

Apuntes del Programa Completo de Matemáticas Avanzadas para la Ingeniería

Ricardo Ceballos Sebastián

17 de marzo de 2025

Agradecimientos

Al Instituto Politécnico Nacional y a la Escuela Superior de Cómputo,
por el apoyo brindado para desarrollar este trabajo.

INST. POLITÉCNICO NACIONAL

Índice general

1. Operaciones con números complejos y diferenciación de funciones de variable compleja	11
1.1. Operaciones con números complejos	12
1.1.1. Operaciones: Suma, multiplicación, diferencia, división, complejo conjugado y módulo	12
1.1.2. Representación de un número complejo en el plano complejo	21
1.1.3. Potencias y raíces de un número complejo	23
1.2. Funciones de Variables Complejas	33
1.2.1. Conjuntos en el plano complejo	36
1.2.2. Separación de las partes real e imaginaria de una función de variable compleja, $f(z) = u + iv$	43
1.2.3. Polinomios, funciones racionales, exponencial, logaritmo, funciones trigonométricas, funciones trigonométricas inversas	48
1.2.4. Límite y continuidad	66
1.3. Diferenciación de funciones de variable compleja	80
1.3.1. Ecuaciones de Cauchy-Riemann	83
1.3.2. Propiedades de las funciones analíticas: Parte real e imaginaria	90
1.3.3. Reconstrucción de una función analítica a partir de su parte real o su parte imaginaria	102
1.4. Mapeos conformes	107
1.4.1. Transformación bilineal	130
1.4.2. Construcción de la carta de Smith	146
Apéndice	150
A. Aplicaciones o mapeos	153

B. Funciones generalizadas	161
B.1. Funciones generalizadas	161
B.2. Sucesiones de funciones generalizadas	167
B.3. Sucesiones regulares de la función generalizada delta	168
B.4. Derivadas de funciones generalizadas	175
B.5. Derivadas de la delta de Dirac	176
B.6. Derivada generalizada de una función con discontinuidades de salto	177
B.7. Reglas generales de diferenciación para funciones generalizadas	179

Índice de figuras

1.1. Representación de un número complejo en el plano complejo. .	22
1.2. Raíces cúbicas de la unidad.	28
1.3. Números complejos con el mismo módulo.	32
1.4. Triángulo equilátero.	32
1.5. Representación de una función de variable compleja.	34
1.6. Representación de una función de variable compleja con dominio discreto.	34
1.7. Representación de una función multivaluada.	36
1.8. Rectas en el plano complejo.	37
1.9. Representación de regiones en el plano complejo.	37
1.10. Representación de regiones circulares.	38
1.11. Vecindad o entorno de z_0	38
1.12. Anillo con centro en z_0 y de radios r_1 y r_2	39
1.13. Aproximación a la vecindad punteada de z_0	39
1.14. Conjunto abierto.	40
1.15. Conjuntos conexo y no conexo.	40
1.16. Dominio.	41
1.17. Puntos frontera, interior y exterior	41
1.18. Representación de un mapeo complejo.	44
1.19. Transformación de la circunferencia de radio R bajo $w = z^2$.	46
1.20. Transformación de la circunferencia de radio R bajo $w = 1/z$.	47
1.21. Imagen de la región D_1 bajo el mapeo z^2	48
1.22. Gráficas de $\sinh(\theta)$ y $\cosh(\theta)$	54
1.23. Ramas de la función $\arcsen z$	62
1.24. Posibles trayectorias de aproximación a z_0	71
1.25. Proyección estereográfica	73
1.26. Gráfica de la función $\arccos \theta$	76
1.27. Continuidad de la composición de funciones	79
1.28. La derivada compleja.	81
1.29. Trayectorias para obtener las ecuaciones de Cauchy-Riemann .	83
1.30. Diferenciabilidad de la composición de funciones	89

1.31. Dominio de analiticidad para $\text{Log } z$	98
1.32. Familias de curvas perpendiculares.	105
1.33. Representación de un mapeo complejo.	109
1.34. Mapeo que conserva el ángulo.	110
1.35. Mapeo que conserva el sentido.	110
1.36. Mapeo que no conserva el sentido.	111
1.37. Imagen bajo la aplicación $w = \text{Log}(z)$	112
1.38. Imagen de una curva bajo la aplicación analítica f	113
1.39. Imagen de una curva bajo la aplicación analítica f	114
1.40. Imagen de dos curvas suaves que se intersecan en z_0	115
1.41. Representación del mapeo de una región.	116
1.42. Imagen bajo la aplicación $w = z^2$	116
1.43. Imagen de la región R_{xy}^* bajo la aplicación $w = z^2$	120
1.44. Imagen de la región R_{xy}^* bajo la aplicación $w = z^2$	120
1.45. Imagen bajo la aplicación $w = z^2$	121
1.46. Imagen de la región R_{xy}^* bajo la aplicación $w = z^2$	123
1.47. Imagen bajo la aplicación $w = z^2$	124
1.48. Imagen bajo la aplicación $w = \text{sen}(z)$	125
1.49. Imagen bajo la aplicación $w = \text{sen}(z)$	128
1.50. Imagen bajo la aplicación $w = \text{sen}(z)$	128
1.51. Translación	132
1.52. Dilatación pura $w = 2z$	134
1.53. Dilatación pura $w = e^{(\frac{\pi}{4})i}z$	135
1.54. Dilatación/rotación $w = 2e^{(\frac{\pi}{4})i}z$	136
1.55. Inversión $w = 1/z$	137
1.56. Imagen bajo la inversión $w = 1/z$	139
1.57. Imagen bajo la inversión $w = 1/z$	141
1.58. Plano w	141
1.59.	145
1.60. Imagen bajo la transformación $w = \frac{i(z-2)}{z+2}$	146
1.61. Líneas verticales de resistencia constante.	148
1.62. Líneas horizontales de reactancia constante.	148
1.63. Carta de Smith.	149
B.1. Función de prueba y su primera derivada.	162
B.2. Sucesión convergente a cero en K	164
B.3. Sucesión no convergente a cero en K	164
B.4. Sucesión de funciones normales.	169
B.5. Sucesión de pulsos unitarios.	170
B.6. Representación de la función delta de Dirac.	172
B.7. Gráfica de una función con discontinuidades de salto.	178

B.8. Continuidad de la función $g(t)$	178
---	-----

INST. POLITÉCNICO NAT.

INST. POLITÉCNICO NACIONAL

Índice de tablas

1.1. Representación tabular de una función.	35
1.2. Representación tabular de la función z^2	35

INST. POLITÉCNICO NACIONAL

Capítulo 1

Operaciones con números complejos y diferenciación de funciones de variable compleja

Introducción a la teoría de las funciones de variable compleja

Los números complejos surgen al intentar encontrar soluciones a ecuaciones, aparentemente simples, como

$$x^2 + 1 = 0. \quad (1.0.1)$$

Es claro que no existen soluciones para la ecuación anterior dentro del conjunto de los números reales. La necesidad de resolver ecuaciones como la anterior dio origen a los números complejos, como una extensión de los números reales, en el cual las ecuaciones como la ecuación 1.0.1 tienen al menos una solución. Ahora se sabe que los números complejos constituyen un campo, es decir, los números complejos con dos operaciones (suma y producto) bien definidas, satisfacen los axiomas de campo. En este trabajo estudiaremos las aportaciones de Euler, Gauss, Cauchy, Riemann, De Moivre, entre otros, al desarrollo del análisis complejo. Las aplicaciones de la teoría de las funciones de variable compleja son innumerables, por ejemplo, la mecánica cuántica, la relatividad, los circuitos de corriente alterna, el electromagnetismo, las ecuaciones diferenciales etc...

1.1. Operaciones con números complejos

Para establecer la aritmética de los números complejos, postularemos la existencia del número imaginario i ; es decir, adoptaremos el enfoque de Euler.¹

1.1.1. Operaciones: Suma, multiplicación, diferencia, división, complejo conjugado y módulo

Definición 1.1.1 (Números complejos) *Un número complejo z es un número de la forma $z=a+bi$ o $z=a+ib$, donde a y b son números reales e i tiene la propiedad, $i^2 = -1$.*

El conjunto de todos los números complejos se denota por \mathbb{C} .

Definición 1.1.2 (Partes real e imaginaria) *Si $z=a+bi$ es un número complejo, al número real a se le conoce como la parte real del número z , y se le denota por $Re(z)$; mientras que al número real b se le conoce como la parte imaginaria del número z , y se le denota por $Im(z)$.*

Ejemplo 1.1.1 *Si $z = 3 - \sqrt{2}i$, entonces $Re(z) = 3$ e $Im(z) = -\sqrt{2}$.*

Los números complejos cuya parte imaginaria es igual a cero, se conocen como reales puros. De manera análoga, los números complejos cuya parte real es cero, se conocen como imaginarios puros. Por lo anterior, tanto el conjunto de todos los reales puros (\mathbb{R}) como el de todos los imaginarios puros son subconjuntos de \mathbb{C} .

Para establecer la aritmética de los números complejos se deben definir la igualdad, la suma y la multiplicación de números complejos.

La igualdad

Definición 1.1.3 (La igualdad) *Dos números complejos $z_1 = a+ib$ y $z_2 = c+id$ son iguales si y solo si, $a = c$ y $b = d$. En este caso se escribe $z_1 = z_2$. En caso contrario se dirá que z_1 es distinto o diferente a z_2 , y se escribirá $z_1 \neq z_2$.*

¹Leonhard Euler fue un matemático suizo. Se trata del principal matemático del siglo XVIII. Fue muy conocido por el número de Euler (e), número que aparece en muchas fórmulas de cálculo y física.

Ejemplo 1.1.2 Si $z_1 = x + (y^2 + 4)i$ y $z_2 = 2 + 8i$, entonces $z_1 = z_2$ si y solo si,

$$\begin{aligned}x &= 2, \\y^2 + 4 &= 8\end{aligned}$$

Las ecuaciones anteriores se satisface si y solo si, $x = 2$ y si y es cualquier elemento del conjunto $\{2, -2\}$.

La suma

Definición 1.1.4 (La suma) Dados dos números complejos $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$, la suma de los números complejos z_1 y z_2 , denotado por $z_1 + z_2$, se define mediante

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$$

Lo anterior significa que la parte real de la suma se obtiene sumando las partes reales de los términos, y la parte imaginaria de la suma se obtiene sumando las partes imaginarias de los términos, respectivamente.

Ejemplo 1.1.3 Si $z_1 = 2 - 5i$ y $z_2 = -1 + 4i$, entonces $z_1 + z_2 = 1 - i$.

El producto

Definición 1.1.5 (El producto) El producto de los números complejos z_1 y z_2 , denotado por $z_1 z_2$, se define como

$$z_1 z_2 = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i. \quad (1.1.1)$$

Aun cuando la definición del producto tiene una estructura más compleja que la suma, ésta puede obtenerse, de manera informal, siguiendo las reglas del álgebra y considerando que $i^2 = -1$, como se muestra a continuación.

$$\begin{aligned}z_1 z_2 &= (a + bi)(c + di), \\&= a(c + di) + (bi)(c + di), \\&= ac + (ad)i + (bc)i + (bd)i^2, \\&= ac + (ad + bc)i - bd, \\&= (ac - bd) + (ad + bc)i.\end{aligned}$$

Ejemplo 1.1.4 Si $z_1 = 3 - 4i$ y $z_2 = 4 - 5i$, entonces

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (3 - 4i)(4 - 5i), \\ &= (12 + 20i^2) + (-15 - 16)i, \\ &= -8 - 31i. \end{aligned}$$

Si k es un real puro y $z = a + bi$, de acuerdo con la definición 1.1.5,

$$kz = (k + 0i)(a + bi) = ka + kbi. \quad (1.1.2)$$

Ejemplo 1.1.5 Si $k = 5$ y $z = 3 - 4i$, entonces

$$\begin{aligned} 5z &= 5(3) + 5(-4)i, \\ &= 15 - 20i. \end{aligned}$$

Propiedades de los números complejos

Si z_1 , z_2 y z_3 son tres números complejos las siguientes propiedades (conocidos como axiomas de campo) se satisfacen:

1. $z_1 + z_2$ es un número complejo (Propiedad de cerradura para la suma)
2. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (Propiedad conmutativa para suma)
3. $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ (Propiedad asociativa para la suma)
4. Para todo z_1 existe un único elemento 0, llamado el neutro aditivo, tal que
 $z_1 + 0 = 0 + z_1 = z_1$ (Existencia y unicidad del elemento cero)
5. Para todo z_1 existe un único elemento $-z_1$, llamado inverso aditivo, tal que
 $z_1 + (-z_1) = (-z_1) + z_1 = 0$ (Existencia y unicidad del inverso aditivo)
6. $z_1 z_2$ es un número complejo (Propiedad de cerradura para la multiplicación)
7. $z_1 z_2 = z_2 z_1$ (Propiedad conmutativa para el producto)

8. $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$ (Propiedad asociativa para la multiplicación)
9. $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ (Propiedad distributiva)
10. Para todo z_1 existe un único elemento, llamado elemento neutro multiplicativo y denotado por 1, tal que
 $z_1 \cdot 1 = 1 \cdot z_1 = z_1$ (Existencia y unicidad del elemento neutro multiplicativo)
11. Para todo $z_1 \neq 0$ existe un único número llamado el inverso multiplicativo, denotado $\frac{1}{z_1}$, tal que
 $z_1(\frac{1}{z_1}) = (\frac{1}{z_1})z_1 = 1$ (Existencia y unicidad del inverso multiplicativo)

La resta o diferencia

El elemento neutro aditivo que permite satisfacer la propiedad 4 es el número complejo con parte real e imaginaria iguales a cero ($0 = 0 + 0i$). Además, dado un número complejo $z = a + bi$, el inverso aditivo de z ($-z$) que satisface la propiedad 5, es aquel que se obtiene multiplicando el real puro -1 con el complejo z , de acuerdo con la ecuación 1.1.2, es decir,

$$-z = -1 \cdot z = -a - bi.$$

Definición 1.1.6 (La resta o diferencia) Si $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$ son dos números complejos, se define la resta o diferencia de z_1 y z_2 , denotado por $z_1 - z_2$, mediante

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= z_1 + (-z_2), \\ &= (a + bi) + (-c - di), \\ &= (a - c) + (b - d)i. \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

Ejemplo 1.1.6 Si $z_1 = 2 + 3i$ y $z_2 = -3 + 2i$, entonces la diferencia de z_1 y z_2 es

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= z_1 + (-z_2), \\ &= (2 + 3i) + (3 - 2i), \\ &= 5 + i. \end{aligned}$$

La división

El elemento neutro multiplicativo que permite satisfacer la propiedad 10 es el número real puro igual a la unidad ($1 = 1 + 0i$). Si $z = a + ib$, el inverso multiplicativo de z puede determinarse, de acuerdo con la propiedad 11, como se muestra a continuación.

Sea $\frac{1}{z} = x + yi$, entonces

$$\begin{aligned} z \left(\frac{1}{z} \right) &= 1, \\ (a + bi)(x + yi) &= 1, \\ (ax - by) + (bx + ay)i &= 1. \end{aligned}$$

De acuerdo con la definición de igualdad de números complejos (definición 1.1.3)

$$\begin{aligned} ax - by &= 1, \\ bx + ay &= 0. \end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones anterior puede representarse matricialmente mediante,

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

El sistema tiene solución única si y solo si, el determinante de la matriz de coeficientes es diferente de cero. En este caso, $\det(A) = a^2 + b^2$, de manera que la solución será única siempre que a y b sean diferentes de cero. Concluyendo, si $z \neq 0$, entonces el inverso multiplicativo de z existe y es único. Aun cuando el sistema de ecuaciones puede resolverse para x y y , y así determinar el inverso multiplicativo, el procedimiento que se usará será diferente y se mostrará en las secciones siguientes (se requerirá del concepto de complejo conjugado de un número complejo).

Definición 1.1.7 (La división) Si z_1 y z_2 son dos números complejos, con $z_2 \neq 0$, entonces la división de z_1 y z_2 , denotado por $\frac{z_1}{z_2}$ se define con el uso del inverso multiplicativo de z_2 mediante,

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \left(\frac{1}{z_2} \right) \quad (1.1.4)$$

Definición 1.1.8 (El complejo conjugado) El complejo conjugado o simplemente el conjugado de un número complejo $z = a + bi$, denotado por \bar{z} o z^* , es un número complejo definido como

$$\bar{z} = a - bi. \quad (1.1.5)$$

Ejemplo 1.1.7 Si $z = 3 - 2i$, entonces el complejo conjugado de z es $\bar{z} = 3 + 2i$.

Ejemplo 1.1.8 Si $z = a + bi$ representa cualquier número complejo, determinar el producto $z\bar{z}$.

Solución: Dado que $z = a + bi$, entonces el complejo conjugado de z es $\bar{z} = a - bi$, y el producto

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2.$$

El valor absoluto o módulo

Definición 1.1.9 El valor absoluto o el módulo de un número complejo $z = a + bi$, denotado por $|z|$, es un número real definido mediante

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

De la definición anterior se sigue inmediatamente que

$$|z|^2 = z\bar{z}. \quad (1.1.6)$$

Ejemplo 1.1.9 Si $z = 3 - 4i$, entonces $|z|^2 = 3^2 + (-4)^2 = 25$ de manera que $|z| = \sqrt{25} = 5$.

Teorema 1.1.1 Si z es un número complejo cualquiera, entonces las siguientes proposiciones son válidas:

- a) $\bar{\bar{z}} = z$.
- b) $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$.
- c) $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$.

Demostración: Sea $z = a + ib$ un número complejo cualquiera, entonces

a)

$$\begin{aligned} \bar{z} &= a - ib, \\ \bar{\bar{z}} &= a + ib = z. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} z + \bar{z} &= (a + ib) + (a - ib), \\ &= 2a = 2\operatorname{Re}(z). \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} z - \bar{z} &= (a + ib) - (a - ib), \\ &= 2ib = 2i \operatorname{Im}(z). \end{aligned}$$

Teorema 1.1.2 Si z_1 y z_2 son dos números complejos cualesquiera, entonces

a) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2.$

b) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2.$

c) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}.$

Demostración: Sean $z_1 = a + ib$ y $z_2 = c + id$ números complejos cualesquiera, entonces

a)

$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= \overline{(a + ib) + (c + id)}, \\ &= \overline{(a + c) + i(b + d)}, \\ &= (a + c) - i(b + d), \\ &= (a - ib) + (c - id), \\ &= \bar{z}_1 + \bar{z}_2. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{(a + ib)(c + id)}, \\ &= \overline{(ac - bd) + i(bc + ad)}, \\ &= (ac - bd) - i(bc + ad), \\ &= (a - ib)(c - id), \\ &= \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} &= \overline{\left(\frac{z_1 \overline{z_2}}{|z_2|^2}\right)}, \\
&= \frac{1}{|z_2|^2} \overline{(z_1 \cdot \overline{z_2})}, \\
&= \frac{1}{|z_2|^2} (\overline{z_1} \cdot \overline{\overline{z_2}}), \\
&= \frac{1}{|z_2|^2} (\overline{z_1} z_2), \\
&= \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Teorema 1.1.3 Si z_1 y z_2 son dos números complejos, entonces

- a) $|z_1| = |\overline{z_1}|$.
- b) $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$.
- c) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.
- d) $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$.

Demostración:

- a) Sea $z_1 = a + ib$ un número complejo cualquiera, entonces $\overline{z_1} = a - ib$, de manera que

$$|\overline{z_1}| = \sqrt{a^2 + b^2} = |z_1|.$$

b)

$$\begin{aligned}
|z_1 z_2|^2 &= (z_1 z_2) \overline{z_1 z_2}, \\
&= (z_1 z_2) \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \\
&= (z_1 \overline{z_1}) (z_2 \overline{z_2}), \\
&= |z_1|^2 |z_2|^2.
\end{aligned}$$

Tomando la raíz cuadrada se concluye $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$.

- c) Considere el módulo al cuadrado de $z_1 + z_2$.

$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2) (\overline{z_1 + z_2}), \\
&= (z_1 + z_2) (\overline{z_1} + \overline{z_2}), \\
&= z_1 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_2} + z_1 \overline{z_2} + z_2 \overline{z_1}, \\
&= |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1 \overline{z_2} + z_2 \overline{z_1},
\end{aligned}$$

La última igualdad permite expresar,

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 - |z_1|^2 - |z_2|^2 &= z_1 \overline{z_2} + \overline{z_2} z_1, \\ &= 2\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) \leq 2|z_1 \overline{z_2}|. \end{aligned}$$

Por lo anterior,

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1 \overline{z_2}|, \\ &\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||\overline{z_2}|, \\ &\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2|, \\ &\leq (|z_1| + |z_2|)^2, \end{aligned}$$

Extrayendo la raíz cuadrada se concluye que,

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

- d) Para dos complejos cualesquiera z_1 y z_2 defínanse los complejos $w = z_1 - z_2$ y $v = z_2$. La desigualdad del triángulo para w y v se establece como:

$$\begin{aligned} |w + v| &\leq |w| + |v|, \\ |(z_1 - z_2) + z_2| &\leq |z_1 - z_2| + |z_2|, \\ |z_1| &\leq |z_1 - z_2| + |z_2|, \\ |z_1| - |z_2| &\leq |z_1 - z_2|. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Los incisos b) y c) pueden generalizarse de manera inmediata para n números complejos, donde n es un entero positivo.

El complejo conjugado permite desarrollar una técnica para determinar la división de dos números complejos, como se muestra a continuación.

Si z_1 y z_2 son dos números complejos tales que $z_2 \neq 0$, entonces la división $\frac{z_1}{z_2}$ puede obtener multiplicando la cantidad anterior por la unidad, expresada mediante $\frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}}$; es decir,

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1}{z_2} \left(\frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} \right), \\ &= \frac{z_1 \overline{z_2}}{|z_2|^2}. \end{aligned} \tag{1.1.7}$$

Ejemplo 1.1.10 Si $z_1 = 50 + 100i$ y $z_2 = 4 - 3i$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1}{z_2} \left(\frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} \right), \\ &= \frac{(50 + 100i)(4 + 3i)}{25}, \\ &= (2 + 4i)(4 + 3i), \\ &= -4 + 22i.\end{aligned}$$

1.1.2. Representación de un número complejo en el plano complejo

El enfoque de Hamilton

Un enfoque mucho más formal de los números complejos fue desarrollado por Hamilton². En este enfoque, los complejos se constituyen de un conjunto de objetos, parejas ordenadas de la forma (a, b) donde a y b son números reales. La aritmética dentro del conjunto se define mediante la igualdad, la suma y la multiplicación.

Definición 1.1.10 (La igualdad) Dos parejas ordenadas $z_1 = (a, b)$ y $z_2 = (c, d)$ son iguales si y solo si, $a = c$ y $b = d$, en cuyo caso se escribe $z_1 = z_2$. En caso contrario se dice que z_1 y z_2 son distintos o diferentes y se escribe $z_1 \neq z_2$.

Definición 1.1.11 (La suma) Si $z_1 = (a, b)$ y $z_2 = (c, d)$ son dos parejas ordenadas, se define la suma de z_1 y z_2 , denotado $z_1 + z_2$ mediante

$$z_1 + z_2 = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d).$$

Definición 1.1.12 (El producto) Si $z_1 = (a, b)$ y $z_2 = (c, d)$ son dos parejas ordenadas, se define la suma de z_1 y z_2 , denotado $z_1 z_2$ mediante

$$z_1 z_2 = (a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

El conjunto de todas las parejas ordenadas con estas dos operaciones constituye el conjunto de los números complejos y satisface todos los axiomas de campo numerados anteriormente. Para este conjunto, el neutro aditivo es la

²William Rowan Hamilton fue un matemático irlandés que a mediados del siglo XIX presentó una formulación de la teoría de los números complejos que prescinde del número imaginario i .

pareja ordenada $(0, 0)$, mientras que el elemento neutro multiplicativo es la pareja ordenada $(1, 0)$. Obsérvese que $(0, 1)$ satisface la siguiente propiedad,

$$(0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -(1, 0).$$

Si se hacen $i = (0, 1)$ y $1 = (1, 0)$, entonces la ecuación $z^2 = -1$ es satisfecha por la pareja ordenada $i = (0, 1)$. Puede probarse que $-i = (0, -1)$ también satisface la ecuación.

Por lo descrito anteriormente, resulta natural representar a un número complejo en el plano cartesiano. Cuando el plano cartesiano se utiliza para representar a los números complejos, en general se habla del plano complejo. Un número complejo $z = (a, b)$, de acuerdo con la notación de Hamilton, o $z = a + ib$, de acuerdo con la notación de Euler, puede interpretarse en el plano complejo como un punto simple de coordenadas (a, b) , o bien, éste puede interpretarse como el radio vector (la flecha) que va desde el origen al punto (a, b) , como se muestra en la figura 1.1.

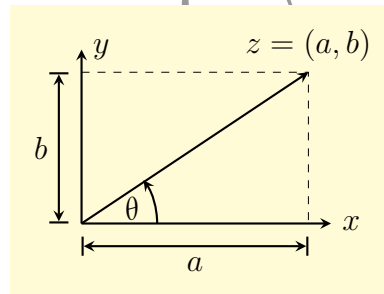


Figura 1.1: Representación de un número complejo en el plano complejo.

Representación polar

De acuerdo con lo estudiado en la sección anterior, un número complejo puede representarse como un punto o como un vector. De este modo, se hablará del punto z o del vector z para referirse al número complejo z . Dado que el vector que representa al número complejo z se determina por su magnitud y su dirección, en este caso la magnitud del vector, denotado por r , corresponde al módulo del número complejo z ($|z|$). La dirección del vector, denotado por (θ) , se conoce como argumento del número complejo z y se representa por $\arg(z)$. El ángulo θ se mide a partir del eje x , hasta la flecha que representa al vector z , siempre avanzando en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj. El vector z puede expresarse en términos

de r y θ , como se muestra en la figura 1.1. Para cualquier $z \neq 0$ el ángulo θ debe estar entre 0 y 2π , mientras que r podrá asumir cualquier valor real positivo. Si $z = 0$, entonces $r = 0$, mientras que θ queda indefinida y podrá asignarse cualquier valor conveniente.

Obsérvese que $a = r \cos \theta$ y $b = r \sin \theta$, luego

$$\begin{aligned} z &= a + bi, \\ z &= (r \cos \theta) + (r \sin \theta)i, \\ z &= r(\cos \theta + i \sin \theta). \end{aligned}$$

Debido a que las funciones $\sin \theta$ y $\cos \theta$ son funciones periódicas, con período 2π , entonces z es una función multivaluada que asume el mismo valor al sumar cualquier múltiplo entero, positivo o negativo, de 2π al ángulo θ ; es decir, z puede expresarse como

$$z = r(\cos(\theta + 2k\pi) + i \sin(\theta + 2k\pi)), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

El argumento de z puede ser cualquier número real; sin embargo, si el argumento de z se encuentra entre 0 y 2π , éste se conoce como argumento principal y se denota por $\text{Arg}(z)$.

1.1.3. Potencias y raíces de un número complejo

Definición 1.1.13 (Potencias positivas de un número complejo) Si $z = a + bi$ es un número complejo y n es un entero positivo, entonces se define la potencia n -ésima de z como

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_{n\text{-factores}},$$

además, si $z \neq 0$ se define $z^0 = 1$.

Ejemplo 1.1.11 Para la unidad imaginaria i se tiene

$$\begin{aligned} i^1 &= i, \\ i^2 &= -1, \\ i^3 &= i^2 \cdot i = -i, \end{aligned}$$

Definición 1.1.14 (Potencias negativas de un número complejo) Si $z = (a + bi) \neq 0$ es un número complejo y n es un entero positivo, entonces se

define la potencia n -ésima negativa de z como

$$z^{-n} = \left(\frac{1}{z}\right)^n = \underbrace{\left(\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{z}\right)\cdots\left(\frac{1}{z}\right)}_{n\text{-factores}}.$$

Ejemplo 1.1.12 Si $z = 1 + i$, entonces

$$\begin{aligned} z^{-1} &= \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z * \bar{z}} = \frac{1}{2}(1 - i), \\ z^{-2} &= \left(\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{z}\right) = \left[\frac{1}{2}(1 - i)\right]\left[\frac{1}{2}(1 - i)\right] = \frac{1}{4}(1 - i)^2 = \frac{1}{4}(1 - 2i + i^2) = -\frac{i}{2}, \\ z^{-3} &= \left(\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{8}(1 - i)^3 = \frac{1}{8}(1 - 3i + 3i^2 - i^3) = \frac{1}{8}(1 - 3i - 3 + i), \\ &= \frac{1}{8}(-2 - 2i) = -\frac{1}{4}(1 + i). \end{aligned}$$

Producto y cociente de complejos en la forma polar

Teorema 1.1.4 Si $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)$ y $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$, entonces

$$\begin{aligned} a) \quad z_1 z_2 &= r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)), \\ b) \quad \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)), \quad \text{siempre que } z_2 \neq 0. \end{aligned}$$

Demostración:

a) Considere el producto de acuerdo con la definición 1.1.5.

