geg.: $n! = \prod_{i=1}^{n} i \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

ges.: Letzte Ziffer von $n!$ $\neq 0$ (Im Nachfolgenden: $LZ(n!)$)

Andere Darstellungsform von $n!$ finden (durch Beispiel):

$$20! = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$
$$= 20 \cdot 15 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$
$$= 5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$
$$= 5^4 \cdot 4! \cdot 19 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 17 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 13 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1$$
$$= 5^4 \cdot 4! \cdot 2^8 \cdot (19 \cdot 9 \cdot 17 \cdot 8)(7 \cdot 13 \cdot 6 \cdot 11)(9 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 3)(2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1)$$
$$= 5^4 \cdot 2^4 \cdot 2^4 \cdot 4! \cdot (19 \cdot 9 \cdot 17 \cdot 8)(7 \cdot 13 \cdot 6 \cdot 11)(9 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 3)(2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1)$$
$$= 10^4 \cdot 2^4 \cdot 4! \cdot (19 \cdot 9 \cdot 17 \cdot 8)(7 \cdot 13 \cdot 6 \cdot 11)(9 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 3)(2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1)$$

Für $LZ(n!)$ spielt der Faktor 10^4 keine Rolle, d.h. er kann einfach weggelassen werden, da somit das Produkt auf 0 enden würde.
Außerdem endet das Produkt von je vier aufeinanderfolgenden Zahlen (beginnend bei 1) immer auf 6; für $LZ(n!)$ spielt also außerdem die Anzahl der 6er-Faktoren eine Rolle.
Im Beispiel:

$$LZ(20!) = 2^4 \cdot 4! \cdot \underbrace{(19 \cdot 9 \cdot 17 \cdot 8)}_{23256}\underbrace{(7 \cdot 13 \cdot 6 \cdot 11)}_{6006}\underbrace{(9 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 3)}_{756}\underbrace{(2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1)}_{6}$$
$$= 2^4 \cdot 4! \cdot 6^4$$
$$= (2 \cdot 6)^4 \cdot 4!$$
$$= 12^4 \cdot 4!$$

$LZ(20!)$ enthält 4 $(=\frac{20}{5})$ 12er-Faktoren, außerdem ist der Faktor $4! \left(=\left(\frac{20}{5}\right)!\right)$ enthalten.

Für ein n, für das $n \bmod 5 \neq 0$ wird für die

Berechnung aber genannter Faktoren der Operator $\lfloor\;\rfloor$ benötigt: $\lfloor n \rfloor$ ist die größte ganze Zahl $\leq n$.

Für solche n gilt:

$$LZ(n!) = 12^{\lfloor \frac{n}{5} \rfloor} \cdot \lfloor \tfrac{n}{5} \rfloor ! \cdot x$$

x ist hierbei ein Faktor, der die übrigen Faktoren darstellt, die größer als die größtmögliche ganze Zahl kleiner gleich $\frac{n}{5}$ und kleiner gleich n ist. (Faktor x wird benötigt, da sonst nach der Formel $LZ(n!) = 12^{\lfloor \frac{n}{5} \rfloor} \cdot \lfloor \frac{n}{5} \rfloor !$ bspw. $24!, 23!, 22!$ und $21!$ auf die selbe Ziffer enden würden (stimmt aber nicht!).

$$x = \frac{n!}{(\lfloor \frac{n}{5} \rfloor \cdot 5)!} \quad , \text{wobei } \lfloor \tfrac{n}{5} \rfloor \leq x \leq n$$

d.h. $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt also:

$$LZ(n!) = 12^{\lfloor \frac{n}{5} \rfloor} \cdot \lfloor \tfrac{n}{5} \rfloor ! \cdot \frac{n!}{(\lfloor \frac{n}{5} \rfloor \cdot 5)!}$$

$$= 2^{\lfloor \frac{n}{5} \rfloor} \cdot \lfloor \tfrac{n}{5} \rfloor ! \cdot \frac{n!}{(\lfloor \frac{n}{5} \rfloor \cdot 5)!}$$

, wobei auch hier für die letzte Ziffer der Faktor $12^{\lfloor \frac{n}{5} \rfloor}$ durch $2^{\lfloor \frac{n}{5} \rfloor}$ ersetzt werden kann.

Betrachtet wird nun der Faktor $2^{\lfloor \frac{n}{5} \rfloor}$ genauer:
Sei $k = \lfloor \frac{n}{5} \rfloor$:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2^k	2	4	8	16	32	64	128	256	512

Durch diesen Faktor - unabhängig von k - kann $LZ(n!)$ nur gerade Werte angenommen werden.

Ausgeschlossen werden können also:

0 (sowieso), $1, 3, 5, 7, 9$

Alle möglichen Ziffern $\neq 0$ auf die $n!$ enden kann, sind somit:

$2, 4, 6, 8$

Durch das in der Tabelle erkennbare, iterative Muster der letzten Ziffer von 2^k, lässt sich der Schluss fassen, dass jede der möglichen Zahlen $2, 4, 6, 8$ für $LZ(n!)$ sich ebenfalls wiederholt, und zwar – wie bei $2^k / 2^{\lfloor \frac{n}{5} \rfloor}$ – unendlich oft.