

学校代码：10246
学 号：21210180031

復旦大學

硕 士 学 位 论 文
(专业学位)

基于随机利率与波动率下跳跃扩散过程的国债
期货期权定价质量的研究

**Research on the pricing quality of Treasury Bond Options
based on jump diffusion process under stochastic interest rate
and volatility**

院 系： 数学科学学院

专 业： 金融学

姓 名：

指 导 教 师：

完 成 日 期：2023 年 3 月 28 日

指导小组成员

教 授
教 授
教 授

目 录

摘 要	vi
Abstract	vii
第 1 章 绪论	1
1.1 研究背景及意义	1
1.2 国内外研究综述	2
1.3 本文的结构	4
1.4 本文的创新	4
第 2 章 理论基础	6
2.1 基于 Itô 过程的随机分析理论基础	6
2.2 基于跳过程的随机分析理论基础	7
2.3 一般欧式期货期权的 Black 模型	9
第 3 章 考虑随机利率的国债期货期权定价	11
3.1 采用风险中性测度下的期权定价方法	11
3.2 具体离散格式和参数模拟	14
3.2.1 利率过程的模型确立	15
3.2.2 国债期货和利率共用一个随机驱动时的国债期货期权定价格式	16
3.2.3 国债期货和利率采用不同的随机驱动时的国债期货期权定价格式	18
3.3 基于券商场外报价的实证研究	20
3.3.1 标的资产：国债期货	20
3.3.2 国泰君安报价数据	20
3.3.3 Black 模型对欧式期权定价	21
3.3.4 Monte Carlo 方法对欧式期权定价	23
3.3.5 美式期权定价	26
3.4 本章总结	28
第 4 章 加入随机波动率和价格过程带跳的国债期货期权定价	29
4.1 定价模型	29
4.2 市场数据	33
4.2.1 标的资产：美国十年期国债期货 (US 10-Year T-Note Futures)	33
4.2.2 研究对象：美国十年期国债期权 (US 10-Year T-Note Options)	37
4.2.3 美国国债即期收益率曲线	39

4.3 定价质量研究	40
4.3.1 BAW 模型的隐含波动率	40
4.3.2 模型的参数估计	41
4.3.3 模型结果	44
4.4 本章总结	48
第 5 章 总结与展望	49
参考文献	50

插图

3-1	11月22日TS期权报价	20
3-2	12月14日TS期权报价	20
3-3	11月22日TF期权报价	21
3-4	12月14日TF期权报价	21
3-5	11月22日T期权报价	21
3-6	12月14日T期权报价	21
3-7	11月22日TS期权定价	22
3-8	12月14日TS期权定价	22
3-9	11月22日TF期权定价	22
3-10	12月14日TF期权定价	22
3-11	11月22日T期权定价	22
3-12	12月14日T期权定价	22
3-13	TS期权定价	23
3-14	国泰君安TS期权报价中间价	23
3-15	TF期权定价	23
3-16	国泰君安TF期权报价中间价	23
3-17	T期权定价	23
3-18	国泰君安T期权报价中间价	23
3-19	T主力合约价格	24
3-20	11月21日国债即期收益率曲线	24
3-21	TS期权定价Black模型	25
3-22	TS期权定价Monte Carlo方法	25
3-23	TF期权定价Black模型	25
3-24	TF期权定价Monte Carlo方法	25
3-25	T期权定价Black模型	25
3-26	T期权定价Monte Carlo方法	25
3-27	模拟轨道	26
3-28	t_{m-1} 时刻的 b 个样本	27
3-29	TS美式看涨期权定价BAW模型	28
3-30	TS美式看涨期权定价Monte Carlo方法	28
3-31	TF美式看涨期权定价BAW模型	28
3-32	TF美式看涨期权定价Monte Carlo方法	28
3-33	T美式看涨期权定价BAW模型	28

3-34 T 美式看涨期权定价 Monte Carlo 方法	28
4-1 每个合约在生存期内日收益率的偏度和峰度；以及作为主力合约和作为远月 合约时间段上的年化波动率	35
4-2 2011 年起国债期货主力合约的价格序列数据	36
4-3 高价区间未来日收益率的分布	36
4-4 低价区间未来日收益率的分布	36
4-5 2022 年 9 月 30 日，TYZ2C 合约不同行权价上的期权成交量	38
4-6 美国国债即期收益率	39
4-7 2022 年前 5 个交易日上的 CIR 模型参数	43

表格

1-1 境外交易所国债期权当日结算方式	2
4-1 10 年期国债期货交易日历	34
4-2 10 年期国债期权交易日历	37
4-3 所取期权信息	38
4-4 每组期权用于实际研究的时间段	38
4-5 每个合约上的分组隐含波动率结果，括号内是该组样本数	40
4-6 TYH2C、TYM2C 上 BAW、SI、SV、J 四个模型的参数校正结果和样本内 SSE	45
4-7 TYU2C、TYZ2C 上 BAW、SI、SV、J 四个模型的参数校正结果和样本内 SSE	45
4-8 TYH2C、TYM2C 上 SVJ、SIJ、SVSI、SVSIJ 四个模型的参数校正结果和样本内 SSE	46
4-9 TYU2C、TYZ2C 上 SVJ、SIJ、SVSI、SVSIJ 四个模型的参数校正结果和样本内 SSE	46
4-10 每组期权上全部模型的样本外 SSE	48

摘要

国债期货作为我国目前唯一的场内利率衍生品，是非常重要的利率风险管理工具，在海外市场上，现已有非常丰富的国债期货期权场内产品。而在我国，中金所近几年也一直想推出以国债期货为标的的场内期权，完善利率市场的产品结构。在这一背景下，本文针对国债期货期权的定价质量展开研究，一方面与现有的券商场外报价进行对比，另一方面借助海外成熟市场的国债期权场内交易数据进行实证，作为我国场内产品推出后研究定价的参考。

本文研究对象的标的是国债期货，这一标的主要在两个方面区别于一般期货：1. 由于它本身就是利率衍生品，不能做常数利率的假设；2. 国债期货价格长期而言有均值回复的特性，不服从几何布朗运动假设。因此一般期货期权的 Black 模型不适用于国债期货期权的定价。本文的主要研究目的就是解决以上两个问题，做出适用于国债期货期权的定价框架，并在此基础上研究哪些假设的放宽可以提升国债期货期权的定价质量。

本文首先解决了第一个问题，利用了风险中性测度的定价方法，加入了期货保证金的考虑并引入了利率随机性，但仍然保持标的价格过程的几何布朗运动假设，将国债期货价格过程和利率过程分开建模，做出基于同一个随机驱动和两个随机驱动下的具体离散格式，并用蒙特卡洛模拟进行实证，与当前券商的场外报价进行对比。其中对期货保证金的考虑是本文的一个创新点，过去针对期货期权的定价文献中大都假设了期货保证金为 0。实证结果表明，虽然模型的假设更加合理，但是针对欧式期权，所做模型的定价结果相比于 Black 模型并没有明显差异，也没有明显的定价质量方面的提升。

基于这一结果以及对第二个问题也就是国债期货价格不服从几何布朗运动的考虑，本文进一步拓展了研究，允许几何布朗运动中的波动率具有随机性，并允许过程带跳，同样考虑了期货保证金，在假设现实世界测度下标的服从跳跃扩散过程的基础上推导出了在一组风险中性测度下，标的、波动率和利率所服从的过程。

在实证方面，本文用了美国十年期国债期权的交易数据，在每天上通过不同行权价上的日结算价进行模型参数的校准。由于美国十年期国债期权为美式期权，本文以在 Black 模型上加入一阶修正的 BAW 模型作为比较基准，与随机利率假设、随机波动率假设、带跳假设这三个宽松假设所得到的组合模型，分别记为 SI, SV, J, SISV, SIJ, SVJ, SISVJ 总共 7 个模型进行比较，用以研究不同的假设放宽对于定价质量的提升。结果表明，随机利率的引入仅能使国债期货期权的定价质量有微弱的提升，然而随机波动率和带跳的引入均能够显著提升定价质量。

关键字：国债期货期权；风险中性测度；跳跃扩散过程；美式期权

中图分类号：O29

Abstract

As the only interest rate derivative in China's exchange market, Treasury-Note Futures play an important role in managing interest rate risks. In overseas markets, there are already many exchange-traded options on it. And in recent years, the China Financial Futures Exchange has also been exploring the introduction of exchange-traded options on Treasury-Note Futures to improve the product structure of the interest rate market. In this context, this paper focuses on the pricing of Treasury-Note Options, comparing them with the existing OTC quotes of brokerage firms, and using empirical data from overseas mature markets on exchange-traded Treasury-Note Options as a reference for future research on pricing after the introduction of exchange-traded options in China.

The starting point of the study is that Treasury-Note Futures differ from general futures in two main aspects: 1. as an interest rate derivative, constant interest rate assumption cannot be made, 2. Treasury-Note Futures prices have the characteristic of mean reversion in the long term, which does not follow the geometric Brownian motion assumption. Therefore, the Black model for general futures options is not suitable for pricing Treasury-Note Options. The main purpose of this paper is to solve these two problems, establish a pricing framework suitable for Treasury-Note Options, and conduct empirical research based on this framework.

The first problem is addressed by using the pricing method of risk-neutral measure, considering futures margin and introducing interest rate randomness, while still maintaining the geometric Brownian motion assumption of the underlying price process. The price process of Treasury-Note Futures and the interest rate process are modeled separately, and a specific discrete format based on the same random driver and two random drivers is developed. Monte Carlo simulation is used to compare the results with the current OTC quotes of brokerage firms. The consideration of futures margin is an innovative point of this paper, as previous literature on futures options pricing has assumed a futures margin of zero. The empirical results show that although the model assumptions are more reasonable, there is no significant difference in the pricing results of the model compared to the Black model for European options, and there is no significant improvement in pricing quality.

Based on this result and considering the second problem that treasury bond futures prices do not follow the geometric Brownian motion assumption, this paper further extends the research by allowing the volatility of the geometric Brownian motion to have randomness and allowing the process to have jumps. The consideration of margin is also included, and a set of risk-neutral measures is derived based on the assumption that the underlying follows a jump diffusion process in the real-world measure.

In terms of empirical research, the trading data of the US 10-Year T-Note Options are used, and the model parameters are calibrated based on the daily settlement prices at different exercise prices. As the US 10-Year T-Note Options are American options, this paper uses the BAW model with a

first-order correction added to the Black model as a comparative benchmark, and compares a total of seven models that combine the three loose assumptions of random interest rates, random volatility, and jumps, respectively, denoted as SI, SV, J, SISV, SIJ, SVJ, and SISVJ, to study the improvement in pricing quality with different assumptions relaxed. The results show that the introduction of random interest rates only slightly improves the pricing quality of treasury bond futures options, while the introduction of random volatility and jumps can significantly improve the pricing quality.

Keywords: Treasury-Note Options; Risk Neutral Measures; jump diffusion process; American-style options

CLC number: O29

第 1 章 绪论

1.1 研究背景及意义

利率衍生品市场作为金融市场的重要组成部分，已在全球范围内得到了蓬勃发展，从品种上来看，场内利率衍生品主要包括利率期货和以利率期货为标的的利率期权，其中以利率期货为主。按照标的的不同，利率期货可以分为短期利率期货和国债期货，短期利率期货以短期资金利率为标的，如 3 个月欧洲美元的 LIBOR 价格（芝加哥商品交易所的 3 个月欧洲美元期货）；国债期货则以主权国家发行的国债作为标的，可以按照期限做进一步划分，比如我国现在有 2 年期、5 年期、10 年期这 3 种场内国债期货产品。

2013 年 9 月 6 日，我国 5 年期国债期货在中国金融期货交易所挂牌上市，填补了场内利率衍生品的空白；2015 年 3 月 20 日，10 年期国债期货上市；2018 年 8 月 17 日，2 年期国债期货上市。国债期货作为我国目前唯一的场内利率衍生品，是非常重要的利率风险管理工具。经过各方多年不懈努力，我国国债期货市场取得较大发展，机构化程度逐步提高，运行质量不断提升，功能发挥日益显著。李暮春[1]指出，特别是 2020 年以来，在新冠肺炎疫情的冲击下，全球金融市场波动加大，国债期货被机构广泛用于利率风险管理，成交量、持仓量稳步增长。

相比而言，我国利率衍生品市场发展相对于发达国家较为滞后，一来体现在场内品种较为欠缺，二来体现在缺乏对应的期权产品，比如芝加哥商品交易所（CME）上市的每一种利率期货合约几乎都有相应的期权合约，而我国目前并没有以国债期货作为标的的场内期权产品。在前两年，中金所做过有关国债期货期权的调研，称目前在开发国债期货期权的场内产品。而在场外市场上，目前各大券商有基于国债期货标的的各种期权的报价，比如香草、二元、雪球等产品。因此综合而言，不仅目前普遍存在着国债期货期权的定价需求，而且未来随着场内产品的推出，这一需求将更为迫切。

从理论的角度而言，国债期货作为利率衍生品，以此为标的的期权在定价方面有明确区别于股指期货之处。Black[2]通过对 B-S 模型定价思路的延申，首次为欧式期货期权提供了定价公式，称为 Black 模型。然而，综合阅读各类文献可以总结得到，一般欧式期货期权的 Black 定价模型并不适用于国债期货期权的定价，主要原因有二：

1. Black 模型中假定了瞬时无风险利率为常数 r ，果真如此那国债期货价格就是不随时间变化的定值，与事实不符。换句话说，国债期货价格发生变化，就意味着由市场均衡博弈出的利率期限结构发生了变化。
2. 国债期货价格不服从几何布朗运动的假设。这主要有两个原因：一、服从几何布朗运动则意味着资产价格可以以一定概率高到任意水平，然而因为中国市场上利率是正的，所以一篮子交割券中的每一支其实都有最高价（令到期收益率为 0 的价格），从而使得国债期货价格有确定的上界；二、利率有长期均值回复的性质，因此国债期货

在高价位上未来收益率的分布与其在低价位上未来收益率的分布是不同的，而几何布朗运动使得对当前任意价格，未来收益率服从同样的正态分布。

除此之外，还有学者提及债券期权不适用 B-S 模型的另一个重要原因是 B-S 模型假定标的资产波动率不变，但债券价格的波动率与到期时间有巨大关系，随着到期日的临近，波动率趋向于 0。这一点对于国债期货来说其实不那么重要，因为国债期货到期交割时债券偿还的剩余期限还非常长。

从全球范围看，目前共有 5 个国家和地区的交易所上市了国债期权产品，标的均为国债期货，分别是美国芝加哥商品交易所集团（CME）、欧洲期货交易所（EUREX）、澳大利亚证券交易所（ASX）、日本交易所集团（JPX）和加拿大多伦多证交所集团（TMX）。从品种来看，包括了常规期权（季月到期）、序列期权（未来若干近月到期）、周期权，甚至日内期权。需要特别说明的是，目前全球常规国债期权和序列国债期权均为美式期权。通过对各个交易所网站公布的产品细节进行调研，可知不同交易所国债期权的每日结算方式如表 1-1 所示。

表 1-1 境外交易所国债期权当日结算方式

交易所	结算价
CME	基于平值附近活跃合约的成交价格 and 做市商报价，对深度虚值和深度实值期权做理论模型定价。
EUREX	根据理论模型计算。
ASX	同 CME。
JPX	每交易日东京时间下午 3 点至收盘进行集合竞价，如无价格则用理论模型计算。
TMX	收盘前最后 1 分钟内所有交易的加权平均价，如无价格则计算 30 分钟加权平均价，再无价格用理论模型计算。

以 EUREX 交易所为例，因为其结算价直接根据理论模型计算得到，去其网站上进行模型信息的查找，在相应产品的 Specifications 里可以看到实际采用了 CRR 二叉树模型定价。而其他交易所提及的模型也均为二叉树模型。二叉树模型与 B-S 模型一样假设常数瞬时利率和常数波动率，使用它的唯一原因是产品为美式期权，可见交易所本身使用的模型并没有因为其标的为国债期货而有不同，但我们做国债期权定价研究时必须考虑到国债期货标的的特殊性，因此本文的第一个研究目标就是解决前面提到的瞬时利率不为常数和国债期货价格不服从对数正态分布这两个主要问题，做出适用于国债期货期权的定价框架。

本文的第二个研究目标是基于不同的假设，包括是否采用随机利率、随机波动率、是否允许资产价格过程带跳，研究相应的模型相比于 Black 模型关于国债期货期权定价质量的提升。

1.2 国内外研究综述

目前，针对国债期货期权定价的论文较少，而针对债券期权定价的论文大都通过利率过程的建模，推导出零息票债券价格的闭形式解，再推导以零息票债券作为标的的期权价格。而我们的国债期货因为卖方可以在到期时从一篮子债券中选择对自己最有利的债券和最有利

利的时点进行交割,使得国债期货价格内涵了择票期权和择时期权,因此国债期货定价本身就是一个有着广泛研究的课题,从给利率过程建模出发推导其定价是一个很有意义的工作。而我们研究的目标是国债期货期权的定价,基于现如今国债期货已经是场内产品,市场博弈出来的价格本身就是最合理的价格,因此再从利率过程出发先给国债期货定价就失去了合理性和必要性。因此本文采用给国债期货价格过程和利率过程分开建模的方式进行研究。文献综述将围绕期权定价综述、利率过程综述和国债期货期权定价综述三个方面展开。

Black,Scholes[3]假设股票价格服从几何布朗运动,提出了经典B-S模型。后续不少文章放宽了各种限制性假设,Merton[4]加入了股息的讨论。许多文献认为波动率本身也是影响期权价格的风险来源,因此也可以作为状态变量,针对随机波动率进行了讨论:Hull,White[5]允许波动率的随机性,并在随机波动率与股票价格无关的情况下给出了欧式期权价格的闭形式解,还针对波动率与股票价格相关的情况生成了数值解;Heston[6]使用基于特征函数的方法为具有随机波动率的资产的欧式期权价格推导出了闭形式解;Melino,Turnbull[7]考察了随机波动对长期外汇期权的定价和对冲的影响,发现BS模型在为长期期权定价时效果不佳;Scott[8]研究了带有随机波动率的股票的欧式看涨期权定价。发现必须使用股票和两种期权来形成无风险对冲,无风险对冲不会导致唯一的期权定价函数,因为随机波动率不是交易证券,因此必须求助于均衡资产定价模型才能得出独特的期权定价函数。并用蒙特卡洛模拟计算了期权价格;Stein,Stein[9]研究了随机波动率和股票分布的“肥尾”性质之间的关系。

也有许多文献用跳跃扩散过程为标的资产建模:Merton[10]给出了当标的股票收益由连续过程和跳跃过程混合产生时,更一般的期权定价公式;Bates[11]在具有系统跳跃风险的跳跃扩散过程中对美式期权进行定价,以寻找1987年10月发生股市崩盘之前期权市场对崩盘预期的证据。还有许多文献加入了随机利率的考虑:Bailey,Stulz[12]研究了B-S模型对比在假设随机波动率过程和利率过程下的期权定价的定价偏差;Amin,Ng[13]在均衡框架下推导出结合了随机波动率过程和随机利率过程的期权定价公式;Bakshi,Chen[14][15]做出了具有随机波动率和利率的针对股票期权和货币期权的闭形式定价公式;Scott[16]在基于随机波动率和随机利率的跳跃扩散模型下开发了欧式期权定价的快速闭形式解,解中的概率密度函数是通过使用分布函数的傅立叶反演公式计算的。还有文献加入了其他考虑:Cox,Ross[17]考虑了波动率的弹性系数;Alt-Sahalia,Lo[18]为隐含在期权价格中的状态价格密度构建了一个非参数估计量,并推导出了它的渐近抽样理论。对于美式期权的定价,主要有Barone-Adesi,Whaley[19]的一阶近似方法和Longstaff,Schwartz[20]的最小二乘方法。

在实际金融市场中,利率受国家政策、经济和股市的影响而不断波动。在这种情况下,许多学者提出了随机利率模型来研究期权定价问题。研究内容包括利率期限结构、和基于B-S模型的修正以及扩展。

Vasicek[21]利用Black-Scholes的基本论证,提出了一个考虑利率期限结构演化的利率衍生品定价模型,该模型表现出均值回归特征。Harrison,Kreps[22]和Harrison,Pliska[23]为一般债券期权的无套利定价开发了第一个严格的方法。German et al.[24]提供了一个有用的工具包,解释了在改变计价单位时各种动态是如何变化的,其中适当的计价单位选择可以简化期权计算。Musielà,Rutkowski[25]和Hunt,Kennedy[26]给出了更多关于随机利率下无套利问题处理的细节。Jamshidian[27]在Vasicek模型下首次将测度变化应用于债券期权价格的计算,该方法启发了测度变化下股票期权价格的计算方法。姚落根,王雄,杨向群

[28] 给出了用 Vasicek 模型和 Hull-White 模型对随机利率进行建模时, 看涨几何亚式期权的价格计算。

为数不多的真正对国债期货期权定价进行研究的论文有: Overdahl[29] 和 Cakici[30], 将 Black 模型和针对美式期权近似定价的 BAW 模型用于国债期货期权上进行实证研究, 分析模型的定价误差。Stutzer[31] 不假设任何国债期货价格过程, 用期货价格的过去走势, 确定了期货价格增长率的非正态分布直方图, 再将分布放到风险中性测度下进行相应的贴现并计算收益均值, 这篇论文规避了前面所总结的 Black 模型的第二个问题——国债期货价格不服从几何布朗运动的假设, 但是缺陷在于还是没有解决利率随机性问题, 且只能给欧式国债期权定价。Tompkin[32] 使用包括价格跳跃和随机波动在内的模型对国债期货的几何布朗运动假设进行修正, 研究英国国债、德国国债和美国国债期货期权的模型定价和市场交易价格的偏离。

1.3 本文的结构

本文主要研究了国债期货期权的定价问题, 做出了风险中性测度下的定价模型, 并分别基于国内券商的场外报价和美国十年期国债期权的场内交易数据进行实证研究, 以分析不同假设下的宽松给国债期货期权定价质量带来的提升。

在第一章, 介绍了问题的研究背景以及研究的出发点, 提出了研究目标, 并阐述了相关的文献综述。

在第二章, 叙述了本文的理论基础, 共分为三节: 第一节叙述了基于 Itô 过程的随机分析理论基础, 该节只给出了最重要的定理; 第二节叙述了基于跳过程的随机分析理论基础, 为了方便读者, 本节逻辑完整地给出了之后会用到的全部定义和定理。第三节叙述了一般欧式期权期权的 Black 模型。