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 (\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2), \\ &= r_1 r_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 + i(\cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 + \cos \theta_2 \operatorname{sen} \theta_1)), \\ &= r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)). \end{aligned}$$

b) Considérese el cociente de acuerdo con la ecuación 1.1.7, para $z_2 \neq 0$.

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}, \\ &= \frac{r_1}{r_2} \left(\frac{(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)(\cos \theta_2 - i \operatorname{sen} \theta_2)}{\cos^2 \theta_2 + \operatorname{sen}^2 \theta_2} \right), \\ &= \frac{r_1}{r_2} (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 + i(-\cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 + \cos \theta_2 \operatorname{sen} \theta_1)), \\ &= \frac{r_1}{r_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)). \end{aligned}$$

La utilidad de las ecuaciones anteriores en la ingeniería ha llevado a establecer una notación práctica y económica, la cual se presenta a continuación.

$$\angle \theta = \text{cis} \theta = \cos \theta + i \sin \theta. \quad (1.1.8)$$

Lo anterior permite representar un número complejo como

$$z = r \angle \theta = r \text{cis} \theta = r(\cos \theta + i \sin \theta). \quad (1.1.9)$$

De esta manera, la multiplicación y el cociente se representan como

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \angle \theta_1 + \theta_2, \quad (1.1.10)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \angle \theta_1 - \theta_2, \quad \text{si } z_2 \neq 0. \quad (1.1.11)$$

Fórmula de De Moivre y raíces

Teorema 1.1.5 Si z_1, z_2, \dots, z_n son n números complejos, con $n \geq 2$, tal que

$$z_i = r_i \angle \theta_i, \quad \text{para } 1 \leq i \leq n,$$

entonces

$$z_1 z_2 \dots z_n = r_1 r_2 \dots r_n \angle \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n$$

Demostración: Se proporcionará la demostración mediante el método de inducción matemática.

1. La propiedad se satisface para $n = 2$, pues corresponde al teorema 1.1.4.
2. Se supondrá que el resultado es válido para un cierto k (Hipótesis de inducción), de manera que

$$z_1 z_2 \dots z_k = r_1 r_2 \dots r_k \angle \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_k = r^* \angle \theta^*$$

3. Considérese ahora el producto $z_1 z_2 \dots z_{k+1}$.

$$\begin{aligned} z_1 z_2 \dots z_{k+1} &= (z_1 z_2 \dots z_k) z_{k+1}, \\ &= r^* \angle \theta^* z_{k+1}, \\ &= r^* r_{k+1} \angle \theta^* + \theta_{k+1}, \\ &= (r_1 r_2 \dots r_k) r_{k+1} \angle (\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_k) + \theta_{k+1}, \\ &= r_1 r_2 \dots r_{k+1} \angle \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_{k+1}, \quad \blacksquare \end{aligned}$$

El teorema anterior permite determinar la potencia n -ésima positiva de un número complejo $z = r\angle\theta$, a saber

$$z^n = r^n \angle n\theta \quad \text{donde } n \text{ es un entero positivo} \quad (1.1.12)$$

Por otro lado, si n es un entero negativo, entonces $n = -|n|$, donde $|n|$ en este caso corresponde al valor absoluto del entero n . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} z^n &= z^{-|n|}, \\ &= \left(\frac{1}{z}\right)^{|n|}. \end{aligned} \quad (1.1.13)$$

Además,

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1 \cdot \bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}, \\ &= \frac{\bar{z}}{|z|^2}, \\ &= \frac{r(\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta)}{r^2}, \\ &= \frac{1}{r}(\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta), \\ &= r^{-1}(\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta)). \end{aligned} \quad (1.1.14)$$

Obsérvese que la ecuación 1.1.14 puede obtenerse mediante el uso del teorema 1.1.4 considerando el cociente de los números complejos $z_1 = 1\angle 0$ y $z_2 = r\angle\theta$.

De las ecuaciones 1.1.13 y 1.1.14 se obtiene,

$$\begin{aligned} z^n &= (r^{-1}(\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta)))^{|n|}, \\ &= (r^{-|n|}(\cos(-|n|\theta) + i \operatorname{sen}(-|n|\theta))), \\ &= r^n(\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)). \end{aligned}$$

Por lo discutido anteriormente, para cualquier entero n , positivo o negativo, se satisface la ecuación

$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)). \quad (1.1.15)$$

La ecuación anterior permite establecer lo que se conoce como fórmula de De Moivre. Para un complejo z de módulo igual a la unidad se tiene, de acuerdo con la ecuación 1.1.15,

$$(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = (\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)). \quad (1.1.16)$$

Ejemplo 1.1.13 Si $z = 2 + 2i$, determine z^4 .

Solución: El módulo y el argumento principal de z son:

$$r = |z| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2},$$

$$\theta = \text{Arg}(z) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

De acuerdo con la ecuación 1.1.15,

$$\begin{aligned}(2 + 2i)^4 &= (\sqrt{8})^4 \angle \frac{4\pi}{4}, \\ &= 64 \angle \pi, \\ &= 64(\cos(\pi) + i \sin(\pi)), \\ &= -64.\end{aligned}$$

Para $n = 2$ se obtienen las siguientes identidades trigonométricas.

$$\begin{aligned}(\cos \theta + i \sin \theta)^2 &= (\cos(2\theta) + i \sin(2\theta)), \\ (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + i(2 \cos \theta \sin \theta) &= \cos(2\theta) + i \sin(2\theta).\end{aligned}$$

Igualando las partes reales e imaginarias se obtiene

$$\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta, \quad (1.1.17)$$

$$\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta. \quad (1.1.18)$$

Potencias fraccionarias y raíces complejas

Si m es un entero y se requiere determinar el complejo z_0 tal que $z_0^m = z$, donde z es un número complejo cualquiera, entonces z_0 se conoce como la raíz m -ésima de z , y se representa como $z^{1/m}$, de esta manera, $(z^{1/m})^m = z$. Si se expresan z y z_0 en forma polar como $z = r \angle \theta$ y $z_0 = r_0 \angle \theta_0$, entonces

$$\begin{aligned}z_0^m &= z, \\ r_0^m \angle m\theta_0 &= r \angle \theta.\end{aligned}$$

La ecuación anterior permite establecer que, $r_0^m = r$ o de manera equivalente, $r_0 = r^{1/m}$. Por otro lado, el ángulo, $m\theta_0 = \theta$ no describe de manera general la igualdad en forma polar. El caso general debe incluir la periodicidad de las

funciones $\sin \theta$ y $\cos \theta$. Por lo aquí argumentado, el caso general corresponde a $m\theta_0 = \theta + 2k\pi$, donde k es un entero cualquiera, con lo cual

$$z^{1/m} = r^{1/m} \left/ \frac{\theta}{m} + \frac{2k\pi}{m} \right., \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.1.19)$$

En principio la ecuación anterior es válida para todo entero k , sin embargo, las raíces m -ésimas diferentes se obtienen para los valores de $k = 0, 1, 2, \dots, m-1$, así que para valores mayores o menores no se generarán raíces diferentes, por lo tanto,

$$z^{1/m} = r^{1/m} \left/ \frac{\theta}{m} + \frac{2k\pi}{m} \right., \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \quad (1.1.20)$$

Ejemplo 1.1.14 Determine las raíces cúbicas de la unidad y represente estas raíces en el plano complejo.

Solución: Las raíces m -ésimas de la unidad se representan en general como: $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{m-1}$.

- Para $k = 0$, $\omega_0 = 1^{1/3} = 1^{1/3} / 0 = 1$.
- Para $k = 1$, $\omega_1 = 1^{1/3} = 1^{1/3} / \frac{2}{3}\pi$.
- Para $k = 2$, $\omega_2 = 1^{1/3} = 1^{1/3} / \frac{4}{3}\pi$.

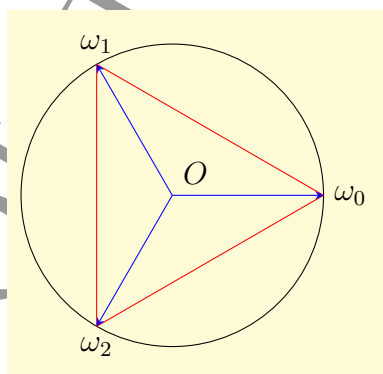


Figura 1.2: Raíces cúbicas de la unidad.

En la figura 1.2 se muestran las tres raíces cúbicas de la unidad. Se observa que las tres raíces definen un triángulo equilátero inscrito en un círculo de radio igual a la unidad. En general, las raíces $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{m-1}$ definen un polígono regular circunscrito en un círculo de radio uno.

Definición 1.1.15 (Potencias fraccionarias) Si n y m son enteros tales que n/m es una fracción irreducible, entonces la potencia fraccionaria de z , denotada mediante $z^{n/m}$ puede determinarse de acuerdo con las ecuaciones 1.1.15 y 1.1.20 como:

$$z^{n/m} = r^{n/m} \angle \frac{n\theta}{m} + \frac{2nk\pi}{m}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \quad (1.1.21)$$

Ejemplo 1.1.15 Si $z = \sqrt{3} + i$ determine el valor de $z^{2/3}$.

Solución: En primer lugar determínese el módulo y el argumento principal de z .

$$r = \sqrt{3+1} = 2,$$

$$\text{Arg}(z) = \theta = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

Sustituyendo lo anterior en la ecuación 1.1.21 se obtiene

$$\begin{aligned} (\sqrt{3} + i)^{2/3} &= 2^{2/3} \angle \frac{2\pi}{6(3)} + \frac{4k\pi}{3}, \quad k = 0, 1, 2. \\ &= 2^{2/3} \angle \frac{\pi}{9} + \frac{4k\pi}{3}, \quad k = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

Por último, los valores correspondientes para cada valor de k son:

- Para $k = 0$, $z_0 = (\sqrt{3} + i)^{2/3} = 2^{2/3} \angle \frac{\pi}{9}$.
- Para $k = 1$, $z_1 = (\sqrt{3} + i)^{2/3} = 2^{2/3} \angle \frac{\pi}{9} + \frac{4\pi}{3} = 2^{2/3} \angle \frac{13\pi}{9}$.
- Para $k = 2$, $z_2 = (\sqrt{3} + i)^{2/3} = 2^{2/3} \angle \frac{\pi}{9} + \frac{8\pi}{3} = 2^{2/3} \angle \frac{25\pi}{9}$.

Representación exponencial

Otra forma de operar con números complejos se logra mediante la fórmula de Euler, a saber

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta. \quad (1.1.22)$$

La fórmula de Euler puede obtenerse, de manera informal³, a partir de los desarrollos de Taylor de las funciones reales e^x , $\sin x$ y $\cos x$. El desarrollo en serie de Taylor de una función real $f(x)$, está determinado por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) \frac{x^n}{n!}. \quad (1.1.23)$$

³Una demostración formal requiere el conocimiento del desarrollo en serie de Taylor de las funciones de variable compleja, lo cual estudiaremos en el capítulo 2.

Para las funciones $f(x) = e^x$, $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $f(x) = \cos x$ se tiene,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad (1.1.24)$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad (1.1.25)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}. \quad (1.1.26)$$

Suponiendo que la ecuación 1.1.24 es válida para el imaginario puro $i\theta$, entonces

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + (i\theta) + \frac{(i\theta)^2}{2} + \frac{(i\theta)^3}{6} + \dots, \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^5}{5!} \dots\right), \\ &= \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta. \end{aligned}$$

Si se sustituye $\theta = \pi$ en la fórmula de Euler se obtiene,

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \operatorname{sen} \pi,$$

luego,

$$e^{i\pi} = -1,$$

finalmente,

$$e^{i\pi} + 1 = 0. \quad (1.1.27)$$

La ecuación anterior tiene la sorprendente cualidad de relacionar a los números más importantes de las matemáticas.

La fórmula de Euler permite representar a un número complejo, cuya forma polar es $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$, mediante

$$z = re^{i\theta}. \quad (1.1.28)$$

Nuevamente el número complejo es equivalente a

$$z = re^{i(\theta+2k\pi)}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.1.29)$$

La multiplicación y la división de los números complejos $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ y $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ se determinan mediante

$$z_1 z_2 = (r_1 e^{i\theta_1})(r_2 e^{i\theta_2}) = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}, \quad (1.1.30)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}, \quad r_2 \neq 0. \quad (1.1.31)$$

La potencia n -ésima del complejo $z = r e^{i\theta}$ es,

$$z^n = (r e^{i\theta})^n = r^n e^{i(n\theta)}. \quad (1.1.32)$$

Si z tiene módulo igual a la unidad, la ecuación anterior permite establecer

$$(e^{i\theta})^n = e^{i(n\theta)}. \quad (1.1.33)$$

Esta ecuación representa la forma exponencial de la fórmula de DeMoivre.

La raíz n -ésima del número $z = r e^{i\theta}$ es

$$z^{1/m} = r^{1/m} e^{\frac{\theta}{m} + \frac{2k\pi}{m}}, \quad k = 0, 1, 2 \dots m-1. \quad (1.1.34)$$

La potencia fraccionaria del número z es

$$z^{n/m} = r^{n/m} e^{\frac{n\theta}{m} + \frac{2nk\pi}{m}}, \quad k = 0, 1, 2 \dots m-1, \quad (1.1.35)$$

donde n/m es una fracción irreducible.

Ejemplo 1.1.16 Si $z_1 = r e^{i\theta_1}$ y $z_2 = r e^{i\theta_2}$ son dos números complejos tales que $z_1 \neq z_2$; es decir, $|z_1| = |z_2| = r$, pero los argumentos principales son diferentes. Supóngase que $\theta_2 > \theta_1$, entonces

$$z_2 = e^{i(\theta_2 - \theta_1)} z_1. \quad (1.1.36)$$

Solución: En la figura 1.3 se muestra la situación descrita.

Se observa que,

$$\begin{aligned} z_2 &= r e^{i\theta_2}, \\ &= r e^{i(\theta_1 + (\theta_2 - \theta_1))}, \\ &= r e^{i\theta_1} e^{i(\theta_2 - \theta_1)}, \\ &= z_1 e^{i(\theta_2 - \theta_1)}. \end{aligned}$$

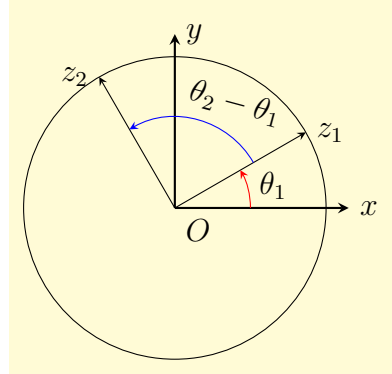


Figura 1.3: Números complejos con el mismo módulo.

Ejemplo 1.1.17 Si z , u y v son números complejos, éstos forman los vértices de un triángulo equilátero si y solo si la siguiente ecuación se satisface.

$$z^2 + u^2 + v^2 = zu + uv + zv. \quad (1.1.37)$$

Solución: De acuerdo con la figura 1.4, considerando las direcciones de las flechas, los números complejos a , b y c se determinan en términos de z , u y v como:

$$a = u - z$$

$$b = v - z$$

$$c = u - v.$$

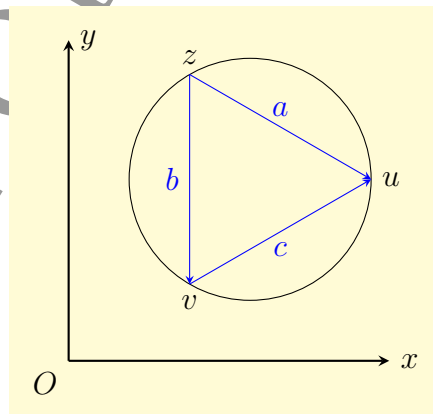


Figura 1.4: Triángulo equilátero.

Los números a y b tienen la misma magnitud y entre ellos existe un ángulo de $\frac{\pi}{3}$. Del ejemplo anterior se tiene,

$$a = e^{i\frac{\pi}{3}}b.$$

Los números a y c tienen la misma magnitud y entre ellos existe un ángulo de $\frac{\pi}{3}$. Del ejemplo anterior se tiene,

$$c = e^{i\frac{\pi}{3}}a.$$

De las ecuaciones anteriores se tiene

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{a}.$$

De lo anterior,

$$a^2 = bc$$

Sustituyendo los valores de a , b y c se obtiene

$$\begin{aligned}(u - z)^2 &= (v - z)(u - v), \\ u^2 - 2uz + z^2 &= vu - v^2 - zu + zv, \\ z^2 + u^2 + v^2 &= uz + zv + vu.\end{aligned}$$

1.2. Funciones de Variables Complejas

En los cursos de cálculo superior se estudian las funciones de variables reales que asumen valores reales. En esta sección se estudiarán las funciones de variables complejas que asumen valores complejos. En general, una aplicación o mapeo (ver apéndice A) se denota como $f : A \rightarrow B$. En esta notación, f determina una regla de asociación que asigna a cada elemento del conjunto A uno y solo un elemento del conjunto B . Al conjunto A se le conoce como dominio de la aplicación, mientras que al conjunto B se le conoce como contradominio o rango de la aplicación.

Representación de una función de variable compleja

Definición 1.2.1 (Función de variable compleja) Sean A y B dos subconjuntos del conjunto de los números complejos, y sea f una regla que asocia a cada elemento $z \in A$ con uno y solo un elemento $w \in B$, entonces se dice que f es una función compleja de variable compleja o, simplemente, función de variable compleja. La figura 1.5 muestra una representación gráfica de una función.

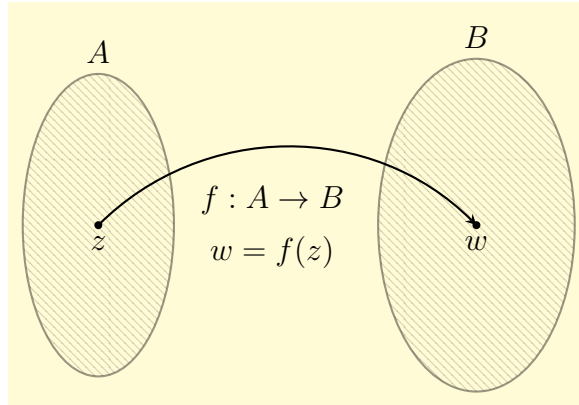


Figura 1.5: Representación de una función de variable compleja.

Si el número complejo $z \in A$ representa cualquier valor del dominio de una función de variable compleja y $w \in B$ es el único elemento que f asocia con z , entonces escribiremos $w = f(z)$. Se dice que w es la imagen de z bajo f ; además, z se conoce como variable independiente, mientras que w se conoce como variable dependiente.

Si el dominio de una función de variable compleja es un conjunto finito, entonces es posible enlistar o tabular la función, como se muestra en la tabla 1.1.

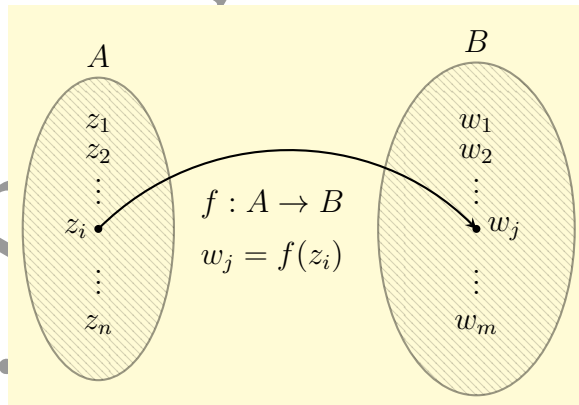


Figura 1.6: Representación de una función de variable compleja con dominio discreto.

variable independiente	variable dependiente
z	$w = f(z)$
z_1	w_1
z_2	w_2
\vdots	\vdots
z_n	w_m

Tabla 1.1: Representación tabular de una función.

Obsérvese que en general, algunos valores del rango pueden asignarse a más de un elemento del dominio y, sin embargo, la definición de función se satisface.

Ejemplo 1.2.1 Si se define la función compleja f mediante la siguiente tabla

variable independiente	variable dependiente
z	$f(z)$
i	-1
$-i$	-1

Tabla 1.2: Representación tabular de la función z^2 .

Esta función también puede representarse mediante una fórmula de la siguiente manera:

$$f(z) = \begin{cases} z^2, & i, -i. \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (1.2.1)$$

Si en el ejemplo anterior el dominio de la función se extiende a todos los complejos, entonces existe una imposibilidad práctica de representar a la función mediante una tabla. En estos casos se recomienda usar una fórmula y especificar el dominio y el rango, como se muestra a continuación: $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$.

Definición 1.2.2 (Funciones multivaluadas) Una regla de asociación entre dos conjuntos A y B que asigna más de un elemento a uno o más elementos del conjunto A se conoce como función multivaluada.

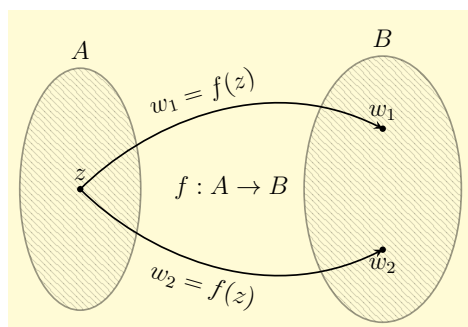


Figura 1.7: Representación de una función multivaluada.

Estrictamente una función multivaluada no es una función; sin embargo, en muchos casos de interés será posible descomponer una función multivaluada en dos o más funciones que satisfacen la definición 1.2.1. Cada una de las funciones que componen una función multivaluada f se conocen como ramas de la función. En la figura 1.7 f_1 y f_2 son ramas de la función multivaluada f .

1.2.1. Conjuntos en el plano complejo

Como se vio anteriormente, los números complejos pueden interpretarse como puntos o vectores en el plano complejo. A diferencia de los números reales, los números complejos no satisfacen relaciones de orden, de manera que siempre que los signos de desigualdad aparezcan en una relación, éstas harán referencia exclusivamente a números reales. Las relaciones de orden entre números reales permiten representar regiones y lugares geométricos en el plano complejo, como se muestra a continuación.

Lugares geométricos y regiones en el plano complejo

Considérese que a y b son números reales. Si se representa al complejo z como $z = x + iy$, entonces $Re(z) = a$ equivale a la ecuación $x = a$. Por lo tanto, $Re(z) = a$ determina una línea recta vertical que pasa por el punto $(a, 0)$. De la misma manera, expresiones como: $Im(z) = b$ y $Re(z) = aIm(z) + b$ representan líneas rectas, como se muestra en la figura 1.8.

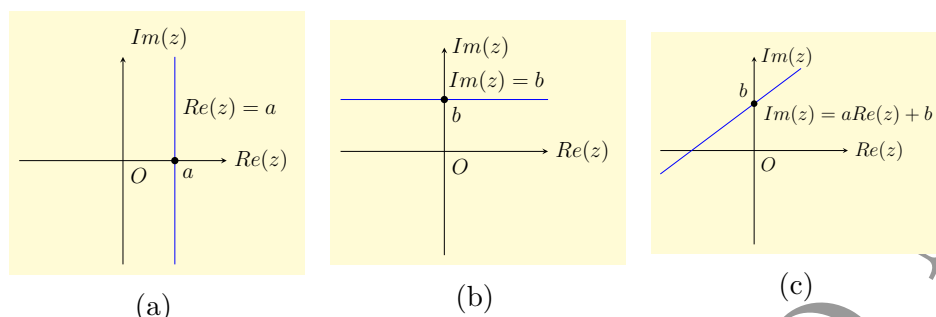


Figura 1.8: Rectas en el plano complejo.

Mediante el uso de desigualdades es posible representar regiones en el plano complejo: Las desigualdades $Re(z) \leq a$, $Im(z) \leq b$ e $Im(z) \leq Re(z)$ se muestran en la figura 1.9.

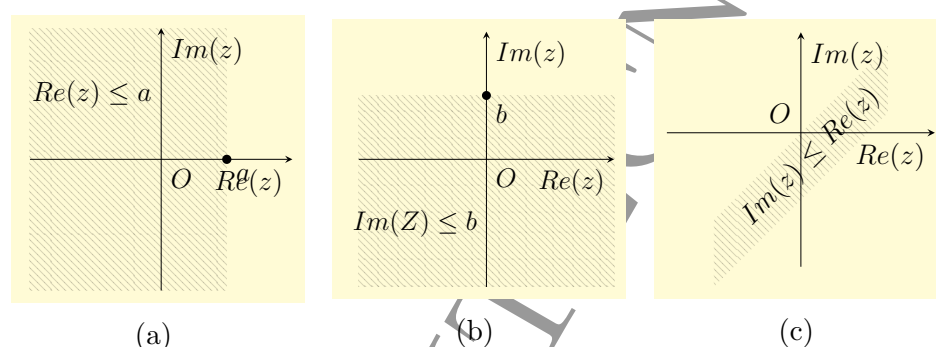


Figura 1.9: Representación de regiones en el plano complejo.

La circunferencia de radio r con centro en el origen es el lugar geométrico que corresponde a los puntos del plano complejo cuyos módulos son iguales a r ; es decir, los puntos de la circunferencia satisfacen la ecuación: $|z| = r$ o de manera equivalente $x^2 + y^2 = r^2$. Mediante el uso de las desigualdades es posible describir las regiones tanto interiores como exteriores a la circunferencia. En la figura 1.10 se muestran dos regiones interiores que son de mucho interés y que serán de utilidad para definir la analiticidad de las funciones de variable compleja.

Los puntos z que pertenecen a la circunferencia de radio r centrada en el origen, $|z| = r$, pueden representarse en forma exponencial como $z = re^{i\theta}$. De manera análoga, la circunferencia de radio r centrada en z_0 se representa en forma exponencial como $z = z_0 + re^{i\theta}$.

Obsérvese que si los puntos de la circunferencia no pertenecen a la región, la circunferencia se dibuja con líneas punteadas.

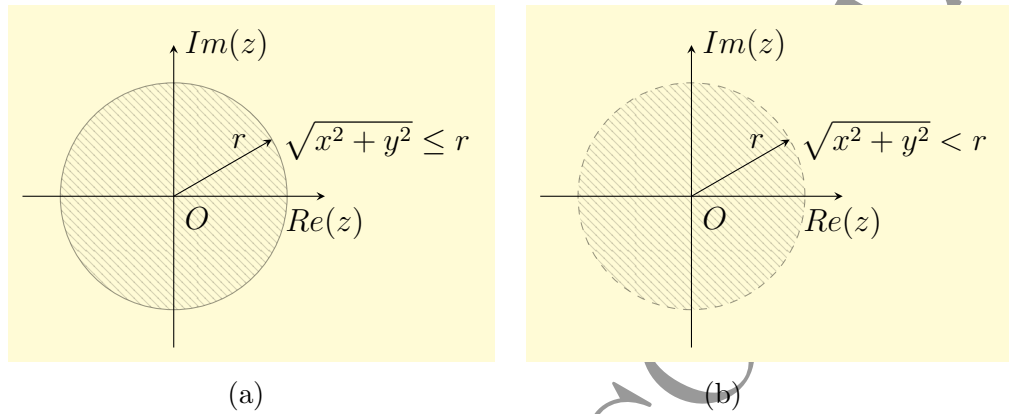


Figura 1.10: Representación de regiones circulares.

Puntos y conjuntos

Un conjunto es una colección de objetos bien definidos. En esta sección se definirán conjuntos especiales de números complejos. Estos conjuntos permitirán definir conceptos fundamentales como límite y continuidad. Los puntos que forman un conjunto de números complejos se conocen como elementos del conjunto.

Definición 1.2.3 (Vecindad o entorno de z_0) Se llama *vecindad o entorno de radio r de un punto z_0* al conjunto de puntos en el interior de la circunferencia centrado en z_0 definido por $|z - z_0| < r$. En la figura 1.11 se representa una vecindad de z_0 .

