema converge ed è sicuramente almeno BIBO-stabile.

Finora abbiamo svolto i calcoli facendoci del male con le equazioni differenziali, quindi in questo capitolo verranno introdotte le **trasformate**, il cui scopo è cercare di semplificarci lo svolgimento e la comprensione degli esercizi. Vedremo infatti che la risposta in frequenza risulta essere la **Trasformata di Fourier** della risposta impulsiva di un sistema e quindi anche la **Trasformata di Laplace** della risposta impulsiva ristretta all'asse immaginario. Queste due considerazioni sono equivalenti e si indicano con:

$$H(j\omega) = \mathcal{F}[h(t)](s) = \mathcal{L}[h(t)](s); s = j\omega$$

Le trasformate sono utili per saltare passaggi laboriosi di analisi 2; con Laplace, trasformeremo equazioni differenziali in algebriche con dominio complesso. Vedremo infatti che s è una variabile complessa.

Tuttavia, per riportare un risultato equivalente a quello che avremmo ottenuto senza l'ausilio della trasformata, sarà necessario attuare una trasformata inversa, o **antitrasformata**, ed infine ottenere la soluzione nel dominio del tempo.

3.2 Trasformata di Laplace unilatera

Sia $v(t)$ una funzione generica con $t \in \mathbb{R}$, ottenuta come somma di funzioni reali a variabile reale o complessa. Per far sì che accetti la trasformata di Laplace, deve rispettare i seguenti criteri:

- Funzione localmente sommabile nell'intervallo $[0, \infty)$. Quindi che:

$$\int_a^b |v(t)| dt < \infty, \forall a, b \in [0, \infty)$$

- Funzione formata da un insieme finito di segnali polinomiali.

Noi definiamo la **Trasformata di Laplace**, o TdL unilatera come l'integrale della moltiplicazione fra l'output ed il fasore. Si tratta di una funzione che ha sia dominio che codominio in campo complesso e si scrive:

$$V(s) = \int_{0^-}^{+\infty} v(t)e^{-st} dt \equiv L[v(t)](s)$$

Notare che la convenzione di scrittura vede le funzioni trasformate con la lettera maiuscola. Da qui in avanti le funzioni verranno così distinte. Questa formula è fondamentale perché rappresenta la base di ogni trasformata che andremo ad utilizzare. Sebbene esistano tabelle apposite per utilizzarle out of the pocket, in mancanza di esse si dovrebbe partire da qua. Inoltre, attenzione: con una funzione $v(t)$ generica localmente sommabile, non abbiamo la certezza che lo sia anche la sua trasformata; ragion per cui è necessario definire la **regione di convergenza** di quest'ultima.

Definiamo questa regione RdC come un semipiano positivo, posto alla destra di un determinato asse α , considerato come ascissa di convergenza. Scriviamo:

$$RdC = \{s \in C \mid Re(s) > \alpha\}$$

Dimostrazione 1. RdC è un semipiano positivo

Sia $v(t)$ una combinazione lineare di esponenziali, vogliamo dimostrare che la regione di convergenza della sua trasformata è un semipiano positivo definito come appena visto. Abbiamo quindi:

- $v(t) = \sum_{i=0}^n c_i e^{\lambda_i t}; \lambda_i = \sigma_i + j\omega_i \in \mathbb{C}$
- $RdC = \{s \in C \mid Re(s) > \alpha\}$
- $\mathcal{L}[v(t)](s) = \int_{0^-}^{+\infty} v(t) e^{-st} dt$

Per prima cosa, partiamo dalla definizione di trasformata e sostituiamo a $v(t)$ la nostra supposizione, ovvero che sia combinazione lineare. Otteniamo:

$$\begin{aligned} V(t) &= \int_{0^-}^{+\infty} \sum_{i=0}^n c_i e^{\lambda_i t} e^{-st} dt \\ &= \sum_{i=0}^n c_i \int_{0^-}^{+\infty} e^{\lambda_i t} e^{-st} dt \end{aligned} \tag{3.2}$$

