附录 1　从自然数到复数

一、自然数

有限集的元素个数就是自然数．例如，空集 $\phi=\{\}$ 的元素个数为 0，单集 $\{\phi\}$ 或 $\{0\}$ 的元素个数为 1，偶集 $\{\phi,\{\phi\}\}$ 或 $\{0,1\}$ 的元素个数为 2，叁集 $\{0,1,2\}$ 的元素个数为 3．以此类推，可以给出所有自然数.

二、整数

自然数做差，可以得到所有整数，包括正整数、零、负整数.

三、有理数

整数做商，（除数不为零，下同，）可以得到所有有理数．有理数均可表为既约分数.

引理 1　设 $p,\ q\in\mathbb{Z}^{+}$ 互质，$p>1$，则必有不超过 p 的正整数 s，使得 p 整除 $q^{s}-1$.

证　用 $q,\ q^{2},\ \cdots,\ q^{p},\ q^{p+1}$ 分别除以 p，至少有两个余数相同，设二者为 $q^{u},\ q^{v}\,(u<v)$.
p 整除 $q^{v}-q^{u}=q^{u}(q^{v-u}-1)$，则 $s=v-u$ 为不超过 p 的正整数，p 整除 $q^{s}-1$.　　□

定理 1　有理数，就是有限小数、无限循环小数．更具体地，在 10 进制下，有

（1）$\{$既约分数 $\frac{m}{n}\mid n$ 整除 10 的某次幂$\}=\{10$ 进制有限小数$\}$；

（2）$\{$既约分数 $\frac{m}{n}\mid n$ 不整除 10 的任一次幂$\}=\{10$ 进制无限循环小数$\}$.

证　（1）“$\supset$”成立，例如，10 进制有限小数 $0.618=\frac{618}{10^{3}}=\frac{309}{500}$.

“$\subset$”成立，例如，分母整除 10 的某次幂的既约分数 $\frac{63}{20}=\frac{315}{100}=3.15$.

从而得证第一对集合相等.

（2）“$\supset$”成立，例如，10 进制无限循环小数

$$x=0.\dot{1}2\dot{3}，\quad 10^{3}x=123.\dot{1}2\dot{3}，\quad 1\,000x=123+x，\quad 999x=123，\quad x=\tfrac{123}{999}=\tfrac{41}{333}；$$

$4.56\dot{1}\,2\dot{3}=\frac{456.\dot{1}2\dot{3}}{10^{2}}=\frac{456+0.\dot{1}2\dot{3}}{100}=\frac{456+\frac{41}{333}}{100}=\frac{151\,889}{33\,300}$，其中 $333,\ 33\,300$ 均不整除 10 的任一次幂.

“$\subset$”成立，例如，分母不整除 10 的任一次幂的既约分数

$$\tfrac{61}{24\,600}=\tfrac{61}{2^{3}\times5^{2}\times123}=\tfrac{1}{10^{3}}\tfrac{305}{123}=\tfrac{1}{10^{3}}(2+\tfrac{59}{123})$$，其中 123 与 10 互质，10 不整除 305，

在引理 1 指引下，可以发现 $123\times813=99\,999=10^{5}-1$，

$$\tfrac{1}{10^{5}-1}=\tfrac{0.\dot{9}99\,9\dot{9}}{99\,999}=0.\dot{0}00\,0\dot{1}，\quad \tfrac{59}{123}=\tfrac{59\times813}{123\times813}=\tfrac{47\,967}{10^{5}-1}=0.\dot{4}79\,6\dot{7}，\quad \tfrac{61}{24\,600}=0.002\,\dot{4}79\,6\dot{7}.$$

从而得证第二对集合相等.　　□

注　10 进制可以推广为 q 进制，其中 q 为大于 1 的任一正整数.

特别地，设质数 p 与 10 互质，则由定理 **1**(2) 可知，$\frac{1}{p}$ 为 10 进制无限循环小数.

四、实数

实数，包括正实数、零、负实数，与实数轴 Ox 的点成 $1-1$ 对应关系．线段的长度就是非负实数．实数，就是小数，包括有理数、无理数．无理数，就是无限不循环小数.

五、复数

在实数集 $\mathbb{R}$ 中，一元二次方程 $x^{2}-1=0$ 有两个根 ±1，但 $x^{2}+1=0$ 却没有实根．为此，扩大数的范围，使后者也有两个根，常记作 $\pm\mathrm{i}$，其中 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$ 称为**虚数单位**．形如

$$z=a+b\mathrm{i},\quad a,b\in\mathbb{R}$$

的数称为**复数**，其中 $a=\operatorname{Re}z,\ b=\operatorname{Im}z$ 分别称为 z 的**实部**与**虚部**.

规定 $0\mathrm{i}=0$，虚部为零的复数就是实数.

