附录 2　集合与映射

$X\setminus Y=\{x\mid x\in X,\ x\notin Y\}$称为集合$X$与$Y$的**差集**．注意，并不要求$Y\subset X$．

当$Y\subset X$时，$X\setminus Y=\{x\mid x\in X,\ x\notin Y\}$也称为$Y$在$X$中的**补集**．

$X\times Y=\{(x,\ y)\mid x\in X,\ y\in Y\}$称为集合$X$与$Y$的**笛卡尔**(Descartes)**积**．

设f为集合X到Y的一个对应法则，若对任意的$x\in X$，都存在唯一的$y\in Y$与之对应，则称f为集合X到Y的一个**映射**，称$y=f(x)$为x的**像**，称x为$f(x)$的一个**原像**．

设f为集合X到Y的映射，g为集合Y到Z的映射，则

$$g\circ f:\ x\mapsto g[f(x)],\ \forall x\in X$$

为X到Z的一个映射，称$g\circ f$为g与f的**合成**(**映射**)或**乘积**(**映射**)，也记作gf．

集合X到X的映射，也称为集合X的**变换**．显然

$$1_X:\ x\mapsto x,\ \forall x\in X$$

是集合X的一个变换，且对集合X到Y的映射f、集合U到X的映射g，有

$$f1_X=f，1_X g=g，$$

称1_X为集合X的**恒等变换**或**单位变换**．

设f为集合X到Y的映射，且X中的不同元素在Y中的像也不同，则称f为一个**单射**．

设f为集合X到Y的映射，且**像集**$f(X)=\{f(x)\mid x\in X\}$就是Y，则称f为一个**满射**．

设f为集合X到Y的映射，f既是单射也是满射，则称f为一个**1−1 对应**或**双射**，也称X与Y有相同的**基数**，有限集的基数就是其元素个数．此时，

$$f^{-1}:\ f(x)\mapsto x,\ \forall x\in X$$

为Y到X的映射，且$f^{-1}f=1_X$，$ff^{-1}=1_Y$，称f^{-1}为f的**逆映射**．

例 1　(1) 请读者参考 0.1 定义 1．设

$$\oplus:\ \mathrm{F}\times\mathrm{F}\to\mathrm{F},\qquad\qquad \circ:\ \mathrm{F}\times\mathrm{F}\to\mathrm{F},$$
$$(a,\ b)\mapsto a\oplus b,\ \forall a,\ b\in\mathrm{F},\qquad (a,\ b)\mapsto a\circ b,\ \forall a,\ b\in\mathrm{F},$$

则$\oplus,\circ$都是$\mathrm{F}\times\mathrm{F}$到$\mathrm{F}$的映射．

(2) 请读者参考 0.1 定理 2．取定$b\in\mathbb{F}$，则

$$+_b:\ \mathbb{F}\to\mathbb{F},$$
$$a\mapsto a+b,\ \forall a\in\mathbb{F}$$

是一个$\mathbb{F}$到$\mathbb{F}$的双射，$+_b$的逆映射为

$$-_b:\ \mathbb{F}\to\mathbb{F},$$
$$a+b\mapsto a=a+0=a+[b+(-b)]=(a+b)+(-b)=(a+b)-b,\ \forall a\in\mathbb{F}.$$

我们说，加法的逆运算是减法，本意是说，$+_b$的逆映射为$-_b$，$\forall b\in\mathbb{F}$．

取定$b\in\mathbb{F}$，$b\neq 0$，则

$$\times_b:\ \mathbb{F}\to\mathbb{F},$$
$$a\mapsto ab,\ \forall a\in\mathbb{F}$$

是一个$\mathbb{F}$到$\mathbb{F}$的双射，$\times_b$的逆映射为

$$\div_b:\ \mathbb{F}\to\mathbb{F},$$
$$ab\mapsto a=a1=a(bb^{-1})=(ab)b^{-1}=(ab)\div b,\ \forall a\in\mathbb{F}.$$

我们说，乘法的逆运算是除法，本意是说，$\times_b$的逆映射为$\div_b$，$\forall b\in\mathbb{F}$，$b\neq 0$．