Prendendo un generico i possiamo porre le definizioni di numero complesso per λ_i ed s , dandoci:

$$\lambda_i = \sigma_i + j\omega_i; s = \sigma + j\omega$$

Ciò ci consente di riscrivere l'integrale come segue:

$$\begin{aligned} \int_{0^-}^{+\infty} e^{\sigma_i t} e^{j\omega_i t} e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt &= \int_{0^-}^{+\infty} e^{(\sigma_i - \sigma + j\omega_i - j\omega)t} dt \\ &= \left[\left(\frac{e^{(\sigma_i - \sigma + j\omega_i - j\omega)t}}{\sigma_i - \sigma + j\omega_i - j\omega} \right) \right]_{0^-}^{+\infty} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{(\sigma_i - \sigma)t} e^{j(\omega_i - \omega)t}}{\sigma_i - \sigma + j\omega_i - j\omega} \right) - \frac{1}{\sigma_i - \sigma + j\omega_i - j\omega} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Possiamo notare che $e^{j(\omega_i - \omega)t}$ è un fasore, quindi necessariamente uguale ad 1, possiamo quindi rimuoverlo. La vera parte che ci interessa è $e^{(\sigma_i - \sigma)t}$, perché saprà dirci se l'integrale converge, perché lo farà se $\sigma_i < \sigma$.

σ è però la parte reale di s , mentre σ_i la reale di λ_i , dunque possiamo sostituire i primi termini a questi ultimi e ottenere che:

$$\forall s \in \mathbb{C}, Re(s) > Re(\lambda_i)$$

Di conseguenza, il semipiano positivo è composto da tutti quei valori di s che devono necessariamente essere maggiori o uguali delle radici.

Notare infine che per un sistema LTI stabile, la regione di convergenza conterrà sempre anche l'asse immaginario. Passiamo ora alle **proprietà** della TdL:

- **Linearità**

Siano v_1, v_2 funzioni che ammettono TdL e rispettivamente V_1, V_2 le loro trasformate. Avremo che $av_1(t) + bv_2(t)$ ammette TdL. Invece, per l'ascisse di convergenza si prenderà il valore più alto fra le due, quindi, in tutto avremo:

$$\mathcal{L}[av_1(t) + bv_2(t)](s) = aV_1(s) + bV_2(s); \alpha \geq \max\{\alpha_1, \alpha_2\}$$

- **Traslazione nel dominio del tempo**

Sia $v(t)$ funzione che ammette TdL; traslandola avremo $v(t-\tau)$, la quale continuerà ad ammettere la trasformata solamente con $\tau > 0$. In tal caso definiamo:

$$\mathcal{L}[v(t-\tau)](s) = e^{-st} \mathcal{L}[v(t)](s)$$

La regione di convergenza con questa proprietà rimane immutata.

- **Traslazione nel dominio dei complessi**

Parliamo quindi di moltiplicazioni per una funzione esponenziale complessa. Sia $v(t)$ che ammette TdL, allora ciò varrà anche per $e^{\lambda t}v(t)$ e descriveremo la trasformata come

$$\mathcal{L}[e^{\lambda t}v(t)](s) = V(s - \lambda)$$

In questa proprietà, la regione di convergenza viene spostata, di conseguenza, anche l'ascissa diventa

$$\alpha = \alpha_0 + \operatorname{Re}(\lambda)$$

Con λ esponenziale qualsiasi.

- **Cambio di scala**

Sia $v(t)$ che ammette TdL, allora anche $v(rt)$ ammette TdL, la quale è definita come

$$\mathcal{L}[v(rt)](s) = \frac{1}{r}V\left(\frac{s}{r}\right)$$

- **Comportamento con le derivate**

Sia $v(t)$ che ammette TdL ed un limite finito $v(0^-) = \lim_{t \rightarrow 0^-} v(t)$. Allora anche la derivata i-esima della funzione ammette TdL.

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^i v(t)}{dt^i}\right] = s^i V(s) - \sum_{k=0}^{i-1} \left[\frac{d^k v(t)}{dt^k} \right]_{t=0^-} (s^{i-1-k})$$

L'ascissa di convergenza qui è $\alpha \leq \alpha_0$, con α_0 ascisse originale. Essendo una proprietà importante, dimostriamone il funzionamento per derivata prima e seconda.