在第三章, 本文在考虑期货保证金的前提下, 引入了利率的随机性, 通过找到使得所有自融资组合为鞅的测度作为风险中性测度, 给出了国债期货期权的定价模型。并分别基于一个随机驱动和两个随机驱动做出具体离散格式, 最后采用国泰君安场外欧式期权报价数据进行实证研究。

在第四章, 本文考虑了标的价格过程中波动率的随机性和价格过程带跳, 进一步拓展了模型, 基于在现实世界测度下标的国债期货服从跳跃扩散过程的假设, 推导出了标的资产在一组风险中性测度下的价格过程, 最后利用美国 10 年期国债期权数据进行实证研究。将带有随机利率、随机波动率和跳的 SI、SV、J、SISV、SIJ、SVJ、SISVJ 总共 7 个模型与基础的美式期权 BAW 模型进行对比, 从而研究不同的宽松假设为国债期货期权定价质量所带来的提升。

在第五章, 进行了全文的总结并提出展望。

1.4 本文的创新

本文的创新点主要在三个方面: 其一, 为了提高模型对国债期货期权的定价质量, 本文放宽假设允许期货保证金比例为市场实际值, 基于这一点, 本文推导出来的风险中性测度和该测度下的价格过程均区别于过往不考虑保证金的风险中性测度和价格过程。

其二, 本文针对是否加入随机利率、是否加入随机波动率和是否带跳, 总共得到了 7 个定价模型, 全面地研究基于 Black 模型的不同假设的放宽给国债期货期权定价质量带来的提

升效果。

其三，本文在校准模型参数的时候，一方面为了解决优化的目标函数带有 Monte Carlo 模拟所造成的随机性的问题，在全局种下随机种子，共享随机矩阵，确保优化的可收敛性；另一方面，为了解决参数多导致的收敛到局部最优的问题，拿前序模型参数优化结果作为扩展模型的初始值，确保复杂模型在简单模型的基础上做进一步优化。

第 2 章 理论基础

2.1 基于 Itô 过程的随机分析理论基础

本节假设对于有关 Itô 过程的随机分析理论已有基本掌握。事实上，如果想要建立严谨的理论体系，需要首先定义概率空间和适应的过程，随后定义概率空间下的布朗运动并研究其二次变差，再从简单过程出发定义一般的适应过程关于布朗运动的积分 $\int_0^T \Delta(t) dW(t)$ ，然后定义 Itô 过程和关于 Itô 过程的积分，最后推导出 Itô-Doeblin 公式作为关于 Itô 过程函数的核心计算依据，并且可以从布朗运动的定义开始把一切推广至高维。详细的定义和推导可以参考 Shreve[33]，本节仅仅给出一维布朗运动情形下的 Itô 过程的定义和用于计算的 Itô-Doeblin 公式。另外，由于我们关注的是衍生品定价问题，需要找到一个测度使得仅投资于标的和货币账户的所有自融资组合在该测度下为鞅，并称其为风险中性测度，再由鞅表示定理保证存在自融资组合可以复制衍生品的价格过程，从而实现定价。因此本节也给出 Itô 过程框架下进行测度变换的多维 Girsanov 定理和多维鞅表示定理。

定义 2.1 (Itô 过程) 令 $W(t), 0 \leq t \leq T$ 是概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 下的标准布朗运动， $\mathcal{F}(t), t \geq 0$ 是关于该布朗运动的域流。一个 Itô 过程是具有如下形式的随机过程：

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \Gamma(s) dW(s) + \int_0^t \Theta(s) ds.$$

其中 $\Gamma(t)$ 和 $\Theta(t)$ 是 \mathcal{F} -适应的过程。

定理 2.1 (Itô 过程的 Itô-Doeblin) 设 $X(t), t \geq 0$ 是 Itô 过程，函数 $f(t, x)$ 的偏导数 $f_t(t, x)$, $f_x(t, x)$, $f_{xx}(t, x)$ 都有定义且连续，则对于每个 $t \geq 0$ ，有

$$\begin{aligned} f(t, X(t)) &= f(0, X(0)) + \int_0^t f_t(s, X(s)) ds + \int_0^t f_x(s, X(s)) dX(s) + \frac{1}{2} \int_0^t f_{xx}(s, X(s)) dX(s) dX(s) \\ &= f(0, X(0)) + \int_0^t f_t(s, X(s)) ds + \int_0^t f_x(s, X(s)) \Gamma(s) dW(s) + \int_0^t f_x(s, X(s)) \Theta(s) ds \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t f_{xx}(s, X(s)) \Gamma^2(s) ds. \end{aligned}$$

定理 2.2 (多维 Girsanov 定理) 令 $W(t) = (W_1(t), \dots, W_d(t))$, $0 \leq t \leq T$ 是概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 下的 d 维标准布朗运动， $\mathcal{F}(t), t \geq 0$ 是关于该布朗运动的域流。 $\Theta(t) = (\Theta_1(t), \dots, \Theta_d(t))$ 是一个 d 维适应过程。定义：

$$Z(t) = \exp \left\{ - \int_0^t \Theta(s) \cdot dW(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \|\Theta(s)\|^2 ds \right\},$$

$$\widetilde{W}(t) = W(t) + \int_0^t \Theta(s) ds.$$

并且假设:

$$E \left[\int_0^T \| \Theta(s) \|^2 Z^2(s) ds \right] < \infty.$$

令 $Z = Z(T)$, 则 $E[Z] = 1$, 且在由

$$\tilde{P}(A) = \int_A Z(\omega) dP(\omega), \forall A \in \mathcal{F}$$

给出的概率测度 \tilde{P} 下, $\tilde{W}(t)$ 是 d 维布朗运动。

定理 2.3 (多维鞅表示定理) 令 $W(t) = (W_1(t), \dots, W_d(t))$, $0 \leq t \leq T$ 是概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 下的 d 维标准布朗运动, $\mathcal{F}(t), t \geq 0$ 是关于该布朗运动的域流。设 $M(t)$, $0 \leq t \leq T$ 在 \mathbb{P} 下关于该域流是鞅, 则存在一个 d 维适应过程 $\Gamma(t) = (\Gamma_1(t), \dots, \Gamma_d(t))$, 使得:

$$M(t) = M(0) + \int_0^t \Gamma(s) \cdot dW(s), 0 \leq t \leq T.$$

推论 2.1 在定理 2.2 的记号下, 如果 $\tilde{M}(t)$ 是 \tilde{P} 下关于域流 \mathcal{F} 的鞅, 因为域流 $\mathcal{F}(t), t \geq 0$ 也是关于布朗运动 $\tilde{W}(t)$ 的域流, 所以存在一个 d 维适应过程 $\tilde{\Gamma}(t) = (\tilde{\Gamma}_1(t), \dots, \tilde{\Gamma}_d(t))$, 使得:

$$\tilde{M}(t) = \tilde{M}(0) + \int_0^t \tilde{\Gamma}(s) \cdot d\tilde{W}(s), 0 \leq t \leq T.$$

2.2 基于跳过程的随机分析理论基础

因为本文考虑将国债期货的价格过程建模成跳跃扩散过程, 跳过程的随机分析理论将平行给出且不管在核心计算或是测度变换上都区别 Itô 过程的理论, 而这对于本文来说也是同样重要的理论基础, 因此本节将尽可能完整地给出相关定义和定理, 但同样不加证明。

跳过程是一个 Itô 过程和一个纯跳过程的和, 本文讨论的跳过程在纯跳部分只允许为复合泊松过程, 这并非最一般的跳过程, 但对于我们的需要来说足够了。因此本节直接将跳过程定义为一个 Itô 过程和一个复合泊松过程之和, 随后依次给出关于跳过程的随机积分定义、跳过程的二次变差计算公式和 Itô-Doeblin 公式。最后, 因为本文所考虑的国债期货价格过程中纯跳部分想采用让跳跃幅度服从连续分布的复合泊松过程进行建模, 因此也会给出适应于这种形式的 Girsanov 定理。

定义 2.2 (复合泊松过程) 设 $N(t)$ 是强度为 λ 的泊松过程, Y_1, Y_2, \dots 是一列均值为 $\beta = E[Y_1]$ 的独立同分布随机变量, 并且也独立于 $N(t)$, 复合泊松过程 $Q(t)$ 定义为:

$$Q(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, t \geq 0.$$

显然当 $Y_i = 1$ 时, $Q(t)$ 退化成泊松过程 $N(t)$ 。

定理 2.4 设 $Q(t)$ 是上面定义的复合泊松过程, 则补偿复合泊松过程 $Q(t) - \beta\lambda t$ 是鞅。

定义 2.3 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 是概率空间, $\mathcal{F}(t), t \geq 0$ 是该空间上的一个域流。若布朗运动 $W(t)$ 是 \mathcal{F} -适应的过程且对 $\forall u > t$, 增量 $W(u) - W(t)$ 独立于 $\mathcal{F}(t)$, 则称布朗运动 $W(t)$ 是 $\mathcal{F}(t)$ 相关的布朗运动。若复合泊松过程 $Q(t)$ 是 \mathcal{F} -适应的过程且对 $\forall u > t$, 增量 $Q(u) - Q(t)$ 独立于 $\mathcal{F}(t)$, 则称 $Q(t)$ 是 $\mathcal{F}(t)$ 相关的复合泊松过程。

定义 2.4 (跳过程) 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 是概率空间, $\mathcal{F}(t), t \geq 0$ 是该空间上的一个域流. $W(t)$ 是 $\mathcal{F}(t)$ 相关的布朗运动, $J(t)$ 是 $\mathcal{F}(t)$ 相关的复合泊松过程. 一个跳过程是具有如下形式的随机过程:

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \Gamma(s) dW(s) + \int_0^t \Theta(s) ds + J(t),$$

其中 $\Gamma(t)$ 和 $\Theta(t)$ 是 \mathcal{F} -适应的过程. 将跳过程的连续部分记为 $X^c(t)$, 这就是一个 Itô 过程, 且

$$X(t) = X^c(t) + J(t).$$

定义 2.5 (关于跳过程的随机积分) $X(t)$ 是上面定义的跳过程, $\Phi(t)$ 是 \mathcal{F} -适应的过程, 将 $\Phi(t)$ 关于 $X(t)$ 的随机积分定义为:

$$\int_0^t \Phi(s) dX(s) = \int_0^t \Phi(s) dX^c(s) + \sum_{0 < s \leq t} \Phi(s) \Delta J(s),$$

其中 $\int_0^t \Phi(s) dX^c(s)$ 就是关于 Itô 过程的随机积分.

定理 2.5 假设跳过程 $X(t)$ 是鞅, $\Phi(t)$ 是左连续的适应过程, 且

$$\mathbb{E} \left[\int_0^t \Gamma^2(s) \Phi^2(s) ds \right] < \infty, \forall t > 0,$$

则 $\Phi(t)$ 关于 $X(t)$ 的随机积分也是鞅.

定理 2.6 (二次变差) 设 $X_1(t) = X_1^c(t) + J_1(t)$ 是基于域流 $\mathcal{F}(t)$ 的跳过程, $X_2(t) = X_2^c(t) + J_2(t)$ 是基于 $\mathcal{F}(t)$ 的另一个跳过程, 则有

$$\begin{aligned} [X_1, X_1](T) &= [X_1^c, X_1^c](T) + [J_1, J_1](T) \\ &= \int_0^T \Gamma_1^2(s) ds + \sum_{0 \leq s \leq T} (\Delta J_1(s))^2, \\ [X_1, X_2](T) &= [X_1^c, X_2^c](T) + [J_1, J_2](T) \\ &= \int_0^T \Gamma_1(s) \Gamma_2(s) ds + \sum_{0 \leq s \leq T} \Delta J_1(s) \Delta J_2(s). \end{aligned}$$

定理 2.7 (跳过程的 Itô-Doeblin 公式) 设 $X(t)$ 是跳过程, 函数 $f(t, x)$ 有连续的偏导数 $f_t(t, x)$, $f_x(t, x)$, $f_{xx}(t, x)$, 则

$$\begin{aligned} f(t, X(t)) &= f(0, X(0)) + \int_0^t f_t(s, X(s)) ds + \int_0^t f_x(s, X(s)) dX^c(s) + \frac{1}{2} \int_0^t f_{xx}(s, X(s)) dX^c(s) dX^c(s) \\ &\quad + \sum_{0 \leq s \leq t} [f(s, X(s)) - f(s, X(s-))]. \end{aligned}$$

推论 2.2 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 是概率空间, $\mathcal{F}(t), t \geq 0$ 是该空间上的一个域流. $W(t)$ 是 $\mathcal{F}(t)$ 相关的布朗运动, $J(t)$ 是 $\mathcal{F}(t)$ 相关的复合泊松过程, 则 $W(t)$ 和 $J(t)$ 是独立的.

定理 2.8 (关于复合泊松过程和布朗运动测度变换的 Girsanov 定理) 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 是概率空间, $\mathcal{F}(t), t \geq 0$ 是该空间上的一个域流。 $W(t)$ 是 $\mathcal{F}(t)$ 相关的布朗运动, $J(t)$ 是 $\mathcal{F}(t)$ 相关的复合泊松过程:

$$J(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i,$$

强度为 λ , 跳跃密度为 $f(y)$ 。设 $\tilde{\lambda}$ 是另一个正数, $\tilde{f}(y)$ 是另一个满足当 $f(y) = 0$ 时 $\tilde{f}(y) = 0$ 的密度函数, 并设 $\Theta(t)$ 是适应的过程。定义:

$$Z_1(t) = \exp \left\{ - \int_0^t \Theta(s) dW(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \Theta^2(s) ds \right\},$$

$$Z_2(t) = e^{(\lambda - \tilde{\lambda})t} \prod_{i=1}^{N(t)} \frac{\tilde{\lambda} \tilde{f}(Y_i)}{\lambda f(Y_i)},$$

$$Z(t) = Z_1(t) Z_2(t).$$

固定 $T > 0$, 令 $Z = Z(T)$, 则 $\mathbb{E}[Z] = 1$, 且在由

$$\tilde{P}(A) = \int_A Z(\omega) dP(\omega), \forall A \in \mathcal{F}$$

定义的概率测度 \tilde{P} 下,

$$\tilde{W}(t) = W(t) + \int_0^t \Theta(s) ds$$

是布朗运动且 $J(t)$ 是强度为 $\tilde{\lambda}$, 跳跃密度为 $\tilde{f}(y)$ 的复合泊松过程, 并且 $\tilde{W}(t)$ 独立于 $J(t)$ 。

2.3 一般欧式期货期权的 Black 模型

以期货作为标的区别于以股票作为标的的关键在于承约期货时只需支付保证金, Black 模型假设保证金为 0, 其余假设均与 B-S 模型相同:

1. 无风险利率为常数 r ;
2. 标的期货服从几何布朗运动:

$$\frac{dF(t)}{F(t)} = \mu dt + \sigma dW(t), t \geq 0,$$

其中, $F(t)$ 代表期货价格的随机过程, $W(t)$ 代表标准布朗运动, μ, σ 均为常数, 分别为期货资产的平均收益率和波动率;

3. 可以卖空证券, 证券可无限分割, 市场无摩擦;
4. 市场无套利。

下面以欧式看涨期权定价为例, 记其价格为 c , $c = c(F(t), t)$ 。可构造如下投资组合 Π , 即 short 一份期权的同时 long c_F 份标的期货, 这里的 c_F 意为期权价格对标的期货价格的偏导, 之后出现的下标一律为偏导:

$$\Pi = -c + c_F F.$$

注意组合价值为 $-c$ (因为期货合约价值始终为 0)。

由 Itô 公式可得,

$$\begin{aligned} d\Pi &= -dc + c_F dF \\ &= -\left(\frac{1}{2}c_{FF}\sigma^2 F^2 + c_t\right)dt. \end{aligned}$$

因此该组合无风险, 根据无套利有 $d\Pi = -crdt$, 因此有:

$$\frac{1}{2}c_{FF}\sigma^2 F^2 + c_t = rc.$$

该方程与原本的 BS 公式边界条件一致, 且令支付连续红利的 BS 公式中的红利 $q = r$, 则能退化成该方程。因此可以直接转化得到欧式期货期权的价格公式:

$$c = e^{-rT} [F_0 N(d_1) - KN(d_2)],$$

其中,

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln\left(\frac{F_0}{K}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}, \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T}, \end{aligned}$$

F_0 为期货在当前时刻的价格, K 为期权的行权价, T 为期权的剩余期限, $N(x)$ 表示标准正态分布的分布函数。

正如之前的总结, Black 模型因为对无风险利率的常数假设, 应用于国债期权定价的话在理论方面就有重大缺陷, 因此我们就需要探索其他途径。

第 3 章 考虑随机利率的国债期货期权定价

正如在绪论中所说，国债期货期权定价主要从两点区别于一般欧式期权的 Black 模型：1. 无风险利率不能假定为常数；2. 国债期货价格过程不服从几何布朗运动所决定的对数正态分布。在本章中，我们先解决了第一个问题，利用风险中性的定价方法，加入期货保证金制度的考虑，同时允许利率的随机性，从而做出适用于国债期货期权的定价格式。我们此时仍然保留了国债期货价格服从几何布朗运动的假设，目的是为了在国内市场上进行定价，并与可以得到的券商报价数据进行对比。因为目前并没有场内国债期权产品，这种情况下对波动率建立随机模型或者是加入跳跃过程的考虑是难以进行参数估计的，因此失去了意义。在3.1中，做出了针对国债期货期权的定价理论并介绍了该方法的扩展性；在3.2中，分别基于一个随机驱动以及两个随机驱动做出了国债期货期权定价的具体离散格式；在3.3中，用国泰君安场外报价数据进行了实证检验；最后在3.4中进行了总结。

3.1 采用风险中性测度下的期权定价方法

首先考虑将利率和波动率的常数条件都放宽成关于时间 t 的确定函数，即 $r = r(t)$, $\sigma = \sigma(t)$ ，还是可以一样利用无套利导出微分方程，在上星期的报告中进行过推导，原来的 Black 模型中的微分方程为：

$$\frac{1}{2}c_{FF}\sigma^2 F^2 + c_t = rc,$$

现在只不过变成了

$$\frac{1}{2}c_{FF}\sigma^2(t)F^2 + c_t = r(t)c.$$

虽然没有闭形式解了，但加入边界条件，通过微分方程的数值解法仍然可以求出欧式期权价格。但是这还有两个缺陷：1. 无风险利率事实上不是关于时间的确定函数，一般认为这是随机过程；2. 这个方法始终只能给欧式期权进行定价，无法推广到美式期权和雪球产品。

因此下面考虑采用风险中性测度下的期权定价方法，不仅其假设更为宽松，而且该方法不但非常适用于所有路径依赖的期权产品（如亚式期权、雪球产品）的定价，而且可以通过例如基于最小二乘的 Longstaff-Schwartz 方法 [20] 为美式期权定价。

记 T 为衍生品的行权时间，设 $\{W(t), 0 \leq t \leq T\}$ 是概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的布朗运动， $\mathcal{F}(t), 0 \leq t \leq T$ 是由该布朗运动生成的域流，国债期货价格过程服从：

$$dF(t) = \alpha(t)F(t)dt + \sigma(t)F(t)dW(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.1)$$

其中平均回报率 $\alpha(t)$ 和波动率 $\sigma(t)$ 是 \mathcal{F} -适应的过程，且对 $\forall t$, $\sigma(t)$ 几乎必然非 0，这样的资产价格服从广义的几何布朗运动。此外，假设有适应的利率过程 $R(t)$ ，我们可以定义贴现

过程:

$$D(t) = e^{-\int_0^t R(s) ds},$$

将这个贴现过程乘在资产价格过程上, 表示以货币市场账户作为计价单位。

记 $I(t) = \int_0^t R(s) ds$, 则有 $dI(t) = R(t) dt$, 根据 Itô 公式, 有:

$$\begin{aligned} dD(t) &= d(e^{-I(t)}) \\ &= -e^{-I(t)} dI(t) + e^{-I(t)} dI(t) \\ &= -e^{-I(t)} R(t) dt \\ &= -R(t)D(t) dt. \end{aligned}$$

设保证金比例为 k_M , 我们现在要定义风险中性测度 $\tilde{\mathbb{P}}$, 使得期货和货币账户 (多余的钱在 t 时刻以利率 $R(t)$ 借贷) 构成的自融资组合的贴现过程是 $\tilde{\mathbb{P}}$ 下的鞅。记该自融资组合的价格过程为 $X(t)$, $0 \leq t \leq T$, 在任意时刻 t , 不妨投资于国债期货资产的份额为 $\Delta(t)$, 因为保证金比例为 k_M , 因此就能有 $X(t) - k_M \Delta(t) F(t)$ 投资于货币账户。则有:

$$dX(t) = \Delta(t) dF(t) + R(t)(X(t) - k_M \Delta(t) F(t)) dt.$$

根据 Itô 公式,

$$\begin{aligned} dD(t)X(t) &= X(t) dD(t) + D(t) dX(t) + dD(t) dX(t) \\ &= \Delta(t) D(t) \alpha(t) F(t) dt + \Delta(t) D(t) \sigma(t) F(t) dW(t) - k_M \Delta(t) D(t) R(t) F(t) dt \\ &= \Delta(t) D(t) \sigma(t) F(t) \left[\frac{\alpha(t) - k_M R(t)}{\sigma(t)} dt + dW(t) \right]. \end{aligned}$$

根据 Girsanov 定理 2.2, 记 $\Theta(t) = \frac{\alpha(t) - k_M R(t)}{\sigma(t)}$ 作为风险的市场价格, 可以构造等价鞅测度 $\tilde{\mathbb{P}}$, 使得在 $\tilde{\mathbb{P}}$ 下, $d\tilde{W}(t) = dW(t) + \Theta(t) dt$ 为标准布朗运动, 因此在测度 $\tilde{\mathbb{P}}$ 下, 有:

$$d(D(t)X(t)) = \Delta(t) D(t) \sigma(t) F(t) d\tilde{W}(t),$$

即自融资组合的贴现过程是鞅。在 $\tilde{\mathbb{P}}$ 下, 资产价格过程服从:

$$\begin{aligned} dF(t) &= \alpha(t) F(t) dt + \sigma(t) F(t) dW(t) \\ &= \alpha(t) F(t) dt + \sigma(t) F(t) \left[d\tilde{W}(t) - \frac{\alpha(t) - k_M R(t)}{\sigma(t)} dt \right] \\ &= k_M R(t) F(t) dt + \sigma(t) F(t) d\tilde{W}(t). \end{aligned}$$