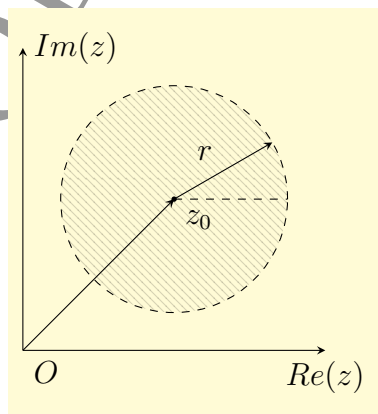


Figura 1.11: Vecindad o entorno de z_0 .

Definición 1.2.4 (Anillo con centro en z_0) Sean r_1 y r_2 números reales diferentes de cero, tales que $r_1 < r_2$, entonces un anillo con centro en z_0 y de radios r_1 y r_2 es la región acotada por las circunferencias de radios r_1 y r_2 centradas en z_0 . El anillo es la región definida matemáticamente por la desigualdad $r_1 < |z - z_0| < r_2$.

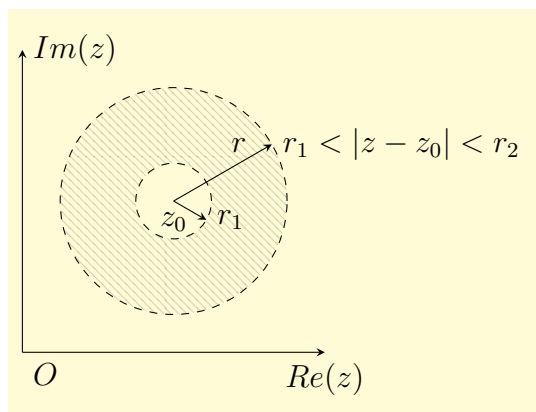


Figura 1.12: Anillo con centro en z_0 y de radios r_1 y r_2 .

Definición 1.2.5 (Vecindad punteada de z_0) Una vecindad punteada de z_0 es una vecindad de z_0 que no contiene a z_0 .

La figura 1.13 muestra un anillo centrado en z_0 y de radios r y ϵ . Si se hace que ϵ tienda a cero mientras que r permanece constante, entonces se obtiene una vecindad punteada de z_0 de radio r .

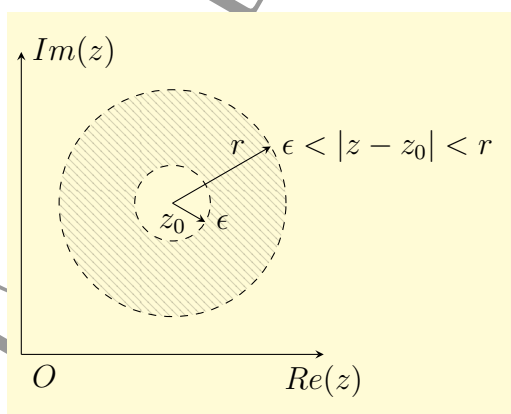
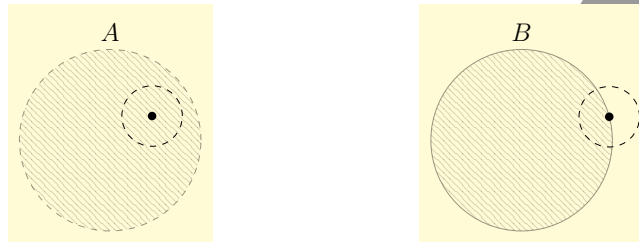


Figura 1.13: Aproximación a la vecindad punteada de z_0

Definición 1.2.6 (Conjunto abierto) *Un conjunto se conoce como abierto si para todo punto z en el conjunto existe una vecindad de z que pertenece al conjunto.*

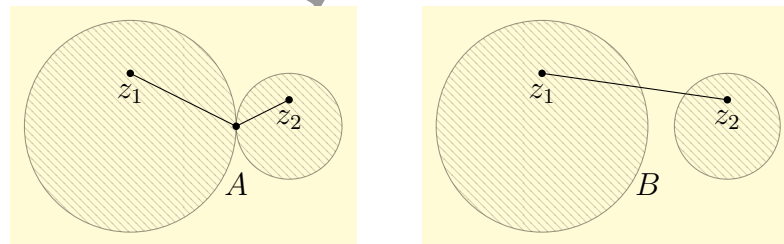


(a) A es un conjunto abierto. (b) B no es un conjunto abierto.

Figura 1.14: Conjunto abierto.

En la figura 1.14, el conjunto A representa un conjunto abierto mientras que el conjunto B representa un conjunto que no lo es, ya que los puntos en la circunferencia que limita a B no tienen una vecindad que pertenezca al conjunto B .

Definición 1.2.7 (Conjunto conexo) *Un conjunto es conexo si, dado dos puntos en el conjunto es posible unir dichos puntos mediante segmentos de rectas, los cuales pertenecen al conjunto.*

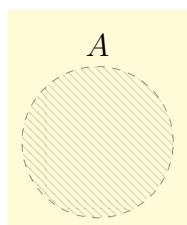


(a) A es un conjunto conexo. (b) B no es un conjunto conexo.

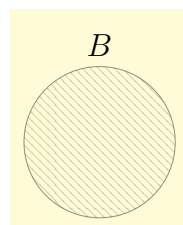
Figura 1.15: Conjuntos conexo y no conexo.

En la figura 1.15, el conjunto A es conexo, ya que toda pareja de puntos z_1 y z_2 pueden ser unidos mediante segmentos de rectas que pertenecen al conjunto. Por otro lado, el conjunto B no es un conjunto conexo, ya que cualquier segmento que una a z_1 y z_2 tendrá una porción que no pertenezca al conjunto B .

Definición 1.2.8 (Dominio) *Se conoce como dominio a cualquier conjunto abierto conexo.*



(a) A es un dominio.

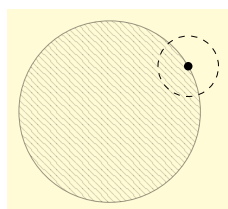


(b) B no es dominio.

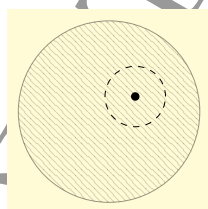
Figura 1.16: Dominio.

En la figura 1.16a el conjunto A representa un dominio, ya que es abierto y conexo. Por otro lado, dado que el conjunto B (figura 1.16b) no es abierto, no puede ser un dominio.

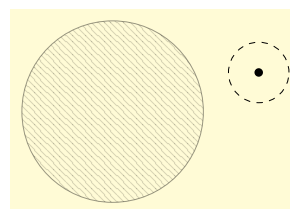
Definición 1.2.9 (Punto frontera) *Un punto frontera de un conjunto es un punto cuyas vecindades contienen al menos un punto perteneciente al conjunto y un punto que no se encuentra en el conjunto. (ver la figura 1.17a)*



(a) Punto frontera.



(b) Punto interior.



(c) Punto exterior.

Figura 1.17: Puntos frontera, interior y exterior

Definición 1.2.10 (Punto interior) *Un punto interior de un conjunto es un punto que tiene al menos una vecindad cuyos puntos, en su totalidad, se encuentran dentro del conjunto. (ver la figura 1.17b)*

Definición 1.2.11 (Punto exterior) *Un punto exterior de un conjunto es un punto que tiene una vecindad cuyos puntos, en su totalidad, no pertenecen al conjunto. (ver la figura 1.17c)*

Definición 1.2.12 (Punto de acumulación o punto límite) *Un punto de acumulación de un conjunto, es un punto para el cual cada vecindad punteada contiene al menos un punto del conjunto. No se requiere que el punto de acumulación pertenezca al conjunto.*

Definición 1.2.13 (Conjunto vacío) *El conjunto vacío es aquel que no contiene elemento alguno.*

Definición 1.2.14 (Región) *Una región es un dominio más todos, algunos o ninguno de sus puntos frontera. Obsérvese que todo dominio es una región; sin embargo, no toda región es un dominio.*

Definición 1.2.15 (Región cerrada) *Una región cerrada es un dominio más todos los puntos fronteras del dominio.*

Definición 1.2.16 (Conjunto acotado) *Un conjunto es acotado si es posible hallar en una vecindad del origen con radio finito r , de tal manera que el conjunto esté contenido en dicha vecindad.*

Teorema 1.2.1 *Sea S un conjunto de números complejos, entonces los elementos de S son puntos interiores o bien puntos fronteras de S .*

Demostración: Supóngase que z_0 es un elemento de S y que S no es un punto interior, entonces si $r > 0$ la vecindad $|z - z_0| < r$ contiene al menos un punto, éste punto puede ser z_0 , que pertenece al conjunto S y al menos un punto que no pertenece al conjunto. En consecuencia z_0 es un punto frontera de S . ■

Teorema 1.2.2 *Si S es un conjunto abierto, entonces S no contiene a sus puntos fronteras.*

Demostración: Supóngase que z_0 , está en la frontera de S , entonces si $r > 0$ la vecindad $|z - z_0| < r$ contiene al menos un punto que pertenece al conjunto S y al menos un punto que no pertenece al conjunto. Dado que S es abierto z_0 no puede estar en S . ■

Teorema 1.2.3 *S es un conjunto cerrado de números complejos si y solo si S contiene a todos sus puntos de acumulación.*

Demostración:

\Rightarrow) Sea S un conjunto cerrado de números complejos y sea z_0 un punto de acumulación de S . Supóngase que z_0 no está en S . Dado que z_0 es un punto

de acumulación de S , entonces toda vecindad punteada D centrada en z_0 y de radio $r > 0$ contiene al menos un punto de S , además, como z_0 no está en S , entonces z_0 es un punto frontera de S . Hemos llegado a una contradicción: z_0 es un punto frontera que no está en S , siendo S un conjunto cerrado. La contradicción se origina por suponer que el punto de acumulación z_0 de S no está en S ; por lo tanto, concluimos que S contiene a todos sus puntos de acumulación.

\Leftarrow) Supóngase que w es un punto de acumulación, de manera que por hipótesis w está en S . Ahora se debe probar que S es cerrado, lo cual significa que contiene a todos sus puntos frontera. Supóngase que z_0 es un punto frontera de S y z_0 no está en S . Como z_0 es un punto frontera, toda vecindad $|z - z_0| < r$ siendo $r > 0$ contiene al menos un punto $z_1 \neq z_0$ que está en S , por lo tanto, z_0 es un punto de acumulación. Hemos llegado a una contradicción: z_0 es un punto de acumulación que no está en S . La contradicción surge de suponer que z_0 no está en S . Se concluye que S contiene a todos sus puntos frontera y, por lo tanto, S es un conjunto cerrado. ■

1.2.2. Separación de las partes real e imaginaria de una función de variable compleja, $f(z) = u + iv$

Dada una función $f(z)$, siempre es posible expresar la función f en función de las variables x y y , dado que $z = x + iy$; por ejemplo, si $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ se define como $f(z) = z^2$, entonces

$$\begin{aligned} f(z) &= (x + iy)^2, \\ &= (x^2 - y^2) + i(2xy). \end{aligned}$$

En general, $f(z)$ puede expresarse como $w = u(x, y) + iv(x, y)$, para el caso anterior

$$\begin{aligned} w &= z^2, \\ u(x, y) &= x^2 - y^2, \\ v(x, y) &= 2xy. \end{aligned}$$

Si se conoce $w = f(x, y)$, es posible reescribir $w = f(z)$ haciendo uso de las identidades

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \\ y &= \frac{1}{2i}(z - \bar{z}). \end{aligned}$$

Transformaciones circunferencias y regiones circulares

En cursos de cálculo de funciones de variable real, hemos aprendido a construir la gráfica de la función $f : A \rightarrow B$ donde tanto el dominio A como el recorrido B son subconjuntos de \mathbb{R} . La gráfica de la función f corresponde al lugar geométrico definido por $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \in A \text{ y } y = f(x)\}$. Una representación gráfica de este tipo, es imposible para una función compleja de variable compleja, ya que tanto z como w son puntos del plano complejo, de manera que para representar el par ordenado (z, w) se requiere un espacio de dimensión cuatro. Por lo anterior, para obtener una imagen de como la función f actúa sobre puntos, curvas o regiones, consideraremos que la función compleja de variable compleja $f : D_1 \rightarrow D_2$ toma un punto de la curva o región del plano complejo z , cuyos ejes son x y y , y lo mapea bajo f al punto de la curva o región del plano complejo $w = f(z) = u + iv$, cuyos ejes son u y v , como se muestra en la figura 1.18.

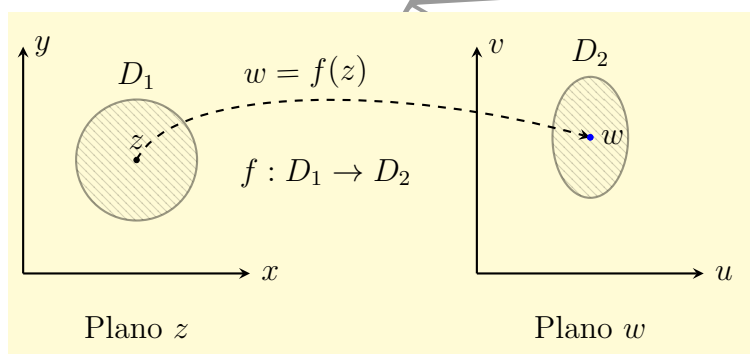


Figura 1.18: Representación de un mapeo complejo.

Sea $w = f(z)$ una función definida en una región R del plano complejo z , si hacemos $z = x + iy$ y sea $w = f(z) = u(z) + iv(z)$, entonces es posible estudiar la gráfica de $f(z)$ en el plano w a partir de las funciones reales u y v . Supóngase que la curva en el plano z está determinada por $F(x, y) = 0$. Deseamos hallar la imagen en el plano w de esta curva, digamos $\psi(u, v)$, bajo la aplicación $w = f(z) = u + iv$. Lo anterior puede lograrse si podemos expresar las funciones $u(x, y)$, $v(x, y)$, y $F(x, y)$ en términos de u y v . Para hallar la ecuación imagen $\psi(u, v)$ de la curva en el plano w , será necesario sustituir la ecuación paramétrica de la curva $z(t) = x(t) + iy(t)$; entonces, la imagen de la curva estará definida por una función $\psi(u, v) = 0$.

Ejemplo 1.2.2 Hallar la imagen de la circunferencia $z(t) = R \cos(t) + iR \sin(t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, bajo la aplicación $w = z^2$.

Solución: Sea $z = x + iy$, determinemos las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$.

$$\begin{aligned} w &= (x + iy)^2, \\ &= x^2 - y^2 + 2ixy, \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} u(x, y) &= x^2 - y^2, \\ v(x, y) &= 2xy. \end{aligned}$$

Sustituyendo $x = R \cos t$ y $y = R \sin t$, en las ecuaciones anteriores, se obtiene

$$\begin{aligned} u(x, y) &= R^2(\cos^2 t - \sin^2 t) = R^2 \cos(2t), \\ v(x, y) &= 2R^2 \cos t \sin t = R^2 \sin(2t). \end{aligned}$$

De las ecuaciones anteriores se tiene

$$u^2 + v^2 = R^4. \quad (1.2.2)$$

La imagen de la circunferencia de radio R (en el plano z) es otra circunferencia de radio R^2 (en el plano w), como se deriva de la ecuación 1.2.2. Por otro lado, la ecuación paramétrica de la circunferencia en el plano w es:

$$w = R^2 \cos(2t) + iR^2 \sin(2t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \quad (1.2.3)$$

De la ecuación 1.2.3 se observa que cuando el punto z recorre la circunferencia $|z| = R$ en el plano z , entonces el punto w recorre la circunferencia $|w| = R^2$ dos veces, en el mismo sentido, como se muestra en la figura 1.19.

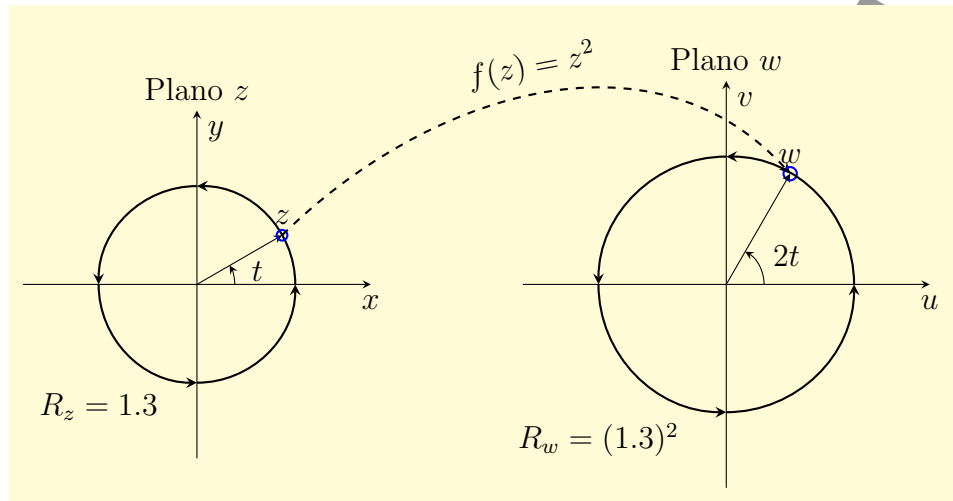


Figura 1.19: Transformación de la circunferencia de radio R bajo $w = z^2$

Ejemplo 1.2.3 Determine la imagen de la circunferencia de radio R bajo la función $w = 1/z$.

Solución: Sea $z = x + iy$, determinemos las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$.

$$w = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2},$$

por lo tanto,

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

$$v(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2},$$

La circunferencia puede parametrizarse como

$$z(t) = x(t) + iy(t) = R \cos t + Ri \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Sustituyendo obtenemos

$$u(x, y) = \frac{1}{R} \cos t,$$

$$v(x, y) = -\frac{1}{R} \sin t.$$

Por las ecuaciones anteriores

$$u^2 + v^2 = \frac{1}{R^2}. \quad (1.2.4)$$

La ecuación 1.2.4 indica que la imagen de la circunferencia $|z| = R$ en el plano z es la circunferencia $|w| = \frac{1}{R}$ en el plano w . Por último, la ecuación paramétrica de la circunferencia en el plano w es:

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{R} \cos t - i \frac{1}{R} \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \\ &= \frac{1}{R} \cos(-t) + i \frac{1}{R} \sin(-t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

De la ecuación 1.2.5 se observa que cuando el punto z recorre la circunferencia $|z| = R$ en el sentido contrario a las manecillas del reloj, el punto w recorrerá la circunferencia $|w| = \frac{1}{R}$ en el sentido de las manecillas del reloj, como se muestra en la figura 1.20.

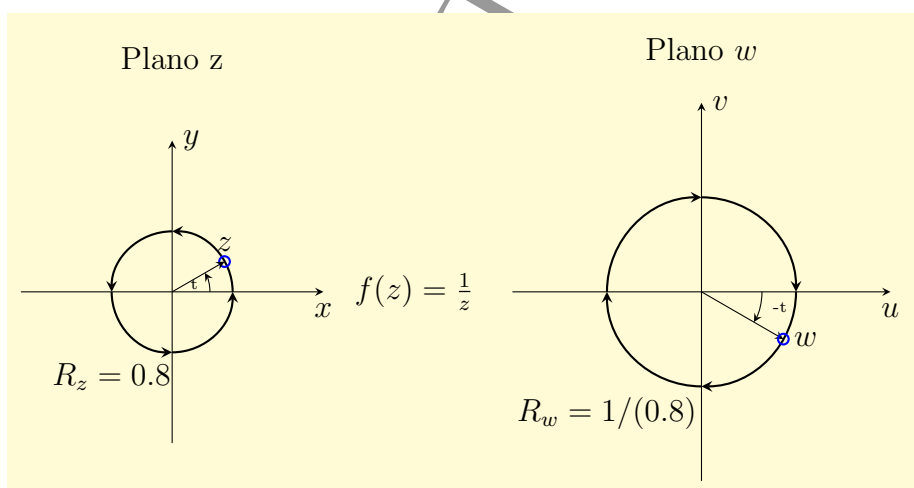


Figura 1.20: Transformación de la circunferencia de radio R bajo $w = 1/z$

Ejemplo 1.2.4 Considérese la función $f : D_1 \rightarrow D_2$ donde $f(z) = z^2$ y el dominio $D_1 = \{z : |z| \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$; es decir, el dominio D_1 es el sector circular que se muestra en la figura 1.21. Para determinar la imagen

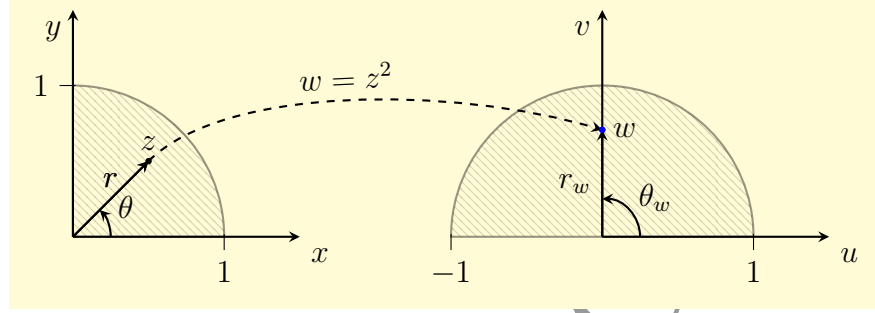


Figura 1.21: Imagen de la región D_1 bajo el mapeo z^2

de D_1 representemos el complejo z en forma polar; es decir, $z = re^{i\theta}$, donde, $r = |z| \leq 1$ y $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Ahora, dado que, $w = f(z) = z^2 = r^2 e^{2i\theta} = r_w e^{i\theta_w}$, entonces, $D_2 = \{w : r_w \leq 1, 0 \leq \theta_w \leq \pi\}$. D_2 es el semicírculo unitario que se muestra en la figura 1.21.

1.2.3. Polinomios, funciones racionales, exponencial, logaritmo, funciones trigonométricas, funciones trigonométricas inversas

Funciones polinómicas

Definición 1.2.17 (Funciones polinómicas) Se define como función polinómica o polinomio de grado n , donde n es un entero positivo, a la función

$$p_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0, \quad (1.2.6)$$

donde los coeficientes a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 son números complejos y $a_n \neq 0$.

Ejemplo 1.2.5 La siguiente ecuación representa un polinomio de grado 3.

$$f(z) = (1 - i)z^3 + 7iz + 4.$$

Funciones racionales

Definición 1.2.18 (Funciones racionales) Se define como función racional al cociente de dos funciones polinómicas.

$$R(z) = \frac{p_n(z)}{q_m(z)} = \frac{a_n z^n + \dots + a_0}{b_m z^m + \dots + b_0} \quad (1.2.7)$$

Ejemplo 1.2.6 La siguiente ecuación representa una función racional.

$$f(z) = \frac{(1-i)z^3 + 7iz + 4}{z^4 + 1}.$$

Función exponencial

Definición 1.2.19 (Función exponencial) La función exponencial para la variable compleja $z = x + iy$ se define como

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y), \quad (1.2.8)$$

donde e^x es la función exponencial real.

Teorema 1.2.4 (Propiedades) La función exponencial satisface las siguientes propiedades: Si z_1 y z_2 son dos números complejos

a) $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2},$

b) $\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2},$

c) Si n es un entero, entonces $(e^{z_1})^n = e^{nz_1}.$

Demostración: Sean $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$, entonces

a)

$$\begin{aligned} e^{z_1}e^{z_2} &= e^{a+bi}e^{c+di}, \\ &= e^a(\cos b + i \operatorname{sen} b)e^c(\cos d + i \operatorname{sen} d), \\ &= e^{(a+c)}(\cos b + i \operatorname{sen} b)(\cos d + i \operatorname{sen} d), \\ &= e^{(a+c)}[(\cos b \cos d - \operatorname{sen} b \operatorname{sen} d) + i(\cos b \operatorname{sen} d + \operatorname{sen} b \cos d)], \\ &= e^{(a+c)}[\cos(b+d) + i \operatorname{sen}(b+d)], \\ &= e^{(a+c)+i(b+d)}, \\ &= e^{z_1+z_2}. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} &= \frac{e^{a+bi}}{e^{c+di}}, \\
&= \frac{e^a(\cos b + i \operatorname{sen} b)}{e^c(\cos d + i \operatorname{sen} d)}, \\
&= e^{(a-c)} \frac{(\cos b + i \operatorname{sen} b)(\cos d - i \operatorname{sen} d)}{\cos^2 d + \operatorname{sen}^2 d} \\
&= e^{(a-c)} [(\cos b \cos d - \operatorname{sen} b \operatorname{sen} d) + i(-\cos b \operatorname{sen} d + \operatorname{sen} b \cos d)], \\
&= e^{(a-c)} [\cos(b-d) + i \operatorname{sen}(b-d)], \\
&= e^{(a-c)+i(b-d)}, \\
&= e^{z_1 - z_2}.
\end{aligned}$$

c) Sea $z_1 = z_2 = \dots = z_n = z = a + ib$, entonces

$$\begin{aligned}
(e^z)^n &= \underbrace{e^z e^z \dots e^z}_{n-\text{factores}}, \\
&= \underbrace{e^{a+bi} e^{a+bi} \dots e^{a+bi}}_{n-\text{factores}}, \\
&= \underbrace{e^a e^a \dots e^a}_{n-\text{factores}} \underbrace{(\cos b + i \operatorname{sen} b)(\cos b + i \operatorname{sen} b) \dots (\cos b + i \operatorname{sen} b)}_{n-\text{factores}}, \\
&= e^{na} (\cos b + i \operatorname{sen} b)^n, \\
&= e^{na} (\cos nb + i \operatorname{sen} nb), \text{ de acuerdo con la fórmula de De Moivre,} \\
&= e^{na+inb}, \\
&= e^{nz}. \blacksquare
\end{aligned}$$

Funciones trigonométricas

De acuerdo con la fórmula de Euler

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta, \quad (1.2.9)$$

$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \operatorname{sen} \theta, \quad (1.2.10)$$

Sumando las ecuaciones 1.2.9 y 1.2.10 se obtiene

$$2 \cos \theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta},$$

de este modo,

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}. \quad (1.2.11)$$

Restando las ecuaciones 1.2.9 y 1.2.10 se obtiene

$$2i \operatorname{sen} \theta = e^{i\theta} - e^{-i\theta},$$

de este modo,

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}. \quad (1.2.12)$$

Las ecuaciones 1.2.11 y 1.2.12 nos sirven de guía para definir a las funciones trigonométricas de variable compleja: seno, coseno y tangente, respectivamente, mediante

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad (1.2.13)$$

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad (1.2.14)$$

$$\tan z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z} = -i \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}. \quad (1.2.15)$$

De manera análoga al caso real se definen las funciones trigonométricas secante, cosecante y cotangente.

$$\sec z = \frac{1}{\cos z} = \frac{2}{e^{iz} + e^{-iz}}, \quad (1.2.16)$$

$$\csc z = \frac{1}{\operatorname{sen} z} = \frac{2i}{e^{iz} - e^{-iz}}, \quad (1.2.17)$$

$$\cot z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z} = i \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}}. \quad (1.2.18)$$

Teorema 1.2.5 Para todo complejo z las siguientes propiedades se satisfacen: complejos entonces

- a) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1,$
- b) $\tan^2 z + 1 = \sec^2 z,$
- c) $\cot^2 z + 1 = \csc^2 z.$

Demostración:

a)

$$\begin{aligned} \sin^2 z + \cos^2 z &= \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right)^2, \\ &= -\frac{1}{4}(e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}) + \frac{1}{4}(e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}), \\ &= \frac{1}{4}(-e^{2iz} + 2 - e^{-2iz} + e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}), \\ &= 1. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\sin^2 z + \cos^2 z &= 1, \\ \frac{\sin^2 z + \cos^2 z}{\cos^2 z} &= \frac{1}{\cos^2 z}, \\ \tan^2 z + 1 &= \sec^2 z.\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\sin^2 z + \cos^2 z &= 1, \\ \frac{\sin^2 z + \cos^2 z}{\sin^2 z} &= \frac{1}{\sin^2 z}, \\ 1 + \cot^2 z &= \csc^2 z.\end{aligned}$$

Teorema 1.2.6 Sean z_1 y z_2 dos números complejos, entonces los siguientes resultados son válidos:

$$\begin{aligned}a) \quad \sin(z_1 + z_2) &= \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2, \\ b) \quad \cos(z_1 + z_2) &= \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2, \\ c) \quad \tan(z_1 + z_2) &= \frac{\tan z_1 + \tan z_2}{1 - \tan z_1 \tan z_2}.\end{aligned}$$

Demostración:

a)

$$\begin{aligned}\sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 &= \frac{1}{2i}(e^{iz_1} - e^{-iz_1})\frac{1}{2}(e^{iz_2} + e^{-iz_2}) + \\ &\quad \frac{1}{2}(e^{iz_1} + e^{-iz_1})\frac{1}{2i}(e^{iz_2} - e^{-iz_2}), \\ &= \frac{1}{4i}(e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)} - \cancel{e^{-i(z_1-z_2)}} + \cancel{e^{i(z_1-z_2)}}) + \\ &\quad \frac{1}{4i}(e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)} + \cancel{e^{-i(z_1-z_2)}} - \cancel{e^{i(z_1-z_2)}}), \\ &= \frac{1}{4i}(2e^{i(z_1+z_2)} - 2e^{-i(z_1+z_2)}), \\ &= \frac{1}{2i}(e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}), \\ &= \sin(z_1 + z_2).\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\cos z_1 \cos z_2 - \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2 &= \frac{1}{2}(e^{iz_1} + e^{-iz_1}) \frac{1}{2}(e^{iz_2} + e^{-iz_2}) - \\
&\quad \frac{1}{2i}(e^{iz_2} - e^{-iz_2}) \frac{1}{2i}(e^{iz_1} - e^{-iz_1}), \\
&= \frac{1}{4}(e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)} + \cancel{e^{-i(z_1-z_2)}} + \cancel{e^{i(z_1-z_2)}}) + \\
&\quad \frac{1}{4}(e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)} - \cancel{e^{-i(z_1-z_2)}} - \cancel{e^{i(z_1-z_2)}}), \\
&= \frac{1}{4}(2e^{i(z_1+z_2)} + 2e^{-i(z_1+z_2)}), \\
&= \frac{1}{2}(e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}), \\
&= \cos(z_1 + z_2).
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\tan(z_1 + z_2) &= \frac{\operatorname{sen}(z_1 + z_2)}{\cos(z_1 + z_2)}, \\
&= \frac{\cos z_1 \operatorname{sen} z_2 + \cos z_2 \operatorname{sen} z_1}{\cos z_1 \cos z_2 - \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2}, \\
&= \frac{\cos z_1 \operatorname{sen} z_2 + \cos z_2 \operatorname{sen} z_1}{\cos z_1 \cos z_2 - \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2}, \\
&= \frac{\cos z_1 \cos z_2}{\cos z_1 \cos z_2 - \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2} \cdot \frac{\operatorname{sen} z_2 + \operatorname{sen} z_1 \tan z_2}{\operatorname{sen} z_2}, \\
&= \frac{\tan z_1 + \tan z_2}{1 - \tan z_1 \tan z_2}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Teorema 1.2.7 (La periodicidad de las funciones trigonométricas) Las funciones trigonométricas $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$ tienen período real igual a 2π , mientras que la función $\tan z$ tiene período real igual a π .