Dimostrazione 2. Dimostrazione per derivata prima

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \left[\frac{dv(t)}{dt} \right] (s) &= \int_{0^-}^{+\infty} \frac{dv(t)}{dt} e^{-st} dt \\ &= v(t)e^{-st} \Big|_{0^-}^{+\infty} - \left(-s \int_{0^-}^{+\infty} v(t)e^{-st} dt \right) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} v(\epsilon)e^{-s\epsilon} - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^-} v(\epsilon)e^{-s\epsilon} + sV(s) \\ &= sV(s) - v(0^-)\end{aligned}\tag{3.4}$$

Dimostrazione 3. Dimostrazione per derivata seconda

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \left[\frac{d^2v(t)}{dt^2} \right] (s) &= L \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{dv(t)}{dt} \right) \right] (s) \\ &= s\mathcal{L} \left[\frac{d}{dt}v(t) \right] (s) - \frac{dv(t)}{dt} \Big|_{t=0^-} \\ &= s(s\mathcal{L}[v(t)](s) - v(0^-)) - \frac{dv(t)}{dt} \Big|_{t=0^-} \\ &= s^2V(s) - sv(0^-) - \frac{dv(t)}{dt} \Big|_{t=0^-}\end{aligned}\tag{3.5}$$

• **Moltiplicazione per funzione polinomiale**

Sia $v(t)$ che ammette TdL, allora lo farà anche $t^i v(t)$.

$$\mathcal{L}[t^i v(t)] = (-1)^i \frac{d^i V(s)}{ds^i}$$

Dimostrazione 4.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[tv(s)](s) &= \int_{0^-}^{+\infty} tv(t)e^{-st} dt = - \int_{0^-}^{+\infty} v(t)(-te^{-st}) dt \\ &= - \int_{0^-}^{+\infty} v(t) \frac{de^{-st}}{ds} dt = - \frac{d}{ds} \int_{0^-}^{+\infty} v(t)e^{-st} dt \\ &= - \frac{d}{ds} V(s)\end{aligned}\tag{3.6}$$

• **Integrazione nel dominio del tempo**

Sia $v(t)$ che ammette TdL, e se è definito $\psi(t) = \int_{0^-}^t v(t) dt$ suo integrale nel tempo, allora anche quest'ultimo ammette TdL. Qui l'ascissa di convergenza è il massimo fra 0 ed α_0 .

$$\mathcal{L} \left[\int_{0^-}^\tau v(t) d\tau \right] (s) = \frac{V(s)}{s}$$

Dimostrazione 5.

$$\begin{aligned}
v_i(t) &= \int_{0^-}^t v(\tau)d\tau \implies v'_1(t) = v(t) \wedge v(0^-) = \int_{0^-}^{0^-} v(\tau)d\tau = 0 \\
&= \mathcal{L}[v(t)](s) = \mathcal{L}[v'_1(t)](s) \implies s\mathcal{L}[v'_1(t)](s) - v_1(0^-) \\
&= v_1(0^-) = 0 \implies s\mathcal{L}\left[\int_0^t v(\tau)d\tau\right](s) \\
&= \mathcal{L}\left[\int_0^t v(\tau)d\tau\right] = \frac{V(s)}{s}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

• Integrazione nel dominio dei complessi

Sia $v(t)$ che ammette TdL ed esistente $\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{v(t)}{t}$, allora vale:

$$\mathcal{L}\left[\frac{v(t)}{t}\right](s) = \int_s^\infty \mathcal{L}[v(t)](\sigma)d\sigma$$

• Teorema del valore iniziale

Questa proprietà permette di capire il comportamento asintotico della funzione in 0, poiché ritorna il limite della derivata prima in condizioni nulle. Sia $v(t)$ che ammette TdL ed esistente finito il $\lim_{t \rightarrow 0^-} v(t)$, allora vale:

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} v(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s\mathcal{L}[v(t)](s)$$

• Teorema del valore finale

Questa proprietà permette di capire il comportamento asintotico della funzione in infinito guardando il limite in 0^+ . Sia $v(t)$ che ammette TdL ed esistente finito il $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t)$, allora:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \lim_{s \rightarrow 0^+} s\mathcal{L}[v(t)](s)$$