记标的为国债期货的衍生品在 T 时刻的支付为 $V(T) \in \mathcal{F}(T)$, 记风险中性测度 $\tilde{\mathbb{P}}$ 下的期望为 \tilde{E} , 定义

$$V(t) = \tilde{E} \left[e^{-\int_t^T R(s) ds} V(T) \middle| \mathcal{F}(t) \right]. \quad (3.2)$$

下面来证明 $V(t)$ 就是衍生品在 t 时刻的定价公式。

首先根据这一定义, 有

$$D(t)V(t) = \tilde{E} \left[D(T)V(T) \middle| \mathcal{F}(t) \right],$$

从而对 $\forall 0 \leq s \leq t \leq T$, 有

$$\begin{aligned}\tilde{E}[D(t)V(t)|\mathcal{F}(s)] &= \tilde{E}\left[\tilde{E}\left[D(T)V(T)|\mathcal{F}(t)\right]|\mathcal{F}(s)\right] \\ &= \tilde{E}\left[D(T)V(T)|\mathcal{F}(s)\right] \\ &= D(s)V(s).\end{aligned}$$

因此 $D(t)V(t)$ 是 $\tilde{\mathbb{P}}$ 下的鞅。根据鞅表示定理的推论2.1, 存在适应的过程 $\Gamma(t)$, 使得

$$D(t)V(t) = V(0) + \int_0^t \tilde{\Gamma}(s) d\tilde{W}(s).$$

因为投资于国债期货资产的份额为 $\Delta(t)$ 的自融资投资组合 $X(t)$ 的贴现过程 $D(t)X(t)$ 在 $\tilde{\mathbb{P}}$ 下为:

$$D(t)X(t) = X(0) + \int_0^t \Delta(s)D(s)\sigma(s)F(s) d\tilde{W}(s),$$

因此可以通过取 $X(0) = V(0)$, $\Delta(t) = \frac{\tilde{\Gamma}(t)}{D(t)\sigma(t)F(t)}$, $0 \leq t \leq T$ 使得

$$X(T) = V(T), a.s..$$

记衍生品的 t 时刻的价值为 $V_0(t)$, 基于在 T 时刻的支付为 $V(T)$, 因此 $V_0(T) = V(T)$ 。那么根据无套利原则, 有

$$X(t) = V_0(t), a.s., \forall 0 \leq t \leq T.$$

而基于我们对 $\Delta(t)$ 的选择, 本身就有 $X(t) = V(t), a.s., \forall 0 \leq t \leq T$, 因此 $V_0(t) = V(t)$, 即式(3.2)定义的 $V(t)$ 就是衍生品在 t 时候的价格。

而 Black 模型的具体解析解其实就可以由在公式(3.2)中加入利率、波动率的常数假设, 同时假设保证金 $k_M = 0$, 从而计算 $F(T)$ 的分布函数, 带入时刻 T 的支付 $V(T) = (F(T) - K)^+$ (针对欧式看涨期权) 做积分算出的。但采用风险中性测度方法定价所带来的好处远不止此, 因为有了公式(3.2), 任何路径依赖的产品都可以用 Monte Carlo 方法模拟路径来进行定价。下面对此作一个具体的解释。

注意到上面对衍生品在 T 时刻价值 $V(T)$ 的要求仅仅是 $V(T) \in \mathcal{F}(T)$, 简单来说 $\mathcal{F}(T)$ 就是整个布朗运动从 0 到 T 的具体路径已经知道了, $V(T) \in \mathcal{F}(T)$ 的意思就是在布朗运动路径知道的前提下, T 时刻衍生品的价值是确定的。因为我们整个系统的随机性完全由布朗运动带来, 布朗运动的路径知道了, 意味着资产价格路径和利率路径都是确定的。

就比如欧式看涨期权, T 时刻的支付就是 $(F(T) - K)^+$ (K 为行权价), 它被资产在 T 一个时间点上的价格 $F(T)$ 确定; 比如亚式看涨期权, T 时刻的支付是 $(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F_i - K)^+$, 它被资产的整个运动路径确定; 再比如雪球产品, 如果资产的运动路径决定它在 $t_1 < T$ 就敲出了而且得到了收益 V , 那它在 T 时刻的价值就是 $V e^{\int_{t_1}^T R(s) ds}$, 它还是被布朗运动的路径所确定了。因此一切不能自主决定什么时候行权的产品都能被这个框架囊括, 鞅表示定理保证一定能有自融资组合能复制它。虽然给不出具体的复制头寸, 但同样有公式(3.2), 这就能让我们用 Monte Carlo 的方法解决问题。

具体做法以亚式看涨期权为例。因为在 $\tilde{\mathbb{P}}$ 下, 资产的价格过程服从:

$$dF(t) = k_M R(t)F(t) dt + \sigma(t)F(t) d\tilde{W}(t).$$

根据 Itô 公式, 有:

$$\begin{aligned} d\ln F(t) &= \frac{1}{F(t)} dF(t) - \frac{1}{2F^2(t)} dF(t) dF(t) \\ &= (k_M R(t) - \frac{1}{2}\sigma^2(t)) dt + \sigma(t) d\widetilde{W}(t). \end{aligned}$$

因此,

$$F(t_1) = F(t_0) e^{\int_{t_0}^{t_1} \sigma(s) d\widetilde{W}(s) + \int_{t_0}^{t_1} (k_M R(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s)) ds}. \quad (3.3)$$

我们将时间离散化 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$, 生成正态分布的随机数序列 Z_1, \dots, Z_n , 就可以进行轨道模拟: $F(t_0) = F(0)$ 为当前时刻的资产价格,

$$F(t_{i+1}) = F(t_i) \exp \left[\sigma(t_i) \sqrt{t_{i+1} - t_i} Z_{i+1} + (k_M R(t_i) - \frac{1}{2}\sigma^2(t_i))(t_{i+1} - t_i) \right], \quad i = 0, \dots, n-1.$$

需要注意这里每一步同时要模拟 $\sigma(t_{i+1})$ 和 $R(t_{i+1})$, 因为这也是由同一个布朗运动驱动的随机过程, 这里还会遇到一点问题, 在下一节中会对此进行具体阐述。

基于这一条路径的 T 时刻价值的贴现就是

$$e^{-\sum_{i=0}^{n-1} k_M R(t_i)(t_{i+1}-t_i)} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F_i - K \right)^+.$$

我们可以视情况模拟 10^4 到 10^5 根轨道, 求期望即得到所求期权价格。

注意到如果我们把国债期货资产价格过程假设为式 (3.1), 在风险中性测度下能有准确的解 (3.3), 这是一个准确模拟。但是我们在做国债期货资产价格过程模型的时候可能采用的不是式 (3.1)。导致在相应风险中性测度下的价格过程可能是如下的:

$$dF(t) = a(F(t), t) dt + b(F(t), t) dW(t),$$

未必能有一个精确的形如 3.3 的解, Euler 格式保证了还是可以得到近似模拟。记 \hat{F} 表示对 F 的离散时间近似, 则 Euler 近似格式被定义为:

$$\hat{F}(0) = F(0),$$

$$\hat{F}(t_{i+1}) = \hat{F}(t_i) + a(\hat{F}(t_i), t_i)(t_{i+1} - t_i) + b(\hat{F}(t_i), t_i) \sqrt{t_{i+1} - t_i} Z_{i+1}, \quad i = 0, \dots, n-1.$$

因此这个定价方法的适用性非常之强, 国债期货的资产过程和利率过程完全可以根据我们的需求来建模, 就能用上面的框架解决除了带有自主提前行权功能以外的期权定价问题, 美式期权在上面的基础上加一个 Longstaff-Schwartz 方法, 同样可以用 Monte Carlo 进行定价。

3.2 具体离散格式和参数模拟

首先我们需要讨论一个细节问题, 鞅表示定理的前提条件是 $\mathcal{F}(t)$ 是由布朗运动 $W(t)$ 生成的域流, 因此在一开始我们就加上了这个条件, 下面要说明它所带来的限制。先简单解释一下域流, 不严格地说, 域流就是信息流, 由布朗运动生成的截止 t_1 时刻的域流就是布朗运动在 t_1 之前 (包括 t_1) 全部运动过程, 有且只有 $\{W(t), t \leq t_1\}$ 的信息。由于 3.1 中要求利率过程 $R(t)$ 是 \mathcal{F} -适应的过程, 因此在这个框架下, 给利率过程建模的时候只能用同样的布朗运动 $W(t)$ 作为随机驱动。也就是如下形式:

$$dR(t) = a(R(t), t) dt + b(R(t), t) dW(t).$$

这引出了重要的问题：对国债期货价格过程建模和对瞬时随机利率过程建模采用同一个布朗运动作为随机驱动，这是否合适？

事实上，它们的随机驱动可以说是相同的，给一个确定的利率模型，比如 Vasicek 模型、CIR 模型，都可以计算出零息票债券的价格过程，虽然国债期货的价格对利率过程的依赖关系比较复杂以至于没有办法给出表达，但是本质上它还是由利率过程决定的。因此本身它们就是共用了随机驱动。但是我们放到实际中，一定是分别对国债期货价格过程和利率过程选用最合适的模型来建模，然后分别进行参数估计。

这就会带来一个问题，这两个过程本来应该有一个底层的自洽关系，但是我们选用的模型很可能无法保证这个自洽关系，甚至偏离得有些严重，那么这个时候用同一个随机驱动很可能定价结果是不好的。而 Whaley[34] 指出，债券价格和债券期货波动背后的驱动力是长期利率的不确定性，而这种不确定性在某种程度上与短期利率的不确定性是可分离的。因此采用不同的随机驱动也是具有合理性的。基于这些原因，下面分别做出基于一个以及两个随机驱动下的国债期货期权定价格式。

目前，我们仍然假设国债期货的价格过程服从几何布朗运动，因为本章的定价方法旨在使用券商的场外报价来对比我们的方法相比于 Black 模型的定价质量提升。如果想对波动率用随机过程建模，那必须每天上都计算市场的隐含波动率，然后才能进行模型的参数校正，比如根据 Cakici[30]，有三种常用方法：1. 用 at-the-money 期权的隐含波动率；2. 用所有期权的隐含波动率做一定加权方式的均值；3. 把波动率 σ 作为整个市场的隐含值，计算全市场产品根据 Black 模型得到的期权价格 $V_i(\sigma)$ ，记对应期权真实期权价格为 V_i ，取让 $\sum_i (V_i(\sigma) - V_i)^2$ 最小的 σ 。而我国暂无场内产品，只能用历史波动率作为对波动率的估计，所以这种情况下给波动率用随机过程建模不具有任何可操作性。下面首先需要决定利率过程的选取。

3.2.1 利率过程的模型确立

许多作者提出了利率期限结构的单状态变量模型，其中短期利率 $R(t)$ 遵循如下的均值回复过程：

$$dR(t) = a(b - R(t))dt + \sigma R^\beta(t) dW(t), \quad (3.4)$$

其中 a, b, σ, β 都是正常数。在这个模型中，利率 R 以速度 a 被拉向 b ，此外引入了一个随机项。

当我们取 $\beta = 0$ 时，得到的就是 Vasicek 模型。Vasicek[21] 中根据这个利率模型推导了贴现债券价格的解析解。Jamshidian[27] 在这个基础上推导了贴现债券和付息债券的欧式期权价格的解析解。但是令 $\beta = 0$ 的缺陷在于利率可能会变成负的，因此 CIR 模型就令 $\beta = 0.5$ ，这样利率就是非负的了。Cox, Ingersoll, Ross[35] 基于 CIR 模型，推导了贴现债券和贴现债券欧式期权价格的解析解。后面还有 Hull, White[36]; Heath, Jarrow, Morton[37] 做出了修改，他们修改的动机是，市场上的真实债券价格是可以用来计算出不同期限的贴现债券的价格的，而在风险中性测度下，贴现债券价格和短期利率过程应该满足：

$$B(0, t) = E \left[e^{-\int_0^t R(s) ds} \right].$$

如果采用 (3.4) 的范式作为利率过程，是无法和市场上的现有债券价格完全吻合的，因此 Hull, White 就加入了依赖于时间的随机项，然后用当前市场上的债券价格进行模型校准，建

立了描述整个期限结构的均衡移动的模型。

如果我们现在做的是比如利率互换的期权定价，那必须得选择能用当前市场利率期限结构进行模型校准的复杂模型，这样才能使得定价更加准确。但是现在我们的标的是国债期货，从上面的定价框架就能知道，对利率过程的准确性要求并没有这么高，所以选择 Vasicek 模型或是 CIR 模型这种方便进行参数估计的常用利率过程已经足够了。

Vasicek 模型相比于 CIR 模型，缺点是某些模拟轨道上利率可能会变成负的，但由于 Vasicek 模型的随机微分方程（下面一律简称 SDE）有解析解，而 CIR 模型没有，因此它在实际操作比如参数估计中会带来很多的方便，我们本章做国债期货期权定价理论模型的时候先选取 Vasicek 模型进行利率过程的刻画，换成 CIR 的对应做法也会在相应部分分别阐述。

还有一点值得说的是，本节其实是将国债期货与利率过程分开建模的巨大动机。因为可以从文献中看到即使是 Vasicek 模型作为利率模型，推导出的票息债券的欧式期权的解析式已经无比复杂，而且如果债券价格估计不准确，那么以此为标的的期权价格将几十倍的放大这种不准确。首先，国债期货有经由市场博弈出来的价格，没必要再用利率模型推导其价格；其次，就算推导也推不出来，国债期货实际上还隐含着择时期权和择票期权，有许多论文专门对国债期货的定价做了研究，这是一个非常难处理的问题；再次，就算做出来了近似解，和实际国债期货价过程的偏差完全会使得期权定价毫无准确性可言。因此基于以上种种理由，才决定将国债期货价格过程以及利率的过程进行分开建模。

接下来分别在一个随机驱动和两个随机驱动模式下分别给出国债期货期权定价的具体离散格式和参数校正办法。

3.2.2 国债期货和利率共用一个随机驱动时的国债期货期权定价格式

记 $W(t)$ 为现实世界测度下的布朗运动，那么此时国债期货价格过程和利率过程分别表示为：

$$\begin{cases} \frac{dF(t)}{F(t)} = \mu dt + \sigma_F dW(t), & 0 \leq t \leq T, \\ dR(t) = a(b - R(t))dt + \sigma_R dW(t), & 0 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (3.5)$$

其中 σ_F , a , b , σ_R 均为常数。这里的参数都从真实世界中估计出来的。

下面首先阐述 Vasicek 模型如何进行参数估计，再给出具体的 Monte Carlo 模拟过程。

我们现实中能获取瞬时利率 $R(t)$ （比如用 R007）的一组近期日序列 R_0, R_1, \dots, R_n 。据此来估计在现实测度下 Vasicek 模型的参数。

Vasicek 模型由于可以求出随机微分方程的解，因此我们可以比较方便地采用极大似然法进行参数估计。下面的 $W(t)$ 一律表示为现实世界测度下的标准布朗运动。Vasicek 模型认为，瞬时利率过程在现实世界测度下有如下刻画：

$$dR(t) = [b - aR(t)] dt + \sigma dW(t), \quad (3.6)$$

其中 b , a , σ 均为常数，这些参数和前文有所不同是为了让下面推导更加简洁。

移向整理，两边同乘 e^{at} ，得：

$$e^{at} [dR(t) + aR(t) dt] = be^{at} dt + \sigma e^{at} dW(t),$$

即

$$d(e^{at} R(t)) = be^{at} dt + \sigma e^{at} dW(t),$$

从而在条件 $\mathcal{F}(s)$ 下 (表示时刻 s 及之前布朗运动的过程是已知的), SDE(3.6) 有显解:

$$R(t) = R(s)e^{-a(t-s)} + \frac{b}{a} [1 - e^{-a(t-s)}] + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dW(u), \quad t > s.$$

因此此时 $R(t)$ 服从均值为 $R(s)e^{-a(t-s)} + \frac{b}{a} [1 - e^{-a(t-s)}]$, 方差为 $\frac{\sigma^2}{2a} [1 - e^{-2a(t-s)}]$ 的正态分布。

对于我们的瞬时利率日序列 R_0, R_1, \dots, R_n , 不妨 δ 表示时间间隔, 其实就是 $\delta = \frac{1}{365}$ 。进行一下参数变换: $\alpha = e^{-a\delta}$, $\beta = \frac{b}{a}$, $V^2 = \frac{\sigma^2}{2a} [1 - e^{-2a\delta}]$, 参数变换后 R_{i+1} 服从均值为 $R_i\alpha + \beta(1 - \alpha)$, 方差为 V^2 的正态分布。

因为已经能算出来理论分布了, 理当用极大似然法估计参数 α , β 和 V^2 , 记似然函数为 $f(\alpha, \beta, V^2)$, 则有:

$$f(\alpha, \beta, V^2) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi V}} \exp \left\{ -\frac{(R_i - R_{i-1}\alpha - \beta(1 - \alpha))^2}{2V^2} \right\},$$

想要似然函数最大化, 等价于其取对数最大化:

$$\ln [f(\alpha, \beta, V^2)] = -n \ln(\sqrt{2\pi V}) - \sum_{i=1}^n \frac{(R_i - R_{i-1}\alpha - \beta(1 - \alpha))^2}{2V^2}.$$

分别令 $\ln [f(\alpha, \beta, V^2)]$ 对 α , β , V^2 求偏导, 令偏导等于 0, 可以得到参数估计如下:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= \frac{n \sum_{i=1}^n R_i R_{i-1} - \sum_{i=1}^n R_i \sum_{i=1}^n R_{i-1}}{n \sum_{i=1}^n R_{i-1}^2 - (\sum_{i=1}^n R_{i-1})^2}, \\ \hat{\beta} &= \frac{\sum_{i=1}^n (R_i - R_{i-1}\hat{\alpha})}{n(1 - \hat{\alpha})}, \\ \widehat{V^2} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [R_i - R_{i-1}\hat{\alpha} - \hat{\beta}(1 - \hat{\alpha})]^2. \end{aligned}$$

然后就可以简单计算出 a , b , σ 的估计。

Visacek 模型因为转移概率服从正态分布, 能用极大似然法手算出参数估计。而对于 CIR 模型, 其转移概率服从非中心卡方分布, 用极大似然法估计参数的时候采用梯度下降等迭代算法即可。一个简单的替代处理办法是直接线性回归进行参数估计。在 CIR 模型中利率服从如下过程:

$$dR(t) = [b - aR(t)] dt + \sigma \sqrt{R(t)} dW(t),$$

沿用上面的 δ 表示时间间隔, 根据 Euler 离散格式有:

$$R_{i+1} - R_i = b\delta - a\delta R_i + \sigma \sqrt{R_i} \delta Z, \quad Z \sim N(0, 1).$$

也就是

$$R_{i+1} = b\delta + (1 - a\delta)R_i + \sigma \sqrt{R_i} \delta Z, \quad Z \sim N(0, 1).$$

因此令 R_{i+1} 关于 R_i 做线性回归即可, 回归系数能直接计算出对 a , b 的估计, 再用 $\frac{\epsilon_i}{\sqrt{R_i} \delta}$ 作为对 σ 的估计, 其中 ϵ_i 为回归的残差。虽然这个方法肯定牺牲了精确性, 但是我们在进行利率过程轨道模拟的时候采用的就是 Euler 格式, 从这一点上看, 这种回归法反而合理了。

根据之前的推导, 在风险中性测度 $\tilde{\mathbb{P}}$ 下, 国债期货价格和利率过程就从 (3.5) 变成了

$$\begin{cases} \frac{dF(t)}{F(t)} = k_M R(t) dt + \sigma_F d\tilde{W}(t), & 0 \leq t \leq T, \\ dR(t) = \left[a(b - R(t)) - \frac{\sigma_R}{\sigma_F}(\mu - R(t)) \right] dt + \sigma_R d\tilde{W}(t), & 0 \leq t \leq T. \end{cases}$$

要注意这里利率过程中出现了 μ , 因此国债期货的年化收益率 μ 也要进行估计。这样测度 $\tilde{\mathbb{P}}$ 下国债期货和利率过程可以简写为:

$$\begin{cases} \frac{dF(t)}{F(t)} = k_M R(t) dt + \sigma_F d\tilde{W}(t), & 0 \leq t \leq T, \\ dR(t) = [b - aR(t)] dt + \sigma_R d\tilde{W}(t), & 0 \leq t \leq T. \end{cases}$$

这里的参数和上面用到了重复的, 但不是一个含义。它们之间的对应关系非常简单。我们就有两个 SDE 分别的离散化解

$$\begin{cases} \ln F(t_{i+1}) = \ln F(t_i) + \sigma_F (\tilde{W}(t_{i+1}) - \tilde{W}(t_i)) + (k_M R(t_i) - \frac{1}{2}\sigma_F^2)(t_{i+1} - t_i), \\ R(t_{i+1}) = R(t_i)e^{-a\delta} + \frac{b}{a} [1 - e^{-a\delta}] + \sigma_R \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{-a(t_{i+1}-s)} d\tilde{W}(s). \end{cases} \quad (3.7)$$

这里 $\tilde{W}(t_{i+1}) - \tilde{W}(t_i)$ 服从均值为 0, 方差为 $\delta = t_{i+1} - t_i$ 的正态分布, 而 $\int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{-a(t_{i+1}-s)} d\tilde{W}(s)$ 服从均值为 0, 方差为 $\frac{1}{2a}(1 - e^{-2a\delta})$ 的正态分布。需要特别注意这两者是具有相关性的。由 Itô 等距公式, 有:

$$\begin{aligned} & \tilde{E} \left[(\tilde{W}(t_{i+1}) - \tilde{W}(t_i)) \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{-a(t_{i+1}-s)} d\tilde{W}(s) \right) \right] \\ &= \tilde{E} \left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} d\tilde{W}(s) \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{-a(t_{i+1}-s)} d\tilde{W}(s) \right] \\ &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{-a(t_{i+1}-s)} ds \\ &= \frac{1}{a}(1 - e^{-a\delta}). \end{aligned}$$