Demostración: De acuerdo con el teorema anterior,

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(z + 2\pi) &= \operatorname{sen} z \cos(2\pi) + \cos z \operatorname{sen}(2\pi) = \operatorname{sen} z, \\
\cos(z + 2\pi) &= \cos z \cos(2\pi) - \operatorname{sen} z \operatorname{sen}(2\pi) = \cos z, \\
\tan(z + \pi) &= \frac{\operatorname{sen}(z + \pi)}{\cos(z + \pi)} = \frac{-\operatorname{sen} z}{-\cos z} = \tan z. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Funciones hiperbólicas

Definición 1.2.20 (Funciones hiperbólicas)

Las funciones hiperbólicas para cualquier número real θ , se definen mediante.

$$\cosh \theta = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2}, \quad (1.2.19)$$

$$\sinh \theta = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}, \quad (1.2.20)$$

$$\tanh \theta = \frac{\sinh \theta}{\cosh \theta} = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{e^{\theta} + e^{-\theta}}. \quad (1.2.21)$$

Las gráficas de las funciones $\sinh(\theta)$ y $\cosh(\theta)$ se muestran en la figura 1.22. Las ecuaciones anteriores nos sirven de guía para ampliar los conceptos de

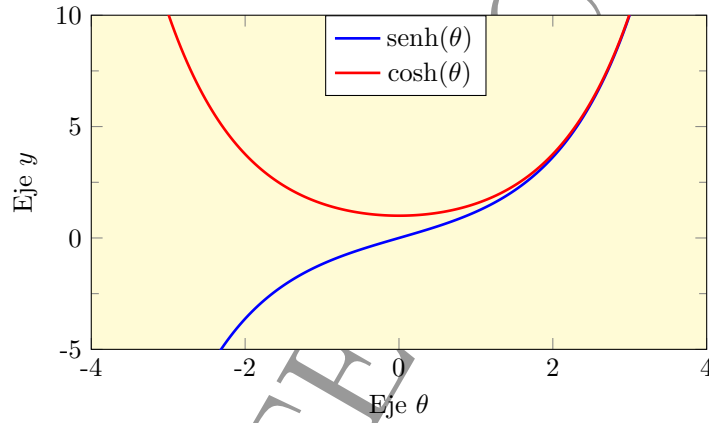


Figura 1.22: Gráficas de $\sinh(\theta)$ y $\cosh(\theta)$.

las funciones trigonométricas de variable reales a los de las funciones trigonométricas de variable compleja, mediante

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad (1.2.22)$$

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad (1.2.23)$$

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}. \quad (1.2.24)$$

De manera análoga al caso real se definen las funciones recíprocas como

$$\operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z} = \frac{2}{e^z + e^{-z}}, \quad (1.2.25)$$

$$\operatorname{csch} z = \frac{1}{\sinh z} = \frac{2}{e^z - e^{-z}}, \quad (1.2.26)$$

$$\operatorname{coth} z = \frac{\cosh z}{\sinh z} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}. \quad (1.2.27)$$

De las definiciones anteriores se observa que

$$\sinh(iz) = i \sen z, \quad (1.2.28)$$

$$\cosh(iz) = \cos z. \quad (1.2.29)$$

Teorema 1.2.8 *Para todo complejo z las siguientes propiedades se satisfacen:*

$$a) \quad \cosh^2 z - \sinh^2 z = 1,$$

$$b) \quad 1 - \tanh^2 z = \operatorname{sech}^2 z,$$

$$c) \quad \coth^2 z - 1 = \operatorname{csch}^2 z.$$

Demostración: Se deja como ejercicio para el lector.

Teorema 1.2.9 *Sean z_1 y z_2 dos números complejos, entonces las siguientes propiedades son válidas:*

$$a) \quad \sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2,$$

$$b) \quad \cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2,$$

$$c) \quad \tanh(z_1 + z_2) = \frac{\tanh z_1 + \tanh z_2}{1 + \tanh z_1 \tanh z_2}.$$

Demostración: Se deja como ejercicio para el lector.

Teorema 1.2.10 (La periodicidad de las funciones hiperbólicas) *Las funciones hiperbólicas $\sinh z$ y $\cosh z$ tienen período imaginario igual a $2\pi i$, mientras que la función $\tanh z$ tiene período imaginario πi .*

Demostración: De acuerdo con el teorema anterior,

$$\sinh(z + 2\pi i) = \sinh z \cosh(2\pi i) + \cosh z \sinh(2\pi i),$$

$$= \sinh z \cos(2\pi) + i \cosh z \sen(2\pi),$$

$$= \sinh z.$$

$$\cosh(z + 2\pi i) = \cosh z \cosh(2\pi i) + \sinh z \sinh(2\pi i),$$

$$= \cosh z \cos(2\pi) + i \sinh z \sen(2\pi),$$

$$= \cosh z.$$

$$\tanh(z + \pi i) = \frac{\sinh(z + \pi i)}{\cosh(z + \pi i)} = \frac{-\sinh z}{-\cosh z} = \tanh z. \quad \blacksquare$$

Teorema 1.2.11 Sea $z = x + iy$ un número complejo, entonces los siguientes resultados son válidos:

- a) $\operatorname{sen}(z) = \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \sinh y,$
- b) $\cos(z) = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \sinh y,$
- c) $\tan(z) = \frac{\operatorname{sen}(2x) + i \sinh(2y)}{\cos(2x) + \cosh(2y)},$
- d) $\cot(z) = \frac{\operatorname{sen}(2x) - i \sinh(2y)}{\cosh(2y) - \cos(2x)},$
- e) $\sinh(z) = \sinh x \cos y + i \cosh x \operatorname{sen} y,$
- f) $\cosh(z) = \cosh x \cos y + i \sinh x \operatorname{sen} y,$
- g) $\tanh(z) = \frac{\sinh(2x) + i \operatorname{sen}(2y)}{\cosh(2x) + \cos(2y)},$
- h) $\coth(z) = \frac{\sinh(2x) - i \operatorname{sen}(2y)}{\cosh(2x) - \cos(2y)}.$

Demostración:

Se demostrarán los incisos a), b) y c). El resto se deja como ejercicio para el lector.

a)

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sen}(z) &= \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}), \\
 &= \frac{1}{2i} (e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}), \\
 &= \frac{1}{2i} (e^{-y} e^{ix} - e^y e^{-ix}), \\
 &= \frac{1}{2i} (e^{-y} (\cos x + i \operatorname{sen} x) - e^y (\cos x - i \operatorname{sen} x)), \\
 &= \frac{1}{2i} (-\cos x (e^y - e^{-y}) + i \operatorname{sen} x (e^y + e^{-y})), \\
 &= i \cos x \frac{(e^y - e^{-y})}{2} + \operatorname{sen} x \frac{(e^y + e^{-y})}{2}, \\
 &= \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \sinh y.
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\cos(z) &= \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}), \\
&= \frac{1}{2} (e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}), \\
&= \frac{1}{2} (e^{-y}e^{ix} + e^ye^{-ix}), \\
&= \frac{1}{2} (e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x) + e^y(\cos x - i \operatorname{sen} x)), \\
&= \frac{1}{2} (\cos x(e^y + e^{-y}) - i \operatorname{sen} x(e^y - e^{-y})), \\
&= \cos x \frac{(e^y + e^{-y})}{2} + i \operatorname{sen} x \frac{(e^y - e^{-y})}{2}, \\
&= \cos x \cosh y + i \operatorname{sen} x \sinh y.
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\tan(z) &= \frac{\operatorname{sen}(z)}{\cos(z)}, \\
&= \frac{\operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \sinh y}{\cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \sinh y}, \\
&= \frac{(\operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \sinh y)(\cos x \cosh y + i \operatorname{sen} x \sinh y)}{(\cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \sinh y)(\cos x \cosh y + i \operatorname{sen} x \sinh y)}, \\
&= \frac{\operatorname{sen} x \cos x (\cosh^2 y - \sinh^2 y) + i \sinh y \cosh y (\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x)}{\cos^2 x \cosh^2 y + \operatorname{sen}^2 x \sinh^2 y}, \\
&= \frac{\operatorname{sen} x \cos x + i \sinh y \cosh y}{\cos^2 x \cosh^2 y + \operatorname{sen}^2 x \sinh^2 y}, \\
&= \frac{\operatorname{sen} x \cos x + i \sinh y \cosh y}{\cos^2 x \cosh^2 y + (1 - \cos^2 x) \sinh^2 y}, \\
&= \frac{\operatorname{sen} x \cos x + i \sinh y \cosh y}{\cos^2 x \cosh^2 y + \sinh^2 y - \cos^2 x \sinh^2 y}, \\
&= \frac{\operatorname{sen} x \cos x + i \sinh y \cosh y}{\cos^2 x (\cosh^2 y - \sinh^2 y) + \sinh^2 y}, \\
&= \frac{\operatorname{sen} x \cos x + i \sinh y \cosh y}{\cos^2 x + \sinh^2 y}.
\end{aligned} \tag{1.2.30}$$

De los teoremas 1.2.6a) y 1.2.9a) se tiene

$$\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2x), \quad (1.2.31)$$

$$\operatorname{senh} y \cosh y = \frac{1}{2} \operatorname{senh}(2y). \quad (1.2.32)$$

De los teoremas 1.2.6b) y 1.2.9b) se tiene

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos(2x) + 1), \quad (1.2.33)$$

$$\operatorname{senh}^2 y = \frac{1}{2}(\cosh(2y) - 1). \quad (1.2.34)$$

Sustituyendo las ecuaciones 1.2.31 al 1.2.34 en la ecuación 1.2.30 se obtiene

$$\begin{aligned} \tan z &= \frac{\frac{1}{2}[\operatorname{sen}(2x) + i \operatorname{senh}(2y)]}{\frac{1}{2}[(\cos(2x) + 1) + (\cosh(2y) - 1)]}, \\ &= \frac{\operatorname{sen}(2x) + i \operatorname{senh}(2y)}{\cos(2x) + \cosh(2y)}. \end{aligned}$$

Los incisos restantes se dejan como ejercicio para el lector. ■

La función logarítmica compleja

El logaritmo de un número real positivo x se define mediante la propiedad

$$e^{\ln x} = x. \quad (1.2.35)$$

En este trabajo se usará $\ln x$ para designar el logaritmo natural de un número real, mientras que $\operatorname{Log}(z)$ y $\log(z)$ representan logaritmos de números complejos.

De manera análoga al logaritmo de un número real, el logaritmo de un número complejo z debe satisfacer la propiedad

$$e^{\operatorname{Log} z} = z. \quad (1.2.36)$$

Si expresamos el número complejo z en su forma polar $z = re^{i\theta}$ donde $r = |z|$ y $\theta = \operatorname{Arg}(z)$, entonces

$$\operatorname{Log} z = \ln r + i\theta$$

satisface la ecuación 1.2.36, ya que

$$e^{\operatorname{Log} z} = e^{\ln r + i\theta} = e^{\ln r} e^{i\theta} = r e^{i\theta} = z.$$

Además, dado que $z = re^{i\theta} = re^{i(\theta+2k\pi)}$, donde $k \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\log z = \ln r + i(\theta + 2k\pi)$$

también satisface la ecuación 1.2.36. Lo anterior nos conduce a las siguientes definiciones:

Definición 1.2.21 (El logaritmo principal) Si z es un número complejo, cuya representación polar es $re^{i\theta}$ donde $\theta = \text{Arg}(z)$; es decir, θ es el argumento principal de z , entonces se define el logaritmo principal de z mediante

$$\text{Log}(z) = \ln(r) + i\theta, \quad r > 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi. \quad (1.2.37)$$

Claramente $\text{Log}(z)$ se indefiniría cuando $z = 0$, ya que en este caso el logaritmo natural de cero no puede ser evaluado. Sin embargo, para cualquier otro valor $\text{Log}(z)$ se encuentra bien definido.

Definición 1.2.22 (La función logarítmica compleja: caso general) La representación general de un número complejo z en forma polar es $re^{i(\theta+2k\pi)}$ donde θ es el argumento principal de z , entonces se define el logaritmo de z mediante

$$\log(z) = \ln(r) + i(\theta + 2k\pi), \quad r > 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1.2.38)$$

Claramente $\log(z)$ es una función multivaluada que asigna a cada complejo z un número infinito de valores diferentes, los cuales se generan con cada valor seleccionado del entero k .

Ejemplo 1.2.7 Determine el logaritmo principal del complejo $z = 2 + 2i$.

Solución: Primero determinemos la forma polar del número z . En este caso, $z = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. De acuerdo con la definición,

$$\text{Log } z = \ln(2\sqrt{2}) + i\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Ejemplo 1.2.8 Determine todos los valores de w tal que $e^w = 2 + 2i$.

Solución: Tomando logaritmos en ambos lados de la ecuación se tiene,

$$\log(e^w) = \log(2 + 2i),$$

$$w = \log(2 + 2i),$$

$$w = \log(\sqrt{8}e^{i(\frac{\pi}{4}+2k\pi)}),$$

$$w = \ln(\sqrt{8}) + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Teorema 1.2.12 Si z_1 y z_2 son dos números complejos diferentes de cero, entonces

- a) $\log(z_1 z_2) = \log(z_1) + \log(z_2)$,
- b) $\log\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \log(z_1) - \log(z_2)$,
- c) $\log(z^{n/m}) = \frac{n}{m} \log(z)$, donde n/m es una fracción irreducible.

Demostración:

a) Sean $z_1 = r_1 e^{i(\theta_1 + 2k\pi)}$ y $z_2 = r_2 e^{i(\theta_2 + 2l\pi)}$ las formas polares de los números complejos z_1 y z_2 , donde θ_1 y θ_2 son los argumentos principales de z_1 y z_2 , respectivamente, y, k y l son números enteros, entonces

$$\begin{aligned} \log z_1 + \log z_2 &= \ln r_1 + i(\theta_1 + 2k\pi) + \ln r_2 + i(\theta_2 + 2l\pi), \\ &= \ln r_1 + \ln r_2 + i(\theta_1 + \theta_2 + 2(k+l)\pi), \\ &= \ln(r_1 r_2) + i(\theta_1 + \theta_2 + 2(k+l)\pi), \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \exp[i(\theta_1 + \theta_2 + 2(k+l)\pi)], \quad (1.2.39)$$

además ,

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\Theta + 2m\pi)}, \quad (1.2.40)$$

donde Θ es el argumento principal de $z_1 z_2$ y m es un entero. Obsérvese que el ángulo $\theta_1 + \theta_2 + 2(k+l)\pi$ es uno de los argumentos del producto $z_1 z_2$, de manera que dados los enteros k y l existe un entero m tal que $\theta_1 + \theta_2 + 2(k+l)\pi = \Theta + 2m\pi$; por lo tanto,

$$\begin{aligned} \log z_1 + \log z_2 &= \ln(r_1 r_2) + i(\Theta + 2m\pi), \\ &= \ln|z_1 z_2| + i(\text{Arg}(z_1 z_2) + 2m\pi), \\ &= \log(z_1 z_2). \end{aligned}$$

Los incisos restantes se dejan como ejercicio para el lector. ■

Potencias complejas

Definición 1.2.23 (Potencia compleja) Si z y w son números complejos con $w \neq 0$, se define la potencia compleja w^z mediante,

$$w^z = e^{z \log w}. \quad (1.2.41)$$

Obsérvese que w^z provee un conjunto infinito de valores debido a que $\log w$ es una función multivaluada. Si usamos $\theta = \text{Arg}(w)$, entonces el valor obtenido se conoce como valor principal de z^w .

Ejemplo 1.2.9 Hallar el valor principal de $(1+i)^{3+2i}$.

Solución: De acuerdo con la definición:

$$\begin{aligned} (1+i)^{3+2i} &= e^{(3+2i) \text{Log}(1+i)}, \\ &= e^{(3+2i)(\ln(\sqrt{2})+i\frac{\pi}{4})}, \\ &= e^{(\frac{3\ln(2)}{2}-\frac{\pi}{2})+i(\ln(2)+\frac{3\pi}{4})}, \\ &= 0.5880 + 3.0493i. \end{aligned}$$

Funciones trigonométricas e hiperbólicas inversas

En esta sección se utilizará la notación $\text{sen}^{-1} z$ para denotar $\text{arc sen } z$ y de manera análoga para las funciones trigonométricas e hiperbólicas inversas restantes.

Sea $\text{sen } w = z$, entonces $w = \text{arc sen } z$. Para determinar w se procede de la siguiente manera:

$$z = \text{sen } w, \quad (1.2.42)$$

$$= \frac{1}{2i} (e^{iw} - e^{-iw}). \quad (1.2.43)$$

Sea $p = e^{iw}$, entonces

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{2i} (p - p^{-1}), \\ 2iz &= \frac{p^2 - 1}{p}, \\ 2izp &= p^2 - 1. \end{aligned}$$

Finalmente obtenemos

$$p^2 - 2izp - 1 = 0. \quad (1.2.44)$$

La solución de la ecuación 1.2.44 es

$$p = \frac{2iz + \sqrt{4 - 4z^2}}{2} = iz + \sqrt{1 - z^2} \quad (1.2.45)$$

Dado que $p = e^{iw}$, entonces

$$e^{iw} = iz + \sqrt{1 - z^2}. \quad (1.2.46)$$

Aplicando el logaritmo complejo se obtiene

$$\begin{aligned} iw &= \log(iz + \sqrt{1 - z^2}), \\ w &= -i \log(iz + \sqrt{1 - z^2}), \\ \operatorname{sen}^{-1} z &= -i \log(iz + \sqrt{1 - z^2}). \end{aligned}$$

La ecuación anterior representa una función multivaluada. En primer lugar, la raíz cuadrada del número complejo $1 - z^2$ generará dos soluciones igualmente válidas (ver la figura 1.23); en segundo lugar, una vez que hemos elegido una de las raíces, la función logarítmica generará un número infinito de valores, cada uno de los cuales satisface la ecuación $z = \operatorname{sen} w$.

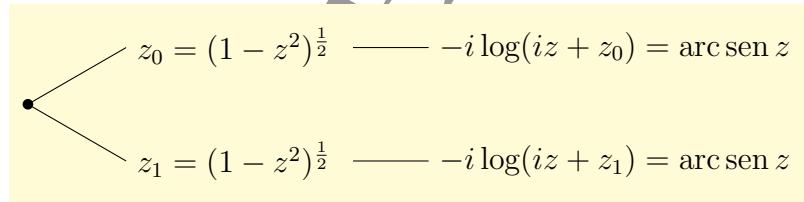


Figura 1.23: Ramas de la función $\operatorname{arc} \operatorname{sen} z$.

Si $w = \arctan z$, entonces $z = \tan w$, de manera análoga al caso anterior

$$\begin{aligned} z &= \tan w, \\ &= -i \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{e^{iw} + e^{-iw}}, \text{ haciendo } p = e^{iw} \\ &= -i \frac{p - p^{-1}}{p + p^{-1}}, \\ &= -i \frac{p^2 - 1}{p^2 + 1}, \\ &= -i \frac{p^2 - 1}{p^2 + 1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\frac{p^2 - 1}{p^2 + 1} &= iz, \\ (p^2 + 1)iz &= p^2 - 1, \\ izp^2 + iz &= p^2 - 1, \\ izp^2 + iz - p^2 + 1 &= 0, \\ (iz - 1)p^2 + iz + 1 &= 0,\end{aligned}$$

Despejando p^2 ,

$$\begin{aligned}p^2 &= \frac{-(iz + 1)}{iz - 1}, \\ &= \frac{-z + i}{z + i}.\end{aligned}$$

Extrayendo la raíz cuadrada en la ecuación anterior

$$p = \left(\frac{-z + i}{z + i} \right)^{1/2},$$

dado que $p = e^{iw}$, entonces

$$e^{iw} = \left(\frac{-z + i}{z + i} \right)^{1/2}.$$

Finalmente, aplicando logaritmo en ambos lados de la ecuación anterior

$$\log e^{iw} = \log \left[\left(\frac{-z + i}{z + i} \right)^{1/2} \right],$$

$$iw = \frac{1}{2} \log \left(\frac{-z + i}{z + i} \right),$$

$$w = -\frac{i}{2} \log \left(\frac{-z + i}{z + i} \right),$$

$$w = \frac{i}{2} \log \left(\frac{i + z}{i - z} \right),$$

$$\arctan z = \frac{i}{2} \log \left(\frac{i + z}{i - z} \right).$$

De la misma manera se obtienen las funciones trigonométricas e hiperbólicas inversas restantes. A continuación se muestran los resultados.

$$\text{a) } \operatorname{sen}^{-1} z = -i \log \left(iz + \sqrt{1 - z^2} \right),$$

$$\text{b) } \operatorname{cos}^{-1} z = -i \log \left(z + i\sqrt{1 - z^2} \right),$$

$$\text{c) } \tan^{-1} z = \frac{i}{2} \log \left(\frac{i+z}{i-z} \right),$$

$$\text{d) } \operatorname{senh}^{-1} z = \log \left(z + \sqrt{z^2 + 1} \right),$$

$$\text{e) } \operatorname{cosh}^{-1} z = \log \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right),$$

$$\text{f) } \tanh^{-1} z = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+z}{1-z} \right).$$

Ejemplo 1.2.10 Determine todos los valores w tales que $\operatorname{sen} w = 1 + i$.

Solución:

$$\begin{aligned} w &= \operatorname{sen}^{-1}(1 + i), \\ &= -i \log \left(i(1 + i) + \sqrt{1 - (1 + i)^2} \right), \end{aligned} \quad (1.2.47)$$

Determinemos las raíces

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - (1 + i)^2} &= \sqrt{1 - 2i} \\ &= \sqrt[4]{5} \exp \left[i \left(\frac{5.17604 + 2m\pi}{2} \right) \right], \quad m = 0, 1. \end{aligned} \quad (1.2.48)$$

Para $m = 0$, la ecuación 1.2.48 genera la raíz

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[4]{5} e^{2.58802i}, \\ &= \sqrt[4]{5} \cos(2.58802) + i \sqrt[4]{5} \operatorname{sen}(2.58802), \\ &= -1.27202 + 0.786149i. \end{aligned} \quad (1.2.49)$$

por lo tanto,

$$-1 + i + z_0 = -2.27202 + 1.786149i = 2.89005e^{i2.47535}$$

Aplicando logaritmo se tiene

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^{-1}(1 + i) &= -i \log \left(2.89005e^{i2.47535} \right), \\ &= -i[\ln(2.89005) + i(2.47535 + 2k\pi)], \quad k \in \mathbb{Z}, \\ &= -i[1.06127 + i(2.47535 + 2k\pi)], \\ &= 2.47535 + 2k\pi - 1.06127i. \end{aligned} \quad (1.2.50)$$

Verifiquemos: Para $k = 0$, de la ecuación 1.2.50,

$$w_1 = 2.47535 - 1.06127i$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(x + iy) &= \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \sinh y, \\ \operatorname{sen}(2.47535 - 1.06127i) &= \operatorname{sen}(2.47535) \cosh(-1.06127) \\ &\quad + i \cos(2.47535) \sinh(-1.06127), \\ &= 1 + 0.999991i. \end{aligned}$$

Para $m = 1$, la ecuación 1.2.48 genera la raíz

$$z_1 = \sqrt[4]{5} \exp \left[i \left(\frac{5.17604 + 2\pi}{2} \right) \right], \quad (1.2.51)$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt[4]{5} e^{\frac{11.4592}{2}i}, \\ &= \sqrt[4]{5} e^{5.72961i}, \\ &= \sqrt[4]{5} \cos(5.72961) + i \sqrt[4]{5} \sin(5.72961), \\ &= 1.27202 - 0.786153i. \end{aligned} \quad (1.2.52)$$

por lo tanto,

$$-1 + i + z_1 = 0.27202 + 0.213847i = 0.346013e^{i0.666238}$$

Aplicando logaritmo se tiene

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^{-1}(1 + i) &= -i \log(0.346013e^{i0.666238}), \\ &= -i[\ln(0.346013) + 0.666238i + k\pi], \quad k \in \mathbb{Z}, \\ &= -i[-1.06128 + i(0.666238 + 2k\pi)], \\ &= 0.666238 + 2k\pi + 1.06128i. \end{aligned} \quad (1.2.53)$$

Verifiquemos: Para $k = 0$, de la ecuación 1.2.53,

$$w_2 = 0.666238 + 1.06128i.$$

de esta manera

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(x + iy) &= \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \sinh y, \\ \operatorname{sen}(0.666238 + 1.06128i) &= \operatorname{sen}(0.666238) \cosh(1.06128) \\ &\quad + i \cos(0.666238) \sinh(1.06128), \\ &= 1 + 1.00001i. \end{aligned}$$

1.2.4. Límite y continuidad

En esta sección se discutirán los conceptos más importantes relacionados con las funciones complejas de variable compleja. Se espera que el lector conozca los conceptos de límite y continuidad de funciones de variable real.

Sucesiones de números complejos

Definición 1.2.24 (Sucesión de números complejos) *Es una regla de asociación que asigna a cada número natural uno y solo un número complejo. En otras palabras, una sucesión es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales.*

Dado que una sucesión es una función, digamos α , entonces cada imagen debe representarse como $z_1 = \alpha(1)$, $z_2 = \alpha(2)$, ..., $z_n = \alpha(n)$, En lugar de lo anterior, la sucesión se representa mediante el término n -ésimo, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2.11 *La sucesión de números complejos $i, i/2, i/3, \dots, i/n, \dots$ se representa mediante la expresión $\{i/n\}$.*

Definición 1.2.25 (Límite de una sucesión) *Se dice que la sucesión $\{z_n\}$ converge al número complejo L , si para todo $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $|z_n - L| < \epsilon$ siempre que $n \geq N$. En este caso se dice que la sucesión es convergente y escribiremos,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = L.$$

o simplemente,

$$z_n \rightarrow L.$$

Los resultados sobre sucesiones de números complejos que usaremos en este curso, se establecen los siguientes teoremas.