• Convoluzione nel dominio del tempo

siano $u(t)$ e $v(t)$ due funzioni generiche e causali nulle per $t < 0$ e che ammettono TdL. Allora anche $(u * v)(t)$ ammetterà TdL e varrà:

$$\mathcal{L}[(u * v)(t)](s) = \mathcal{L}[u(t)](s) \times \mathcal{L}[v(t)](s)$$

Dimostrazione 6.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[(u * v)(t)](s) &= \int_{0^-}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} u(\lambda)v(t-\lambda)d\lambda \right) e^{-st}dt \\
&= \int_{0^-}^{\infty} \int_{0^-}^{\infty} u(\lambda)v(t-\lambda)e^{-st}dt d\lambda \\
&= \int_{0^-}^{\infty} u(\lambda) \left(\int_{0^-}^{+\infty} v(t-\lambda)e^{-st}dt \right) d\lambda
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Sostituiamo ora: $x = t - \lambda$, $t = x + \lambda$, $dt = dx$, otteniamo:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[(u * v)(t)](s) &= \int_{0^-}^{\infty} u(\lambda) \left(\int_{0^-}^{+\infty} v(x) e^{-s(x+\lambda)} dx \right) d\lambda \\ &= \int_{0^-}^{+\infty} u(\lambda) e^{-s\lambda} d\lambda \int_{0^-}^{+\infty} v(x) e^{-sx} dx \\ &= \mathcal{L}[u(t)](s)[v(t)](s)\end{aligned}\tag{3.9}$$

3.3 Trasformate notevoli

Viste le proprietà e capito il procedimento generale, possiamo ora mostrare quelle che sono le trasformate più di comune utilizzo; annotarle è necessario poiché consentono di trasformare le funzioni in modo più veloce. Ricordare che la funzione può essere anche traslata per tempo e avere ampiezze diverse, quindi esistono trasformate anche per questi due casi. Ringrazia le proprietà di linearità e ritardo nel tempo.

- **Trasformata dell'impulso** $\delta_0(t)$:

- Condizione basilare:

$$\mathcal{L}[\delta_0(t)](s) = \int_{0^-}^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = e^{-st} \Big|_{t=0} = 1$$

- Aampiezza considerata:

$$\mathcal{L}[A\delta_0(t)](s) = A\mathcal{L}[\delta_0(t)](s) = A \times 1 = A$$

- Funzione traslata nel tempo:

$$\mathcal{L}[\delta_0(t - \tau)](s) = e^{-s\tau} \mathcal{L}[\delta_0(t)](s) = e^{-s\tau}$$

- **Trasformata del gradino** $\delta_{-1}(t)$:

- Condizione basilare:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\delta_{-1}(t)](s) &= \int_{0^-}^{+\infty} \delta_{-1}(t) e^{-st} dt = \int_{0^-}^{+\infty} e^{-st} dt \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow \infty; \mu \rightarrow 0^-} \left(-\frac{e^{st}}{s} \right) \Big|_{t=\mu}^{\epsilon} \\ &= \lim_{\mu \rightarrow 0^-} \frac{e^{-s\mu}}{s} - \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \frac{e^{-s\epsilon}}{s} = \frac{1}{s}\end{aligned}\tag{3.10}$$

- Ampiezza considerata:

$$\mathcal{L}[A\delta_{-1}(t)](s) = \frac{A}{s}$$

- Funzione traslata nel tempo:

$$\mathcal{L}[\delta_{-1}(t - \tau)](s) = \frac{e^{-s\tau}}{s}$$

- **Esponenziale complesso causale** $v(t) = e^{\lambda t}\delta_{-1}(t)$:

- Condizione basilare:

$$\mathcal{L}[e^{\lambda t}\delta_{-1}(t)](s) = \mathcal{L}[\delta_{-1}(t)](s - \lambda) = \frac{1}{s - \lambda}$$

- Ampiezza considerata:

$$\mathcal{L}[Ae^{\lambda t}\delta_{-1}(t)](s) = \frac{A}{s - \lambda}$$

- Funzione traslata nel tempo:

$$\mathcal{L}[e^{\lambda(t-\tau)}\delta_{-1}(t - \tau)](s) = \frac{e^{-(s-\lambda)\tau}}{s - \lambda}$$