因此

$$\text{Cov} \left[\tilde{W}(t_{i+1}) - \tilde{W}(t_i), \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{-a(t_{i+1}-s)} d\tilde{W}(s) \right] = \frac{1}{a}(1 - e^{-a\delta}) - \frac{\delta}{2a}(1 - e^{-2a\delta}).$$

根据方差和相关性用标准正态分布的抽样生成具有相关性的一对正态分布抽样, 再代入式 (3.7) 进行轨道模拟即可, 这就模拟了一条轨道。共模拟约 10^4 - 10^5 个轨道, 求支付贴现的均值, 则可以得到所有以国债期货作为标的的路径依赖期权的价格。

3.2.3 国债期货和利率采用不同的随机驱动时的国债期货期权定价格式

这时候国债期货价格过程和利率过程分别表示为:

$$\begin{cases} \frac{dF(t)}{F(t)} = \mu dt + \sigma_F dW^1(t), & 0 \leq t \leq T, \\ dR(t) = k(\theta - R(t)) dt + \sigma_R dW^2(t), & 0 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (3.8)$$

这里 $(W^1(t), W^2(t))$ 是二维布朗运动。

根据一系列定理，如果风险中性测度存在，那风险中性测度唯一等价于市场是完备的，而市场的完备性才能保证标的为市场内产品的衍生品能被复制，从而才有唯一的价格。具体到我们上述框架下，我们能给出 $d\widetilde{W}(t)$ 与 $dW(t)$ 的唯一关系使得 $D(t)F(t)$ 是鞅，这个风险中性测度就是唯一的。现在到了二维情况下，我们也要确保这个唯一性。

首先 $D(t)F(t)$ 还得是鞅，因此要求 $d\widetilde{W}^1(t) = dW^1(t) + \frac{\alpha(t) - k_M R(t)}{\sigma_F} dt$ 是不变的，但是现在看起来并没有第二个资产要求其贴现过程为鞅了，那么如何定义唯一的 $d\widetilde{W}^2(t)$ 呢？

在阅读了利率衍生品的相关文献后，找到了其中的答案。在利率世界里的基础资产就是零息债券，将 T 时刻到期的零息债券在 t 时刻价格记为 $P(t, T)$ ，利率世界中的风险中性测度 \mathbb{Q} 就是让 $D(t)P(t, T)$ 为鞅的测度，那么在这一测度下，有

$$D(t)P(t, T) = \widetilde{E}_t [D(T)P(T, T)] = \widetilde{E}_t [D(T)],$$

这里的 \widetilde{E}_t 表示在 \mathbb{Q} 下以域 \mathcal{F}_t 作为条件的期望，因此有

$$P(t, T) = \widetilde{E}_t \left[e^{-\int_t^T R(s) ds} \right].$$

所以在做利率衍生品的时候，可以直接在 \mathbb{Q} 下对利率过程建模，用不着关心在真实测度下的利率过程是什么样的。虽然 Vasicek 本人做 Vasicek 模型的时候是在现实世界测度下建模的，但是后来做利率衍生品的研究者都将 Vasicek 模型拿到 \mathbb{Q} 下建模，令 \mathbb{Q} 下的利率过程服从：

$$dR(t) = k(\theta - R(t)) dt + \sigma d\widetilde{W}(t).$$

那么根据 Brigo[38]，可以算出来零息债券的具体价格：

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)R(t)},$$

其中

$$A(t, T) = \exp \left\{ \left(\theta - \frac{\sigma^2}{2k^2} \right) [B(t, T) - T + t] - \frac{\sigma^2}{4k} B(t, T)^2 \right\},$$

$$B(t, T) = \frac{1}{k} [1 - e^{-k(T-t)}].$$

因此 \mathbb{Q} 下的模型参数选取就最小化由市场债券价格计算出的贴现债券价格和贴现债券理论价格的 MSE 即可。这样的方式做参数，可以直接把式 (3.8) 中的利率过程换成风险中性测度下的利率过程，因此在风险中性测度下，国债期货价格和利率过程服从：

$$\begin{cases} \frac{dF(t)}{F(t)} = k_M R(t) dt + \sigma_F d\widetilde{W}^1(t), & 0 \leq t \leq T, \\ dR(t) = k(\theta - R(t)) dt + \sigma_R d\widetilde{W}^2(t), & 0 \leq t \leq T. \end{cases}$$

从而离散格式为：

$$\begin{cases} F(t_{i+1}) = F(t_i) \times \exp \left\{ (k_M R(t_i) - \frac{1}{2} \sigma_F^2)(t_{i+1} - t_i) + \sigma_F \sqrt{t_{i+1} - t_i} Z_i^1 \right\}, \\ R(t_{i+1}) = R(t_i) e^{-k(t_{i+1} - t_i)} + \theta [1 - e^{-k(t_{i+1} - t_i)}] + \sigma_R \sqrt{\frac{1}{2k} [1 - e^{-2k(t_{i+1} - t_i)}]} Z_i^2. \end{cases}$$

由于这个时候风险中性测度是唯一的，因此理论框架能完全成立。在具体轨道模拟的时候，有两点区别于共用一个随机驱动的期权定价：1. 利率过程的参数模拟用最小化债券价格和理论价格的 MSE，绝对不能用现实世界测度下的短期利率序列；2. 这里的 $d\widetilde{W}^1(t)$ 和 $d\widetilde{W}^2(t)$ 不具有相关性，用独立正态分布抽样就可以了。

3.3 基于券商场外报价的实证研究

我们接下来基于目前券商的场外报价对国债期货期权定价进行了实证研究，分别对欧式期权采用 Black 模型和上面做出来的带有利率随机性的 Monte Carlo 方法进行定价，随后对美式期权采用 BAW 模型和 Monte Carlo 加 Longstaff Schwartz 方法进行定价。

3.3.1 标的的数据：国债期货

中金所的国债期货合约有三种：TS(两年期国债期货)、TF(五年期国债期货)和 T(十年期国债期货)。以十年期国债期货为例，合约标的为面值为 100 万元人民币、票面利率为 3% 的名义长期国债。可交割国债为发行期限不高于 10 年、合约到期月份首日剩余期限不低于 6.5 年的记账式付息国债。以上三种国债期货以每百元面值国债作为报价单位，以净价方式报价。合约月份为最近的三个季月，季月是指 3 月、6 月、9 月和 12 月；合约的最后交易日为合约到期月份的第二个星期五，若正好是国家法定假日，则以下一交易日为最后交易日。旧合约最后交易日的下一交易日，新的合约开始交易。比如当日 T2103（21 年 3 月到期的十年期国债期货）合约到了最后交易日，T2106、T2109 会继续交易，而下一个交易日上，新合约 T2212 开始交易。也就是说，对于每个国债期货品种，每个交易日上始终有 3 个合约在进行交易。在交易期过后，若仍持有未平仓合约，则将进入交割期，与一篮子可交割券进行交割。

一般来说，一个合约在到期前 4 个月至到期前 1 个月会成为成交量最大的合约，称为主力合约。这是因为到最后一个月份的时候，很多以对冲、套期保值为目的的机构并不想进入最后的现券交割，而是想继续持有国债期货，那么就会开始进行移仓换月，将目前的头寸换到更晚交割的合约上，导致旧券的成交量变小。还是以 T2103 为例，在 20 年 12 月-21 年 2 月的时候基本会是主力合约，下一个合约 T2106 作为远月合约，等到了 21 年 2 月 T2106 就会取代 T2103 成为新的主力合约。而券商给出的期权场外报价的标的基本都是主力合约（或者期权到期时是主力合约），考虑到主力合约和非主力合约的波动率有较大差距，我们的数据以成交量最大为原则，进行主力合约的拼接，用拼接好的主力合约价格进行波动率参数的估计。

3.3.2 国泰君安报价数据

我们采用的是国泰君安的报价数据，国泰君安每天都会针对 TS、TF 和 T 分别给出以此为基础的欧式看涨期权和欧式看跌期权报价。比如下面分别是 2022 年 11 月 22 日和 2022 年 12 月 14 日的报价情况：

	Call						Put					
	ATM-0.5		ATM		ATM+0.5		ATM-0.5		ATM		ATM+0.5	
	bid	ofr	bid	ofr	bid	ofr	bid	ofr	bid	ofr	bid	ofr
1M	41.0	62.0	10.0	16.0	0.5	1.0	0.5	2.0	10.0	21.0	41.0	85.0
3M	45.0	67.0	17.0	27.0	4.0	7.0	4.0	9.0	18.0	37.0	46.0	92.0

图 3-1 11 月 22 日 TS 期权报价

	Call						Put					
	ATM-0.5		ATM		ATM+0.5		ATM-0.5		ATM		ATM+0.5	
	bid	ofr	bid	ofr	bid	ofr	bid	ofr	bid	ofr	bid	ofr
1M	41.0	62.0	10.0	16.0	0.5	1.0	0.5	2.0	10.0	21.0	41.0	85.0
3M	45.0	66.0	17.0	27.0	4.0	7.0	4.0	9.0	18.0	37.0	46.0	92.0

图 3-2 12 月 14 日 TS 期权报价

	Call						Put					
	ATM-0.5		ATM		ATM+0.5		ATM-0.5		ATM		ATM+0.5	
	bid	ofr	bid	ofr	bid	ofr	bid	ofr	bid	ofr	bid	ofr
1M	53.0	69.0	25.0	32.0	8.0	11.0	8.0	17.0	25.0	46.0	55.0	99.0
3M	71.0	87.0	43.0	54.0	25.0	31.0	25.0	44.0	43.0	78.0	70.0	125.0

图 3-3 11 月 22 日 TF 期权报价

	Call						Put					
	ATM-0.5		ATM		ATM+0.5		ATM-0.5		ATM		ATM+0.5	
	bid	ofr	bid	ofr	bid	ofr	bid	ofr	bid	ofr	bid	ofr
1M	53.0	69.0	25.0	32.0	8.0	11.0	8.0	17.0	25.0	46.0	55.0	99.0
3M	71.0	87.0	43.0	54.0	25.0	31.0	25.0	44.0	43.0	78.0	70.0	125.0

图 3-4 12 月 14 日 TF 期权报价

	Call						Put					
	ATM-0.5		ATM		ATM+0.5		ATM-0.5		ATM		ATM+0.5	
	bid	ofr	bid	ofr	bid	ofr	bid	ofr	bid	ofr	bid	ofr
1M	65.0	83.0	38.0	49.0	20.0	26.0	20.0	35.0	38.0	68.0	65.0	118.0
3M	93.0	114.0	68.0	83.0	48.0	58.0	49.0	83.0	68.0	116.0	93.0	161.0

图 3-5 11 月 22 日 T 期权报价

	Call						Put					
	ATM-0.5		ATM		ATM+0.5		ATM-0.5		ATM		ATM+0.5	
	bid	ofr	bid	ofr	bid	ofr	bid	ofr	bid	ofr	bid	ofr
1M	65.0	83.0	38.0	49.0	20.0	26.0	20.0	35.0	38.0	68.0	65.0	118.0
3M	93.0	114.0	68.0	83.0	48.0	58.0	48.0	83.0	68.0	116.0	93.0	161.0

图 3-6 12 月 14 日 T 期权报价

图上的列索引中第一行 Call、Put 用于区分看涨和看跌期权；第二行区分不同的期权行权价，其中 ATM 表示上一个交易日的收盘价；第三行表示 bid 和 offer 报价区分；行索引表示到期时间的不同，分为一个月到期和三个月到期，记为 1M 和 3M。此外，国泰君安给出的报价以 bp 作为单位。仔细对比这间隔了大半个月的报价发现，只有两个位置出现了 1 个 bp 的价格变动，分别是 11 月 22 日标的为 TS，行权价为 ATM-0.5，到期时间为 3M 的看涨期权的 ofr 报价为 67；12 月 14 日变成了 66；11 月 22 日标的为 T，行权价为 ATM-0.5，到期时间为 3M 的看跌期权的 bid 报价为 49，12 月 14 日变成了 48，其余报价在两天上是完全一致的。

因为我们用模型定价只能给出一个确定的价格，需要做对冲情景测试以后才能给出 bid 和 ofr，因此目前考虑用报价中 bid 和 ofr 的中间价来作为一个参考。但需要注意的是，期权的买方和卖方承担的风险是不同的，因此 ofr 报价肯定比 bid 报价要留出更大的宽容度。所以这个报价所蕴含的公允价格其实比中间价略低一些。而且由于 bid 和 ofr 报价比较宽，所以这个偏差是一定存在的。

脱离于国债期货价格过程的模型假设，完全基于无套利原则，假设利率是常数 r ，记当前国债期货价格为 F_0 ，相同执行价 K 和到期时间 T 的的欧式看涨期权 c 和看跌期权 p 有如下平价公式：

$$c - p = F_0 e^{-rT} - K e^{-rT}.$$

对应到国泰君安的报价上，行权价为 ATM 的期权，因为 $F_0 = ATM$ ，因此看涨看跌期权的价值从公式上说应该是一样的。而从报价上可以看到，行权价为 ATM 的看涨和看跌期权的 bid 报价确实几乎一致，但是看跌期权的 ofr 报价明显比看涨期权更高，且高出不少。这应该是看跌期权的卖方相比于看涨期权的卖方需要承担更大的风险导致的，所以其实也可以看到看跌期权 bid 和 ofr 的价差普遍大于看涨期权，这就导致用看跌期权的中间价作看跌期权定价参考会对价格做出极大高估。因此我们做实证的时候主要还是对看涨期权定价，然后用看涨期权的中间价作为价值参考，虽然这其实也会高估价格。

3.3.3 Black 模型对欧式期权定价

假设利率为常数 r ，到期时间为 T ，国债期货当前价格为 F_0 ，期权执行价为 K ，波动率为 σ ， $N(\cdot)$ 表示标准正态分布的分布函数，根据 Black 模型，欧式看涨期权价格有如下显式

解：

$$c = e^{-rT} [F_0 N(d_1) - K N(d_2)],$$

其中，

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{F_0}{K}) + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

这里有两个参数需要确定，一个是利率 r ，还有一个是国债期货的波动率 σ ，对于利率 r ，观察了一下中国外汇交易中心网站国债即期收益率曲线，简单取 $r = 0.02$ ，其实因为期权的期限都很短， r 取得不同比如取 $r = 0.03$ ，对剩余期限 3M 的期权定价的影响也最多只有 0.1 个 bp 左右，所以这里无需太计较。

而对于波动率参数 σ ，采用如下方法进行估计：每日观察国债期货的收盘价，记日收盘价序列为 $S_i, i = 0, \dots, n$ ，一年约 250 个交易日，因此两个交易日之间的时间间隔记为 $\tau = 1/250$ ，令

$$u_i = \ln \frac{S_i}{S_{i-1}}, i = 1, \dots, n.$$

则日波动率的估计值为 u_i 的标准差

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2}.$$

因此年化波动率的估计值为 $\hat{\sigma} = \frac{s}{\sqrt{\tau}}$ 。考虑到一方面，数据越多，估计的精度就越高；另一方面， σ 其实会随着时间变化，太久远的历史数据不适合用来预测未来的波动率，因此平衡了一下，采用过去半年的历史数据来做 σ 的估计。

因此可以给出 Black 模型下在 11 月 22 日和 12 月 14 日上，行权价、到期时间与国泰君安报价一致的期权价格如下。

	Call			Put		
	ATM-0.5	ATM	ATM+0.5	ATM-0.5	ATM	ATM+0.5
1M	49.795567	10.808930	0.368501	0.358372	10.808930	49.805697
3M	52.762127	18.659304	3.542498	3.489448	18.659304	52.815177

图 3-7 11 月 22 日 TS 期权定价

	Call			Put		
	ATM-0.5	ATM	ATM+0.5	ATM-0.5	ATM	ATM+0.5
1M	50.236798	11.969668	0.620591	0.605442	11.969668	50.251947
3M	54.131216	20.663066	4.730128	4.665023	20.663066	54.196321

图 3-8 12 月 14 日 TS 期权定价

	Call			Put		
	ATM-0.5	ATM	ATM+0.5	ATM-0.5	ATM	ATM+0.5
1M	55.932147	23.238556	6.432891	6.352552	23.238556	56.012485
3M	69.483833	40.116301	20.245796	20.069228	40.116301	69.660400

图 3-9 11 月 22 日 TF 期权定价

	Call			Put		
	ATM-0.5	ATM	ATM+0.5	ATM-0.5	ATM	ATM+0.5
1M	56.356830	23.750727	6.776808	6.693377	23.750727	56.440260
3M	70.324168	41.000448	21.007611	20.825984	41.000448	70.505794

图 3-10 12 月 14 日 TF 期权定价

	Call			Put		
	ATM-0.5	ATM	ATM+0.5	ATM-0.5	ATM	ATM+0.5
1M	67.763834	37.622607	17.848247	17.684340	37.622607	67.927742
3M	92.776636	64.946931	43.174631	42.863795	64.946931	93.087472

图 3-11 11 月 22 日 T 期权定价

	Call			Put		
	ATM-0.5	ATM	ATM+0.5	ATM-0.5	ATM	ATM+0.5
1M	69.040517	39.061590	19.097838	18.925828	39.061590	69.212527
3M	95.165745	67.430971	45.541858	45.217827	67.430971	95.489777

图 3-12 12 月 14 日 T 期权定价

我们可以看到, 11月22日和12月14日上的定价普遍有1-2个bp的差别, 这基本就是因为波动率参数的不同导致的。而国泰君安11月22日和12月14日的报价几乎没有差别, 一个猜想是可能用了更久的历史波动率, 因此尝试了一下用过去一年的数据来估计波动率, 结果发现11月22日和12月14日上的定价还是有不少差别, 这点上需要留作一个疑问, 因为不管是Black模型, 或是Monte Carlo方法, 做波动率参数的方式是一致的, 这就造成相隔半个月的定价总是会有些差别, 然而国泰君安的报价却没什么变化。先抛开这一点, 下面就只看11月22日的定价, 将Black模型的定价和国泰君安报价bid、off的中间价进行对比如下:

	Call			Put		
	ATM-0.5	ATM	ATM+0.5	ATM-0.5	ATM	ATM+0.5
1M	49.795567	10.808930	0.368501	0.358372	10.808930	49.805697
3M	52.762127	18.659304	3.542498	3.489448	18.659304	52.815177

图 3-13 TS 期权定价

	Call			Put		
	ATM-0.5	ATM	ATM+0.5	ATM-0.5	ATM	ATM+0.5
1M	51.5	13.0	0.75	1.25	15.5	63.0
3M	56.0	22.0	5.50	6.50	27.5	69.0

图 3-14 国泰君安 TS 期权报价中间价

	Call			Put		
	ATM-0.5	ATM	ATM+0.5	ATM-0.5	ATM	ATM+0.5
1M	55.932147	23.238556	6.432891	6.352552	23.238556	56.012485
3M	69.483833	40.116301	20.245796	20.069228	40.116301	69.660400

图 3-15 TF 期权定价

	Call			Put		
	ATM-0.5	ATM	ATM+0.5	ATM-0.5	ATM	ATM+0.5
1M	61.0	28.5	9.5	12.5	35.5	77.0
3M	79.0	48.5	28.0	34.5	60.5	97.5

图 3-16 国泰君安 TF 期权报价中间价

	Call			Put		
	ATM-0.5	ATM	ATM+0.5	ATM-0.5	ATM	ATM+0.5
1M	67.763834	37.622607	17.848247	17.684340	37.622607	67.927742
3M	92.776636	64.946931	43.174631	42.863795	64.946931	93.087472

图 3-17 T 期权定价

	Call			Put		
	ATM-0.5	ATM	ATM+0.5	ATM-0.5	ATM	ATM+0.5
1M	74.0	43.5	23.0	27.5	53.0	91.5
3M	103.5	75.5	53.0	66.0	92.0	127.0

图 3-18 国泰君安 T 期权报价中间价

首先, 就像之前说的, 由于期权买卖双方承担的风险不一样, 所以国泰君安报价的中间价比其内涵定价更高, 在看跌期权上尤甚, 偏离得会很严重。因此我们就单看看涨期权, 从图中可以看到, 看涨期权的Black模型定价也明显小于国泰君安报价的中间价, 有些甚至小了10个bp (标的为T, 到期时间3M的期权), 这是不能用国泰君安报价的中间价比内涵定价高来解释的, 因为可以看到比如标的为T, 行权价格为 $ATM - 0.5$, 到期时间为3M的看涨期权在Black模型下的定价为92.78, 而国泰君安相应的bid报价就有93, 已经超过了92.78。所以可以看到国泰君安的定价确实比采用上述方法的Black模型定价高, 因此下面采用我们之前做出的Monte Carlo格式来进行定价, 来考察是不是因为模型问题导致Black模型的定价相比国泰君安报价偏低。

3.3.4 Monte Carlo 方法对欧式期权定价

我们在3.2中提出了两种格式, 第一种是国债期货和利率共用一个随机驱动下的国债期货期权定价, 第二种是国债期货和利率采用不同随机驱动下的国债期货期权定价。第一种

格式下要求我们对国债期货在真实世界中的收益率进行估计。下图是十年期国债期货 T 的主力合约在过去 1 年上的收盘价变动。



图 3-19 T 主力合约价格

从中可以看出，对收益率的估计非常依赖于我们的回看时间，会有很大偏误，因此虽然收益率的估计参数只需要用在模拟利率过程 R 上，我们还是决定放弃第一种格式的实证，只做第二种格式，即国债期货和利率采用不同随机驱动下的国债期货期权定价的实证研究。

