Aufgabe 1

Gegeben seien die Werte i_1 bis i_9, auf welche die Positionen der Felder 1 bis 9 zufällig verteilt sind. Für eine so gegebene beliebige Reihenfolge der Zahlen 1 - 9 lässt sich die zurückgelegte Strecke mit der folgenden Formel berechnen:

$$d = i_1 + i_9 + \sum_{k=1}^{8} |i_{k+1} - i_k|$$

a) Ein Beispiel für eine Sprungfolge mit der Gesamtdistanz 20 ist:
$6, 5, 9, 8, 7, 4, 3, 2, 1$;

$$\begin{aligned} d &= 6 + 1 + |6-5| + |5-9| + |9-8| + |8-7| \\ &\quad + |7-4| + |4-3| + |3-2| + |2-1| \\ &= 6 + 1 + 1 + 4 + 1 + 1 + 3 + 1 + 1 + 1 \\ &= 20 \end{aligned}$$

Um zu beweisen, dass für die Gesamtdistanz keine ungerade Strecke herauskommen kann, wird "der modulo 2 gebildet" (formulierung verbessern):

$$\begin{aligned} d \bmod 2 &= \left(i_1 + i_9 + \sum_{k=1}^{8} |i_{k+1} - i_k| \right) \bmod 2 \\ &= \left(i_1 + i_9 + \sum_{k=1}^{8} i_{k+1} - i_k \right) \bmod 2 \\ &= \Big(i_1 + i_9 + (i_2 - i_1) + (i_3 - i_2) + (i_4 - i_3) + (i_5 - i_4) \\ &\quad + (i_6 - i_5) + (i_7 - i_6) + (i_8 - i_7) + (i_9 - i_8) \Big) \bmod 2 \\ &= (2i_9) \bmod 2 \end{aligned}$$

$2i_9$ ist immer eine gerade Zahl, also gilt:

$$d \bmod 2 = (2i_9) \bmod 2 = 0$$

b) Folglich ist d für alle Sprungreihenfolgen eine gerade Zahl, sie kann also nicht 25 Längeneinheiten betragen.