Teorema 1.2.13 (Límite de sucesiones de números complejos) *Si $\{z_n\}$ y $\{w_n\}$ son dos sucesiones convergentes de números complejos, tales que $z_n \rightarrow L_1$ y $w_n \rightarrow L_2$, entonces se satisfacen los siguientes resultados:*

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n \pm w_n) = L_1 \pm L_2$
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n w_n) = L_1 L_2$
- c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{w_n} = \frac{L_1}{L_2}$, siempre que $L_2 \neq 0$.

Demostración: Se deja como ejercicio al lector.

Teorema 1.2.14 Sea $z_n = a_n + ib_n$ y $L = a + ib$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = L$ si y solo si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, y $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$.

Demostración:

\Rightarrow) Supóngase que, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = L$, entonces $\forall \epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|z_n - L| < \epsilon, \text{ siempre que } n \geq N,$$

de manera equivalente

$$|(a_n - a) + i(b_n - b)| < \epsilon, \text{ siempre que } n \geq N.$$

De la definición del módulo se tiene

$$|(a_n - a) + i(b_n - b)| = \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2}$$

De manera que

$$|a_n - a| \leq |z_n - L| < \epsilon, \text{ siempre que } n \geq N.$$

y

$$|b_n - b| \leq |z_n - L| < \epsilon, \text{ siempre que } n \geq N.$$

Por lo tanto, se concluye que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, y $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$.

\Leftarrow) Supóngase que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, y $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, entonces $\forall \epsilon > 0$ existen, N_1 y $N_2 \in \mathbb{N}$ tales que

$$|a_n - a| < \epsilon/2, \text{ siempre que } n \geq N_1.$$

$$|b_n - b| < \epsilon/2, \text{ siempre que } n \geq N_2.$$

De acuerdo con la desigualdad del triángulo

$$|z_n - L| = |(a_n - a) + i(b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|.$$

Si N es el mayor entre N_1 y N_2 , entonces

$$|z_n - L| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \epsilon/2 + \epsilon/2, \text{ siempre que } n \geq N$$

Por lo tanto, se concluye que $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = L$. ■

Teorema 1.2.15 Sean K un conjunto de números complejos y w un número complejo, entonces w es un punto de acumulación de K , si y solo si existe una sucesión $\{z_n\}$ de puntos en K , con cada $z_n \neq w$ que converge a w .

Demostración:

\Rightarrow) Supóngase que w es un punto de acumulación de K , entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ la vecindad punteada centrada en w de radio $1/n$ contiene al menos un punto de K , digamos z_n . De esta manera, es posible construir la sucesión $\{z_n\}$ tal que,

$$|z_n - w| < \frac{1}{n}.$$

Además, si $n \rightarrow \infty$, entonces $\frac{1}{n} \rightarrow 0$. De manera que, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = w$.

\Leftarrow) Supóngase que $\{z_n\}$ es una sucesión de K que converge a w , donde $z_n \neq w$ para todo n . Entonces, toda vecindad punteada D centrada en w contiene al menos un punto de K , por lo tanto, w es un punto de acumulación de K . ■

Definición 1.2.26 (Subsucesión) Una sucesión $\{w_j\}$ es una subsucesión de $\{z_n\}$, si existen enteros $n_1 < n_2 < n_3 \dots$ tales que $w_j = z_{n_j}$.

Definición 1.2.27 (Sucesión acotada) Se dice que $\{z_n\}$ es una sucesión acotada, si existe un número real positivo M tal que $|z_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.2.16 Sea $\{z_n\}$ una sucesión acotada, entonces $\{z_n\}$ tiene una subsucesión convergente.

Demostración: La demostración que se ofrece considera la validez del teorema para sucesiones de números reales.

Sea $\{z_n\} = \{x_n + iy_n\}$ una sucesión acotada de números complejos, entonces $\{x_n\}$ es una sucesión de números reales; por lo tanto, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ que converge a un número real a . Por la misma razón, $\{y_n\}$ tiene una subsucesión $\{y_{n_j}\}$ que converge a un número real b . Por lo tanto, $\{z_{n_j}\} = \{x_{n_j} + iy_{n_j}\}$ es una subsucesión compleja de $\{z_n\}$ que, por el teorema 1.2.14, converge al complejo $a + ib$. ■

Teorema 1.2.17 (Teorema de Bolzano-Weierstrass) Sea K un conjunto infinito de números complejos y compacto, entonces K contiene un punto de acumulación.

Demostración: Se procederá por construcción. Se comenzará por elegir un elemento z_1 en K . Dado que K es infinito podemos escoger un segundo número $z_2 \neq z_1$ y así sucesivamente hasta generar una sucesión infinita $\{z_n\}$

cuyos elementos son todos diferentes entre sí. Dado que K está acotada y $\{z_n\}$ está contenida en K , $\{z_n\}$ será una sucesión acotada. Por el teorema 1.2.16, $\{z_n\}$ tendrá una subsucesión $\{z_{n_j}\}$ convergente, digamos a un número L . Dado que todos los elementos de la subsucesión $\{z_{n_j}\}$ son diferentes entre sí, si además, $L \neq z_{n_j}$ para cualquier valor de los índices, entonces L será un punto de acumulación de K ; y, como K es cerrado, por el teorema 1.2.3, L estará en K . ■

Series de números complejos

Definición 1.2.28 (Series de números complejos) *Dada una sucesión de números complejos, $\{z_n\}$, se conoce como serie de números complejos a la sucesión $\{s_n\}$ definida de la siguiente manera*

$$\begin{aligned} s_1 &= z_1, \\ s_2 &= z_1 + z_2, \\ &\vdots \\ s_n &= z_1 + z_2 + \dots + z_n, \\ &\vdots \end{aligned}$$

El término n -ésimo s_n representa la suma n -ésima parcial, es decir,

$$s_n(z) = \sum_{k=1}^n z_k. \quad (1.2.54)$$

La serie infinita se representa como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n z_k = \sum_{k=1}^{\infty} z_k. \quad (1.2.55)$$

Definición 1.2.29 (Series convergentes) *Se dice que la serie infinita*

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k$$

converge a S , si para todo $\epsilon > 0$ existe un N en los naturales tal que,

$$|s_n - S| < \epsilon, \text{ siempre que } n \geq N.$$

Lo anterior se denota por

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} s_k(z) = S. \quad (1.2.56)$$

Ejemplo 1.2.12 (La serie geométrica compleja) *Pruebe que la serie*

$$1 + z + z^2 + \dots$$

converge a $\frac{1}{1-z}$, si $|z| < 1$.

Solución: Para comenzar determínese la suma n -ésima parcial.

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}, \\ z s_n &= z + z^2 + \dots + z^{n-1} + z^n. \end{aligned}$$

Restando las ecuaciones anteriores se tiene,

$$(1 - z)s_n = 1 - z^n,$$

de donde se sigue

$$s_n = \frac{1 - z^n}{1 - z}.$$

De acuerdo con la definición de convergencia para series infinitas se requiere que, dado $\epsilon > 0$,

$|s_n - S| < \epsilon$, si $n \geq N$, donde N es un número natural que debe ser determinado.

Por lo anterior se tiene

$$\begin{aligned} \left| \frac{1 - z^n}{1 - z} - \frac{1}{1 - z} \right| &< \epsilon, \\ \frac{|-z^n|}{|1 - z|} &< \epsilon, \\ \frac{|z^n|}{|1 - z|} &< \epsilon, \\ \frac{|z|^n}{|1 - z|} &< \epsilon, \\ |z|^n &< \epsilon |1 - z|, \\ n \ln |z| &< \ln(\epsilon |1 - z|). \end{aligned}$$

Considerando que $|z| < 1$, entonces $\ln |z| < 0$ y de la última desigualdad se obtiene

$$n > \frac{\ln(\epsilon |1 - z|)}{\ln |z|}.$$

Finalmente, si hacemos N igual al entero inmediato superior al número real

$$\frac{\ln(\epsilon |1 - z|)}{\ln |z|},$$

entonces la definición de convergencia para series infinitas se satisface.

Límites de funciones con valores complejos

Definición 1.2.30 (Límite de una función de variable compleja) Sean $f(z)$ es una función compleja de variable compleja y L es una constante compleja, entonces se dice que el límite de $f(z)$ cuando z tiende a z_0 es L , si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$|f(z) - L| < \epsilon,$$

siempre que

$$0 < |z - z_0| < \delta,$$

lo anterior se denota mediante

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L.$$

Cuando se estudia el concepto de límite para funciones reales de una variable real, existen dos direcciones por las cuales es posible aproximarse al punto x_0 . Para el caso complejo, existe un número infinito de trayectorias mediante las cuales es posible aproximarse al punto z_0 . Algunas de estas trayectorias se muestran en la figura 1.24. Cuando el límite existe, éste será independiente de la trayectoria por la cual nos aproximemos al punto z_0 .

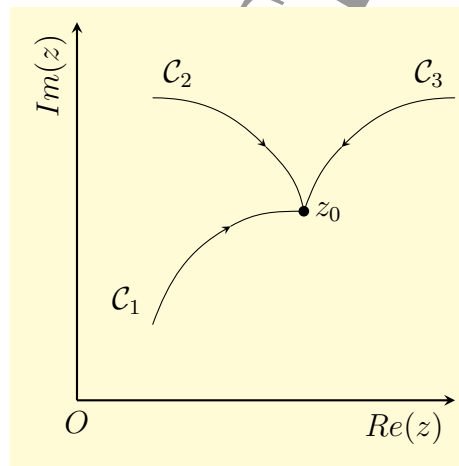


Figura 1.24: Posibles trayectorias de aproximación a z_0 .

Ejemplo 1.2.13 Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida como $f(z) = 2z + 3i$. Pruebe que

$$\lim_{z \rightarrow i} f(z) = 5i.$$

Solución: Sea $\epsilon > 0$, se desea asegurar que

$$\begin{aligned} |f(z) - L| &< \epsilon, \\ |(2z + 3i) - 5i| &< \epsilon, \\ |(2z - 2i)| &< \epsilon, \\ |z - i| &< \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Tomando $\delta = \epsilon/2$ se garantiza que $|f(z) - 5i| < \epsilon$, siempre que $0 < |z - i| < \delta$, por lo tanto,

$$\lim_{z \rightarrow i} f(z) = 5i.$$

Ejemplo 1.2.14 Sea $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida como $g(z) = z + i$. Pruebe que

$$\lim_{z \rightarrow i} g(z) = 2i.$$

Solución: Sea $\epsilon > 0$, se desea asegurar que

$$\begin{aligned} |g(z) - L| &< \epsilon, \\ |(z + i) - 2i| &< \epsilon, \\ |z - i| &< \epsilon. \end{aligned}$$

Tomando $\delta \leq \epsilon$, en la desigualdad anterior, se garantiza que $|g(z) - 2i| < \epsilon$, siempre que $0 < |z - i| < \delta$, por lo tanto,

$$\lim_{z \rightarrow i} g(z) = 2i.$$

El infinito complejo

El concepto de infinito en los reales se extiende a los números complejos. El punto infinito complejo se denota como ∞ y nos permitirá determinar límites en el infinito. El plano complejo junto con el punto infinito complejo se conoce como plano complejo extendido. Para visualizar el número complejo infinito se recurre a la proyección estereográfica, como se muestra a continuación. En la figura ?? se ha introducido un sistema cartesiano tridimensional, cuyo tercer eje se denomina ζ . La figura muestra una esfera de radio 1 centrada en el punto $(0, 0, 1)$, la cual descansa sobre el plano complejo z . El punto z y el polo norte de la esfera definen una línea recta que corta la esfera en un punto único P . De este modo, a cada punto del plano

complejo le corresponde un único punto P sobre la esfera, excepto el polo norte. Si hacemos corresponder el polo norte con el punto infinito, entonces tendremos una correspondencia uno a uno entre los puntos de la esfera y el plano complejo, ver la figura ??.

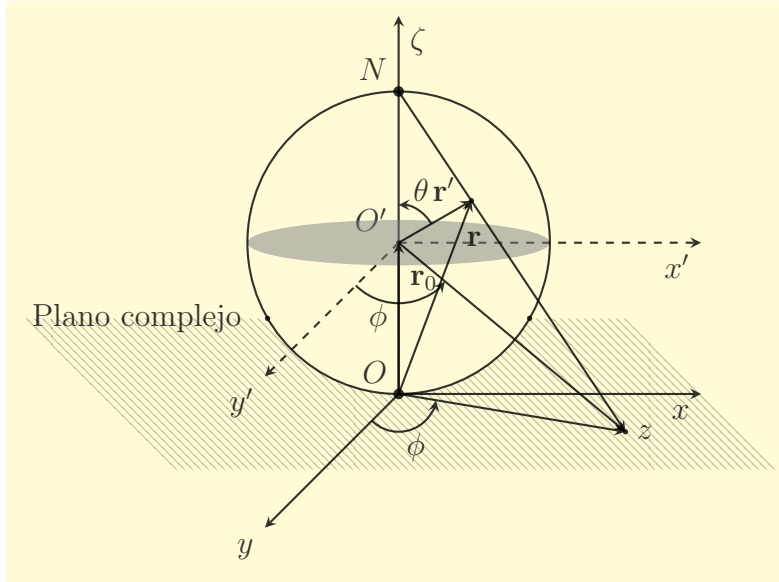


Figura 1.25: Proyección estereográfica

Para formalizar lo anteriormente descrito, determinaremos las ecuaciones paramétricas que relacionan los puntos del plano con los puntos sobre la esfera. Obsérvese que

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'$$

donde

$$\mathbf{r}_0 = (0, 0, 1).$$

Las coordenadas del polo norte son

$$\mathbf{r}_N = (0, 0, 2).$$

Los vectores \mathbf{r}' sobre la esfera pueden parametrizarse en términos de las coordenadas esféricas mediante

$$\mathbf{r}' = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta). \quad (1.2.57)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_P &= \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}', \\ &= (0, 0, 1) + (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta), \\ &= (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta + 1). \end{aligned}$$

El complejo \mathbf{z} puede expresarse mediante

$$\mathbf{z} = |\mathbf{z}|(\cos \phi, \sin \phi, 0). \quad (1.2.58)$$

Obsérvese que el ángulo ϕ en las ecuaciones 1.2.57 y 1.2.58 es el mismo.

La ecuación de la recta que pasa por el polo norte y el punto P es

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}_N + t(\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_N), \\ &= (0, 0, 2) + t(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta - 1), \\ &= (t \sin \theta \cos \phi, t \sin \theta \sin \phi, t(\cos \theta - 1) + 2). \end{aligned}$$

Esta recta intersecta el plano z en el punto de corte \mathbf{z} que satisface,

$$t(\cos \theta - 1) + 2 = 0,$$

de donde se obtiene

$$t = -\frac{2}{\cos \theta - 1} = \frac{2}{1 - \cos \theta}.$$

El punto \mathbf{z} es

$$\mathbf{z} = \frac{2 \sin \theta}{1 - \cos \theta}(\cos \phi, \sin \phi, 0). \quad (1.2.59)$$

Comparando las ecuaciones 1.2.58 y 1.2.59 se tiene

$$|\mathbf{z}| = \frac{2 \sin \theta}{1 - \cos \theta}. \quad (1.2.60)$$

Por último resolveremos θ en términos del módulo de z .

$$\begin{aligned} |\mathbf{z}| &= \frac{2 \sin \theta}{1 - \cos \theta}, \\ &= \frac{2(1 - \cos^2 \theta)^{1/2}}{1 - \cos \theta}, \end{aligned}$$

$$|\mathbf{z}|^2 = \frac{4(1 - \cos^2 \theta)}{(1 - \cos \theta)^2},$$

$$|\mathbf{z}|^2 = \frac{4(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)}{(1 - \cos \theta)(1 - \cos \theta)},$$

$$|\mathbf{z}|^2 = 4 \left(\frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} \right).$$

Agrupando términos se tiene

$$\begin{aligned} |\mathbf{z}|^2(1 - \cos \theta) &= 4(1 + \cos \theta), \\ |\mathbf{z}|^2 - |\mathbf{z}|^2 \cos \theta &= 4 + 4 \cos \theta, \\ -4 \cos \theta - |\mathbf{z}|^2 \cos \theta &= 4 - |\mathbf{z}|^2, \\ \cos \theta &= \frac{|\mathbf{z}|^2 - 4}{|\mathbf{z}|^2 + 4}. \end{aligned}$$

Finalmente,

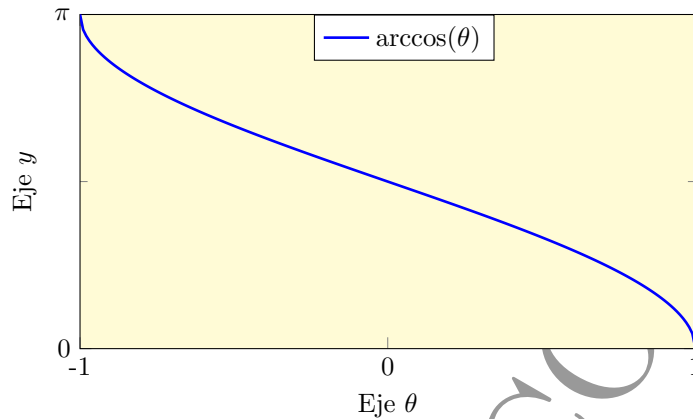
$$\theta = \arccos \left(\frac{|\mathbf{z}|^2 - 4}{|\mathbf{z}|^2 + 4} \right). \quad (1.2.61)$$

La ecuación 1.2.60 permite asignar un punto de la esfera con cada punto del plano complejo finito. De manera análoga, la ecuación 1.2.61 permite asignar un punto de la esfera con cada punto del plano complejo. A medida que nos aproximamos al polo norte, es decir, el punto P se aproxima al punto N , el ángulo θ se aproxima a cero y el módulo de z tiende a infinito (de acuerdo con la ecuación 1.2.60) como se muestra a continuación.

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0} |\mathbf{z}| &= 2 \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}, \\ &= 2 \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \text{ por la regla de L'hôpital,} \\ &= 2 \lim_{\theta \rightarrow 0} \cot \theta \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Además, dado que $\arccos \theta$ es una función continua (ver la figura 1.26), entonces

$$\begin{aligned} \lim_{|\mathbf{z}| \rightarrow \infty} \theta &= \lim_{|\mathbf{z}| \rightarrow \infty} \arccos \left(\frac{|\mathbf{z}|^2 - 4}{|\mathbf{z}|^2 + 4} \right), \\ &= \arccos \left(\lim_{|\mathbf{z}| \rightarrow \infty} \frac{|\mathbf{z}|^2 - 4}{|\mathbf{z}|^2 + 4} \right), \\ &= \arccos \left(\lim_{|\mathbf{z}| \rightarrow \infty} \frac{\frac{|\mathbf{z}|^2 - 4}{|\mathbf{z}|^2}}{\frac{|\mathbf{z}|^2 + 4}{|\mathbf{z}|^2}} \right), \\ &= \arccos \left(\lim_{|\mathbf{z}| \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{4}{|\mathbf{z}|^2}}{1 + \frac{4}{|\mathbf{z}|^2}} \right), \\ &= \arccos(1), \\ &= 0. \end{aligned}$$

Figura 1.26: Gráfica de la función $\arccos \theta$.

Obsérvese que $\theta = 0$ corresponde al polo norte de la esfera. Por lo anterior, resulta natural asignar el punto infinito complejo con dicho punto, de esta manera tendremos una relación uno a uno entre los puntos de la esfera y el plano complejo ampliado.

Ahora estamos en condiciones de definir $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$ cuando z_0 o L correspondan al punto infinito complejo.

Definición 1.2.31 Escribiremos $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|f(z)| > \frac{1}{\epsilon}$ siempre que $0 < |z - z_0| < \delta$.

Obsérvese que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ es equivalente $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$, ya que, de acuerdo con la definición 1.2.30,

$$\left| \frac{1}{f(z)} \right| < \epsilon, \text{ siempre que } 0 < |z - z_0| < \delta. \quad (1.2.62)$$

Definición 1.2.32 Escribiremos $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = L$ si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|f(z) - L| < \epsilon$ siempre que $|z| > \frac{1}{\delta}$; es decir, $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = L$ si y solo si $\lim_{z \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = L$

Definición 1.2.33 Escribiremos $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$ si y solo si $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{f(z)} = 0$.

Teorema 1.2.18 (Límite de funciones complejas) Si $f(z)$ y $g(z)$ son funciones complejas de la variable compleja z , cuyos límites en z_0 son L_1 y L_2 , respectivamente, entonces

a) El límite de la suma es la suma de los límites.

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) \pm g(z)) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \pm \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = L_1 \pm L_2.$$

b) El límite del producto es el producto de los límites

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z)g(z)) = \left(\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \right) \left(\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \right) = L_1 L_2.$$

c) El límite de un cociente es el cociente de los límites, siempre y cuando el límite del denominador sea diferente de cero.

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{f(z)}{g(z)} \right) = \frac{L_1}{L_2}. \quad \text{Siempre que, } L_2 \neq 0.$$

Ejemplo 1.2.15 Para los ejemplos 1.2.13 y 1.2.14 determine

a) $\lim_{z \rightarrow i} (f(z) + g(z)),$

b) $\lim_{z \rightarrow i} (f(z)g(z)),$

c) $\lim_{z \rightarrow i} (f(z)/g(z)).$

Solución: Usando los resultados del teorema anterior se tiene

a) $\lim_{z \rightarrow i} ((2z + 3i) + (z + i)) = \lim_{z \rightarrow i} (2z + 3i) + \lim_{z \rightarrow i} (z + i) = 5i + 2i = 7i.$

b) $\lim_{z \rightarrow i} (f(z)g(z)) = \lim_{z \rightarrow i} (2z + 3i) \lim_{z \rightarrow i} (z + i) = (5i)(2i) = -10.$

c) $\lim_{z \rightarrow i} (f(z)/g(z)) = \frac{\lim_{z \rightarrow i} (2z + 3i)}{\lim_{z \rightarrow i} (z + i)} = 5i/2i = 5/2.$

Definición 1.2.34 (Continuidad) Sea $f(z)$ es una función compleja de variable compleja, se dice $f(z)$ es continua en z_0 si se satisfacen las siguientes condiciones

a) el límite de $f(z)$ cuando z tiende a z_0 existe,

b) la función está definida en z_0 ,

c) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$

Ejemplo 1.2.16 Analice la continuidad de la función

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z-i}{z^2+1}, & z \neq i \\ -\frac{i}{2}, & z = i. \end{cases}$$

Solución: La función está definida en $z = i$ y asume el valor, $f(i) = -i/2$. Verifíquese que $\lim_{z \rightarrow i} f(z)$ existe.

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow i} f(z) &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{z-i}{z^2+1}, \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{z-i}{(z-i)(z+i)}. \end{aligned}$$

Dado que z se aproxima a i pero nunca lo alcanza, entonces $z - i \neq 0$, de manera que en la última igualdad la división está bien definida; por lo tanto,

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow i} f(z) &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{z+i}, \\ &= \frac{1}{2i} = -\frac{1}{2}i. \end{aligned}$$

Dado que, $\lim_{z \rightarrow i} f(z) = f(i)$, se concluye que $f(z)$ es continua en $z = i$.

Teorema 1.2.19 (Sobre la continuidad de las funciones complejas)

Si $f(z)$ y $g(z)$ son dos funciones complejas de la variable compleja z y, si $f(z)$ y $g(z)$ son ambas continuas en z_0 , entonces

- a) $f(z) \pm g(z)$ es continua en z_0 ,
- b) $f(z)g(z)$ es continua en z_0 ,
- c) $\frac{f(z)}{g(z)}$ es continua en z_0 siempre que, $g(z_0) \neq 0$.

Demostración: Se deja como ejercicio al lector.

Teorema 1.2.20 (Sobre la continuidad de las composiciones de funciones)

Sean $f : D \rightarrow E$ y $g : E \rightarrow F$ dos funciones de variables complejas, continuas en sus dominios, entonces la composición $g \circ f : D \rightarrow F$ es una función continua en D .

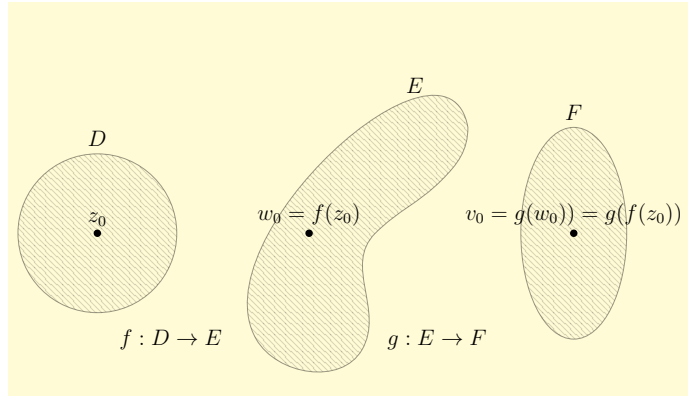


Figura 1.27: Continuidad de la composición de funciones

Demostración: Sean $f : D \rightarrow E$ y $g : E \rightarrow F$ dos funciones continuas en sus dominios. La función g está definida en la imagen del conjunto D bajo la aplicación f , como se muestra en la figura 1.27.

Como g es continua en w_0 , entonces $\lim_{w \rightarrow w_0} g(w) = g(w_0)$. De acuerdo con la definición 1.2.34, para todo $\epsilon > 0$ existe un $\gamma > 0$ tal que

$$|g(w) - g(w_0)| < \epsilon \text{ siempre que } |w - w_0| < \gamma,$$

de manera equivalente

$$|g(f(w)) - g(f(z_0))| < \epsilon \text{ siempre que } 0 < |f(z) - f(z_0)| < \gamma.$$

Dado que f es continua en z_0 , entonces para todo $\gamma > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$|f(z) - f(z_0)| < \gamma \text{ siempre que } 0 < |z - z_0| < \delta;$$

es decir, para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$|g(f(z)) - g(f(z_0))| < \epsilon \text{ siempre que } 0 < |z - z_0| < \delta,$$

por lo tanto,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} g(f(z)) = g(f(z_0)). \quad \blacksquare$$

Teorema 1.2.21 Sea $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua y sea $\{z_n\}$ una sucesión de números complejos en D . Si $\{z_n\}$ converge a w , entonces $\{f(z_n)\}$ converge a $f(w)$.

Demostración: Dado que f es continua en w , entonces

$$\lim_{z \rightarrow w_0} f(z) = f(w_0).$$

Como el límite anterior no depende de la trayectoria por la cual nos aproximemos a w , entonces podemos escoger como trayectoria de aproximación, la trayectoria generada por los puntos de la sucesión $\{z_n\}$. Dado que $z_n \rightarrow w$, entonces $f(z_n) \rightarrow f(w)$. ■

Definición 1.2.35 (Función acotada) Sea $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ una función compleja de la variable compleja z , se dice que f es una función acotada si existe un $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in D$.

Teorema 1.2.22 Si $f(z)$ es una función continua en un dominio compacto, entonces $f(z)$ está acotada.

Demostración: Sea D el dominio de la función f y supóngase que $f(z)$ no está acotada, entonces dado un $n \in \mathbb{N}$ existe al menos un z_n en D tal que $|f(z_n)| > n$. Entonces, podemos construir una sucesión $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ todos diferentes tales que $|f(z_n)| > n$.

La sucesión $\{z_n\}$ está contenida en D y, dado que el conjunto D es acotado, entonces $\{z_n\}$ es una sucesión acotada y, por el teorema 1.2.16, tiene una subsucesión z_{n_j} convergente, digamos que converge a w . Como D es un conjunto cerrado, por el teorema 1.2.14, $w \in D$. Ahora bien, dado que $z_{n_j} \rightarrow w$ y f es continua en D , por el teorema 1.2.19, $f(z_{n_j}) \rightarrow f(w)$. Por último, de acuerdo con la definición de límite, si tomamos $\epsilon = 1$, entonces existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f(z_{n_j}) - f(w)| < 1$ si $n_j \geq N$. Es decir, todos los elementos de la sucesión $f(z_{n_j})$ están contenidos en el disco de radio 1 centrado en $f(w)$ siempre que $n_j \geq N$, lo cual contradice la hipótesis inicial para $n = 1$; por lo tanto, f está acotada en D .

1.3. Diferenciación de funciones de variable compleja

Definición 1.3.1 (Diferenciabilidad) Sea $f(z)$ una función compleja de la variable compleja z , se dice que $f(z)$ es diferenciable en z_0 si el límite siguiente existe.