实系数二次方程求根，可以得到所有复数．例如，

$$(x-a)^2+b^2=0 \text{ 的全部根为 } a\pm b\sqrt{-1}，\forall a,\, b\in\mathbb{R}.$$

虚部不为零的复数称为**虚数**，实部为零的虚数称为**纯虚数**.

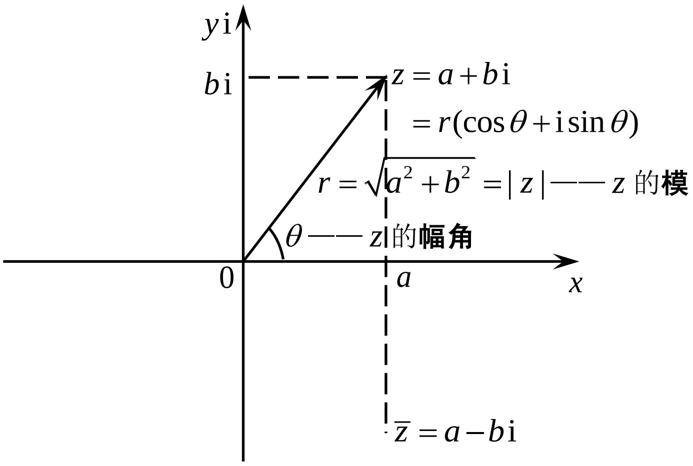
全体复数形成的集合记作 $\mathbb{C}$，规定

$$\text{在 }\mathbb{C}\text{ 中，}\ z_1=z_2 \Leftrightarrow \text{在 }\mathbb{R}\text{ 中，}\ \operatorname{Re} z_1=\operatorname{Re} z_2 \text{ 且 } \operatorname{Im} z_1=\operatorname{Im} z_2.$$

$\overline{z}=a+(-b)\,\mathrm{i}=a-b\,\mathrm{i}$ 称为 $z=a+b\,\mathrm{i}$ 的**共轭复数**，有

$$z\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im} z=0 \Leftrightarrow \overline{z}=z.$$

与用实数轴描述实数集 $\mathbb{R}$ 类似，复数集 $\mathbb{C}$ 可被形象地描绘为**复平面**.



复数的四则运算如下：

$$(a+b\mathrm{i})\pm(c+d\,\mathrm{i})=(a\pm c)+(b\pm d)\mathrm{i},$$
$$(a+b\mathrm{i})(c+d\,\mathrm{i})=(ac-bd)+(ad+bc)\mathrm{i},$$
$$\tfrac{a+b\mathrm{i}}{c+d\,\mathrm{i}}=\tfrac{(a+b\mathrm{i})(c-d\,\mathrm{i})}{(c+d\,\mathrm{i})(c-d\,\mathrm{i})}=\tfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\tfrac{-ad+bc}{c^2+d^2}\mathrm{i}.$$

有规律

$$\mathrm{i}^2=-1,$$
$$z\overline{z}=(a+b\mathrm{i})(a-b\mathrm{i})=a^2+b^2=|z|^2,$$
$$r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)],$$
$$[r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta);$$
$$\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}, \qquad \overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}, \qquad \overline{z_1/z_2}=\overline{z_1}/\overline{z_2}.$$

事实上，

$$\begin{aligned}(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)&=(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+\mathrm{i}(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)\\&=\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^{k+1}&=(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^k(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)\\&=(\cos k\theta+\mathrm{i}\sin k\theta)(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)\\&=\cos(k+1)\theta+\mathrm{i}\sin(k+1)\theta;\end{aligned}$$

设 $z_1=a+b\,\mathrm{i}$，$z_2=c+d\,\mathrm{i}$，$\forall a,\ b,\ c,\ d\in\mathbb{R}$，则

$$\overline{z_1\pm z_2}=\overline{(a\pm c)+(b\pm d)\mathrm{i}}=(a\pm c)-(b\pm d)\mathrm{i}=(a-b\mathrm{i})\pm(c-d\,\mathrm{i})=\overline{z_1}\pm\overline{z_2},$$
$$\overline{z_1z_2}=\overline{(ac-bd)+(ad+bc)\mathrm{i}}=(ac-bd)-(ad+bc)\mathrm{i}=(a-b\mathrm{i})(c-d\,\mathrm{i})=\overline{z_1}\,\overline{z_2},$$
$$\overline{z_1/z_2}=\overline{\tfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\tfrac{-ad+bc}{c^2+d^2}\mathrm{i}}=\tfrac{ac+bd}{c^2+d^2}-\tfrac{-ad+bc}{c^2+d^2}\mathrm{i}=\tfrac{ac+(-b)(-d)}{c^2+(-d)^2}+\tfrac{-a(-d)+(-b)c}{c^2+(-d)^2}\mathrm{i}=\tfrac{a-b\mathrm{i}}{c-d\,\mathrm{i}}=\overline{z_1}/\overline{z_2}.$$