这里国债期货的波动率参数的估计和 Black 模型完全一样，主要是对利率过程进行参数估计。由于在 Vasicek 模型下，零息债券的具体价格为：

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)R(t)},$$

其中

$$A(t, T) = \exp \left\{ \left(\theta - \frac{\sigma^2}{2k^2} \right) [B(t, T) - T + t] - \frac{\sigma^2}{4k} B(t, T)^2 \right\},$$

$$B(t, T) = \frac{1}{k} [1 - e^{-k(T-t)}].$$

而我们可以查到中国外汇交易中心网站公布的在期权定价前一天的国债即期收益率曲线如下：

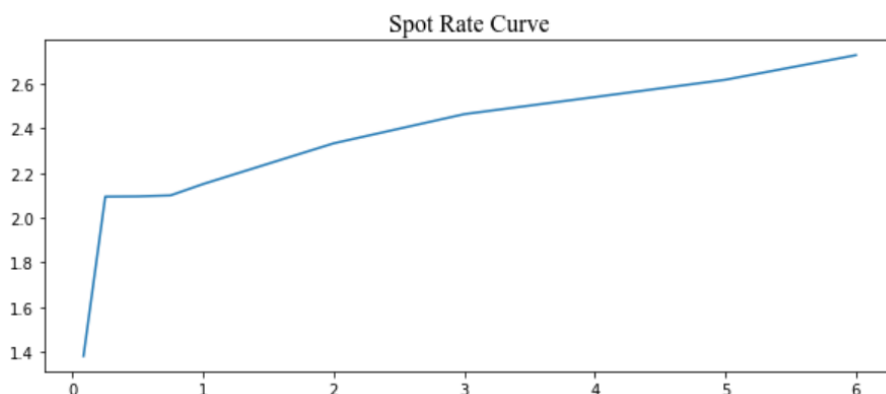


图 3-20 11 月 21 日国债即期收益率曲线

从而我们可以得到对于不同到期时间的真实贴现债券价格 $P(0, T_i)$, $i = 1, \dots, n$ ，而我们又上面关于参数的贴现债券价格 $P(0, T_i, k, \theta, \sigma_R)$ ，因此就采用优化包进行如下优化求参

数:

$$\arg \min \sum_{i=1}^n (P(0, T_i) - P(0, T_i, k, \theta, \sigma_R))^2.$$

参数结果为 $k = 1.000$, $\theta = 0.029$, $\sigma_R = 0.01$ 。

根据3.2.3小节的结果, 我们做的离散格式为

$$\begin{cases} F(t_{i+1}) = F(t_i) \times \exp \left\{ (k_M R(t_i) - \frac{1}{2} \sigma_F^2)(t_{i+1} - t_i) + \sigma_F \sqrt{t_{i+1} - t_i} Z_i^1 \right\}, \\ R(t_{i+1}) = R(t_i) e^{-k(t_{i+1} - t_i)} + \theta [1 - e^{-k(t_{i+1} - t_i)}] + \sigma_R \sqrt{\frac{1}{2k} [1 - e^{-2k(t_{i+1} - t_i)}]} Z_i^2. \end{cases}$$

这里 Z_i^1 和 Z_i^2 都是独立正态分布的抽样。把参数带进去计算即可, 需要注意的是十年期国债期货的保证金是 2%, 五年期国债期货保证金是 1%, 两年期国债期货保证金是 0.5%。此外离散的时候做成了 50 个时间间隔 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{50}$, 模拟了 10^5 根轨道。欧式看涨期权的价格就是

$$c = E \left[e^{-\int_0^T R(t) dt} (F(t_{50}) - K)^+ \right].$$

因此我们的模拟定价结果为

$$c = \sum_{j=1}^{10^5} \left[e^{-\sum_{i=1}^{50} R_j(t_i)(t_{i+1} - t_i)} (F_j(t_{50}) - K)^+ \right].$$

这里在 python 中用矩阵方式进行计算, 虽然模拟轨道数多, 但是计算速度还是很快的, 1 秒内可以出来全部报价结果。

而我们用 Monte Carlo 方法的定价结果和 Black 模型定价结果对比如下:

	Call			Put		
	ATM-0.5	ATM	ATM+0.5	ATM-0.5	ATM	ATM+0.5
1M	49.795567	10.808930	0.368501	0.358372	10.808930	49.85697
3M	52.762127	18.659304	3.542498	3.489448	18.659304	52.815177

图 3-21 TS 期权定价 Black 模型

	Call			Put		
	ATM-0.5	ATM	ATM+0.5	ATM-0.5	ATM	ATM+0.5
1M	49.915459	10.799518	0.383026	0.376210	10.772227	49.659213
3M	52.750796	18.871456	3.599857	3.573107	19.024069	52.621928

图 3-22 TS 期权定价 Monte Carlo 方法

	Call			Put		
	ATM-0.5	ATM	ATM+0.5	ATM-0.5	ATM	ATM+0.5
1M	55.932147	23.238556	6.432891	6.352552	23.238556	56.012485
3M	69.483833	40.116301	20.245796	20.069228	40.116301	69.660400

图 3-23 TF 期权定价 Black 模型

	Call			Put		
	ATM-0.5	ATM	ATM+0.5	ATM-0.5	ATM	ATM+0.5
1M	56.579743	23.461843	6.420807	6.231583	23.560327	55.548945
3M	68.512929	40.103374	20.107249	21.055914	40.164081	69.533784

图 3-24 TF 期权定价 Monte Carlo 方法

	Call			Put		
	ATM-0.5	ATM	ATM+0.5	ATM-0.5	ATM	ATM+0.5
1M	67.763834	37.622607	17.848247	17.684340	37.622607	67.927742
3M	92.776636	64.946931	43.174631	42.863795	64.946931	93.087472

图 3-25 T 期权定价 Black 模型

	Call			Put		
	ATM-0.5	ATM	ATM+0.5	ATM-0.5	ATM	ATM+0.5
1M	66.903203	38.640239	18.222531	17.908756	36.723220	68.073560
3M	93.190669	64.022525	42.859043	42.941234	65.729828	93.741538

图 3-26 T 期权定价 Monte Carlo 方法

从结果来看, 虽然我们用风险中性定价框架做出了理论, 模拟了利率过程, 考虑了保证金, 采用了 Monte Carlo 方法, 但是这和 Black 模型的定价结果竟然相差无几, 理论上看来

个结果会略高于 Black 模型的结果，因为我们考虑了保证金的风险中性测度下的国债期货价格过程比没有考虑保证金的价格过程多了 $k_M R(t) dt$ 这一项，但从模拟结果看这高的程度几乎可以忽略，这是合理的，因为本身保证金比例和利率就非常低，期权的到期时间又短，因此这项起到的作用非常小。总得来说，我们的模型对欧式期权的定价结果仍然低于国泰君安报价。根据详细的询问探索后得知，国泰君安要求客户支付全额保证金才能向其卖出期权，因此 bid 报价也偏高。

3.3.5 美式期权定价

我们采用 BAW 模型和在欧式期权的 Monte Carlo 方法上加入 Longstaff Schwartz 方法分别做美式期权定价。

BAW 模型是一个可以直接计算出来的对美式期权价格的近似。由 Barone-Adesi, Whaley[19] 提出，这是基于 Black 模型的美式期货期权定价的近似格式，其结果如下：记标的为期货合约的美式看涨期权（期货现价为 F ，期权行权价为 X ）的价格为 $C(F, X)$ ，记同样到期日，同样执行价的欧式看涨期权价格为 $c(F, X)$ ，记到期日为 T ，无风险利率为 r ，则有：

$$\begin{cases} C(F, X) = c(F, X) + A_1 \left(\frac{F}{F^*} \right)^{q_1}, & F < F^*, \\ C(F, X) = F - X, & F > F^*. \end{cases}$$

其中，

$$\begin{aligned} A_1 &= \left(\frac{F^*}{q_1} \right) [1 - e^{-rT} N(d_1(F^*))], \\ d_1(F^*) &= \frac{\ln\left(\frac{F}{X}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}, \\ q_1 &= \left(1 + \sqrt{1 + \frac{8r}{\sigma^2(2 - e^{-rT})}} \right) / 2. \end{aligned}$$

F^* 作为立即行权的边界，满足如下方程，可以通过迭代求解：

$$F^* - X = c(F^*, X) + [1 - e^{-rT} N(d_1(F^*))] \left(\frac{F^*}{q_1} \right).$$

而 Longstaff Schwartz 方法非常经典，在业界应用广泛，其想法也并不复杂，这里简单进行叙述。首先不妨我们根据之前的离散格式，离散时间点为 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m$ ，模拟期货价格的 b 条轨道如下， $F_{11}, F_{21}, \dots, F_{m-1,1}, F_{m,1}$ 表示在第一条轨道上离散时间点 t_1, t_2, \dots, t_m 上的期货价格，其他轨道上同理。

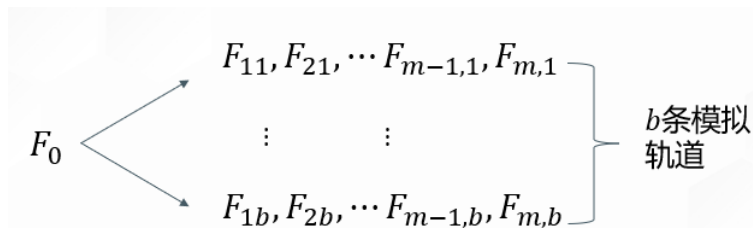


图 3-27 模拟轨道

本来美式期权可以在任意时间点上行权,现在把问题简化成了只能在离散时间点 t_1, \dots, t_m 上行权。

核心思路是想要在每个离散时间点上 t_i 上, 做出价格 $F = x$ 时不行权的看跌期权价值函数 $C_i(x)$, 那么 $t = t_i, F = x$ 时的美式看涨期权价值就是

$$V_i(x) = \max \{ (x - K)^+, C_i(x) \},$$

其中 K 为行权价。事实上,

$$C_i(x) = E \left[e^{-R_i(t_{i+1}-t_i)} V_{i+1}(X_{i+1}) | X_i = x \right]. \quad (3.9)$$

这能自然构成一个从 t_m 时刻逐步往前递推的结果, t_m 时刻的期权价值函数是确定的 $V_m(x) = (x - K)^+$ 。唯一的问题在于按寻常的办法做式 (3.9) 的模拟, 比如站在第一条轨道上的 t_{m-1} 时刻, 此时期货价格为 $F_{m-1,1}$, 那还需要再模拟很多次的 t_m 时刻的期货价格, 才能求期望 (3.9)。这样每个点上都得做很多分支, 会导致整个模拟开销指数级增长, 这肯定是不行的。

因此 Longstaff, Schwartz 想出了一种基于当前模拟轨道的方法: 我们要拟合的式 (3.9) 其实就是一个 $E[Y|x]$ 函数, 比如在 t_{m-1} 时刻, 我们有 b 个样本如下:

$$\begin{pmatrix} F_{m-1,1} & e^{-R_{m-1,1}\Delta t}(S_{m,1} - K)^+ \\ \dots & \dots \\ F_{m-1,b} & e^{-R_{m-1,b}\Delta t}(S_{m,b} - K)^+ \end{pmatrix}$$

\uparrow x
 \uparrow Y

图 3-28 t_{m-1} 时刻的 b 个样本

因此 $C_i(x)$ 就可以用回归函数去拟合。回归的解释变量是一组关于 x 的确定性函数 $\psi(x) = (\psi_1(x), \dots, \psi_k(x))$, 一般简单取成 $\psi(x) = (1, x, \dots, x^{k-1})$, 这里可以用神经网络拟合, 也可以就做线性回归拟合。

从而整个算法总结如下:

1. 在最终时刻 t_m , $V_{m,j} = (F_{m,j} - K)^+, j = 1, \dots, b$;
2. 关于 $(\psi(F_{m-1,j}), e^{-R_{m-1,j}} V_{m,j}), j = 1, \dots, b$ 做线性回归, 求得 $C_{m-1}(x)$;
3. 往回走一步, 计算 $V_{m-1,j} = \max \{ (F_{m-1,j} - K)^+, C_{m-1}(F_{m-1,j}) \}, j = 1, \dots, b$. 然后回 2 进行循环;
4. $C_0 = e^{-R_0\Delta t}(\frac{1}{b} \sum_{j=1}^b V_{1,j})$ 为所求美式看涨期权价格。

下面展示两种方法下的美式期权的定价结果, Longstaff Schwartz 方法的解释变量采用 $\psi(x) = (1, x, \dots, x^4)$ 做线性回归, 这里只做了美式看涨期权的结果。

	Call		
	ATM-0.5	ATM	ATM+0.5
1M	50.173350	11.170971	0.696757
3M	53.798143	19.646865	4.450013

图 3-29 TS 美式看涨期权定价 BAW 模型

	Call		
	ATM-0.5	ATM	ATM+0.5
1M	51.438167	12.791659	0.992102
3M	54.597553	21.529274	5.282787

图 3-30 TS 美式看涨期权定价 Monte Carlo 方法

	Call		
	ATM-0.5	ATM	ATM+0.5
1M	56.678588	23.971153	7.140709
3M	71.694746	42.277343	22.340138

图 3-31 TF 美式看涨期权定价 BAW 模型

	Call		
	ATM-0.5	ATM	ATM+0.5
1M	58.434740	27.630972	9.148114
3M	75.427921	43.798316	26.182884

图 3-32 TF 美式看涨期权定价 Monte Carlo 方法

	Call		
	ATM-0.5	ATM	ATM+0.5
1M	69.360242	39.192143	19.384136
3M	97.510944	69.594963	47.726823

图 3-33 T 美式看涨期权定价 BAW 模型

	Call		
	ATM-0.5	ATM	ATM+0.5
1M	72.424660	43.506274	22.671363
3M	102.324386	73.090320	53.440937

图 3-34 T 美式看涨期权定价 Monte Carlo 方法

可以看到两种模型的结果还是有一定差异，用 Monte Carlo 加 Longstaff Schwartz 方法定出来的价格高于 BAW 模型的定价，理论上来说应该是这种方法更加准确。也可以看到相比于同等其他条件的欧式期权，美式期权的定价会更高，有一些剩余期限为 3M 的地方高了近 10 个 bp，直觉上看来这是合理的。

3.4 本章总结

在本章中，我们考虑了利率的随机性和国债期货保证金的问题，做出了适用与国债期货期权的定价格式。从结果而言，我们的定价格式相比与 Black 模型对欧式期权定价质量的改善并不显著，但是相比 BAW 模型对美式期权定价质量确有一定幅度的改变，由于无法获得场外美式期权报价数据，且即便可以获取，从我们的实证研究中也发现场外报价因为流动性和规则的原因，无法作为可靠的参考，因此暂时不能确认这种定价质量的改变是否是提升。

第 4 章 加入随机波动率和价格过程带跳的国债期货期权定价

回顾本文的第一个目标，是允许利率随机性并解决国债期货价格分布不服从几何布朗运动假设的问题，做出适用于国债期货期权的定价框架。而在上一章中，受制于目前国内并不存在国债期权场内交易，而场外报价由于流动性和规则原因无法成为足够公平的价格依据。具体而言，一方面，流动性原因导致报价的买卖价差非常宽，另一方面，目前券商的规则会要求向其卖出期权的对手方支付全额保证金，这种规则会直接导致理论定价中基于确定保证金比例的假设失效，从而理论结果与实际有较大偏差。除此之外，场外报价所基于的不同行权价也非常稀少，不像场内期权市场上基于每个标的在很多不同行权价上都有活跃的交易。因此在国内市场上做国债期货期权定价研究的时候，不适用通过指定复杂的模型结构，用期权实际交易价格拟合模型参数的方法来进行定价，因此我们的定价模型只允许了利率的随机性，且对国债期货价格分布的假设仍然采用几何布朗运动。

而我们接下来打算采用美国 CME 交易所场内国债期权数据来进行实证研究，因此对模型的容忍度完全可以放宽，基于这一点，通过在模型中引入随机波动率和跳，来解决国债期货价格对数收益率相对于正态分布的偏度和峰度的问题，从而彻底实现我们的第一个目标。在给出定价模型的基础上，我们自然关注所放宽的假设，无论是随机波动率、跳或是随机利率，相比于 BS 模型对期权的定价质量带来何种程度以及什么意义上的提升。因此在这一方向会展开详细的实证研究。

4.1 定价模型

从过往大量的期权定价研究文献来看，每一个定价模型都是由三个方面来确定的：标的资产价格过程的指定、利率过程的指定和风险的市场价格。其中风险的市场价格并不是随意指定的，我们可以在之前 3.1 的推导中看到，我们的做法就是特地去找使得仅投资于标的和货币账户的自融资组合的贴现财富的测度作为风险中性测度。而对于标的资产价格过程的指定，本身就有许多种方案，首先几乎所有文献都采用马尔可夫过程，但再进一步，关于采用连续型马尔可夫过程或是离散型马尔可夫过程就有了不同的选择。比如我们最常见的几何布朗运动假设，就是一个特殊的连续型马尔可夫过程。而最基础的离散型马尔可夫过程就是我们熟悉的二叉树模型。虽然几何布朗运动经常会因为实际资产收益率相对于正态分布的偏度和峰度证据受到批评，但因为它非常实用，即便到今天也一直被国际上的金融机构拿来根据它做出隐含波动率曲面从而进行期权定价。也正因此，过往文献研究都是以几何布朗运动为基础进行一些宽松化的扩展，比如允许波动率的随机性和允许过程带跳。而对于纯跳项，最基础的纯跳过程就是泊松过程，但是泊松过程的跳跃幅度始终为 1，因此更加合理的是引入跳跃幅度独立且服从特定分布的复合泊松过程来刻画纯跳项。基于这些考虑，本节首先给出一个规范的定价模型，它刻画标的价格过程的方式就是在几何

布朗运动的基础上加入波动率的随机性和用复合泊松过程构建的纯跳项，另外允许利率的随机性。之后仅仅考虑随机利率、随机波动率和跳三者中的一个或两个的模型，就是我们所做规范模型的特殊形式，将不需要部分的参数设定为 0 即可。

首先要对随机波动率和带跳的引入进行阐述。如果将市场上期权价格代入 BS 模型求解波动率，将会观察到这样求得的隐含波动率呈现出“波动率微笑”。也就是说，隐含波动率在行权价深度实值和深度虚值的两端明显较大，而在行权价接近当前标的的价格的时候较小。出现这种情况的根本原因是 BS 模型假定资产价格服从几何布朗运动，因此解出资产的对数收益率服从正态分布，而大量经验证据表明市场实际收益率分布呈现尖峰厚尾的特点，也就是极端事件出现的概率要更大一些，这就是 BS 模型的局限性，也是“波动率微笑”出现的本质原因。因此做改进模型的一个动力就是把“波动率微笑”内化到模型中去，希望模型所决定的收益率分布相对于正态分布来说具有尖峰厚尾性质。另一方面，Bates[39]指出，自 1987 年美股崩盘以来，美国股指期货价格收益率的显著且持续的负偏度开始引起关注，因此后来的期权定价模型也追求将收益率的负偏度内化到模型中。基于这些考虑，加入随机波动率和跳本质上来说就是为了使得标的资产的偏度和峰度具有可调节性。

为了更具体地说明随机波动率和跳如何发挥作用，我们来基于一个最一般化的过程假设进行解释，假设在现实世界测度下，标的资产的价格，随机波动率和随机利率分别服从如下过程：

$$\begin{cases} dS(t) = \mu_S(S(t))S(t)dt + \sqrt{V(t)}S(t)dW_S(t) + S(t-)\mathbf{d}Q(t), \\ dV(t) = \mu_v(V(t))dt + \sigma_v(V(t))dW_v(t), \\ dR(t) = \mu_R(R(t))dt + \sigma_R(R(t))dW_R(t), \end{cases} \quad (4.1)$$

其中 $Q(t)$ 是一个补偿复合泊松过程，基于定理 2.4，补偿复合泊松过程是鞅，这种写法只是为了让跳跃部分也保持鞅性，其实也可以换一种写法，假设 $Q^0(t)$ 是强度为 λ ，独立同分布随机变量均值为 β 的复合泊松过程，那么标的资产的价格过程就建模成

$$dS(t) = (\mu_S(S(t)) - \lambda\beta)S(t)dt + \sqrt{V(t)}S(t)dW_S(t) + S(t-)\mathbf{d}Q^0(t).$$

这与式 (4.1) 中的标的资产价格过程是完全等价的，只是这里的 $Q^0(t)$ 是纯跳项，而式 (4.1) 中的 $\mathbf{d}Q(t) = \mathbf{d}Q^0(t) - \lambda\beta dt$ ，把 dt 项并入来使得跳过程 $Q(t)$ 和布朗运动一样具有鞅性，好处是根据定理 2.5，关于鞅的跳过程的随机积分也是鞅，这在计算中会带来方便。

此外，这三个布朗运动被允许具有相关性。这里 $W_v(t)$ 和 $W_S(t)$ 之间的相关性可以被用来捕捉偏度上的修正，而波动率过程 $V(t)$ 本身也可以被用来捕捉峰度上的修正。Bakshi[40]指出，因为随机波动率只允许遵循连续的样本路径，困难以内化足够的短期峰度。而加入离散的跳跃就可以帮助弥补这一缺陷，更灵活地内化实际收益率分布的特征。基于以上这些考虑，本文给出的规范模型同时纳入了随机波动率和跳。

至于加了跳具体怎么对收益率分布产生影响，我们来简单与几何布朗运动进行对比。

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dW(t). \quad (4.2)$$

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) + S(t-)\mathbf{d}Q(t). \quad (4.3)$$

式(4.2)和式(4.3)分别是几何布朗运动和在几何布朗运动的基础上加跳的资产价格过程。式(4.2)的解为

$$\ln S(t) = \ln S(0) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t).$$

式(4.3)的解为

$$\ln S(t) = \ln S(0) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t) + \left[\sum_{i=1}^{N(t)} \ln(Y_i + 1) - \lambda\beta t \right].$$

我们可以看到对数收益率 $\ln S(t) - \ln S(0)$ 相对于正态分布的偏度和峰度的修正就是由跳带来的 $\sum_{i=1}^{N(t)} \ln(Y_i + 1)$ 贡献的。

下面就将具体来做规范的定价模型。还是和3.1一样，从现实世界测度出发，寻找风险中性测度使得所有基于货币账户和标的资产的自融资组合的贴现在该测度下是鞅。进一步得到风险中性测度下资产的价格过程后我们会发现，我们已不再需要从现实世界测度下估计任何参数，可以直接在风险中性测度下进行模型校准和定价。而联系现实世界测度和风险中性测度的风险的市场价格直接被蕴含在了风险中性测度下的模型中。但是和3.1不同的地方在于，这里我们会在一族风险中性测度下给出模型，之所以说是一族风险中性测度，是因为目前的随机性不仅由布朗运动带来，还由跳带来，导致满足风险的市场价格方程的风险中性测度并不唯一，它们会给出衍生品的不同价格，所以我们的模型给出的也是一族风险中性测度下的资产价格、波动率和利率过程。在实际应用中，当然只会从中选一个风险中性测度来进行定价，具体选哪个取决于模型基于市场期权价格的校准结果。