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \quad (1.3.1)$$

El límite anterior se conoce como la derivada de f en z_0 y se denota como

$f'(z_0)$ o $\left. \frac{d}{dz} f(z) \right|_{z_0}$; es decir,

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \quad (1.3.2)$$

La derivada puede expresarse de una manera equivalente, si hacemos

$$\Delta z = z - z_0. \quad (1.3.3)$$

de donde se obtiene

$$z = z_0 + \Delta z. \quad (1.3.4)$$

Sustituyendo las ecuaciones 1.3.3 y 1.3.4 en la ecuación 1.3.2 se tiene

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}. \quad (1.3.5)$$

La ecuación anterior permite hacer la siguiente observación respecto al concepto de derivada. Puesto que $f'(z)$ existe, entonces debe existir una vecindad de z_0 de radio ϵ , en la cual $f(z)$ esté bien definida, de tal manera que para $|\Delta z|$ suficientemente pequeño, $f(z_0 + \Delta z)$ está bien definida. Esto se muestra en la figura 1.28.

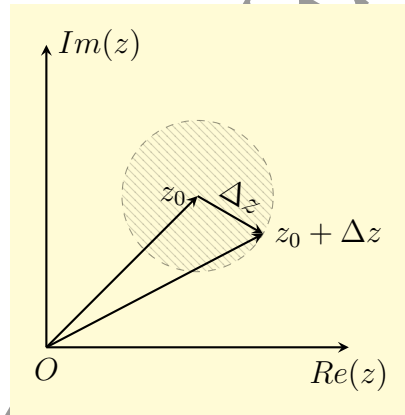


Figura 1.28: La derivada compleja.

La ecuación 1.3.5 permite omitir el punto z_0 y escribir de manera genérica, para cualquier punto z en la cual f sea diferenciable,

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}. \quad (1.3.6)$$

Ejemplo 1.3.1 Determine la derivada, a partir de la definición, de la función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida como $f(z) = z^n$, donde n es un entero positivo.

Solución: Considérese un punto particular z_0 , luego

$$\begin{aligned}
 f'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}, \\
 &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^n - z^n}{\Delta z}, \\
 &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} z^{n-j} (\Delta z)^j - z^n}{\Delta z}, \\
 &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\sum_{j=1}^n \binom{n}{j} z^{n-j} (\Delta z)^j}{\Delta z}, \\
 &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{nz^{n-1}\Delta z}{\Delta z} + \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\sum_{j=2}^n \binom{n}{j} z^{n-j} (\Delta z)^j}{\Delta z}, \\
 &= nz^{n-1} + \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\sum_{j=2}^n \binom{n}{j} z^{n-j} (\Delta z)^j}{\Delta z}, \\
 &= nz^{n-1}.
 \end{aligned}$$

Para cualquier punto z del plano complejo finito se tiene:

$$f'(z) = \frac{d}{dz} z^n = nz^{n-1}, \quad \text{para todo entero positivo } n. \quad (1.3.7)$$

Teorema 1.3.1 Si f es diferenciable en un punto z , entonces f es continua en z .

Demostración: Supóngase que f es diferenciable en el punto z , entonces el límite siguiente existe.

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z).$$

Por el teorema 1.2.18 b)

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} [f(z + \Delta z) - f(z)] = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} f'(z) \Delta z = 0.$$

Por el teorema 1.2.18 a)

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} f(z + \Delta z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} f(z)$$

Finalmente, si hacemos $\Delta z = z' - z$, entonces $\Delta z \rightarrow 0$ cuando $z' \rightarrow z$ y así se tiene

$$\lim_{z' \rightarrow z} f(z') = \lim_{z' \rightarrow z} f(z) = f(z). \quad \blacksquare$$

1.3.1. Ecuaciones de Cauchy-Riemann

Supóngase que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es una función diferenciable en z_0 . El límite 1.3.1 debe ser el mismo sin importar la trayectoria de aproximación a z_0 . En particular, considere las trayectorias que corresponden a las rectas l_1 y l_2 , las cuales se muestran en la figura 1.29.

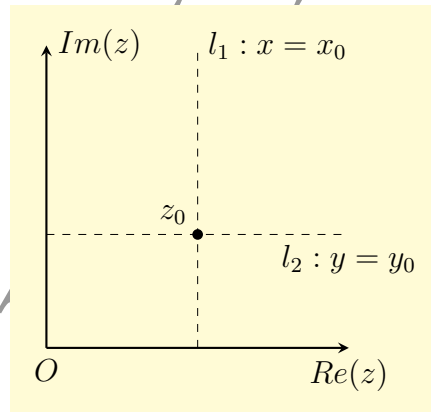


Figura 1.29: Trayectorias para obtener las ecuaciones de Cauchy-Riemann

En general, $\Delta z = \Delta(x + iy) = \Delta x + i\Delta y$.
Sobre la recta l_2 , que pasa por z_0 , $y = y_0$, así que $\Delta y = 0$, luego $\Delta z = \Delta x$;

por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 f'(z_0) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}, \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta x) - f(z_0)}{\Delta x}, \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) + iv(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{\Delta x}, \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)] + i[v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)]}{\Delta x}, \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)]}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{i[v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)]}{\Delta x}, \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} u(x, y)|_{(x_0, y_0)} + i \frac{\partial}{\partial x} v(x, y)|_{(x_0, y_0)}. \tag{1.3.8}
 \end{aligned}$$

Sobre la recta l_1 , $x = x_0$, así que $\Delta x = 0$, luego $\Delta z = i\Delta y$; por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 f'(z_0) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}, \\
 &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + i\Delta y) - f(z_0)}{i\Delta y}, \\
 &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) + iv(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{i\Delta y}, \\
 &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{[u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)] + i[v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)]}{i\Delta y}, \\
 &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{[u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)]}{i\Delta y} + \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{i[v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)]}{i\Delta y}, \\
 &= -i \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{[u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)]}{\Delta y} + \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{[v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)]}{\Delta y}, \\
 &= -i \frac{\partial}{\partial y} u(x, y)|_{(x_0, y_0)} + \frac{\partial}{\partial y} v(x, y)|_{(x_0, y_0)}. \tag{1.3.9}
 \end{aligned}$$

De las ecuaciones 1.3.8 y 1.3.9 se obtiene

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x} u(x, y)|_{(x_0, y_0)} &= \frac{\partial}{\partial y} v(x, y)|_{(x_0, y_0)}, \\
 \frac{\partial}{\partial y} u(x, y)|_{(x_0, y_0)} &= -\frac{\partial}{\partial x} v(x, y)|_{(x_0, y_0)},
 \end{aligned}$$

Este resultado es válido para cualquier punto z en el cual $f(z)$ es diferencia-

ble. De manera general se tiene

$$\frac{\partial}{\partial x}u(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}v(x, y), \quad (1.3.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}u(x, y) = -\frac{\partial}{\partial x}v(x, y). \quad (1.3.11)$$

Las ecuaciones anteriores se conocen como ecuaciones de Cauchy-Riemann. Las ecuaciones de Cauchy-Riemann representan una condición necesaria que deben cumplir las funciones diferenciables; sin embargo, esta condición no es suficiente para establecer la diferenciableidad de una función compleja. El siguiente teorema, que se enuncia sin demostración, contiene las condiciones suficientes y necesarias para la existencia de la derivada.

Teorema 1.3.2 *Sea $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ una función compleja de la variable compleja z . Si tanto u como v son funciones continuas con primeras derivadas parciales continuas, y si además, u y v satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, entonces $f(z)$ es diferenciable.*

Ejemplo 1.3.2 *Determine si la función $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy$ es diferenciable en alguna región o punto del plano complejo.*

Solución: Las funciones u y v están definidas como:

$$u(x, y) = x^2 - y^2,$$

$$v(x, y) = 2xy,$$

y sus derivadas parciales son

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = 2x,$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -2y,$$

$$\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = 2y,$$

$$\frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = 2x.$$

Podemos observar que tanto u y v como sus derivadas parciales son funciones continuas en todo el plano complejo. Ahora verifiquemos que las ecuaciones de Cauchy-Riemann se satisfacen.

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x}.$$

Por lo tanto, $f(z)$ es diferenciable en todo el plano complejo y su derivada es

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = 2x + i2y = 2z.$$

Obsérvese que $f(z) = z^2$ y su derivada también se obtiene del ejemplo 1.3.1 usando la ecuación 1.3.7 con $n = 2$.

Teorema 1.3.3 *Suponga que f es diferenciable en un disco abierto D .*

- a) *Si $f'(z) = 0$ para toda $z \in D$, entonces $f(z)$ es una función constante en D .*
- b) *Si $|f(z)|$ es constante en D , entonces $f(z)$ es constante en D*

Demostración:

a) Sea $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, como f es diferenciable en D , entonces tanto u y v como sus derivadas parciales son continuas en D , además u y v satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Por lo anterior,

$$f'(z) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = 0.$$

De la ecuación anterior se concluye que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} &= 0, \quad \forall (x, y) \in D, \\ \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} &= 0, \quad \forall (x, y) \in D. \end{aligned}$$

Ahora, mediante las ecuaciones de Cauchy-Riemann se concluye que

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} &= \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = 0, \quad \forall (x, y) \in D, \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} &= -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = 0, \quad \forall (x, y) \in D. \end{aligned}$$

Dado que $\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = 0$, entonces u es una constante. De la misma manera, dado que $\frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = 0$, entonces v es una constante. Finalmente, dado que $f(z)$ es la suma de dos constantes, se concluye que $f(z)$ es

una constante, para toda z en D .

b) Si $k = 0$, entonces $|f(z)| = \sqrt{u^2 + v^2} = 0$, entonces $u = v = 0$ y; por lo tanto, $f(z) = 0$.

Si $f(z) \neq 0$, entonces

$$u^2 + v^2 = k^2. \quad (1.3.12)$$

Diferenciando la ecuación 1.3.12 respecto a x y y , respectivamente, se obtiene

$$\begin{aligned} uu_x + vv_x &= 0, \\ uu_y + vv_y &= 0. \end{aligned} \quad (1.3.13)$$

Por otra parte, las ecuaciones de Cauchy-Riemann son

$$\begin{aligned} u_x &= v_y, \\ u_y &= -v_x. \end{aligned}$$

Sustituyendo las ecuaciones de C-R en la segunda ecuación del sistema representado por la ecuación 1.3.13, se obtiene el siguiente homogéneo.

$$\begin{aligned} uu_x + vv_x &= 0, \\ vu_x - uv_x &= 0. \end{aligned}$$

En forma matricial se tiene

$$\begin{bmatrix} u & v \\ v & -u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ v_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.3.14)$$

Dado que $u^2 + v^2 = k^2 \neq 0$, entonces $u_x = v_x = 0$, para todo $(x, y) \in D$

Si sustituimos las ecuaciones de C-R en la primera ecuación del sistema representado por la ecuación 1.3.13 obtenemos el siguiente sistema homogéneo.

$$-vu_y + uv_y = 0, \quad (1.3.15)$$

$$uu_y + vv_y = 0. \quad (1.3.16)$$

En forma matricial se tiene

$$\begin{bmatrix} -v & u \\ u & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_y \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.3.17)$$

Nuevamente, debido a que $u^2 + v^2 = k^2 \neq 0$, entonces $u_y = v_y = 0$, para todo $(x, y) \in D$

En conclusión, como todas las derivadas parciales, tanto de u como de v son iguales a cero, entonces $f(z)$ es una constante. ■

Los resultados más importantes sobre diferenciabilidad de funciones complejas se obtienen de su analogía con la definición de diferenciabilidad para funciones reales y se establecen en el siguiente teorema.

Teorema 1.3.4 *Si $f(z)$ y $g(z)$ son diferenciables, entonces*

a) *La suma (o resta) es diferenciable y su derivada está dada por*

$$\frac{d}{dz} (f(z) \pm g(z)) = \frac{d}{dz} f(z) \pm \frac{d}{dz} g(z).$$

b) *El producto es diferenciable y su derivada está dada por*

$$\frac{d}{dz} (f(z)g(z)) = f(z) \left(\frac{d}{dz} g(z) \right) + \left(\frac{d}{dz} f(z) \right) g(z).$$

c) *El cociente es diferenciable y su derivada está dada por*

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{f(z)}{g(z)} \right) = \frac{g(z) \frac{d}{dz} f(z) - f(z) \frac{d}{dz} g(z)}{g^2(z)},$$

siempre que $g(z) \neq 0$.

Teorema 1.3.5 (Regla de la cadena) *Sean $f : D \rightarrow E$ y $g : E \rightarrow F$ funciones diferenciables en sus dominios, entonces para todo $z \in D$ la composición $g \circ f : D \rightarrow F$ es diferenciable y su derivada es*

$$\frac{dg}{dz} [g(f(z))] = \frac{dg}{df} \frac{df}{dz}. \quad (1.3.18)$$

Demostración: Considérese un punto z_0 del dominio de la función f tal que $w_0 = f(z_0)$, como se muestra en la figura 1.30,

Supóngase que f y g son diferenciables en z_0 y w_0 , respectivamente. Dado que g es diferenciable en w_0 , entonces existe una vecindad de radio ϵ centrada en w_0 , en la cual la siguiente función se encuentra bien definida.

$$h(w) = \begin{cases} \frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} - g'(w_0), & 0 < |w - w_0| < \epsilon \\ 0, & w = w_0. \end{cases} \quad (1.3.19)$$

Obsérvese que h es continua en w_0 . Para todo $w \neq w_0$ se tiene que

$$h(w) = \frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} - g'(w_0)$$

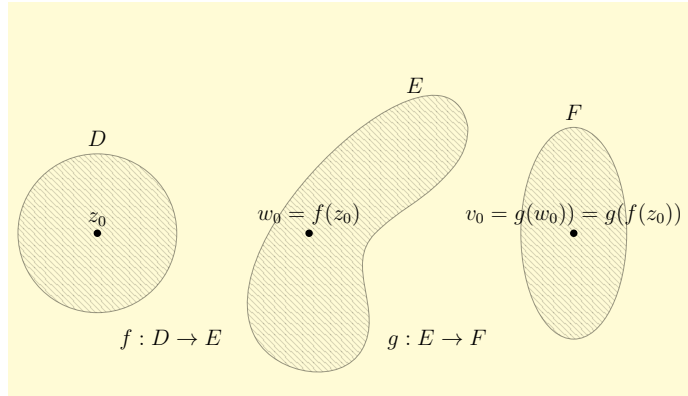


Figura 1.30: Diferenciabilidad de la composición de funciones

despejando $g(w) - g(w_0)$ se obtiene

$$g(w) - g(w_0) = (h(w) + g'(w_0))(w - w_0). \quad (1.3.20)$$

La ecuación 1.3.20 es válida aun cuando $w = w_0$. Dado que f es diferenciable en z_0 y, por lo tanto, continua en z_0 , entonces para el ϵ dado, existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < |z - z_0| < \delta$, se tiene la garantía de que $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$. Esto nos permite sustituir $w = f(z)$, de manera que,

$$g(f(z)) - g(f(z_0)) = (h(f(z)) + g'(f(z_0)))(f(z) - f(z_0)). \quad (1.3.21)$$

Finalmente, dividiendo entre $z - z_0$ y haciendo tender $z \rightarrow z_0$ se obtiene

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{z - z_0} &= \lim_{z \rightarrow z_0} [h(f(z)) + g'(f(z_0))] \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(f(z) - f(z_0))}{z - z_0}, \\ \left. \frac{d}{dz}(g(f(z))) \right|_{z_0} &= (h(\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)) + g'(f(z_0))) \left. \frac{d}{dz} f(z) \right|_{z_0}, \\ g'(f(z_0)) &= (h(w_0) + g'(f(z_0))) f'(z_0), \\ g'(f(z_0)) &= g'(f(z_0)) f'(z_0), \end{aligned}$$

En general, para cualquier punto z del dominio D se tiene,

$$\begin{aligned} g'(f(z)) &= g'(f(z)) f'(z), \text{ de manera equivalente,} \\ \frac{d}{dz}[g(f(z))] &= \frac{d}{df}[g(f)] \frac{d}{dz} f(z). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

1.3.2. Propiedades de las funciones analíticas: Parte real e imaginaria

Definición 1.3.2 (Analiticidad) Una función compleja $f(z)$ de la variable compleja z es analítica en z_0 si ésta satisface las siguientes condiciones

- a) $f(z)$ es diferenciable en z_0 ,
- b) $f(z)$ es diferenciable en una vecindad de z_0 .

Ejemplo 1.3.3 La función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida como $f(z) = z^n$, donde n es un entero negativo es una función analítica para todo $z \neq 0$.

Teorema 1.3.6 (Sobre la analiticidad de las funciones complejas) Si f y g son dos funciones analíticas en un dominio D , entonces

- a) $f(z) \pm g(z)$ es analítica en D ,
- b) $f(z)g(z)$ es analítica en D ,
- c) $\frac{f(z)}{g(z)}$ es analítica en D siempre que, $g(z) \neq 0$.

Definición 1.3.3 (Función entera) Se dice que una función compleja $f(z)$ de la variable compleja z es entera si ésta es analítica en todo el plano complejo z .

Ejemplo 1.3.4 La función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida como $f(z) = z^n$, donde n es un entero positivo es una función entera.

Las ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares

Dada la función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, es posible representar esta función compleja de la variable compleja z en coordenadas polares por medio de la transformación,

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \theta, \\ y &= r \sin \theta \end{aligned} \right\}. \quad (1.3.22)$$

Bajo esta transformación, $f(z)$ se presenta como

$$f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta). \quad (1.3.23)$$

Ahora, es necesario determinar las ecuaciones de Cauchy-Riemann en términos de las variables polares r, θ . Para tal fin, considérese una función $h(x, y)$

(la cual puede expresarse de manera equivalente como $h(r, \theta)$). Para la función anterior se tiene,

$$\left. \begin{aligned} h_r &= \frac{\partial h}{\partial r} = \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r}, \\ h_\theta &= \frac{\partial h}{\partial \theta} = \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta}. \end{aligned} \right\} \quad (1.3.24)$$

De las ecuaciones 1.3.22 se obtiene

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial r} &= \cos \theta, & \frac{\partial x}{\partial \theta} &= -r \operatorname{sen} \theta, \\ \frac{\partial y}{\partial r} &= \operatorname{sen} \theta, & \frac{\partial y}{\partial \theta} &= r \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (1.3.25)$$

Sustituyendo las ecuaciones 1.3.25 en las ecuaciones 1.3.24 se obtiene

$$\left. \begin{aligned} h_r &= h_x \cos \theta + h_y \operatorname{sen} \theta, \\ h_\theta &= h_x(-r \operatorname{sen} \theta) + h_y r \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (1.3.26)$$

Para las funciones $u(r, \theta)$ y $v(r, \theta)$ se obtienen las ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} u_r &= u_x \cos \theta + u_y \operatorname{sen} \theta, \\ u_\theta &= u_x(-r \operatorname{sen} \theta) + u_y r \cos \theta, \end{aligned} \right\} \quad (1.3.27)$$

además,

$$\left. \begin{aligned} v_r &= v_x \cos \theta + v_y \operatorname{sen} \theta, \\ v_\theta &= v_x(-r \operatorname{sen} \theta) + v_y r \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (1.3.28)$$

Las ecuaciones de Cauchy-Riemann en términos de x y y pueden expresarse como

$$\left. \begin{aligned} u_x &= v_y, \\ u_y &= -v_x \end{aligned} \right\} \quad (1.3.29)$$

Sustituyendo las ecuaciones 1.3.29 en las 1.3.27 se obtiene

$$\left. \begin{aligned} u_r &= v_y \cos \theta - v_x \operatorname{sen} \theta, \\ u_\theta &= v_y(-r \operatorname{sen} \theta) - v_x r \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (1.3.30)$$

Comparando las ecuaciones 1.3.30 y 1.3.28 se tiene

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \frac{1}{r} v_\theta, \\ v_r &= -\frac{1}{r} u_\theta. \end{aligned} \right\} \quad (1.3.31)$$

Las ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares son

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial v}{\partial r} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} \quad (1.3.32)$$

Finalmente, la derivada en coordenadas polares se determina de la siguiente manera: Sea $f(z)f(r, \theta) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$, la función compleja de la variable compleja $z = re^{i\theta}$ expresada en coordenadas polares, entonces

$$\begin{aligned} df &= du + idv, \\ &= \frac{\partial u}{\partial r} dr + \frac{\partial u}{\partial \theta} d\theta + i \left[\frac{\partial v}{\partial r} dr + \frac{\partial v}{\partial \theta} d\theta \right], \\ &= \left[\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right] dr + \left[\frac{\partial u}{\partial \theta} + i \frac{\partial v}{\partial \theta} \right] d\theta. \end{aligned}$$

Dado que la derivada, si existe, es independiente de la curva por la cual nos aproximemos al punto, entonces podemos considerar las trayectorias siguientes: $\mathcal{C}_1 : \theta = cte$. Sobre esta curva el diferencial se reduce a:

$$df = \left[\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right] dr.$$

Por lo tanto,

$$\frac{df}{dz} = \left[\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right] \frac{\partial r}{\partial z}. \quad (1.3.33)$$

Además, dado que $z = re^{i\theta} = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$, entonces

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta,$$

luego,

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial z} &= \frac{1}{\frac{\partial z}{\partial r}} = \frac{1}{\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta}, \\ &= \frac{\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta}{\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta}, \\ &= e^{-i\theta}. \end{aligned}$$

Sustituyendo el último resultado en la ecuación 1.3.33 se obtiene

$$\frac{df}{dz} = \left[\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right] e^{-i\theta}. \quad (1.3.34)$$

De manera análoga, podemos considerar la trayectoria $\mathcal{C}_2 : r = \text{cte}$. Sobre esta curva el diferencial se reduce a:

$$df = \left[\frac{\partial u}{\partial \theta} + i \frac{\partial v}{\partial \theta} \right] d\theta.$$

Por lo tanto,

$$\frac{df}{dz} = \left[\frac{\partial u}{\partial \theta} + i \frac{\partial v}{\partial \theta} \right] \frac{\partial \theta}{\partial z}. \quad (1.3.35)$$

Además,

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = r(-\sin \theta + i \cos \theta) = ir(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial z} &= \frac{1}{\frac{\partial z}{\partial \theta}} = \frac{1}{ir(\cos \theta + i \sin \theta)}, \\ &= \frac{1}{ir}(\cos \theta - i \sin \theta), \\ &= \frac{1}{ir}e^{-i\theta}. \end{aligned}$$

Sustituyendo el último resultado en la ecuación 1.3.35 se obtiene

$$\frac{df}{dz} = \left[\frac{\partial u}{\partial \theta} + i \frac{\partial v}{\partial \theta} \right] \frac{e^{-i\theta}}{ir}. \quad (1.3.36)$$

Ahora estamos en condiciones de analizar la analiticidad de las funciones elementales, definidas en la sección 1.2.3.

Analiticidad de las funciones elementales

Las funciones polinomiales

Si $P_n(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_0$ representa un polinomio de grado n , de acuerdo con el ejemplo 1.3.1 cada término es diferenciable, y, por el teorema 1.3.4 a, la suma es diferenciable. La derivada está dada por

$$f'(z) = n c_n z^{n-1} + (n-1) c_{n-1} z^{n-2} \dots + c_1. \quad (1.3.37)$$

Obsérvese que la derivada es un polinomio de grado $n-1$.

Ejemplo 1.3.5 Determine la derivada de la función $f(z) = z^3 + 2z^2 - z$.

Solución: De acuerdo con la ecuación 1.3.37

$$f'(z) = 3z^2 + 4z - 1.$$

Las funciones racionales

Si

$$R(z) = \frac{p_n(z)}{q_m(z)} = \frac{a_n z^n + \dots + a_0}{b_m z^m + \dots + b_0}$$

representa una función racional cualquiera, $R(z)$ es diferenciable en todos los puntos, excepto en los puntos donde $q_m(z) = 0$. De acuerdo con el teorema 1.3.4 c, la derivada está determinada por

$$R'(z) = \frac{q_m(z)p'_n(z) - p_n(z)q'_m(z)}{q_m^2(z)}. \quad (1.3.38)$$

Ejemplo 1.3.6 Determine la derivada de la función $f(z) = \frac{z+1}{z^2+1}$.

Solución: De acuerdo con la ecuación 1.3.38

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{d}{dz} \left(\frac{z+1}{z^2+1} \right), \\ &= \frac{(z^2+1) \frac{d}{dz}(z+1) - (z+1) \frac{d}{dz}(z^2+1)}{(z^2+1)^2}, \\ &= \frac{(z^2+1) - (z+1)(2z)}{(z^2+1)^2}, \\ &= \frac{z^2+1-2z^2-2z}{(z^2+1)^2}, \\ &= \frac{-z^2-2z+1}{(z^2+1)^2}. \end{aligned} \quad (1.3.39)$$

La ecuación 1.3.39 es válida para toda z tal que $q(z) = z^2 + 1 \neq 0$; es decir, para toda $z \neq \pm i$.

Las función exponencial

La función exponencial compleja se define como

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y),$$

donde e^x es la función exponencial real.

La parte real e imaginaria de $f(z)$ son:

$$u(x, y) = e^x \cos y,$$

$$v(x, y) = e^x \operatorname{sen} y,$$

Las derivadas parciales son

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} &= e^x \cos y, \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} &= -e^x \sin y, \\ \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} &= e^x \sin y, \\ \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} &= e^x \cos y.\end{aligned}$$

Se observa que tanto u como v , así como también sus derivadas parciales, son continuas en todo el plano complejo; además,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} &= e^x \cos y = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}, \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} &= -e^x \sin y = -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x},\end{aligned}$$

es decir, u y v satisfacen las ecuaciones de C-R; por lo tanto, $f(z)$ es diferenciable en todo el plano complejo y su derivada es

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}e^z &= \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x, y)}{\partial x}, \\ &= e^x \cos y + ie^x \sin y, \\ &= e^z.\end{aligned}\tag{1.3.40}$$

La función exponencial es una función entera. Si $u(z)$ es una función diferenciable, entonces, por la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dz}e^u = e^u \frac{d}{dz}u(z)\tag{1.3.41}$$

Las funciones trigonométricas

Las funciones trigonométricas están definidas en términos exponenciales, por lo cual sus derivadas son sencillas de obtener. Sabemos que

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} z &= \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}), \\ \cos z &= \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \\ \tan z &= \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}.\end{aligned}$$

Determinemos las derivadas.

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dz}(\operatorname{sen} z) &= \frac{1}{2i} \frac{d}{dz} (e^{iz} - e^{-iz}), \\
 &= \frac{1}{2i} (ie^{iz} + ie^{-iz}), \\
 &= \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}), \\
 &= \cos z.
 \end{aligned} \tag{1.3.42}$$

De manera análoga,

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dz}(\cos z) &= \frac{1}{2} \frac{d}{dz} (e^{iz} + e^{-iz}), \\
 &= \frac{1}{2} (ie^{iz} - ie^{-iz}), \\
 &= -\frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}), \\
 &= -\operatorname{sen} z.
 \end{aligned} \tag{1.3.43}$$

Las funciones $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$ son funciones enteras.

Para determinar la derivada de la tangente, considere el teorema 1.3.4 c).

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dz}(\tan z) &= \frac{d}{dz} \left(\frac{\operatorname{sen} z}{\cos z} \right), \\
 &= \frac{\cos z \frac{d}{dz}(\operatorname{sen} z) - \operatorname{sen} z \frac{d}{dz}(\cos z)}{\cos^2 z}, \\
 &= \frac{\cos z \cos z + \operatorname{sen} z(\operatorname{sen} z)}{\cos^2 z}, \\
 &= \frac{1}{\cos^2 z}, \\
 &= \sec^2 z.
 \end{aligned} \tag{1.3.44}$$

La función $\tan z$ no es analítica en los puntos en los cuales $\cos z = 0$; es decir, cuando $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$, donde $k \in \mathbb{Z}$.

Las funciones hiperbólicas

Sabemos que

$$\begin{aligned}\sinh z &= \frac{1}{2} (e^z - e^{-z}), \\ \cosh z &= \frac{1}{2} (e^z + e^{-z}), \\ \tanh z &= \frac{\sinh z}{\cosh z}.\end{aligned}$$

Determinemos las derivadas.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}(\sinh z) &= \frac{1}{2} \frac{d}{dz} (e^z - e^{-z}), \\ &= \frac{1}{2} (e^z + e^{-z}), \\ &= \cosh z.\end{aligned}\tag{1.3.45}$$

Las funciones $\sinh z$ y $\cosh z$ son funciones enteras.

