geg.: $n! = \prod_{i=1}^{n} i \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

ges.: Letzte Ziffer von $n!$ $\neq 0$ (Im Nachfolgenden: $LZ(n!)$)

Andere Darstellungsform von $n!$ finden (durch Beispiel):

$20! = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$= 20 \cdot 15 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$= 5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$= 5^4 \cdot 4! \cdot 19 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 17 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 13 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1$

$= 5^4 \cdot 4! \cdot 2^8 \cdot (19 \cdot 9 \cdot 17 \cdot 8)(7 \cdot 13 \cdot 6 \cdot 11)(9 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 3)(2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1)$

$= 5^4 \cdot 2^4 \cdot 2^4 \cdot 4! \cdot (19 \cdot 9 \cdot 17 \cdot 8)(7 \cdot 13 \cdot 6 \cdot 11)(9 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 3)(2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1)$

$= 10^4 \cdot 2^4 \cdot 4! \cdot (19 \cdot 9 \cdot 17 \cdot 8)(7 \cdot 13 \cdot 6 \cdot 11)(9 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 3)(2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1)$

Für $LZ(n!)$ spielt der Faktor $10^4$ keine Rolle, d.h. er kann einfach weggelassen werden, da somit das Produkt auf 0 enden würde.
Außerdem endet das Produkt von je vier aufeinanderfolgenden Zahlen (beginnend bei 1; wobei alle 5er-Faktoren ausgelassen werden) immer auf 6; für $LZ(n!)$ spielt also außerdem die Anzahl der 6er-Faktoren eine Rolle.

Ohne vorheriges "Ausklammern" der 2er-Faktoren, gibt es nur zwei Möglichkeiten für den Inhalt einer solchen Klammer:

1) $(\ldots 9 \cdot \ldots 8 \cdot \ldots 7 \cdot \ldots 6)$
2) $(\ldots 4 \cdot \ldots 3 \cdot \ldots 2 \cdot \ldots 1)$

(… vor der Zahl meint hier einfach, dass die Zahl auf die nachfolgende Ziffer endet.)

Zu 1) $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$; Zu 2) $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

$\Rightarrow$ Beide dieser Produkte enden immer, unabhängig von den vornanhängenden Resten der Zahlen, auf 4. Pro Klammern werden immer 2 2er-Faktoren entnommen: In der Tabelle unten (zu $k$ & $2^k$) wird bei $2^k$ von ...4 auf ...2 und dann auf ...6 zurückgesprungen. Somit enden die Produkte der vier Zahlen – ohne 2er-Faktoren – immer auf 6.

BIS HIERHER NEU

Im Beispiel:

$$LZ(20!) = 2^4 \cdot 4! \cdot \underbrace{(19\cdot 9\cdot 17\cdot 8)}_{23256}\underbrace{(7\cdot 13\cdot 6\cdot 11)}_{6006}\underbrace{(9\cdot 4\cdot 7\cdot 3)}_{756}\underbrace{(2\cdot 3\cdot 1\cdot 1)}_{6}$$

$$= 2^4 \cdot 4! \cdot 6^4$$
$$= (2\cdot 6)^4 \cdot 4!$$
$$= 12^4 \cdot 4!$$

$LZ(20!)$ enthält $4 \left(=\frac{20}{5}\right)$ 12er-Faktoren, außerdem ist der Faktor $4! \left(=\left(\frac{20}{5}\right)!\right)$ enthalten.

Für ein $n$, für das $n \bmod 5 \neq 0$ wird für die Berechnung oben genannter Faktoren der Operator $\lfloor\,\rfloor$ benötigt: $\lfloor n \rfloor$ ist die größte ganze Zahl $\leq n$.

Für solche $n$ gilt:

$$LZ(n!) = 12^{\lfloor \frac{n}{5} \rfloor} \cdot \lfloor \tfrac{n}{5} \rfloor ! \cdot x$$

$x$ ist hierbei ein Faktor, der die übrigen Faktoren darstellt, die größer als die größtmögliche ganze Zahl kleiner gleich $\frac{n}{5}$ und kleiner gleich $n$ ist. (Faktor $x$ wird benötigt, da sonst nach der Formel $LZ(n!) = 12^{\lfloor \frac{n}{5} \rfloor} \cdot \lfloor \frac{n}{5} \rfloor !$ bspw. $24!, 23!, 22!$ und $21!$ auf die selbe Ziffer enden würden (stimmt aber nicht!).

$$x = \frac{n!}{(\lfloor \frac{n}{5} \rfloor \cdot 5)!} \quad \text{, wobei } \lfloor \frac{n}{5} \rfloor \leq x \leq n$$

dh. $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt also:

$$LZ(n!) = 12^{\lfloor \frac{n}{5} \rfloor} \cdot \lfloor \frac{n}{5} \rfloor ! \cdot \frac{n!}{(\lfloor \frac{n}{5} \rfloor \cdot 5)!}$$

$$= 2^{\lfloor \frac{n}{5} \rfloor} \cdot \lfloor \frac{n}{5} \rfloor ! \cdot \frac{n!}{(\lfloor \frac{n}{5} \rfloor \cdot 5)!}$$

, wobei auch hier für die letzte Ziffer der Faktor $12^{\lfloor \frac{n}{5} \rfloor}$ durch $2^{\lfloor \frac{n}{5} \rfloor}$ ersetzt werden kann.

Betrachtet wird nur der Faktor $2^{\lfloor \frac{n}{5} \rfloor}$ genauer:

Sei $k = \lfloor \frac{n}{5} \rfloor$:

| $k$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2^k$ | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 |

Durch diesen Faktor - unabhängig von k - kann $LZ(n!)$ nur gerade Werte angenommen werden.

Ausgeschlossen werden können also:

0 (sowieso), 1, 3, 5, 7, 9

Alle möglichen Ziffern $\neq 0$ auf die $n!$ enden kann, sind somit:

2, 4, 6, 8

Durch das in der Tabelle erkennbare, iterative Muster der letzten Ziffer von $2^k$, lässt sich der Schluss fassen, dass jede der möglichen Zahlen 2, 4, 6, 8 für $LZ(n!)$ sich ebenfalls wiederholt, und zwar - wie bei $2^k / 2^{\lfloor \frac{n}{5} \rfloor}$ - unendlich oft.