虽然最后我们会在风险中性测度下完成一切，但初衷是在现实测度下，我们有用随机波动率和跳来内化实际资产收益率分布偏度和峰度的需求，因此是严格从现实世界测度下对资产价格过程的假设出发，最终得到风险中性测度下价格过程的结构。下面将对此进行推导，我们的标的是国债期货，所以还是用 $F(t)$ 来表示期货的价格过程。

记 T 为衍生品的行权时间，设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 是现实世界测度下的概率空间， $\mathcal{F}(t), t \geq 0$ 是该空间上的一个域流。 $\{W(t), 0 \leq t \leq T\}$ 是 $\mathcal{F}(t)$ 相关的布朗运动， $\{Q(t), 0 \leq t \leq T\}$ 是 $\mathcal{F}(t)$ 相关的强度为 λ ，跳跃幅度均值为 β ，概率密度为 $f(y)$ 的复合泊松过程，也就是满足：

$$Q(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, 0 \leq t \leq T,$$

其中 $N(t)$ 是强度为 λ 的泊松过程， Y_1, Y_2, \dots 是一列概率密度函数为 $f(y)$ 的独立同分布随机变量，均值为 β 。假设国债期货的价格过程服从：

$$dF(t) = \alpha(t)F(t)dt + \sigma(t)F(t)dW(t) + F(t-)(dQ(t) - \lambda\beta dt), 0 \leq t \leq T, \quad (4.4)$$

其中回报率 $\alpha(t)$ 和波动率 $\sigma(t)$ 是 \mathcal{F} -适应的过程，且对 $\forall t$ ， $\sigma(t)$ 几乎必然非 0。假设有适应的利率过程 $R(t)$ ，与3.1中一样定义贴现过程 $D(t) = e^{-\int_0^t R(s)ds}$ ，则

$$dD(t) = -R(t)D(t)dt.$$

还是和3.1中一样，设保证金比例为 k_M ，要寻找风险中性测度 $\tilde{\mathbb{P}}$ ，使得期货和货币账户构成的自融资组合的贴现过程是 $\tilde{\mathbb{P}}$ 下的鞅。记该自融资组合的价格过程为 $X(t), 0 \leq t \leq T$ ，在

任意时刻 t , 不妨设投资于国债期货资产的份额为 $\Delta(t)$, 因为保证金比例为 k_M , 因此就能有 $X(t) - k_M \Delta(t) F(t)$ 投资于货币账户, 则有:

$$dX(t) = \Delta(t) dF(t) + R(t)(X(t) - k_M \Delta(t) F(t)) dt.$$

现在根据跳过程的 Itô-Doeblin 公式, 有:

$$\begin{aligned} D(t)X(t) &= D(0)X(0) + \int_0^t D(s)\Delta(s)F(s) [\alpha(s) - \lambda\beta - k_M R(s)] ds + \int_0^t D(s)\Delta(s)\sigma(s)F(s) dW(s) \\ &\quad + \sum_{0 \leq s \leq t} D(s)\Delta(s) [F(s) - F(s-)] \\ &= D(0)X(0) + \int_0^t D(s)\Delta(s)F(s) [\alpha(s) - k_M R(s)] ds + \int_0^t D(s)\Delta(s)\sigma(s)F(s) dW(s) \\ &\quad + \int_0^t D(s)\Delta(s)F(s-) d(Q(s) - \lambda\beta s). \end{aligned}$$

因此可以改写成微分形式:

$$dD(t)X(t) = D(t)\Delta(t)F(t) [\alpha(t) - k_M R(t)] dt + D(t)\Delta(t)\sigma(t)F(t) dW(t) + D(t)\Delta(t)F(t-) d(Q(t) - \lambda\beta t). \quad (4.5)$$

根据 Girsanov 定理 2.8, 对于指定 $\Theta(t)$, 复合泊松过程的新强度 $\tilde{\lambda}$, 跳跃密度 $\tilde{f}(y)$, 存在新的概率测度 $\tilde{\mathbb{P}}$, 使得在该测度下,

$$\tilde{W}(t) = W(t) + \int_0^t \Theta(s) ds$$

是布朗运动且 $Q(t)$ 是强度为 $\tilde{\lambda}$, 跳跃密度为 $\tilde{f}(y)$ 的复合泊松过程, 记跳跃的期望为 $\tilde{\beta}$ 。这个 $\Theta(t)$, $\tilde{\lambda}$, $\tilde{f}(y)$ 并非全然任意指定, 因为我们要求新测度 $\tilde{\mathbb{P}}$ 是风险中性测度, 也就是说希望 $D(t)X(t)$ 在 $\tilde{\mathbb{P}}$ 下是鞅, 即

$$dD(t)X(t) = D(t)\Delta(t)F(t)\sigma(t) d\tilde{W}(t) + D(t)\Delta(t)F(t-) d(Q(t) - \tilde{\lambda}\tilde{\beta}t). \quad (4.6)$$

比较式 (4.5) 和式 (4.6), 它们右边部分应该相等, 就得到了风险中性测度所受约束, 即

$$\Theta(t) = \frac{\alpha(t) - k_M R(t) - (\lambda\beta - \tilde{\lambda}\tilde{\beta})}{\sigma(t)}.$$

显然风险中性测度并不唯一, 不唯一体现在复合泊松过程的新强度 $\tilde{\lambda}$ 和跳跃密度 $\tilde{f}(y)$ 是可以任意指定的, 而 $\Theta(t)$ 是被它们所决定的。假设 $\tilde{\lambda}$ 和 $\tilde{f}(y)$ 已经指定好了, 那将

$$dW(t) = d\tilde{W}(t) - \frac{\alpha(t) - k_M R(t) - (\lambda\beta - \tilde{\lambda}\tilde{\beta})}{\sigma(t)} dt,$$

代入国债期货的价格过程 (4.4), 得到在 $\tilde{\mathbb{P}}$ 下, 资产的价格过程服从

$$dF(t) = k_M R(t)F(t) dt + \sigma(t)F(t) d\tilde{W}(t) + F(t-) d(Q(t) - \tilde{\lambda}\tilde{\beta}t).$$

再加入随机利率和随机波动率的建模就能得到我们的模型, 随机利率在之前已经讨论过, 本身就该放在风险中性测度下建模, 用市场即期收益率曲线来对此进行校正。而随机波动率显然应该直接在风险中性测度下建模。指定具体模型的时候, 考虑到随机利率和随机波动

率都应该有均值回复的特征，且又都不能为负值，我们又不希望模型参数过多导致过拟合，满足这些要求的最简单模型就是 CIR 模型，因此我们就采用 CIR 模型建模。在一族风险中性测度下，我们最终建立如下规范模型，为了写得更清楚简单，在记号上发生了一些变化，去掉了布朗运动和复合泊松过程参数上面的波浪线，且用 $V(t)$ 来表示波动率的平方过程：

$$\begin{cases} dF(t) = k_M R(t)F(t) dt + \sqrt{V(t)}F(t) dW_F(t) + F(t-) d(Q(t) - \lambda\mu_J t), \\ dV(t) = [\theta_v - k_v V(t)] dt + \sigma_v \sqrt{V(t)} dW_v(t), \\ dR(t) = [\theta_R - k_R R(t)] dt + \sigma_R \sqrt{R(t)} dW_R(t), \end{cases}$$

其中，

- $Q(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$ ， $N(t)$ 是强度为 λ 的泊松过程， $Y_i \sim N(\mu_J, \sigma_J^2)$ ；
- $W_F(t)$ ， $W_v(t)$ ， $W_R(t)$ 是标准布朗运动，且 $Cov(dW_F(t), dW_v(t)) = \rho dt$ ， $W_R(t)$ 与它们独立；
- $k_v, \frac{\theta_v}{k_v}, \sigma_v$ 分别是波动率过程的调整速度、长期均值和波动率参数； $k_R, \frac{\theta_R}{k_R}, \sigma_R$ 分别是利率过程的调整速度、长期均值和波动率参数。

需要说明的是，我们将复合泊松过程中刻画跳跃幅度的独立同分布随机变量建模成标准正态分布，因为它简单且合理；另外和第3章最终采用的定价模型一样，让利率过程的随机驱动独立于其他随机驱动，这样我们的规范模型中一共有 $\lambda, \mu_J, \sigma_J, \theta_v, k_v, \sigma_v, \theta_R, k_R, \sigma_R, \rho$ 这 10 个参数，注意 k_M 是国债期货的保证金比例，是个确定的常数。我们将这个规范模型称为 SVSII 模型。而它的特殊版本，仅包含随机波动、随机利率和跳中的一个或两个，就对应分别命名为 SV，SI，J，SVSI，SVJ，SIJ，加上初始 BAW 模型，一共有 8 个模型，我们在之后实证中会对比基于这 8 个模型对国债期货期权定价的质量。比如如果是 SIJ 模型，那就让 $\theta_v = k_v = \sigma_v = 0$ ，以波动率参数 σ_F 取代 $\sqrt{V(t)}$ 。

4.2 市场数据

本节将介绍我们做实证研究所需要的市场数据，总共包含了三部分：标的资产，即国债期货；研究对象，即国债期权；国债即期收益率。我们在美国市场上进行国债期货期权的定价质量研究，2006 年 10 月 17 日，美国芝加哥商业交易所（CME）和芝加哥期货交易所（CBOT）宣布已经就合并事宜达成最终协议，两家交易所合并成全球最大的衍生品交易所——芝加哥交易所集团（CME 集团），国债期货和期权都主要在 CME 集团进行交易。针对国债期货和国债期权，将会分别介绍市场情况、产品规则、数据来源和数据结构。

4.2.1 标的资产：美国十年期国债期货（US 10-Year T-Note Futures）

美国国债期货是以美国国债作为标的资产的期货合约，其市场情况与美国国债市场紧密相关。美国国债期货市场规模巨大，是全球最大的期货市场之一。美国国债期货作为避险资产的重要工具之一，经常被用于对冲金融市场风险。由于其具有流动性高、交易成本低、交易时间长等优点，吸引了大量投资者的关注。

在美国国债期货市场中，主要有以下几种合约：

1. 2 年期美国国债期货：以 2 年期美国国债为标的资产，交易代码为 ZT。这种期货合约主要关注美国经济中短期走势和货币政策变化。
2. 5 年期美国国债期货：以 5 年期美国国债为标的资产，交易代码为 ZF。这种期货合约是市场上比较活跃的合约之一，因为它关注美国经济长期走势和货币政策变化。
3. 10 年期美国国债期货：以 10 年期美国国债为标的资产，交易代码为 ZN。这种期货合约是市场上最活跃的合约之一，被广泛用作债券市场风险管理和对冲工具。
4. 30 年期美国国债期货：以 30 年期美国国债为标的资产，交易代码为 ZB。这种期货合约主要关注长期的宏观经济走势和通货膨胀风险。

这些期货合约具有非常好的交易深度和宽度，能够吸引来自全球各地的投资者进行交易，因此，这些期货合约的价格发现过程相对来说比较公正，价格波动比较容易反映市场的实际情况，其中 10 年期国债期货经常位居全部期货品种中成交量的首位。我们的研究目的是国债期货期权定价，自然想选择流动性最好的标的，因此专门针对 10 年期国债期货这一标的进行研究。事实上，完全可以在其他标的上也进行相应研究，得到的研究结果也理当是相仿的，受限于数据尤其是期权数据的获取比较昂贵，本文不将研究拓展至其他品种的国债期货和期权。

美国国债期货也是同时有三个季月合约在进行交易，以 2023 年 1 月 1 日为例，正在交易的三个合约和接下来一个合约信息如表 4-1 所示。合约代码的中间那位是通用的月份代码：3 月:H；6 月:M；9 月:U；12 月:Z。可以看到也是当 TYH23 结束交易的下一个交易日，新合约 TYZ23 开始交易。

合约月份	彭博代码	第一个交易日	最后一个交易日
MAR 2023	TYH23	22 JUN 2022	22 MAR 2023
JUN 2023	TYM23	22 SEP 2022	21 JUN 2023
SEP 2023	TYU23	21 DEC 2022	20 SEP 2023
DEC 2023	TYZ23	23 MAR 2023	19 DEC 2023

表 4-1 10 年期国债期货交易日历

因为我们建立模型的一个初衷是内化标的资产收益率的分布相对于标准正态分布的偏度和峰度。因此首先来检验国债期货日收益率是否存在过往文献中所称的偏度和峰度。另外，我们在国内市场上研究国债期货期权定价的时候，考虑到期权的到期期限都非常短，所以拼接出了主力合约来做波动率参数的估计。但是事实上，我们也会在 4.2.2 中介绍，每个期权针对的是一个特定的期货标的。而一个国债期货标的作为远月合约和作为主力合约的时候，波动率也可能是不一致的。因此我们首先会针对每个合约，给出其生存期上日收益率的偏度和峰度，和作为远月合约以及作为主力合约时间段上的年化波动率。而在此之前，首先来介绍所使用的数据。

从彭博上取到了从 TYH00（最后一个交易日为 2000 年 3 月 22 日）开始的全部国债期货合约的日结算价和日成交量数据，得到每个合约的第一个交易日和最后一个交易日之后发现，曾经的规则一度是每个合约生存期为 1 年，同时有 4 个合约进行交易，甚至出现过生

存期为1年3个月的合约，直到2016年的TYZ16合约（最后一个交易日为2016年12月20日）开始才与现在的规则一致。为了节约篇幅，图4-1只展示了TYH20开始的结果。

	skew	kurt	Vol_main	Vol_far
Code				
TYH20	-0.173905	2.653131	0.046422	0.050407
TYM20	-0.336264	3.011287	0.084462	0.040258
TYU20	0.005686	1.604509	0.029853	0.038532
TYZ20	-0.549283	3.370144	0.030553	0.023141
TYH21	-1.065521	3.741177	0.027544	0.034199
TYM21	-0.931743	2.777047	0.038888	0.037922
TYU21	0.05982	0.123833	0.037535	0.037322
TYZ21	0.202691	1.05811	0.046582	0.037957
TYH22	0.064529	1.079928	0.049828	0.050975
TYM22	-0.201722	-0.25434	0.083708	0.051029
TYU22	-0.114144	-0.661012	0.085003	0.07673
TYZ22	0.477299	0.961161	0.08897	0.085052

图4-1 每个合约在生存期内日收益率的偏度和峰度；以及作为主力合约和作为远月合约时间段上的年化波动率

需要说明的是，因为标准正态分布的峰度为3，所以我们展示的峰度是-3后的结果。图4-1中的结果表明，不同合约的偏度有较大差异，这 and 不同合约在其生存期的价格走势有关。因此又检查了2011年1月1日起以最大成交量原则拼接出的主力合约偏度，结果为-0.123，不认为具有明显偏度证据。但是就峰度而言，大部分合约上都具有正峰度，主力合约的峰度为2.454，支持过往文献对资产收益率“尖峰肥尾”的论断。总体而言，合约间较大的偏度差异和收益率的“尖峰肥尾”特点都支持我们将偏度和峰度内化到模型中的初衷。但比较违背直觉的一点是发现单个合约作为远月合约时相比其作为主力合约时的波动率更小的猜测并不成立，这可能是美国市场较为成熟造成的，因此这无法用作为波动率不稳定的证据，波动率的不稳定可以通过分区间计算或是直接观察得到。

以上都是支持我们模型的证据，下面来阐述挑战我们模型假设的证据。在4.1中给出过在我们模型退化成常数波动率的情况下，解出标的国债期货服从价格过程：

$$\ln S(t) = \ln S(0) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t) + \left[\sum_{i=1}^{N(t)} \ln(Y_i + 1) - \lambda\beta t \right],$$

可见未来收益率与当前价格是独立的，加入了波动率的随机性显然也不会改变这一点，因为波动率的随机方程中不存在标的价格。由于我们的标的国债期货是利率衍生品，利率具有均值回复的特点，因此国债期货的价格过程也被很多学者认为具有均值回复的特点，那么在高价位上未来收益率的分布和低价位上的分布就会是不同的，反应到偏度上，应该高价位上未来收益率分布的偏度为负，低价位上偏度为正。我们下面就基于从2011年开始的全部主力合约数据来验证这一猜测。

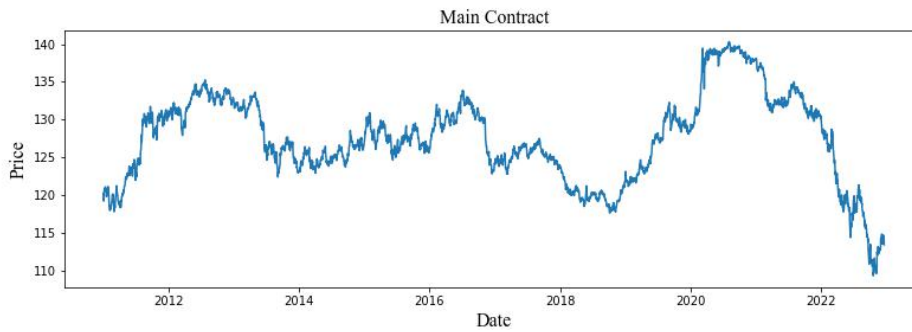


图 4-2 2011 年起国债期货主力合约的价格序列数据

图4-2展示了 2011 年起国债期货主力合约的价格序列数据，从图中可以看到，长期而言均值回复的特性从观察上来说确实存在。我们将结算价用 0.8 分位数和 0.2 分位数进行切分，在 0.8 分位数以上的部分认为是高价区间，在 0.2 分位数以下的部分认为是低价区间，分别统计高价区间和低价区间上未来一天的收益率分布，由图4-3和图4-4展示。可以看到在高价区间和低价区间上收益率的分布确有差别，具体到偏度上，高价区间上的偏度为-0.486，低价区间上的偏度为 0.215，和猜想一致。

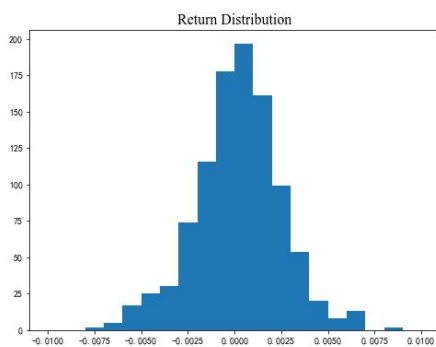


图 4-3 高价区间未来日收益率的分布

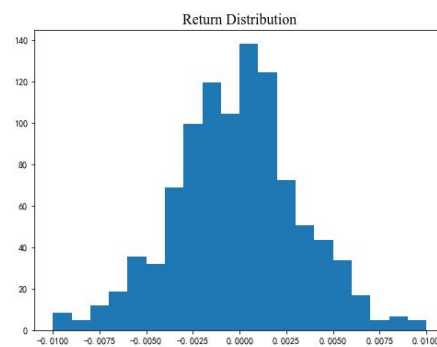


图 4-4 低价区间未来日收益率的分布

再将主力合约价格序列进行平稳性检验，结果在 $p < 0.05$ 标准下没有通过 ADF 检验，认为并非是平稳过程，而且同时注意到，其半衰期长达 144.4 个交易日。而对于单个国债期货合约，合约生存期一共只有 9 个月，在这个期间的均值回归特性并不明显且更加无法通过平稳性检验。基于我们期权的标的是单个期货合约，因此国债期货长期而言的均值回归特性对我们模型假设带来的挑战并没有预想的严峻。

最后还有非常重要的一点，我们的定价模型是考虑到国债期货保证金的，我们用的参数是维持保证金比例，由交易所公布，且保证金要求会根据市场情况和波动而变化。比如在 2022 年 12 月 1 日，维持保证金要求是 2200，当日主力合约价格为 114.29，实际上期货合约的标的是票面价值为 100,000 的国债，价格是除以 1000 显示的，因此维持保证金比例是 $\frac{2200}{114.29 \times 1000} = 1.9\%$ 。我们每天计算期权价格的时候采用当日的保证金比例。

4.2.2 研究对象：美国十年期国债期权（US 10-Year T-Note Options）

美国十年期国债期权的标的是十年期国债期货，但是期权不止有季月期权，还有序列期权，季月期权的标的是同一个季月的期货，序列期权的标的是之后最接近的季月期货。还是以 2023 年 1 月 1 日为例，正在交易的期权合约信息如表 4-2 所示，这可以从 CME 集团的网站^①上找到，只是表 4-2 将网站上的产品代码改成了彭博代码，又增加了标的期货的彭博代码。

合约月份	彭博代码	标的期货彭博代码	第一个交易日	最后一个交易日
FEB 2023	TYG3C(TYG3P)	TYH23	26 SEP 2022	27 JAN 2023
MAR 2023	TYH3C(TYH3P)	TYH23	22 JUN 2022	24 FEB 2023
APR 2023	TYJ3C(TYJ3P)	TYM23	24 OCT 2022	24 MAR 2023
MAY 2023	TYK3C(TYK3P)	TYM23	27 DEC 2022	21 APR 2023
JUN 2023	TYM3C(TYM3P)	TYM23	22 SEP 2022	26 MAY 2023
SEP 2023	TYU3C(TYU3P)	TYU23	21 DEC 2022	25 AUG 2023