Determinemos la derivada de la $\tanh z$.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}(\cosh z) &= \frac{1}{2} \frac{d}{dz} (e^z + e^{-z}), \\ &= \frac{1}{2} (e^z - e^{-z}), \\ &= \sinh z.\end{aligned}\tag{1.3.46}$$

Para determinar la derivada de la tangente hiperbólica, considérese el teorema 1.3.4 c).

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}(\tanh z) &= \frac{d}{dz} \left(\frac{\sinh z}{\cosh z} \right), \\ &= \frac{\cosh z \frac{d}{dz}(\sinh z) - \sinh z \frac{d}{dz}(\cosh z)}{\cosh^2 z}, \\ &= \frac{\cosh z \cosh z - \sinh z \sinh z}{\cosh^2 z}, \\ &= \frac{1}{\cosh^2 z}, \\ &= \operatorname{sech}^2 z.\end{aligned}\tag{1.3.47}$$

La función logarítmica compleja

En la sección 1.2.3 se definió el logaritmo principal de z como

$$\operatorname{Log} z = \ln r + i\theta \quad \text{para } r \neq 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi. \quad (1.3.48)$$

Para precisar, $r = |z|$ y $\theta = \operatorname{Arg}(z)$. Dado que el argumento principal de z es una función discontinua para $\operatorname{Re}(z) > 0$, entonces $\operatorname{Log} z$ no es analítica si $\operatorname{Re}(z) > 0$. Dado que estamos tratando de hallar un dominio D en el cual $\operatorname{Log} z$ sea analítica, este dominio debe excluir al origen y la recta $\operatorname{Re}(z) > 0$, de manera que

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0, \quad 0 < \theta < 2\pi\}.$$

De esta manera

$$\operatorname{Log} z = \ln r + i\theta \quad \text{para } z \in D. \quad (1.3.49)$$

El dominio de $\operatorname{Log} z$ se muestra en la figura 1.31.

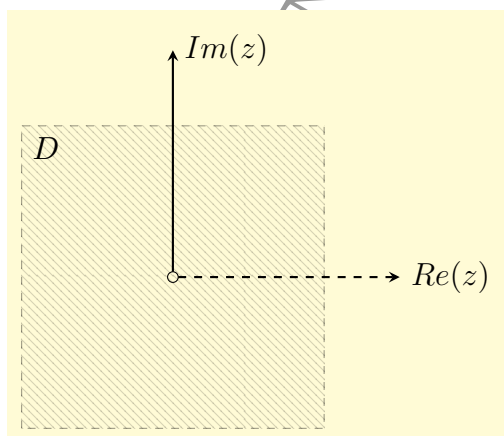


Figura 1.31: Dominio de analiticidad para $\operatorname{Log} z$

Definición 1.3.4 (Rama) Se conoce como *rama* de una función multivaluada a una función univaluada y analítica en cierto dominio. En cada punto del dominio la función univaluada asume uno y solo uno de los valores que puede tomar la función multiforme.

La función univaluada $w_0(z) = \operatorname{Log} z$ definida por la ecuación 1.3.49 se conoce como rama principal de la función $\log(z)$. Otras ramas de la función $\log z$ pueden obtenerse al asignar valores de k en la definición de $\log z$. Considérese, por ejemplo, el valor de $k = 1$, en este caso

$$w_1(z) = \ln r + i\arg(z), \quad \text{para } r \neq 0, \quad 2\pi < \arg(z) \leq 4\pi. \quad (1.3.50)$$

Si eliminamos los puntos de discontinuidad, entonces

$$w_1(z) = \ln r + i \arg(z), \quad \text{para } r \neq 0, \quad 2\pi < \arg(z) < 4\pi. \quad (1.3.51)$$

De manera que $w_1(z)$ es analítica en la misma región D del plano complejo mostrado en la figura ??.

Considérese que D es un dominio en el cual $\log z$ es analítica, como se acaba de definir, entonces dada la función $\log z = \ln r + i(\theta + 2k\pi)$,

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \ln r, \\ v(r, \theta) &= \theta + 2k\pi. \end{aligned}$$

las derivadas parciales son

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} u(r, \theta) &= \frac{\partial \ln r}{\partial r} = \frac{1}{r}, \\ \frac{\partial}{\partial \theta} u(r, \theta) &= \frac{\partial \ln r}{\partial \theta} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial r} v(r, \theta) &= \frac{\partial (\theta + 2k\pi)}{\partial r} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \theta} v(r, \theta) &= \frac{\partial (\theta + 2k\pi)}{\partial \theta} = 1. \end{aligned}$$

Las funciones u y v así como sus derivadas parciales son continuas en el dominio D .

Verifiquemos que se satisfacen las ecuaciones de C-R.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} u(r, \theta) &= \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} v(r, \theta), \\ \frac{\partial}{\partial r} v(r, \theta) &= 0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} u(r, \theta). \end{aligned}$$

Dado que las ecuaciones de C-R se satisfacen (ver las ecuaciones 1.3.32), entonces la derivada está dada por la ecuación 1.3.34.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}(\log z) &= \left[\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right] e^{-i\theta} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}, \\ &= \frac{1}{z}. \end{aligned} \quad (1.3.52)$$

Las funciones trigonométricas e hiperbólicas inversas

Las funciones trigonométricas e hiperbólicas inversas se determinaron en la sección 1.2.3.

Determinemos la derivada de $\sin^{-1} z$ para una rama analítica.

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dz} \sin^{-1} z &= -i \frac{d}{dz} \log \left(iz + \sqrt{1 - z^2} \right), \\
 &= -i \frac{1}{iz + \sqrt{1 - z^2}} \frac{d}{dz} \left(iz + \sqrt{1 - z^2} \right), \\
 &= -i \frac{1}{iz + \sqrt{1 - z^2}} \left(i + \frac{1}{2} (1 - z^2)^{-1/2} (-2z) \right) \\
 &= -i \frac{i - z(1 - z^2)^{-1/2}}{iz + \sqrt{1 - z^2}}, \\
 &= \frac{1 + zi(1 - z^2)^{-1/2}}{iz + \sqrt{1 - z^2}}, \\
 &= \frac{1 + \frac{zi}{(1 - z^2)^{1/2}}}{iz + \sqrt{1 - z^2}}, \\
 &= \frac{\frac{(1 - z^2)^{1/2} + zi}{(1 - z^2)^{1/2}}}{iz + \sqrt{1 - z^2}}, \\
 &= \frac{(1 - z^2)^{1/2} + zi}{(1 - z^2)^{1/2} (iz + \sqrt{1 - z^2})}, \\
 &= \frac{1}{(1 - z^2)^{1/2}}.
 \end{aligned}$$

A continuación se listan las derivadas para una rama analítica de las

funciones inversas dadas.

$$\frac{d}{dz} \operatorname{sen}^{-1} z = \frac{1}{(1 - z^2)^{1/2}}, \quad (1.3.53)$$

$$\frac{d}{dz} \operatorname{cos}^{-1} z = \frac{-1}{(1 - z^2)^{1/2}}, \quad (1.3.54)$$

$$\frac{d}{dz} \operatorname{tan}^{-1} z = \frac{1}{1 + z^2}, \quad (1.3.55)$$

$$\frac{d}{dz} \operatorname{senh}^{-1} z = \frac{1}{(1 + z^2)^{1/2}}, \quad (1.3.56)$$

$$\frac{d}{dz} \operatorname{cosh}^{-1} z = \frac{1}{(z^2 - 1)^{1/2}}, \quad (1.3.57)$$

$$\frac{d}{dz} \operatorname{tanh}^{-1} z = \frac{1}{1 - z^2}. \quad (1.3.58)$$

Teorema 1.3.7 (Regla de L'hôpital) Sean f y g funciones de variable compleja tales que $f(z_0) = g(z_0) = 0$. Si f y g son diferenciables en z_0 y $g'(z_0) \neq 0$, entonces,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}. \quad (1.3.59)$$

Demostración: Considérese el cociente $\frac{f(z)}{g(z)}$. Dado que $f(z_0) = g(z_0) = 0$, entonces

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(z) - f(z_0)}{g(z) - g(z_0)}, \text{ restando ceros,}$$

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}}{\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}}, \text{ dividiendo entre } z - z_0,$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}}{\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}}, \text{ tomando el límite,}$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}, \text{ siempre que } g'(z_0) \neq 0. \quad \blacksquare$$

Ejemplo 1.3.7 Determine $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$, donde $f(z) = \frac{\cos z - 1}{z}$, $z \neq 0$.

Solución: De acuerdo con la regla de L'hôpital

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} f(z) &= \frac{\frac{d}{dz}(\cos z - 1)|_0}{\frac{d}{dz}(z)|_0}, \\ &= \frac{(\operatorname{sen} z)|_0}{1} = 0. \end{aligned}$$

1.3.3. Reconstrucción de una función analítica a partir de su parte real o su parte imaginaria

Definición 1.3.5 (Funciones armónicas) Una función $\phi(x, y)$ se conoce como función armónica, si existe un dominio D el cual ϕ es una solución de la ecuación

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0. \quad (1.3.60)$$

La ecuación anterior se conoce como ecuación de Laplace en el plano.

Ejemplo 1.3.8 Verifique que la función $\phi(x, y) = e^x \cos y$ es una función armónica.

Solución: Determinemos las derivadas de la función ϕ .

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = e^x \cos y, \quad (1.3.61)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = e^x \cos y. \quad (1.3.62)$$

De la misma manera,

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -e^x \sin y, \quad (1.3.63)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -e^x \cos y. \quad (1.3.64)$$

Sumando las ecuaciones 1.3.62 y 1.3.64

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = e^x \cos y - e^x \cos y = 0.$$

La función ϕ satisface la ecuación de Poisson en todo el plano complejo; por lo tanto, ϕ es una función armónica.

Teorema 1.3.8 Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es una función analítica en cierto dominio D , entonces las funciones u y v son funciones armónicas en D .

Demostración: Dado que f es analítica, entonces las funciones u y v satisfacen las ecuaciones de C-R; a saber

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (1.3.65)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (1.3.66)$$

Diferenciando la ecuación 1.3.65 con respecto a x , y la ecuación 1.3.66 con respecto a y se obtiene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \quad (1.3.67)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}. \quad (1.3.68)$$

Puede probarse que si las derivadas parciales de v son continuas, entonces

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}; \quad (1.3.69)$$

por lo tanto, al sumar las ecuaciones 1.3.67 y 1.3.68 se obtiene

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0.$$

De manera análoga para v se tiene

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x};$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Diferenciando las ecuaciones anteriores respecto a y , la primera; y respecto a x , la segunda, se obtiene

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \quad (1.3.70)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}. \quad (1.3.71)$$

Sumando las ecuaciones anteriores y considerando que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x},$$

se obtiene

$$\nabla^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Finalmente, se concluye que u y v son funciones armónicas ■.

Definición 1.3.6 (Función armónica conjugada) Si $u(x, y)$ es una función armónica, la función real $v(x, y)$ se conoce como la armónica conjugada de u , si la función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es una función analítica.

Ejemplo 1.3.9 Verifique que la función $2xy$ es el armónico conjugado de $u(x, y) = x^2 - y^2$

Solución: La función $u(x, y) = x^2 - y^2$ es una función armónica, ya que

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0.$$

Por otro lado, $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy = z^2$ es una función entera, de manera que $v(x, y) = 2xy$ es el armónico conjugado de u .

Dada una función armónica $\phi(x, y)$, es posible determinar una función analítica cuya parte real sea $u(x, y) = \phi(x, y)$. El método se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.3.10 Sea $\phi(x, y) = e^x \cos y$ determine la función analítica $f(z)$ cuya parte real sea ϕ .

Solución: Sea $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ determinaremos el armónico conjugado de $u(x, y) = e^x \cos y$. Dado que $f(z)$ debe ser analítica, entonces u y v deben satisfacer las ecuaciones de C-R,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (1.3.72)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (1.3.73)$$

De la ecuación 1.3.72 se tiene

$$\frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y,$$

de donde se sigue

$$v = \int e^x \cos y dy + c(x) = e^x \sin y + c(x) \quad (1.3.74)$$

donde c es una función que a lo más depende de x . Sustituyendo la ecuación 1.3.74 en la ecuación 1.3.73 se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x}, \\ -e^x \sin y &= -(e^x \sin y + c'(x)); \end{aligned}$$

por lo tanto, $c'(x) = 0$, luego $c = \text{cte}$. Finalmente,

$$v(x, y) = e^x \sin y + c.$$

De donde obtenemos

$$f(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y + ic = e^x(\cos y + i \sin y) + ic = e^z + ic.$$

La función $f(z)$ queda definida hasta una constante.

De un modo análogo, puede hacerse $\phi(x, y) = v$ y determinar la función analítica $f(z)$ que tiene a ϕ como su parte imaginaria; es decir, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

Por último, se mostrará que existe una relación geométrica entre la función $u(x, y)$ y su armónico conjugado $v(x, y)$. En general, la gráfica de la función $u(x, y) = a$, donde a es una constante real, corresponde a una curva en el plano xy . Para valores diferentes de a , digamos, a_1, a_2, \dots se obtiene una familia de curvas. De la misma manera, la gráfica de $v(x, y) = b$ donde b es una constante real describe una curva. Para diferentes valores de b , digamos b_1, b_2, \dots se obtiene una familia de curvas, como se muestra en la figura 1.32.

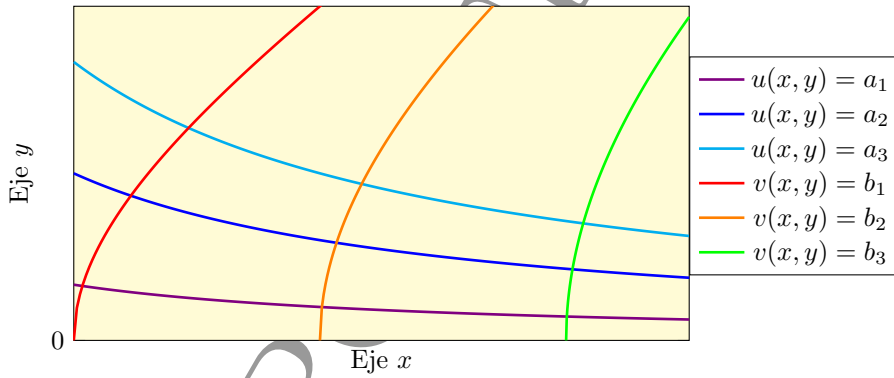


Figura 1.32: Familias de curvas perpendiculares.

Sobre cada curva de la familias $u(x, y) = a$ y $v(x, y) = b$ los diferenciales totales son

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = 0, \quad (1.3.75)$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = 0. \quad (1.3.76)$$

De la ecuación 1.3.75 se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} dx &= -\frac{\partial u}{\partial y} dy, \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}}.\end{aligned}$$

Al evaluar en un punto específico de intersección de dos curvas, como el punto P que se muestra en la figura 1.32,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_P = -\left(\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}}\right)_P \quad (1.3.77)$$

La ecuación 1.3.77 representa la pendiente de la recta tangente a la curva (línea azul) en el punto P; es decir,

$$\tan \theta_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_P = -\left(\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}}\right)_P \quad (1.3.78)$$

Procediendo de manera análoga con la ecuación 1.3.76

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x} dx &= -\frac{\partial v}{\partial y} dy, \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial v}{\partial y}}.\end{aligned}$$

Sustituyendo las ecuaciones de C-R en la ecuación anterior

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{-\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial x}}$$

Evalando en el punto P se tiene

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_P = \left(\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial x}}\right)_P. \quad (1.3.79)$$

La ecuación 1.3.79 representa la pendiente de la recta tangente a la curva (línea roja) en el punto P; es decir,

$$\tan \theta_2 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_P = \left(\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial x}}\right)_P. \quad (1.3.80)$$

Comparando las ecuaciones 1.3.78 y 1.3.80 se obtiene,

$$\tan \theta_2 = -\frac{1}{\tan \theta_1}. \quad (1.3.81)$$

La ecuación 1.3.81 implica que las rectas tangentes a las curvas forman un ángulo de 90; es decir, las familias de curvas se intersectan perpendicularmente, excepto en los puntos en los cuales la ecuación 1.3.81 deja de ser válida; es decir, cuando $\tan \theta_1 = 0$ o $\tan \theta_2 = 0$.

1.4. Mapeos conformes

En la sección 1.2.2 comenzamos con el estudio de las transformaciones de curvas y regiones. En esta sección abordaremos el tema con mayor formalidad, ya que en las secciones anteriores tuvimos la oportunidad de estudiar la continuidad y la analiticidad de las funciones complejas de variable compleja. Para comenzar se presentará una introducción a las aplicaciones o mapeos.

Definición 1.4.1 (Mapeo o aplicación) Sean A y B dos conjuntos cualesquiera, entonces diremos que una aplicación o un mapeo de A en B es una asociación o correspondencia que asigna a cada elemento del conjunto A un único elemento del conjunto B . El único elemento de B que se asocia con cualquier elemento de A se conoce como imagen del elemento de A en el mapeo.

Denotaremos un mapeo α del conjunto A en el conjunto B , mediante:

$$\alpha : A \rightarrow B.$$

Además, si $b \in B$ es la imagen de $a \in A$ bajo α escribiremos, $b = \alpha(a)$.

Definición 1.4.2 (Mapeo uno a uno)

Un mapeo α de un conjunto A en un conjunto B se conoce como mapeo uno a uno de A en B si las imágenes de distintos elementos de A corresponden a distintos elementos de B . Es decir, $\alpha : A \rightarrow B$ es uno a uno si $\alpha(a) = \alpha(b)$ implica que $b = a$.

Definición 1.4.3 (Mapeo sobre) Si en un mapeo de un conjunto A en un conjunto B cada elemento del conjunto B es una imagen, diremos que el mapeo es de A sobre B . Si algún elemento de B no es una imagen, entonces diremos que el mapeo es de A en B , pero no de A sobre B .

Definición 1.4.4 (Mapeo uno a uno y sobre) Si un mapeo α de un conjunto A en un conjunto B satisface las dos definiciones anteriores, diremos entonces que α es un mapeo uno a uno de A sobre B .

Definición 1.4.5 (Mapeo identidad) Dado cualquier conjunto A , se conoce como mapeo identidad ϵ , a la aplicación uno a uno de A sobre A , definida como,

$$\epsilon(a) = a, \quad \forall a \in A.$$

En general un mapeo de un conjunto A en un conjunto B es un subconjunto de $A \times B$ ⁴ donde cada elemento de A ocurre una y solamente una vez como la primer componente en los elementos del subconjunto.

En cualquier mapeo α de un conjunto A en un conjunto B , el conjunto A se conoce como dominio y el conjunto B como codominio de α . Si el mapeo α es de A sobre B , entonces B se conoce como rango de α , en otro caso, el rango es un subconjunto propio de B que consiste de las imágenes de todos los elementos de A .

Definición 1.4.6 (Mapeos equivalentes o iguales) Diremos que dos mapeos α y β son iguales o equivalentes si estos mapeos tienen el mismo dominio A y si $\alpha(a) = \beta(a)$ para todo $a \in A$.

Definición 1.4.7 (Producto o composición de aplicaciones) Sea α un mapeo de A en B y sea β un mapeo de B en C , el efecto de α es mapear cada elemento $a \in A$ en $\alpha(a) \in B$ y el efecto de β es mapear cada $\alpha(a) \in B$ en $\beta(\alpha(a)) \in C$. El resultado final de aplicar α seguido de β es un mapeo de A en C definido por,

$$(\beta \circ \alpha)(a) = \beta(\alpha(a)), \quad \forall a \in A,$$

$\beta \circ \alpha$ se conoce como producto o composición de los mapeos α y β en este orden.

Esta sección la dedicaremos al estudio de las aplicaciones o mapeos $f : D_1 \rightarrow D_2$ donde D_1 y D_2 son subconjuntos de los números complejos (El apéndice A contiene una exposición más amplia de las aplicaciones o mapeos en general).

⁴Este conjunto se conoce como conjunto producto y consta de todas las parejas ordenadas (a, b) tales que $a \in A$, $b \in B$.

Ya hemos descrito la imposibilidad de obtener un análisis gráfico de una función compleja de variable compleja (que sea similar al análisis de una función real de variable real $y = f(x)$). Sin embargo, dada una función compleja de variable compleja, $f : D_1 \rightarrow D_2$, podemos hacer $w = f(z)$ y considerar que el conjunto D_1 del plano complejo z es mapeado bajo la aplicación f a otro conjunto D_2 del plano complejo w . Esto nos permitirá tener una mejor comprensión del efecto de f en su dominio. Lo anterior se representa en la figura 1.33.

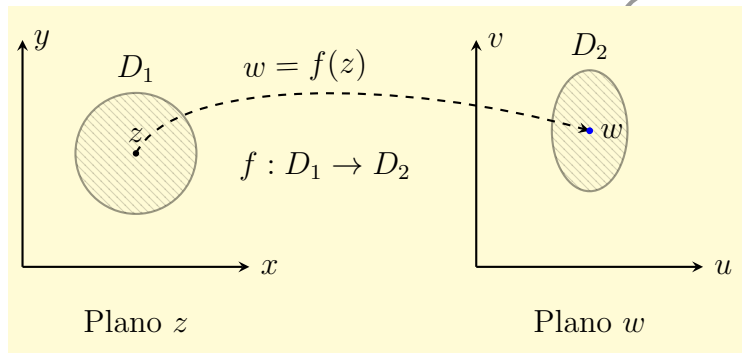


Figura 1.33: Representación de un mapeo complejo.

Definición 1.4.8 (Mapeos que conservan el ángulo) Sea $f : D_1 \rightarrow D_2$ una aplicación compleja de variable compleja, y Sean C_1 y C_2 dos curvas suaves en el plano z , las cuales se intersectan en z_0 formando un ángulo⁵ α , si las imágenes bajo f de C_1 y C_2 se intersectan en $w_0 = f(z_0)$, formando el mismo ángulo α , entonces se dice que f es un mapeo que conserva el ángulo, ver la figura 1.34.

⁵El ángulo entre dos curvas que se intersectan en un punto, está definida como el ángulo entre sus tangentes.

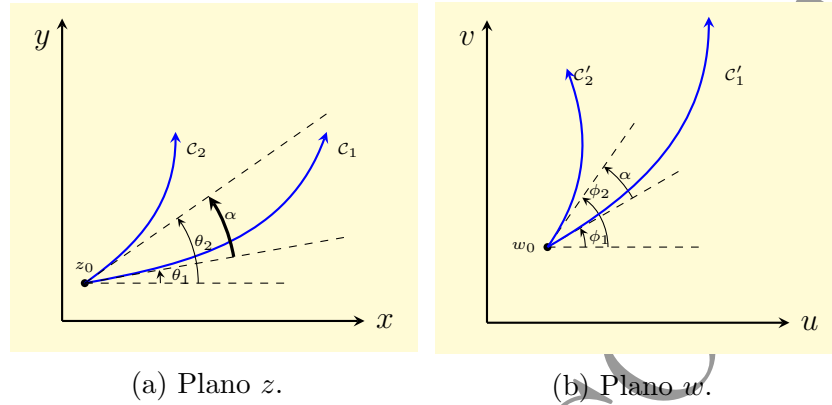


Figura 1.34: Mapeo que conserva el ángulo.

Definición 1.4.9 (Mapeos que conservan el sentido) Sea $f : D_1 \rightarrow D_2$ una aplicación compleja de variable compleja, se dice que f es un mapeo que conserva el sentido, si una rotación positiva⁶ en D_1 es mapeada bajo f a una rotación positiva en D_2 .

La figura 1.35 representa un mapeo que conserva el sentido.

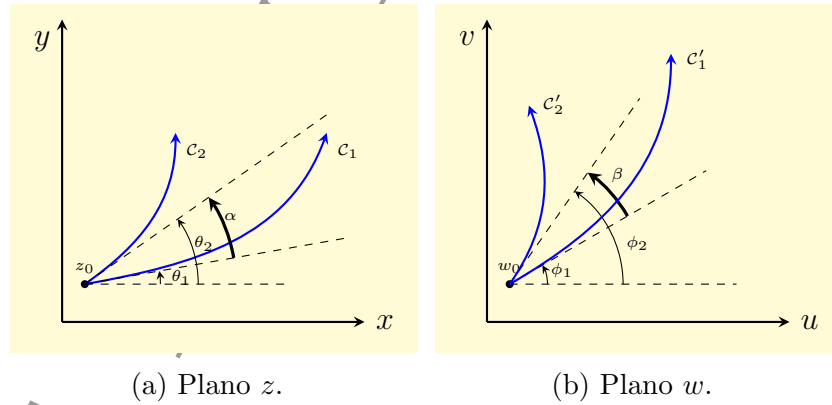


Figura 1.35: Mapeo que conserva el sentido.

⁶Una rotación es positiva cuando es contraria al movimiento de las manecillas del reloj.

La figura 1.36 representa una aplicación que no conserva el sentido.

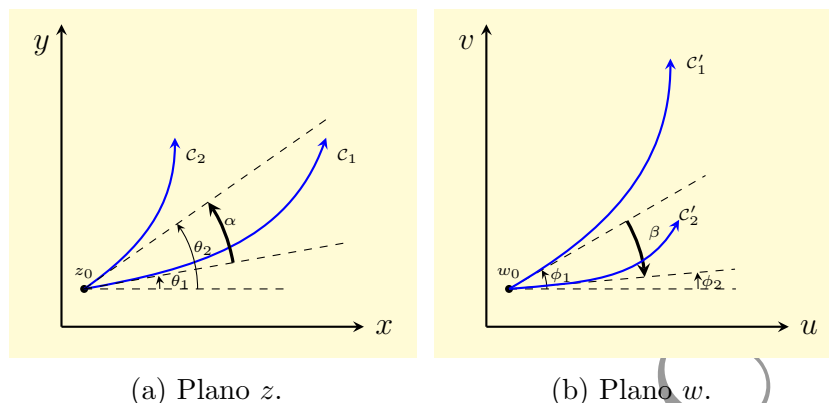


Figura 1.36: Mapeo que no conserva el sentido.

Definición 1.4.10 (Mapeos conformes) Se dice que el mapeo $f : D_1 \rightarrow D_2$ es un mapeo conforme en $z_0 \in D_1$, si conserva la magnitud y el sentido del ángulo de intersección de dos curvas cualesquiera que se intersecan en z_0 . Si $w = f(z)$ es conforme en todo los puntos $z_0 \in D_1$, entonces el mapeo es conforme en D_1 .

Ejemplo 1.4.1 Considérense las curvas C_1 y C_2 definidas mediante,

$$C_1 = \{re^{i\theta} : r = 1, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\},$$

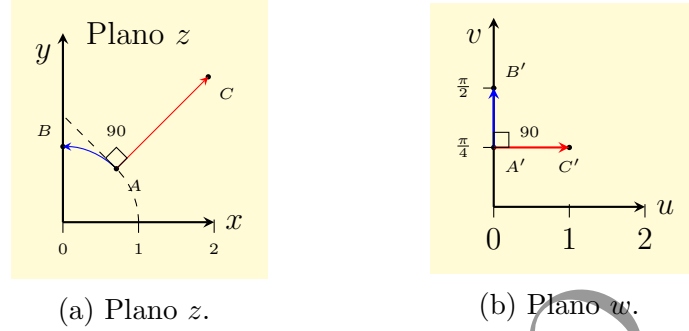
$$C_2 = \{re^{i\theta} : 1 \leq r \leq e, \theta = \frac{\pi}{4}\}$$

Verifique que para las curvas C_1 y C_2 , y el punto $z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}}$, la aplicación $w = \text{Log}(z)$ conserva tanto el ángulo como el sentido de la intersección de las curvas en z_0 .

Solución: Las curvas C_1 y C_2 se muestran en la figura 1.37a: C_1 corresponde al arco de circunferencia \widehat{AB} ; C_2 corresponde al segmento de recta \overline{AC} ; el punto de intersección z_0 corresponde al punto A. El ángulo entre el segmento \overline{AC} y la tangente al arco de circunferencia AB en el punto A es 90° .

Las imágenes de las curvas C_1 y C_2 , bajo el mapeo $w = \text{Log}(z)$ se muestran en la figura 1.37b: el arco circular \widehat{AB} se mapea en el segmento $\overline{A'B'}$ del plano w , ya que

$$w = \text{Log}(z) = \ln(|z|) + i\text{Arg}(z) = i\theta, \quad \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Figura 1.37: Imagen bajo la aplicación $w = \text{Log}(z)$.