- **Esponenziale complesso causale moltiplicato per una funzione polinomiale** $v(t) = \frac{t^l}{l!}e^{\lambda t}\delta_{-1}(t)$:

- Condizione basilare:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\left[\frac{t^l}{l!}e^{\lambda t}\delta_{-1}(t)\right](s) &= \frac{1}{l!} \times \mathcal{L}[t^l e^{\lambda t}\delta_{-1}(t)](s) \\
 &= \frac{(-1)^l}{l!} \times \frac{l^l}{ds^l} \times \mathcal{L}[e^{\lambda t}\delta_{-1}(t)](s) \\
 &= \frac{(-1)^l}{l!} \times \frac{l^l}{ds^l} \left(\frac{1}{s - \lambda}\right) \\
 &= \frac{(-1)^l}{l!} \times \frac{l!(-1)^l}{(s - \lambda)^{l+1}} \\
 &= \frac{1}{(s - \lambda)^{l+1}}
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

- per $l = 1$:

$$\mathcal{L}[te^{\lambda t}\delta_{-1}(t)](s) = \frac{1}{(s - \lambda)^2}$$

- per $l = 2$:

$$\mathcal{L} \left[\frac{t^2}{2!} e^{\lambda t} \delta_{-1}(t) \right] (s) = \frac{1}{(s - \lambda)^3}$$

- Manca il primo esponenziale:

$$\mathcal{L} \left[\frac{t}{l!} \delta_{-1}(t) \right] (s) = \frac{1}{s^{l+1}}$$

- Manca il secondo esponenziale:

$$\mathcal{L}[t\delta_{-1}(t)](s) = \frac{l!}{s^{l+1}}$$

- Manca il polinomio:

$$\mathcal{L}[e^{-\lambda t} \delta_{-1}(t)](s) = \frac{1}{s + \lambda}$$

- **Trasformata per famiglie sinusoidali - Coseno:**

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\cos(\omega t)](s) &= \mathcal{L} \left[\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2} \right] (s) = \frac{1}{2} \mathcal{L}[e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}](s) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s - j\omega} + \frac{1}{s + j\omega} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{s}{s^2 + \omega^2} \right) \end{aligned} \quad (3.12)$$

- **Trasformata per famiglie sinusoidali - Seno:**

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\sin(\omega t)](s) &= \mathcal{L} \left[\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \right] (s) = \frac{1}{2j} (\mathcal{L}[e^{j\omega t}](s) - \mathcal{L}[e^{-j\omega t}](s)) \\ &= \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega} \right) = \frac{1}{2j} \left(\frac{s + j\omega - s + j\omega}{s^2 + \omega^2} \right) \\ &= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \end{aligned} \quad (3.13)$$

3.4 Utilizzo della TdL per il calcolo delle risposte

Come già detto, il passaggio a funzione trasformata è uno step per ottenere la risposta totale, e quindi anche la libera, impulsiva e forzata. Bisogna prima fare dei passi iniziali per ottenere gli strumenti di lavoro della sezione. Richiamiamo quindi alla memoria la scrittura descrivente un sistema:

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j u(t)}{dt^j}$$

Supponiamo ora il grado degli input n maggiore di quello degli output m , con $u(t) = u(t)\delta_{-1}(t)$, con le seguenti condizioni iniziali:

$$v(0^-); \frac{dv(0^-)}{dt}; \dots; \frac{d^{n-1}v(0^-)}{dt^{n-1}}$$

Se $u(t)$ ammette TdL, allora lo farà anche $v(t)$, per $t \geq 0$. Siano ora $U(s)$ e $V(s)$ le TdL di $u(t)$ e $v(t)$ rispettivamente. Il modello si può riscrivere come:

$$\mathcal{L} \left[\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i} \right] (s) = \mathcal{L} \left[\sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j u(t)}{dt^j} \right] (s)$$

Da qui possiamo effettuare alcuni passaggi algebrici grazie alla proprietà viste nella sezione precedente:

- Tiriamo fuori le costanti:

$$\sum_{i=0}^n a_i \mathcal{L} \left[\frac{d^i v(t)}{dt^i} \right] (s) = \sum_{j=0}^m b_j \mathcal{L} \left[\frac{d^j u(t)}{dt^j} \right] (s)$$