表 4-2 10 年期国债期权交易日历

可以看到季月期权和序列期权是不同的，季月期权会从标的期货的第一个交易日开始交易，而序列期权的第一个交易日开始得很晚，但是无论哪种期权，最后一个交易日和期权结算日都是合约月份前一个月倒数第二个交易日前的最后一个周五，如果这不是交易日，将在这一天的前一个交易日终止。因为季月期权会追随标的的整个价格过程，完全覆盖了前两个序列期权的交易区间且交易量更大，因此我们的实证只取季月看涨期权进行研究，具体而言，取的是彭博代码分别为 TYH2C、TYM2C、TYU2C、TYZ2C 这四组看涨期权的日结算价和日成交量。它们的基本信息由表 4-3 展示。之所以只取出这 4 组期权，是因为本人并没有彭博账号，是通过向人购买的方式获取彭博数据，而每组期权又包括了不同行权价上的不同期权，购买期权数据的代价太大了。又注意到这四组期权中最早的是 TYH2C，第一个交易日为 2021 年 6 月 22 日；最晚的是 TYZ2C，最后一个交易日为 2022 年 11 月 25 日。我们可以从图 4-2 中看到，这一年半内的国债期货主力合约正好经历了连续不断的快速价格下跌和偶尔的价格回升，这段时间的市场特性恰好非常适用于研究期权的定价质量，尤其是可以很好地检验模型的对冲效果。对于每组期权，所取行权价区间需要包含在期权生存期内标的期货的最高价和最低价。就交易所规则而言，每日能交易的期权行权价包含了以当前标的期货价格为中心的上下各 50 个价格，以 0.5 为间隔，直到接近结算日的前一个月以 0.25 为间隔。我们一律以 0.5 为间隔取期权，每组期权所取的行权价区间也在表 4-3 中展示。在每一天上，行权价接近当天标的期货价格的期权上的成交较为活跃，也就是平值期权成交活跃，深度实值和深度虚值的期权上甚至可能没有成交。以 2022 年 9 月 30 日为例，标的期货的当日结算价格为 112.0625 美元，TYZ2C 合约当日不同行权价上的期权成交量在图 4-5 中展示。

① <https://www.cmegroup.com/markets/interest-rates/us-treasury/10-year-us-treasury-note.settlements.options.html#optionProductId=317>

彭博代码	标的代码	第一个交易日	最后一个交易日	行权价区间
TYH2C	TYH22	2021 年 6 月 22 日	2022 年 2 月 18 日	[120, 140]
TYM2C	TYM22	2021 年 9 月 22 日	2022 年 5 月 20 日	[112, 138]
TYU2C	TYU22	2021 年 12 月 22 日	2022 年 8 月 26 日	[110, 135]
TYZ2C	TYZ22	2022 年 3 月 23 日	2022 年 11 月 25 日	[105, 129]

表 4-3 所取期权信息

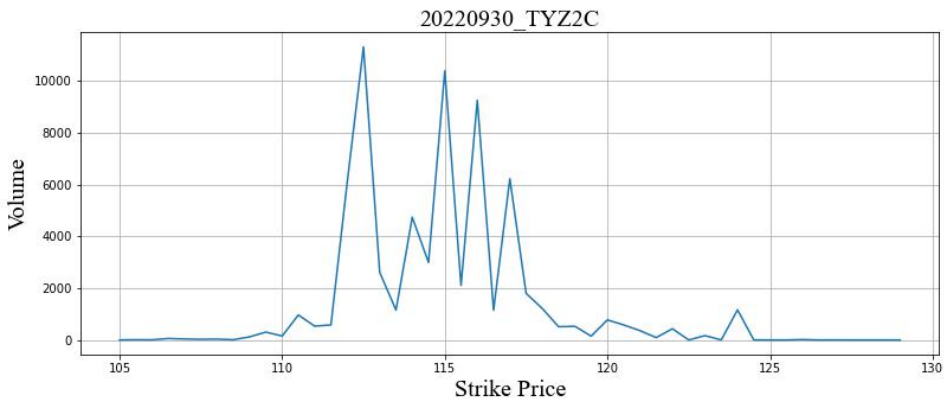


图 4-5 2022 年 9 月 30 日，TYZ2C 合约不同行权价上的期权成交量

虽然我们取的期权名义上第一个交易日就是标的期货的第一个交易日，但实际上并不会这么早开始交易。我们将实际第一个交易日和第一个在至少 10 个不同行权价上有成交的交易日展示在表 4-4 中。我们的研究时间区间其实是从第一个在至少 10 个不同行权价上有成交的交易日开始，到最后一个交易日结束。因此可以看到，全部样本都可以算是短期期权，最长的期限也只有 4 个月，这是美国国债期权的交易特点。而之所以要求在至少 10 个不同行权价上有成交，是因为我们的 SVSII 模有 7 个需要校正的参数，这将会在 4.3.2 节中作具体说明，理论上确保有 8 个不同行权价上的成交就可以做优化了，要求 10 个是为了在一定程度上防止过拟合。

彭博代码	实际第一个交易日	第一个在至少 10 个不同行权价上有成交的交易日	最后交易日
TYH2C	2021 年 10 月 19 日	2021 年 10 月 27 日	2022 年 2 月 18 日
TYM2C	2022 年 1 月 12 日	2022 年 1 月 24 日	2022 年 5 月 20 日
TYU2C	2022 年 4 月 7 日	2022 年 4 月 27 日	2022 年 8 月 26 日
TYZ2C	2022 年 4 月 26 日	2022 年 7 月 25 日	2022 年 11 月 25 日

表 4-4 每组期权用于实际研究的时间段

最后特别需要注意的一点是美国国债期权是美式期权，因此我们的模型在实证上最终做的是美式期权的定价格式。

4.2.3 美国国债即期收益率曲线

和之前在国内市场上做国债期货期权定价时一样，我们需要国债的即期收益率曲线来进行利率模型参数的校正，因此就需要获取美国国债每日在不同期限上的即期收益率。因为即期收益率曲线是根据市场上众多付息国债通过息票剥离并采用一定插值方法计算得到的，所以不同的数据源因为在方法论细节上有一定不同，会导致计算出来的结果略有不同。我们采用 Nasdaq 制作的即期收益率曲线^①，名称为 US Treasury Zero-Coupon Yield Curve。

Nasdaq 给出每日上的期限从 1 年到 30 年的即期收益率，用 SVENY01-SVENY30 表示，SVENY 是 Stripped Principal Components of Nominal Treasury Yield 的缩写，意思是只剩下本金的名义国债收益率，也就是我们的即期收益率。自 2000 年起，2 年期、5 年期和 10 年期的即期收益率随时间的变化在图 4-6 中展示。

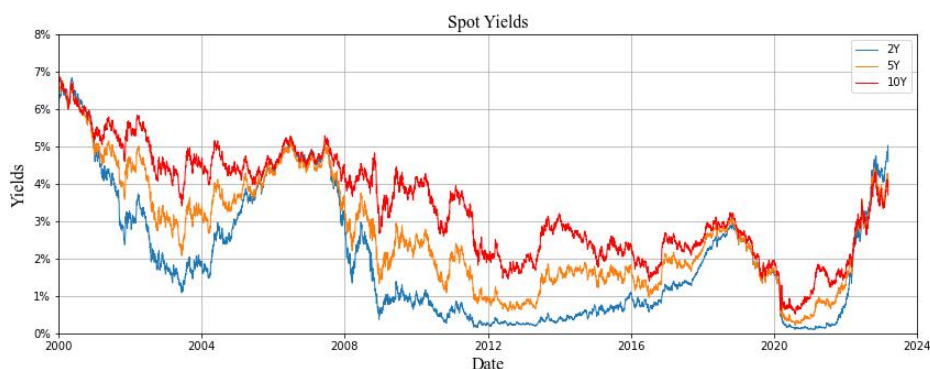


图 4-6 美国国债即期收益率

这里虽然没有展示出固定一天的针对不同期限的即期收益率曲线，但是从 2 年期、5 年期和 10 年期即期收益率在垂直方向上的关系可以窥见一二。在经济平稳增长，美联储没有什么动作的阶段，比如 2009 年至 2016 年，即期收益率曲线呈现正常形态，即在短的期限上利率较低，在长期上利率较高，且整体利率走低，反应美国经济较为健康。而当出现控制通胀和稳定就业的需求的时候，美联储就会开展加息操作，近 40 年中，美联储共有 7 次加息周期，反应在图中 2000 年以后的有三次：2004 年 6 月至 2006 年 7 月，从 1% 加息到 5.25%；2015 年 12 月至 2018 年 12 月，从 0 加息到 2.25% 和 2022 年 3 月开始至今。美联储的加息会导致整个收益率曲线向上移动，这意味着所有期限债券的收益率都会上升。我们可以从图中看到，在这几段加息区间中即期收益率确有走高。然而，对收益率曲线形状的影响需因具体情况而异。短期收益率的涨幅往往超过长期收益率，这是因为短期债券更直接受到美联储政策利率变化的影响，而长期债券则受到多种因素的影响，包括通胀预期、经济增长预期和供求动态。而在最近即 2023 年 3 月，由于美联储的本轮加息被视为货币政策收紧和潜在经济放缓的迹象，导致短期收益率的涨幅超过长期收益率，出现即期收益率曲线的倒挂。

具体到我们进行国债期货期权定价的实证研究而言，我们仅需要使用 2021 年 10 月之后每个交易日不同期限上的即期收益率来拟合瞬时利率过程的参数，而在这段区间上利率

^① <https://data.nasdaq.com/data/FED/SVENY-us-treasury-zerocoupon-yield-curve>

的变化较大,且2022年以来债券市场波动加剧,稳定性明显减弱,因此从这点上看在定价中引入随机利率也是必要的。

4.3 定价质量研究

本章我们分别使用带有随机波动率、随机利率、跳中若干个宽松假设的SV, SI, J, SVSI, SVJ, SIJ, SVSIJ共7个模型和基础BAW模型为美国十年期国债期权定价,从而研究不同假设的放宽对定价质量起到的提升效果。

4.3.1 BAW模型的隐含波动率

BAW模型是在Black模型上加一阶修正项的美式期货期权定价模型,其具体公式曾在3.3中给出,BAW模型基于的假设是利率和波动率均为常数,不考虑期货保证金。在做我们的定价模型前,首先来看BAW模型在我们数据集上的错误定价情况,采用的方式是计算实际期权价值的隐含波动率。一般来说,美式期权也和欧式期权一样,会出现波动率微笑的现象,也就是同一天上不同行权价的期权的隐含波动率是不同的,最常见的波动率微笑形态是深度实值和深度虚值的期权隐含波动率较高,平值期权隐含波动率较低。这种现象就表明了模型的错误定价,因为模型指定的波动率是和行权价无关的常数。

具体而言,将每天上每支期权的实际结算价格代入BAW模型公式,并反解出隐含波动率,其中瞬时无风险利率采用的是一年即期收益率。基于我们数据集上剩余期限最长的期权也不过4个月,就将期权按剩余期限分为两组:剩余期限1-4个月和剩余期限1个月以内;又根据行权价 K 和标的期货当日结算价 F 的比值 $\frac{K}{F}$,将期权分为 $\frac{K}{F} \leq 0.93$, $0.93 < \frac{K}{F} \leq 0.97$, $0.97 < \frac{K}{F} \leq 1$, $1 < \frac{K}{F} \leq 1.03$, $1.03 < \frac{K}{F} \leq 1.07$, $\frac{K}{F} > 1.07$ 共6组。每组上的期权隐含波动率均值和样本数在表4-5中展示。

合约	剩余期限	≤ 0.93	$0.93 - 0.97$	$0.97 - 1$	$1 - 1.03$	$1.03 - 1.07$	> 1.07
TYH2C	1 - 4m	NaN(0)	0.050(146)	0.049(317)	0.045(438)	0.043(276)	0.034(8)
	< 1m	NaN(0)	0.037(10)	0.052(131)	0.050(137)	0.047(43)	NaN(0)
TYM2C	1 - 4m	0.085(11)	0.062(153)	0.062(286)	0.057(425)	0.054(451)	0.043(159)
	< 1m	NaN(0)	0.056(102)	0.070(156)	0.074(141)	0.071(124)	0.054(51)
TYU2C	1 - 4m	0.044(19)	0.065(280)	0.070(343)	0.067(421)	0.061(492)	0.044(330)
	< 1m	0.503(10)	0.047(68)	0.068(145)	0.069(143)	0.053(68)	0.037(4)
TYZ2C	1 - 4m	0.039(28)	0.071(296)	0.076(305)	0.069(428)	0.063(518)	0.046(297)
	< 1m	NaN(0)	0.067(61)	0.077(146)	0.074(126)	0.061(80)	0.039(11)

表 4-5 每个合约上的分组隐含波动率结果,括号内是该组样本数

表4-5虽然充分展现出了BAW模型存在着较为严重的错误定价,但是它的结果让人吃惊,在合约TYH2C和TYM2C上,还是一个比较常见的波动率微笑形态:波动率倾斜,在深度虚值的期权上隐含波动率高而深度实值的期权上隐含波动率低。而合约TYU2C和合约TYM2C上出现了较为罕见的市场现象,即“波动率反笑”,也就是在左右两端隐含波动率低,中间隐含波动率高。出现这种现象的根本原因是因为我们研究的时间段非常特别,价格实质上是由供求关系决定的, TYU2C和TYM2C的交易时间段是2022年4月到2022年

11月,在这段时间里随着美联储的不断加息且加息幅度增大,市场对国债价格的下跌有了一致的预期,从而对我们的标的国债期货价格的下跌也有了一致预期,导致深度实值的美式看涨期权不再具有吸引力,因为已经有了很明确的标的价格下跌预期,再持有美式看涨期权将面临着很大的期权价值蒸发风险。

总之,需再次承认一个事实,因为取数据的原因,目前是在一个非常特别的市场环境下进行期权定价的实证研究,即标的处于被市场预期下跌的时间段。但是因为我们研究的目标是期权定价,我们的模型就是用来灵活内化未来收益率的分布预期的,因此在特别的市场环境下从某种程度上来说也更考验了模型的能力。

4.3.2 模型的参数估计

为了便于叙述,我们将4.1节最终得到的规范 SVSII 模型再次展示在这里,有一些细微的记号上的调整:

$$\begin{cases} dF(t) = k_M R(t) F(t) dt + \sqrt{V(t)} F(t) dW_F(t) + F(t-) d(Q(t) - \lambda \mu_J t), \\ dV(t) = k_v (\theta_v - V(t)) dt + \sigma_v \sqrt{V(t)} dW_v(t), \\ dR(t) = k_R (\theta_R - R(t)) dt + \sigma_R \sqrt{R(t)} dW_R(t). \end{cases}$$

其中,

- $F(t)$ 是国债期货的价格过程, $V(t)$ 是波动率平方过程, $R(t)$ 是利率过程;
- $Q(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$, $N(t)$ 是强度为 λ 的泊松过程, $Y_i \sim N(\mu_J, \sigma_J^2)$;
- $W_F(t)$, $W_v(t)$, $W_R(t)$ 是标准布朗运动, 且 $Cov(dW_F(t), dW_v(t)) = \rho dt$, $W_R(t)$ 与它们独立;
- k_v, θ_v, σ_v 分别是波动率过程的调整速度、长期均值和波动率参数; k_R, θ_R, σ_R 分别是利率过程的调整速度、长期均值和波动率参数。

再次强调这是一组风险中性测度下的模型,而具体用哪一个风险中性测度取决于市场交易的期权价格对模型参数的校准结果。

注意到我们特地在模型中不允许利率过程的随机驱动 $W_R(t)$ 与其他任何随机驱动具有相关性,使得利率过程与价格过程是独立的。因为这样我们就得以使用即期收益率直接校准利率模型的参数,而不是把整个模型的参数都用市场上的期权价格进行校准。考虑到 SVSII 模型共有 10 个参数,如果全部用市场期权价格校准,对优化方式的要求较高,因为如果初始值设置得不好,很容易迭代到不合理的局部最优解,另一点是参数过多极易发生过拟合,是我们极力避免的问题。

但这事实上也有办法解决,一来做优化的时候小心地设置初始值并加设约束,二来也可以再取看跌期权数据,把看涨看跌期权放在一起进行参数校准。基于这两点,就可以做成如下的模型:

$$\begin{cases} dF(t) = k_M R(t) F(t) dt + \sqrt{V(t)} F(t) dW_F(t) + \sigma_{S,R} R(t) dW_R(t) + F(t-) d(Q(t) - \lambda \mu_J t), \\ dV(t) = k_v (\theta_v - V(t)) dt + \sigma_v \sqrt{V(t)} dW_v(t), \\ dR(t) = k_R (\theta_R - R(t)) dt + \sigma_R \sqrt{R(t)} dW_R(t). \end{cases} \quad (4.7)$$

模型 (4.7) 使得利率过程可以影响到价格过程, 这对于国债期货这一标的来说是非常合理的一种模型改进, 或者也可以直接将 $dW_F(t)$, $dW_v(t)$, $dW_R(t)$ 之间的相关系数矩阵设置为参数, 都可以构成未来的研究方向, 但是本文不对模型 (4.7) 及其他推广进行定价质量研究。

利率过程的参数校正

如之前所说, 利率过程是直接根据即期收益率曲线进行参数校正的, 因此首先来阐述它的参数校正方法。为了方便叙述, 暂时去掉下标, 将利率过程简记为:

$$dR(t) = k(\theta - R(t))dt + \sigma\sqrt{R(t)}dW_R(t). \quad (4.8)$$

CIR 利率模型的优势在于它使得利率不可能为负, 但遗憾的是 (4.8) 并没有解析解, 不能像我们之前在 3.2.3 小节中对 Vasicek 模型那样简单地校正参数。

我们采用 Monte Carlo 的方法模拟利率过程, 初始利率 $R(0)$ 简单采用一年期的即期收益率, 对于固定的 k, θ, σ , 以如下离散格式模拟:

$$R(t_{i+1}) = R(t_i) + k(\theta - R(t_i))\Delta t + \sigma\sqrt{R(t_i)^+}\sqrt{\Delta t}Z, \quad Z \sim N(0, 1),$$

其中 $R(t_i)^+ = \max(R(t_i), 0)$, 因为离散化的模拟还是可能会出现负值, 所以需要进行这样一个修正。总共模拟 5000 条轨道, 每条模拟 30 年, 时间步长 Δt 设置为 $\frac{1}{10}$ 年。

根据

$$P(0, T) = E \left[e^{-\int_0^T R(s)ds} \right],$$

记第 j 根轨道上在 t_i 时刻上的瞬时利率模拟值为 $R_{j,i}$, 轨道数为 N , 那么剩余期限为 T 的贴现债券的价格为

$$P(0, T) = \frac{1}{N} \sum_j (e^{-\sum_i R_{j,i}\Delta t}),$$

从而得到剩余期限为 T 的即期收益率:

$$r_T = -\frac{1}{T} \ln P(0, T).$$

用实际剩余期限为 1, 2, 5, 7, 10 的即期收益率来校正参数 k, θ, σ :

$$k, \theta, \sigma = \arg \min_{k, \theta, \sigma} \sum_i (\hat{r}_i(k, \theta, \sigma) - r_i)^2.$$

这里采用了 python 的 scipy 优化包, 优化初始值设为 $k_0, \theta_0, \sigma_0 = 0.03, 0.02, 0.01$, 基于认为长期均衡和波动率参数都小于 0.05 的先验观点, 设置优化约束 $0 < \theta_0, \sigma_0 < 0.05$, $k > 0$ 。在每一个交易日上都进行如上过程, 最终得到了较为合理的解, 图 4-7 展示了 2022 年前 5 个交易日上的参数校正结果。

	k	theta	sigma
Date			
2022-01-03	0.434802	0.022118	0.022118
2022-01-04	0.406643	0.022881	0.022881
2022-01-05	0.445688	0.022901	0.022901
2022-01-06	0.500262	0.022534	0.022534
2022-01-07	0.477925	0.023439	0.023439

图 4-7 2022 年前 5 个交易日上的 CIR 模型参数

模型的其他参数校正

现在 SVSII 上还需要校正的参数有泊松过程的强度 λ , 跳跃幅度的均值 μ_J 和方差 σ_J^2 , 波动率过程的参数 k_v, θ_v, σ_v , 和 $W_F(t)$ 与 $W_v(t)$ 的瞬时相关性 ρ , 共 7 个参数。参数校正方法和上面利率过程的参数校正方法在思想上完全一致。也就是针对每一天, 采用 Monte Carlo 模拟得到不同行权价上的期权模型价格 \hat{P} , 最小化模型价格与实际结算价的 SSE(Sum of the Squared Error):

$$\sum_i (\hat{P}_i - P_i)^2.$$

需要特别小心的是, 这里只取当天实际发生交易的期权计算, 事实上, 没有发生交易的期权也是有当日结算价的, 但是这个结算价按交易所的说法, 是根据有交易的那些期权的结算价采用理论模型定价的, 因此如果用了全部的数据, 那做出来的结果将极大地偏向于交易所采用的那个理论模型, 极有可能是 BAW 模型, 从而无法实现我们的研究目标。

做离散格式的时候有两个点是之前的离散格式中所没有的: 一个是标的资产的布朗运动和波动率平方过程的布朗运动之间具有相关性, 相关系数矩阵为

$$G = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix},$$

通过 Cholesky 分解, 有

$$G = RR^T,$$

其中

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1-\rho^2} \end{bmatrix}.$$

因此通过抽样两个独立标准正态分布 Z_1, Z_2 , 再令 $\hat{Z}_1 = Z_1$, $\hat{Z}_2 = \rho Z_1 + \sqrt{1-\rho^2} Z_2$, 就得到了我们需要的具有相关性的标准正态分布 \hat{Z}_1, \hat{Z}_2 。

另一个是复合泊松过程的模拟, 因为对于强度为 λ 的泊松过程 $N(t)$ 和充分小的 Δt , 有

$$P((N(t+\Delta t) - N(t)) = 1) = \lambda \Delta t + o(\Delta t),$$

$$P((N(t+\Delta t) - N(t)) = 0) = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t).$$

因此我们对跳跃幅度服从正态分布 $N(\mu_J, \sigma_J^2)$ 的复合波动过程 $Q(t + \Delta t) - Q(t)$ 的模拟通过抽样 $[0, 1]$ 均匀分布记为 U 和抽样标准正态分布记为 Z_J 得到:

$$Q(t + \Delta t) - Q(t) = \mathbf{1}_{U < \lambda \Delta t} Z_J.$$

这样就能得到完整的离散格式。设时间间隔 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = T$, 轨道数量为 N , 抽样 5 个 $N \times m$ 维的随机矩阵: 四个标准正态分布矩阵 Z_1, Z_2, Z_J, Z_R 和一个 $[0, 1]$ 均匀分布随机矩阵 U , 离散格式如下, 模拟的时候直接在全部轨道上一起模拟, 因此下面的离散格式实际是针对 $N \times 1$ 维向量的离散格式。

$$\begin{cases} F(t_{i+1}) = F(t_i) + [k_M R(t_i) - \lambda \mu_J] F(t_i) \Delta t + \sqrt{V(t_i)^+} F(t_i) \sqrt{\Delta t} Z_1(t_i) + F(t_i) \mathbf{1}_{U_{t_i} < \lambda \Delta t} Z_J(t_i), \\ V(t_{i+1}) = V(t_i) + k_v (\theta_v - V(t_i)) \Delta t + \sigma_v \sqrt{V(t_i)^+} \sqrt{\Delta t} [\rho Z_1(t_i) + \sqrt{1 - \rho^2} Z_2(t_i)], \\ R(t_{i+1}) = R(t_i) + k_R (\theta_R - R(t_i)) \Delta t + \sigma_R \sqrt{R(t_i)^+} \sqrt{\Delta t} Z_R(t_i). \end{cases}$$

通过模拟, 就能够计算出欧式期权的价格, 而实际上美国国债期权是美式期权。考虑到我们需要通过优化来校正参数, 不想让这一过程花费太长时间, 因此从欧式期权价格得到美式期权价格这一步还是采用 BAW 模型的一阶修正, 基于之前有根据 BAW 模型计算出来的每天每个期权上的隐含波动率, 将其代回 BAW 模型分别计算出行权边界和修正项, 来得到对美式期权的定价。这给我们带来一个好处, 就是实质上我们关心的本就是相对于 Black 模型的三个假设条件的放宽所带来的定价质量提升, 而我们对美式期权定价所比较的基准就是 BAW 模型, 因此将全部模型从欧式期权价格得到美式期权价格这一步和 BAW 模型采用同样的修正可以使得定价结果的差异完全归因于模型三个假设条件的放宽, 从而实现研究的目标。

在实际参数校正过程中, 轨道数量设置为 $N = 10000$, 时间间隔设置为 $m = 50$ 。非常重要的一点是如果我们所做的优化是带有随机抽样的优化, 迭代结果很容易是无法收敛的, 因此在一开始就应种下随机种子, 在完全固定下来的随机矩阵上进行参数校正, 且这一随机种子直接种在全局, 每个模型都共享相同的五个随机矩阵。

另外更为重要的一点是, SVSIJ 模型的参数较多且目标函数以非常复杂的关系依赖于参数, 这一定会导致收敛到局部最优解, 因此最后收敛到的解会和初始值有很大的关系。为了解决这一问题, 先校正最简单的三个模型: SV、SI 和 J 的参数, 其中对 SI 和 J 进行校正的时候均以 BAW 模型的隐含波动率作为波动率参数的初始值, 然后当校正 SVJ 模型的时候, 以 SV 和 J 模型的参数校正结果作为初始值, 其他模型以此类推, 进行步步校正。

4.3.3 模型结果

在 4 组期权合约上, 每个模型每天参数校正结果在全部交易日上的均值、标准差以及合约上总的样本内定价平方误差 SSE 在表 4-6、表 4-7、表 4-8、表 4-9 中展示, 其中括号内是标准差。

	TYH2C				TYM2C			
	BAW	SI	SV	J	BAW	SI	SV	J
σ_F	0.0472 (0.0040)	0.0472 (0.0040)		0.0403 (0.0056)	0.0623 (0.0112)	0.0622 (0.0112)		0.0571 (0.0113)
k_v			3.00 (0.0027)				3.00 (0.0043)	
θ_v			0.00295 (0.00156)				0.00429 (0.00157)	
σ_v			0.1211 (0.1011)				0.0541 (0.0550)	
ρ			-0.362 (0.162)				-0.620 (0.313)	
λ				5.176 (0.343)				5.182 (0.465)
μ_J				-0.0082 (0.0033)				-0.0071 (0.0056)
σ_J				0.0052 (0.00344)				0.0051 (0.00376)
SSE	0.857	0.841	0.065	0.208	0.848	0.807	0.152	0.362

表 4-6 TYH2C、TYM2C 上 BAW、SI、SV、J 四个模型的参数校正结果和样本内 SSE

	TYU2C				TYZ2C			
	BAW	SI	SV	J	BAW	SI	SV	J
σ_F	0.0682 (0.0080)	0.0680 (0.0080)		0.0637 (0.0097)	0.0716 (0.0100)	0.0713 (0.0100)		0.0663 (0.0108)
k_v			3.00 (0.0059)				3.00 (0.0051)	
θ_v			0.00470 (0.00114)				0.00521 (0.00136)	
σ_v			0.0255 (0.0196)				0.0403 (0.0482)	
ρ			-0.829 (0.300)				-0.927 (0.205)	
λ				5.065 (0.508)				4.994 (0.410)
μ_J				-0.0051 (0.0078)				-0.0084 (0.0064)
σ_J				0.0039 (0.00380)				0.0038 (0.00345)
SSE	1.666	1.614	0.920	1.165	1.320	1.215	0.566	0.933

表 4-7 TYU2C、TYZ2C 上 BAW、SI、SV、J 四个模型的参数校正结果和样本内 SSE

	TYH2C				TYM2C			
	SVJ	SIJ	SVSI	SVSIJ	SVJ	SIJ	SVSI	SVSIJ
σ_F	0.0391 (0.0058)				0.0553 (0.0132)			
k_v	3.00 (0.0039)		3.00 (0.0026)	3.00 (0.0029)	3.00 (0.0042)		3.00 (0.0043)	3.00 (0.0042)
θ_v	0.00283 (0.0017)		0.00295 (0.00159)	0.00284 (0.0014)	0.00364 (0.0016)		0.00430 (0.00155)	0.00366 (0.0017)
σ_v	0.1264 (0.0981)		0.1194 (0.0973)	0.1251 (0.1025)	0.0605 (0.0646)		0.0542 (0.055)	0.0602 (0.0648)
ρ	-0.362 (0.165)		-0.370 (0.168)	-0.368 (0.167)	-0.620 (0.312)		-0.620 (0.313)	-0.619 (0.312)
λ	5.004 (0.0116)	5.211 (0.369)		5.000 (0.0028)	5.012 (0.0202)	5.203 (0.486)		5.014 (0.0329)
μ_J	0.00047 (0.0005)	-0.0094 (0.0029)		0.00027 (0.0013)	0.00232 (0.0011)	-0.0084 (0.0064)		0.00188 (0.0032)
σ_J	0.00012 (0.0005)	0.0056 (0.00325)		0.00013 (0.0006)	0.00038 (0.0011)	0.0053 (0.00376)		0.00033 (0.0010)
SSE	0.057	0.123	0.058	0.057	0.135	0.263	0.149	0.135

表 4-8 TYH2C、TYM2C 上 SVJ、SIJ、SVSI、SVSIJ 四个模型的参数校正结果和样本内 SSE

	TYU2C				TYZ2C			
	SVJ	SIJ	SVSI	SVSIJ	SVJ	SIJ	SVSI	SVSIJ
σ_F	0.0625 (0.0106)				0.0653 (0.0115)			
k_v	3.00 (0.0058)		3.00 (0.0059)	3.00 (0.0057)	3.00 (0.0051)		3.00 (0.0051)	3.00 (0.0051)
θ_v	0.00363 (0.00176)		0.00472 (0.00114)	0.00369 (0.00168)	0.00442 (0.00118)		0.00522 (0.00136)	0.00441 (0.00115)
σ_v	0.0362 (0.0320)		0.0258 (0.0196)	0.0340 (0.0259)	0.0475 (0.0581)		0.0403 (0.0482)	0.0479 (0.0579)
ρ	-0.831 (0.297)		-0.829 (0.300)	-0.830 (0.298)	-0.929 (0.198)		-0.927 (0.205)	-0.929 (0.196)
λ	5.024 (0.0375)	5.081 (0.526)		5.033 (0.0404)	5.016 (0.0234)	5.002 (0.416)		5.022 (0.0296)
μ_J	0.00448 (0.0033)	-0.0062 (0.0082)		0.00455 (0.0031)	0.00410 (0.0035)	-0.0095 (0.0064)		0.00411 (0.0034)
σ_J	0.00038 (0.00069)	0.0043 (0.00418)		0.00044 (0.00076)	0.00031 (0.00066)	0.0041 (0.00361)		0.00028 (0.00055)
SSE	0.862	1.071	0.909	0.852	0.505	0.880	0.560	0.505

表 4-9 TYU2C、TYZ2C 上 SVJ、SIJ、SVSI、SVSIJ 四个模型的参数校正结果和样本内 SSE

首先来看表4-6和表4-7中在 BAW 模型上分别加入随机利率 (SI)、随机波动率 (SV) 和跳 (J) 的三个模型相比于 BAW 模型的样本内定价结果。以样本内 SSE 来看, 三个模型均

提升了定价质量,因为每个模型的样本内 SSE 都比 BAW 模型小,其中 SV 表现最差,相比于 BAW 模型的 SSE 仅有约 2% 的减小;J 表现较好,在表现最好的期权组 TYH2C 上 SSE 减小了 76%,在表现最差的合约组 TYZ2C 上 SSE 减小了 29%;SV 表现最好,在表现最好的期权组 TYH2C 上 SSE 减小了 92%,在表现最差的期权组 TYU2C 上 SSE 减小了 45%。总得来说,随机波动率和跳的引入都明显提升了定价质量,而随机利率的引入对定价质量的提升效果并不明显,这一点和我们在 3.3 节中针对国内券商场外报价进行实证研究中所得到的结论一样。

下面具体来分析每个模型是如何提升定价质量的,SI 模型没有什么值得多说的,因为它的参数是根据即期收益率曲线所拟合的,可以看到 SI 模型的拟合出来的波动率参数 σ_F 的均值比 BAW 模型略小,说明一部分的定价误差确实由随机利率所解释。

对于 SV 模型,首先要说明一点,在参数校正的时候为了结果尽可能是全局最优,所以对优化迭代的初始值进行了多种尝试,发现优化目标关于波动率调整速度 k_v 的偏导极小,也就是其他参数保持不变的情况下, k_v 的变动对优化目标影响很小。然而进行参数校正后的 k_v 却强依赖于 k_v 初始值的取定,也就是说,不管我们设定了什么样的 k_v 初值,最后的优化结果中的 k_v 始终会在我们选的初值附近,因此展示的 k_v 均值结果其实是基于我们将初始值设定为 3 得到的,但如果设定成其他,对总体 SSE 的表现影响极小。之所以 SV 模型能显著提升定价质量,波动率的随机性和标的随机性的相关系数 ρ 在其中发挥了很大的作用。我们在表中可以看到,市场上真实的成交价所蕴含的是波动率随机性与标的随机性具有明显负相关这一观点,比如在 TYZ2C 合约上,负相关甚至达到了 -0.9。在实验过程中,曾经不慎将相关系数 ρ 与其他参数一样设置了大于 0 的约束,结果相比起我们现在展示的结果大打折扣。

对于 J 模型,J 模型年平均跳跃次数这一参数 λ 和之前说的波动率调整速度 k_v 性质非常类似,本文对此设定的初值是 5。我们可以看到,J 模型之所以能够提升定价质量,是因为它用负均值的跳跃幅度 μ_J 来消化 BAW 模型相比于市场真实价格的差异,意味着市场价格蕴含着投资者对于标的会发生一定幅度的向下跳跃的预期。

表 4-8 和表 4-9 中展示了随机利率、随机波动率和跳中两者或三者的结合。可以看到结合多种假设会在原来的基础上进一步提升定价质量,其中加入随机利率始终对定价质量的提升非常有限。可以看到表现最好的是 SVSIJ 模型,但是这也引发了一个担忧,SVSIJ 模型的参数多达 7 个,而我们是使用样本内 SSE 进行评估的,这种评估方式下必然自由度最大的模型效果最好,但是也有可能是因为过拟合导致的表现好,并非模型本身更好。基于这种考虑,将前一天每个模型校正得到的参数用于后一天的定价,这就相当于在样本外进行定价,可以得到每个模型样本外的 SSE,结果在表 4-10 中展示。

	TYH2C	TYM2C	TYU2C	TYZ2C
BAW	1.210	2.056	2.967	2.319
SI	1.193	2.013	2.911	2.207
SV	0.154	0.267	1.066	0.699
J	0.632	1.592	2.505	1.986
SVJ	0.143	0.262	1.026	0.642
SIJ	0.539	1.492	2.460	1.967
SVSI	0.143	0.263	1.055	0.693
SVSIJ	0.142	0.261	1.020	0.642

表 4-10 每组期权上全部模型的样本外 SSE

表4-10的结果表明，SVSIJ 模型在样本外仍然以微弱的优势胜出，说明随机利率、随机波动率和跳都蕴含在了市场观点里，都是具有意义的，均能为定价质量带来提升。

4.4 本章总结

在本章中，首先推导出了在一组风险中性测度下，标的、波动率和利率所服从的过程，随后基于美国十年期国债期权数据进行实证。我们获取的数据恰好对应着非常特殊的市场情况，甚至出现了“波动率反笑”的隐含波动率形态。本文在每天上对总共 7 个模型进行参数校准，并通过计算样本内与样本外 SSE 的方式检验每个模型相对于基础 BAW 模型为定价质量带来的提升。结果表明，随机利率、随机波动率和跳均能提升国债期货期权的定价质量，其中随机利率所带来的提升比较微弱，而随机波动率和跳所带来的提升非常明显。

第 5 章 总结与展望

随着我国金融市场的进一步发展，在不久的将来国债期货期权就会在中金所上市。基于其标的是交易量很大、流动性很强的国债期货，大量机构会出于套期保值或是对冲的需求进行期权的交易，而国债期货这一标的又具有明显区别于股票和股指期货的特殊性，因此对国债期货期权的定价研究在未来将逐渐受到重视，本文就是在这一背景下针对国债期货期权的定价质量开展研究。

自 Black,Scholes[3] 期权定价的经典工作以来，学术界关于衍生品定价的研究核心始终是考虑用标的的自融资组合对衍生品收益结构进行复制，本文同样继承了这一思想，理论核心仍然是寻找让所有自融资组合为鞅的测度作为风险中性测度，并在该测度下采用 Monte Carlo 方法定价。只是本文考虑到期货在实际的交易中需要支付保证金，其融资成本并不是 0，因此自融资组合的价格过程会受到保证金的影响有所变化，使得找到的风险中性测度也有所不同。

本文主要在应用方面开展了细致的工作。针对国债期货这一标的是利率衍生品的这一特殊性，首先引入了利率的随机性，来确保定价的基本假设是合理的，随后基于国内的券商场外报价数据进行实证研究，实证结果表明随机利率的引入并不能为定价质量带来明显提升。而这又引发了进一步的思考，基于国债期货本身就被质疑不服从几何布朗运动，这一点极有可能造成了模型的定价误差。因此，本文又引入了随机波动率和跳跃扩散过程，用详细的实证来分析几何布朗运动在不同假设下的放宽为模型的定价质量所带来的提升。实证研究基于美国十年期国债期货期权的场内日交易数据，结果表明，随机利率与跳的引入均能够明显提升模型对国债期货期权样本内和样本外定价的质量。

本文也有以下几个方面的不足：一、因为期权数据昂贵的原因，并未取到足够多的历史数据，所取的时间区间恰好是美联储加息，市场对国债期货有一致下跌预期的时间段。不过这反而是给模型带来挑战，我们从结果中可以看到，在 TYU2C 和 TYZ2C 这两组面临着反常市场情况的期权上，每个模型的表现都会较差。二、本文的模型始终将利率过程的随机性假设为与系统其他随机性均保持独立，而事实上国债期货这一标的的价格变化可以说就是由利率的变化引起的，因此应该为两者的随机驱动增设相关系数，而不是简单认为它们是独立的，这可以构成未来的研究方向。三、本文仅以样本内以及样本外的 SSE 作为衡量模型定价质量的标准，还可以考虑基于模型回测期权与标的的对冲效果，进一步研究模型对定价质量的提升，这同样可以构成未来的研究方向。

参考文献

- [1] 李暮春. 推动国债期货市场高质量发展持续提升服务实体经济质效[J]. 债券, 2022(11): 11-15.
- [2] BLACK F. The pricing of commodity contracts[J]. Journal of Financial Economics, 1976, 3 (1-2):167-179.
- [3] BLACK F, SCHOLES M. The pricing of options and corporate liabilities[J]. Journal of Political Economy, 1973, 81(3):637-654.
- [4] MERTON R C. Theory of rational option pricing[J]. The Bell Journal of Economics and Management Science, 1973:141-183.
- [5] HULL J, WHITE A. The pricing of options on assets with stochastic volatilities[J]. The Journal of Finance, 1987, 42(2):281-300.
- [6] HESTON S L. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options[J]. The Review of Financial Studies, 1993, 6(2):327-343.
- [7] MELINO A, TURNBULL S M. Misspecification and the pricing and hedging of long-term foreign currency options[J]. Journal of International Money and Finance, 1995, 14(3):373-393.
- [8] SCOTT L O. Option pricing when the variance changes randomly: Theory, estimation, and an application[J]. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1987, 22(4):419-438.
- [9] STEIN E M, STEIN J C. Stock price distributions with stochastic volatility: an analytic approach[J]. The Review of Financial Studies, 1991, 4(4):727-752.
- [10] MERTON R C. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous[J]. Journal of Financial Economics, 1976, 3(1-2):125-144.
- [11] BATES D S. The crash of '87: was it expected? the evidence from options markets[J]. The Journal of Finance, 1991, 46(3):1009-1044.
- [12] BAILEY W, STULZ R M. The pricing of stock index options in a general equilibrium model [J]. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1989, 24(1):1-12.
- [13] AMIN K I, NG V K. Option valuation with systematic stochastic volatility[J]. The Journal of Finance, 1993, 48(3):881-910.

- [14] BAKSHI G S, CHEN Z. An alternative valuation model for contingent claims[J]. Journal of Financial Economics, 1997, 44(1):123-165.
- [15] BAKSHI G S, CHEN Z. Equilibrium valuation of foreign exchange claims[J]. The Journal of Finance, 1997, 52(2):799-826.
- [16] SCOTT L O. Pricing stock options in a jump-diffusion model with stochastic volatility and interest rates: Applications of fourier inversion methods[J]. Mathematical Finance, 1997, 7(4):413-426.
- [17] COX J C, ROSS S A. The valuation of options for alternative stochastic processes[J]. Journal of Financial Economics, 1976, 3(1-2):145-166.
- [18] AÏT-SAHALIA Y, LO A W. Nonparametric estimation of state-price densities implicit in financial asset prices[J]. The Journal of Finance, 1998, 53(2):499-547.
- [19] BARONE-ADESI G, WHALEY R E. Efficient analytic approximation of american option values[J]. The Journal of Finance, 1987, 42(2):301-320.
- [20] LONGSTAFF F A, SCHWARTZ E S. Valuing american options by simulation: a simple least-squares approach[J]. The Review of Financial Studies, 2001, 14(1):113-147.
- [21] VASICEK O. An equilibrium characterization of the term structure[J]. Journal of Financial Economics, 1977, 5(2):177-188.
- [22] HARRISON J M, KREPS D M. Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets [J]. Journal of Economic Theory, 1979, 20(3):381-408.
- [23] HARRISON J M, PLISKA S R. Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading[J]. Stochastic Processes and Their Applications, 1981, 11(3):215-260.
- [24] GEMAN H, EL KAROUI N, ROCHET J C. Changes of numeraire, changes of probability measure and option pricing[J]. Journal of Applied Probability, 1995, 32(2):443-458.
- [25] MUSIELA M, RUTKOWSKI M, MUSIELA M, et al. Modifications of the black-scholes model[J]. Martingale Methods in Financial Modelling, 1997:135-158.
- [26] HUNT P, KENNEDY J. Financial derivatives in theory and practice: volume 556[M]. [S.l.]: John Wiley and Sons, 2004.
- [27] JAMSHIDIAN F. An exact bond option formula[J]. The Journal of Finance, 1989, 44(1): 205-209.
- [28] 姚落根. Vasicek 利率模型下几何亚式期权的定价[J]. 湘潭大学自然科学学报, 2004(3): 20-23.

-
- [29] OVERDAHL J A. The early exercise of options on treasury bond futures[J]. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 1988, 23(4):437-449.
- [30] CAKICI N, CHATTERJEE S, WOLF A. Empirical tests of valuation models for options on t-note and t-bond futures[J]. *The Journal of Futures Markets (1986-1998)*, 1993, 13(1):1.
- [31] STUTZER M, CHOWDHURY M. A simple non-parametric approach to bond futures option pricing[J]. *The Journal of Fixed Income*, 1999, 8(4):67-76.
- [32] TOMPKINS R G. Options on bond futures: isolating the risk premium[J]. *Journal of Futures Markets: Futures, Options, and Other Derivative Products*, 2003, 23(2):169-215.
- [33] SHREVE S E, et al. *Stochastic calculus for finance ii: Continuous-time models: volume 11* [M]. [S.l.]: Springer, 2004.
- [34] WHALEY R E. Valuation of american futures options: Theory and empirical tests[J]. *The Journal of Finance*, 1986, 41(1):127-150.
- [35] COX J C, INGERSOLL JR J E, ROSS S A. A theory of the term structure of interest rates [M]//*Theory of Valuation*. [S.l.]: World Scientific, 2005: 129-164.
- [36] HULL J, WHITE A. Pricing interest-rate-derivative securities[J]. *The Review of Financial Studies*, 1990, 3(4):573-592.
- [37] HEATH D, JARROW R, MORTON A. Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodology for contingent claims valuation[J]. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 1992:77-105.
- [38] BRIGO D, MERCURIO F, et al. *Interest rate models: theory and practice: volume 2*[M]. [S.l.]: Springer, 2001.
- [39] BATES D S. 20 testing option pricing models[J]. *Handbook of Statistics*, 1996, 14:567-611.
- [40] BAKSHI G, CAO C, CHEN Z. Empirical performance of alternative option pricing models [J]. *The Journal of Finance*, 1997, 52(5):2003-2049.

复旦大学 学位论文独创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。论文中除特别标注的内容外，不包含任何其他个人或机构已经发表或撰写过的研究成果。对本研究做出重要贡献的个人和集体，均已在论文中作了明确的声明并表示了谢意。本声明的法律结果由本人承担。

作者签名：_____ 日期：_____

复旦大学 学位论文使用授权声明

本人完全了解复旦大学有关收藏和利用博士、硕士学位论文的规定，即：学校有权收藏、使用并向国家有关部门或机构送交论文的印刷本和电子版本；允许论文被查阅和借阅；学校可以公布论文的全部或部分内容，可以采用影印、缩印或其它复制手段保存论文。涉密学位论文在解密后遵守此规定。

作者签名：_____ 导师签名：_____ 日期：_____