- Applichiamo $n+m$ volte la regola della derivata:

$$a_n \left[s^n V(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{d^k v(t)}{dt^k} \Big|_{t=0^-} (s^{h-1-k}) \right] + a_{n-1} \left[s^{n-1} V(s) - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{d^k v(t)}{dt^k} \Big|_{t=0^-} (s^{h-2-k}) \right] + \dots + a_0 V(s)$$

- Imponiamo le CE iniziali per $u(t)|_{t=0^-} = 0$:

$$b_m s^m U(s) + b_{m-1} s^{m-1} U(s) + \dots + b_0 U(s)$$

- Espandiamo le sommatorie e raccogliamo:

$$\begin{aligned} & (a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0) V(s) + \\ & - a_n v(0^-) s^{n-1} - \left(a_{n-1} v(0^-) + a_n \frac{dv(t)}{dt} \Big|_{t=0^-} \right) s^{n-2} - \dots - \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} \frac{d^k v(t)}{dt^k} \Big|_{t=0^-} \right) \\ & = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0) U(s). \end{aligned} \tag{3.14}$$

Questa è una scrittura enorme, ragion per cui da qui in poi verrà abbreviata per garantirne un riutilizzo più semplice con:

$$d(s)V(s) - p(s) = n(s)U(s)$$

Le componenti sono:

- $d(s) = (a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0)$, è un polinomio di grado n , il quale dipende solo dai coefficienti delle derivate associate all'uscita. È anche il polinomio caratteristico di $v(t)$.
- $p(s) = a_n v(0^-) s^{n-1} - (a_{n-1} v(0^-) + a_n \frac{dv(0^-)}{dt}|_{t=0}) s^{n-2} - \dots - (\sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} \frac{d^k v(0^-)}{dt^k}|_{t=0^-})$, si tratta di un polinomio di grado $n-1$ che contiene le condizioni iniziali.
- $n(s) = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0)$, polinomio di grado m . È anche il polinomio caratteristico di $u(t)$.

Questa forma ci semplifica enormemente le cose, permettendoci di ricavare più facilmente le varie componenti della risposta totale con le seguenti formule:

- **Risposta totale**

$$V(s) = \frac{n(s)}{d(s)} U(s) + \frac{p(s)}{d(s)}$$

- **Risposta libera**

$$V_l(s) = \frac{p(s)}{d(s)}$$

- **Risposta forzata**

$$V_f(s) = \frac{h(s)}{d(s)} U(s)$$

- **Risposta impulsiva** o funzione di trasferimento

$$H(s) = \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}$$

Esempio 4. *Dato il sistema $v'''(t) + v''(t) = u(t)$, trovare la risposta totale $V_t(s)$. Per raggiungere la forma semplificata, è necessario effettuare passaggi algebrici ed ottenere la formula per $V_t(s)$. Grazie alla proprietà della linearità possiamo applicare la trasformata un elemento per volta, dunque:*

$$\begin{aligned} & \left(s^3 V(s) - s^2 v(0^-) - s^1 \frac{dv(0^-)}{dt} - s^0 \frac{d^2 v(0^-)}{dt^2} \right) + \left(s^2 V(s) - s v(0^-) - s^0 \frac{dv(0^-)}{dt} \right) = s U(s) \\ & (s^3 + s^2) V(s) - \left[s^2 v(0^-) + s \frac{dv(0^-)}{dt} + \frac{d^2 v(0^-)}{dt^2} + s v(0^-) + \frac{dv(0^-)}{dt} \right] = s U(s) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Spostando infine gli elementi per ricavare $V_t(s)$, otteniamo quanto richiesto:

$$V(s) = \frac{s}{s^3 + s^2} U(s) + \frac{s^2 v(0^-) + s(\frac{dv(0^-)}{dt} + v(0^-)) + (\frac{d^2 v(0^-)}{dt^2} + \frac{dv(0^-)}{dt})}{s^3 + s^2}$$

L'esercizio qui è puramente per mostrare il procedimento; in questo momento si dovrebbero applicare le condizioni di Cauchy.

3.5 Antitrasformata di Laplace unilatera

Chapter 4

Diagrammi di Bode

Bode