La imagen del segmento \overline{AC} es el segmento $\overline{A'C'}$, ya que

$$\begin{aligned} w = \text{Log}(z) &= \ln(|z|) + i\left(\frac{\pi}{4}\right), \quad 1 \leq r \leq e, \\ &= \ln(|z|) + i\left(\frac{\pi}{4}\right), \quad 0 \leq \ln(|z|) \leq 1. \end{aligned}$$

Obsérvese que el ángulo entre las rectas $A'C'$ y $A'B'$ es de 90° . También se observa que el sentido del ángulo se conserva.

Teorema 1.4.1 (Condiciones para los mapeos conformes) *Considérese el mapeo $f : D_1 \rightarrow D_2$. Si f es analítica en su dominio, entonces f será un mapeo conforme en $z_0 \in D_1$ siempre que $f'(z_0) \neq 0$.*

Demostración: Considérese que $f : D_1 \rightarrow D_2$ es una aplicación analítica en todos los puntos de su dominio. Sea \mathcal{C}_1 una curva suave contenida completamente D_1 , como se muestra en la figura 1.38a. La curva \mathcal{C}_1 está definida mediante:

$$\mathcal{C}_1 = \{(x, y) \in D_1 \mid x = h(t), y = g(t), a \leq t \leq b\}, \quad (1.4.1)$$

donde $h(t)$ y $g(t)$ son diferenciables en el intervalo $a \leq t \leq b$.

En muchos casos el parámetro t representa el tiempo. Al variar t de a a b , la ecuación paramétrica

$$z(t) = h(t) + ig(t) \quad (1.4.2)$$

genera la curva \mathcal{C}_1 en el plano z , ver la figura 1.38a. En la figura 1.38b se muestra la curva \mathcal{C}'_1 , la cual corresponde a la imagen de la curva \mathcal{C}_1 bajo la aplicación f . Las flechas sobre las curvas \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}'_1 indican el sentido en la cual éstas se generan al variar t de a hasta b . Los puntos z_0 y z sobre la curva \mathcal{C}_1 se generan al evaluar la ecuación 1.4.2 en los tiempos t_0 y $t_0 + \Delta t$,

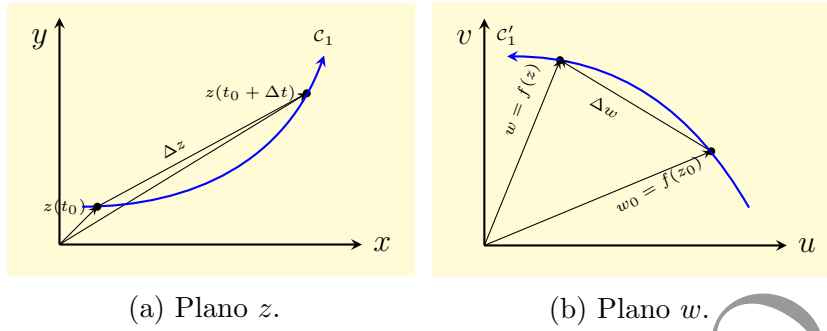


Figura 1.38: Imagen de una curva bajo la aplicación analítica f .

respectivamente. Las imágenes de $z_0(t_0)$ y $z(t_0 + \Delta t)$ son, respectivamente, los puntos sobre la curva C'_1 denotados por $w_0 = f(z_0)$ y $w = f(z)$.

Dado que las curvas en el plano z son suaves, puede probarse que sus imágenes en el plano w , bajo f , también son suaves, así que, en cada punto de éstas es posible dibujar rectas tangentes, en el sentido en que las curvas se generan, ver las figuras 1.39a y 1.39b. Las pendientes de dichas rectas tangentes se determinan, respectivamente, mediante $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{dv}{du}$, es decir, en los puntos z_0 y w_0

$$\tan(\theta) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{z_0}, \quad (1.4.3)$$

$$\tan(\phi) = \left. \frac{dv}{du} \right|_{w_0}. \quad (1.4.4)$$

A medida que $\Delta t \rightarrow 0$, tanto Δz como Δw tienden a cero. El cociente $\frac{\Delta z}{\Delta t}$ se alinea a la recta tangente a la curva C_1 en el punto z_0 . Dado que las curvas en el plano z son suaves, el cociente $\frac{\Delta w}{\Delta t}$ se alinea a la recta tangente a la curva C'_1 en el punto w_0 , es decir,

$$\theta = \text{Arg} \left(\left. \frac{dz}{dt} \right|_{t_0} \right), \quad (1.4.5)$$

$$\phi = \text{Arg} \left(\left. \frac{dw}{dt} \right|_{t_0} \right). \quad (1.4.6)$$

Lo anterior se muestra en las figuras 1.39a y 1.39b. De acuerdo con la regla de la cadena,

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dz} \frac{dz}{dt}. \quad (1.4.7)$$

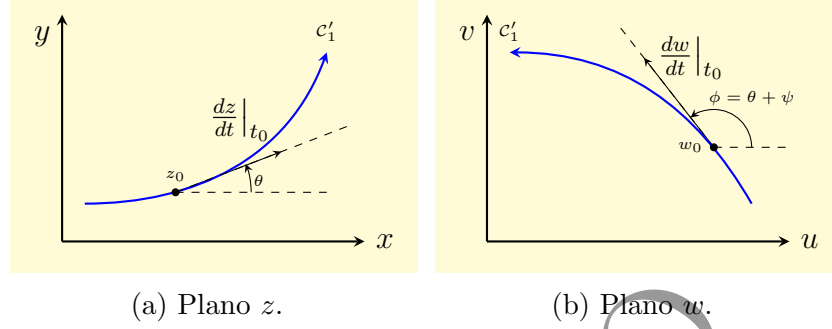


Figura 1.39: Imagen de una curva bajo la aplicación analítica f .

Evaluando la ecuación anterior en t_0 ,

$$\begin{aligned} \left. \frac{dw}{dt} \right|_{t_0} &= \left. \frac{dw}{dz} \right|_{t_0} \left. \frac{dz}{dt} \right|_{t_0}, \\ &= \left. \frac{df(z)}{dz} \right|_{z_0} \left. \frac{dz}{dt} \right|_{t_0}. \end{aligned} \quad (1.4.8)$$

Tomando el argumento en la ecuación anterior se tiene

$$\text{Arg} \left(\left. \frac{dw}{dt} \right|_{t_0} \right) = \text{Arg} \left(\left. \frac{df(z)}{dz} \right|_{z_0} \left. \frac{dz}{dt} \right|_{t_0} \right). \quad (1.4.9)$$

Recordando que el argumento de un producto es igual a la suma de los argumentos, salvo por algún múltiplo entero de 2π , entonces

$$\text{Arg} \left(\left. \frac{dw}{dt} \right|_{t_0} \right) = \text{Arg} \left(\left. \frac{df(z)}{dz} \right|_{z_0} \right) + \text{Arg} \left(\left. \frac{dz}{dt} \right|_{t_0} \right). \quad (1.4.10)$$

Sea

$$\psi = \text{Arg} \left(\left. \frac{df(z)}{dz} \right|_{z_0} \right), \quad (1.4.11)$$

entonces, sustituyendo las ecuaciones 1.4.5, 1.4.6, 1.4.11 en la 1.4.10 se obtiene,

$$\phi = \theta + \psi. \quad (1.4.12)$$

Ahora considérese que dos curvas suaves \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 se intersecan en el punto z_0 , como se muestran en la figura 1.40a. Supóngase que las curvas se intersecan formando un ángulo α . De acuerdo con la ecuación 1.4.12, las curvas imágenes \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_1' tendrán pendientes en el punto w_0 las cuales estarán determinadas por,

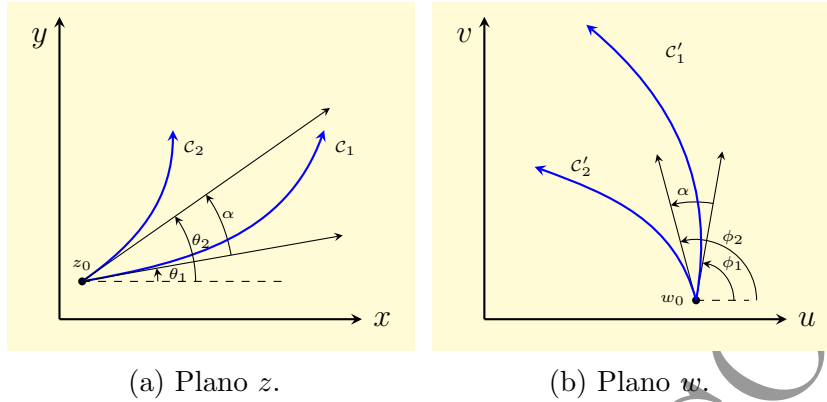


Figura 1.40: Imagen de dos curvas suaves que se intersecan en z_0 .

$$\phi_1 = \theta_1 + \psi, \quad (1.4.13)$$

$$\phi_2 = \theta_2 + \psi. \quad (1.4.14)$$

De esta manera, el ángulo entre las curvas \mathcal{C}'_1 y \mathcal{C}'_2 será

$$\phi_2 - \phi_1 = \theta_2 - \theta_1 = \alpha. \quad \blacksquare \quad (1.4.15)$$

Lo aprendido hasta aquí, para el manejo de curvas, nos permitirá investigar el mapeo de una región en el plano z . Supóngase que se tiene una aplicación f definida en un dominio D_1 y que desamos determinar la imagen $f(D_1)$ en el plano w . En general, el dominio D_1 tiene una frontera definida por los curvas $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_n$, como se muestra en la figura 1.41. Las imágenes de estas curvas son $f(\mathcal{C}_1), f(\mathcal{C}_2), \dots, f(\mathcal{C}_n)$, las cuales definen dos regiones, R_1 y R_2 en el plano complejo w . Para determinar $f(D_1)$, debemos evaluar un punto $z \in D_1$, la imagen $f(z)$ se encontrará en $f(D_1)$.

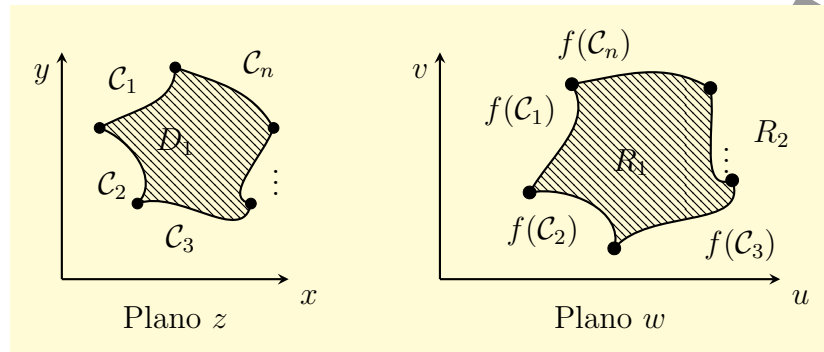


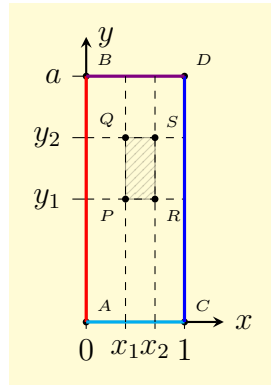
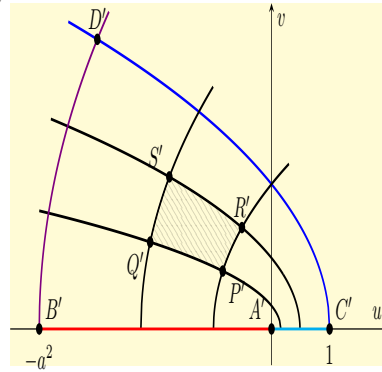
Figura 1.41: Representación del mapeo de una región.

Ejemplo 1.4.2 Considérese la región $R_{xy} = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, y \geq 0\}$ en el plano z , determine la región correspondiente R_w en el plano w bajo la aplicación $f(z) = z^2$.

Solución: Consideremos la región acotada R_{xy}^* definida mediante

$$R_{xy}^* = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq a\}$$

donde $a > 0$ como se muestra en la figura 1.42a

(a) Plano z .(b) Plano w .Figura 1.42: Imagen bajo la aplicación $w = z^2$.

Dado que $w = z^2$, entonces u y v están determinadas por

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \quad (1.4.16)$$

$$v(x, y) = 2xy. \quad (1.4.17)$$

La frontera de la región R_{xy}^* está compuesta por los segmentos AB , AC , CD y BD . A continuación se determinarán las imágenes de los segmentos

anteriores.

El segmento AB está definido por

$$\{(x, y) | x = 0, 0 \leq y \leq a\}.$$

La imagen se determina mediante las ecuaciones 1.4.16 y 1.4.17.

$$\begin{aligned} u(x, y) &= -y^2, \\ v(x, y) &= 0. \end{aligned}$$

A medida que y varía de a a 0 , u varía de $-a^2$ a 0 . Dado que v siempre vale cero, la imagen está sobre el eje negativo u , como se muestra en la figura 1.42b.

El segmento de recta AC está definido por

$$\{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, y = 0\},$$

su imagen corresponde a

$$\begin{aligned} u(x, y) &= x^2, \\ v(x, y) &= 0. \end{aligned}$$

A medida que x varía de 0 a 1 , u varía de 0 a 1 , mientras que $v = 0$. La imagen del segmento AC es el segmento $A'C'$, como se muestra en la figura 1.42b.

El segmento de recta CD está definido por

$$\{(x, y) | x = 1, 0 \leq y \leq a\}.$$

La imagen de esta recta está determinada por

$$u(x, y) = 1 - y^2, \quad (1.4.18)$$

$$v(x, y) = 2y. \quad (1.4.19)$$

Despejando y de la ecuación 1.4.19 y sustituyendo el resultado en la 1.4.18 se obtiene

$$u = 1 - \frac{v^2}{4}. \quad (1.4.20)$$

Despejando v^2 de la ecuación anterior se obtiene,

$$v^2 = -4(u - 1) \quad (1.4.21)$$

La ecuación 1.4.21 representa a una parábola con vértice en $(0,1)$ y foco en $(0,0)$. La parábola es simétrica respecto al eje x , sin embargo, dado que x y y son positivos, entonces $v \geq 0$. La imagen correspondiente al segmento CD es el segmento de parábola $C'D'$, como se muestra en la figura 1.42b.

El segmento BD se define mediante

$$\{(x, y) | y = a, 0 \leq x \leq 1\}.$$

La imagen de este segmento de recta queda determinada por

$$u(x, y) = x^2 - a^2, \quad (1.4.22)$$

$$v(x, y) = 2ax. \quad (1.4.23)$$

Despejando x de la ecuación 1.4.23 y sustituyendo el resultado en la 1.4.22 se obtiene

$$u = \frac{v^2}{4a^2} - a^2. \quad (1.4.24)$$

Despejando v^2 de la ecuación anterior se obtiene,

$$v^2 = 4a^2(u + a^2) \quad (1.4.25)$$

La ecuación 1.4.25 representa a una parábola con vértice en $(-a^2, 0)$ y foco en $(0,0)$. La parábola es simétrica respecto al eje x , sin embargo, dado que x y y son positivos, entonces $v \geq 0$. La imagen correspondiente al segmento BD es el segmento de parábola $B'D'$, como se muestra en la figura 1.42b.

Ahora analicemos la imagen del rectángulo $PQSR$

Considérese el segmento vertical que contiene al segmento PQ descrito por,

$$\{(x, y) | x = x_1, 0 \leq y \leq a\},$$

donde $0 < x_1 < 1$. La imagen de esta recta está determinada por

$$u(x, y) = x_1^2 - y^2, \quad (1.4.26)$$

$$v(x, y) = 2x_1y. \quad (1.4.27)$$

Despejando y de la ecuación 1.4.27 y sustituyendo el resultado en la 1.4.26 se obtiene

$$u = x_1^2 - \frac{v^2}{4x_1^2}. \quad (1.4.28)$$

Despejando v^2 de la ecuación anterior se obtiene,

$$v^2 = -4x_1^2(u - x_1^2) \quad (1.4.29)$$

La ecuación 1.4.29 representa a una parábola con vértice en $(0, x_1^2)$ y foco en $(0, 0)$. La parábola abre hacia el eje negativo u . La parábola se muestra en la figura 1.42b. Un valor $x_2 > x_1$ tendrá un vértice más cercano al punto $(1, 0)$.

Ahora considérese el segmento horizontal que contiene al segmento PS .

$$\{(x, y) | y = y_1, 0 \leq x \leq 1\}.$$

donde $0 < y_1 < a$. La imagen se determina mediante

$$u(x, y) = x^2 - y_1^2, \quad (1.4.30)$$

$$v(x, y) = 2xy_1. \quad (1.4.31)$$

Despejando x de la ecuación 1.4.31 y sustituyendo el resultado en la 1.4.30 se obtiene

$$u = \frac{v^2}{4y_1^2} - y_1^2. \quad (1.4.32)$$

Despejando v^2 de la ecuación anterior se obtiene,

$$v^2 = 4y_1^2(u + y_1^2). \quad (1.4.33)$$

La ecuación 1.4.33 representa a una parábola con vértice en $(-y_1^2, 0)$ y foco en $(0, 0)$. La parábola abre en dirección del eje positivo u (Ésta se muestra en la figura 1.42b). Un valor $y_2 > y_1$ tendrá un vértice más cercano al punto $(-a^2, 0)$.

En la figura 1.42b, el cuadrilátero de lados curvos $P'Q'S'R'$, en el plano w , representa la imagen del rectángulo $PQSR$, del plano z , bajo la aplicación $w = z^2$.

La imagen de la región

$$R_{xy}^* = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq a\},$$

que se muestra en la figura 1.43, puede describirse de la siguiente manera,

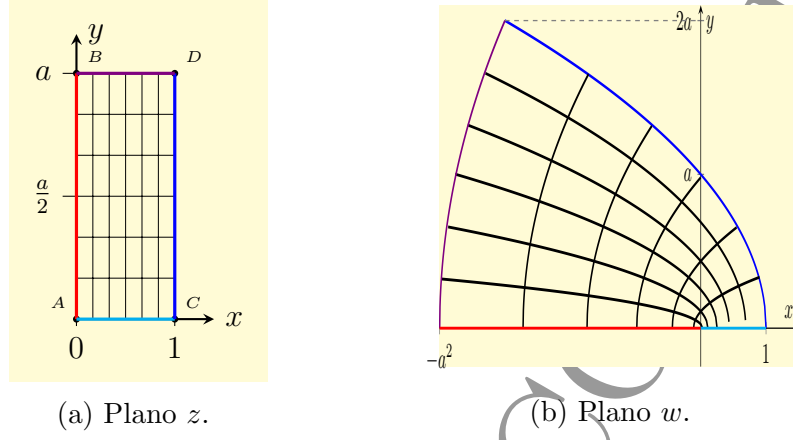


Figura 1.43: Imagen de la región R_{xy}^* bajo la aplicación $w = z^2$.

$$R_{uv}^* = \{(u, v) \mid 0 \leq v \leq 2a, \quad \frac{v^2}{4a^2} - a^2 \leq u \leq 1 - \frac{v^2}{4}\}. \quad (1.4.34)$$

La figura 1.43 permite visualizar como la región R_{xy}^* , vista como una rejilla, es mapeada a la región R_{uv}^* bajo la aplicación $w = z^2$.

En la figura 1.44 se muestra R_{uv} .

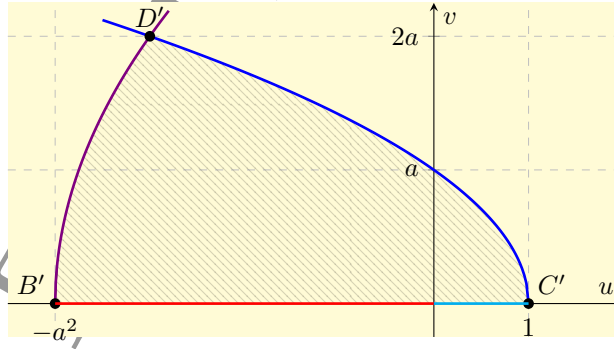


Figura 1.44: Imagen de la región R_{xy}^* bajo la aplicación $w = z^2$.

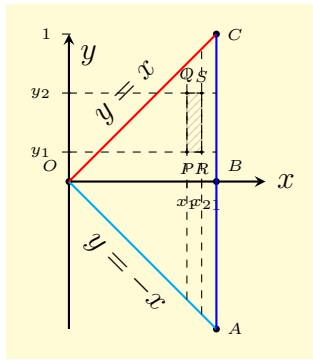
Finalmente, cuando $a \rightarrow \infty$, $R_{xy}^* \rightarrow R_{xy}$, y $R_{uv}^* \rightarrow R_{uv}$. De la ecuación 1.4.34 se obtiene

$$R_{uv} = \{(u, v) \mid 0 \leq v \leq \infty, \quad -\infty \leq u \leq 1 - \frac{v^2}{4}\}.$$

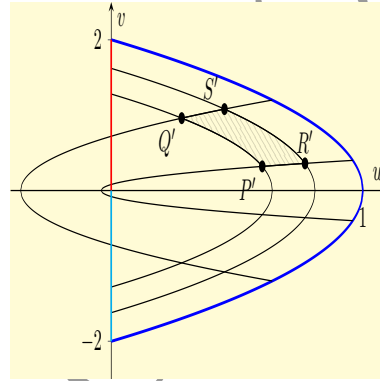
La imagen de la región R_{xy} , bajo la aplicación $f(z) = z^2$, es la región no acotada R_{uv} que se encuentra entre la recta $v = 0$ y la parábola $v^2 = -4(u - 1)$. La aplicación es uno a uno de la región R_{xy} sobre la región R_{uv} .

Ejemplo 1.4.3 Considere la región $R_{xy} = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, -x \leq y \leq x\}$. Determine la imagen de R_{xy} bajo la aplicación $f(z) = z^2$.

Solución: La región R_{xy} se muestra en la figura 1.45a.



(a) Plano z .



(b) Plano w .

Figura 1.45: Imagen bajo la aplicación $w = z^2$.

Determinemos las imágenes de la frontera de R_{xy} .

Dado que $w = z^2$, nuevamente

$$u = x^2 - y^2, \quad (1.4.35)$$

$$v = 2xy. \quad (1.4.36)$$

El segmento de recta OC está definido mediante

$$\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, y = x\}.$$

La imagen correspondiente es

$$u = 0, \quad (1.4.37)$$

$$v = 2x^2. \quad (1.4.38)$$

Como $u = 0$, a medida que x varía de 0 a 1, v varía de 0 a 2. La imagen es el segmento de recta $O'C'$ sobre el eje v , como se muestra en la figura 1.45b.

El segmento de recta OA está definido mediante

$$\{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, y = -x\}.$$

La imagen correspondiente es

$$u = 0, \quad (1.4.39)$$

$$v = -2x^2. \quad (1.4.40)$$

Como $u = 0$, a medida que x varía de 0 a 1, v varía de 0 a -2 . La imagen es el segmento de recta $O'A'$ sobre el eje v , como se muestra en la figura 1.45b.

El segmento de recta AC está definido mediante

$$\{(x, y) | x = 1, |y| \leq 1\}.$$

De lo estudiado en el ejemplo anterior, la imagen del segmento AC es el segmento de parábola $A'C''$ definida por

$$v^2 = -4(u - 1) \quad (1.4.41)$$

Esta ecuación corresponde a una parábola con foco en $(0, 0)$ y vértice en $(1, 0)$. A diferencia del ejemplo anterior, los valores negativos de y generan la parte de la parábola que se ubica debajo del eje x , como se muestra en la figura 1.45b.

A continuación se determinará la imagen del rectángulo $PQRS$,

Considérese el segmento de recta vertical que contiene al segmento PQ , definido mediante

$$\{(x, y) | x = x_1, |y| \leq x_1\},$$

donde $0 < x_1 < 1$.

De lo estudiado en el ejemplo anterior, la imagen correspondiente es la parábola

$$v^2 = -4x_1^2(u - x_1^2) \quad (1.4.42)$$

Esta ecuación corresponde a una parábola con vértice en $(x_1^2, 0)$ y foco en $(0, 0)$. Para un $x_2 > x_1$ se obtiene una parábola con su vértice más cercano al punto $(1, 0)$, como se muestra en la figura 1.45b.

Considérese el segmento de recta horizontal que contiene al segmento PR , definido mediante

$$\{(x, y) | y = y_1, y_1 \leq x \leq 1\},$$

donde $-1 < y_1 < 1$.

La imagen correspondiente es

$$v^2 = 4y_1^2(u + y_1^2). \quad (1.4.43)$$

Esta ecuación corresponde a una parábola con vértice en $(-y_1^2, 0)$ y foco en $(0, 0)$. Para un $y_2 > y_1$ se obtiene una parábola con su vértice más cercano al punto $(-1, 0)$, como se muestra en la figura 1.45b.

En la figura 1.45b, el cuadrilátero de lados curvos $P'Q'S'R'$, en el plano w , representa la imagen del rectángulo $PQSR$, del plano z , bajo la aplicación $w = z^2$.

La figura 1.46 permite visualizar la manera en la cual la aplicación $w = z^2$ genera la imagen de la región R_{xy} .

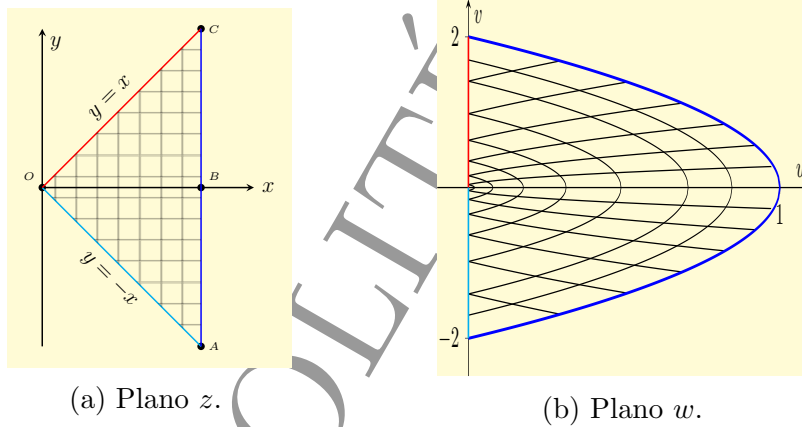


Figura 1.46: Imagen de la región R_{xy}^* bajo la aplicación $w = z^2$.

La imagen de la región R_{xy} puede describirse de la siguiente manera

$$R_{uv} = \{(u, v) \mid 0 \leq u \leq 1, -2\sqrt{1-u} \leq v \leq 2\sqrt{1-u}\}.$$

La imagen de la región R_{xy} , bajo la aplicación $f(z) = z^2$, es la región acotada R_{uv} que se encuentra entre la recta $v = 0$ y la parábola $v^2 = -4(u-1)$, como se muestra en la figura 1.47.

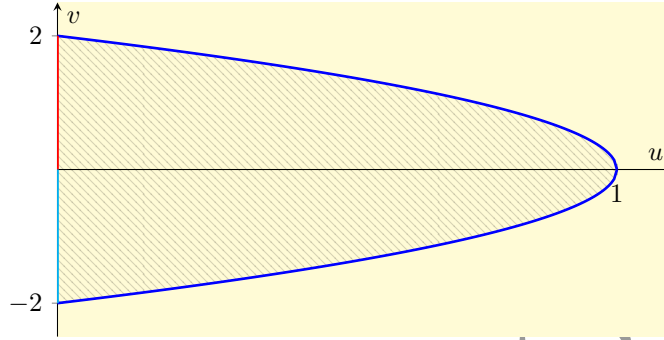


Figura 1.47: Imagen bajo la aplicación $w = z^2$.

La aplicación es uno a uno de la región R_{xy} sobre la región R_{uv} .

Ejemplo 1.4.4 (Mapeo seno) Determine la imagen de la región R_{xy} bajo la aplicación $w = \text{sen}(z)$, donde

$$R_{xy} = \left\{ (x, y) \mid -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, y \geq 0 \right\}.$$

Para comprender el mapeo sobre la región no acotada R_{xy} , considérese, en primer lugar, la región acotada R_{xy}^* definida mediante,

$$R_{xy}^* = \left\{ (x, y) \mid -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq a \right\}.$$

La región R_{xy}^* se muestra en la figura 1.48a.

Recordemos que la función $f(z) = \text{sen}(z)$ tiene período real $p = 2\pi$, de manera que el mapeo no podría ser uno a uno si el intervalo sobre el eje x fuera de longitud mayor a 2π .

Para determinar las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ recordemos que

$$\text{sen}(x + iy) = \text{sen}(x) \cosh(y) + i \text{senh}(y) \cos(x),$$

de manera que

$$u = \text{sen}(x) \cosh(y), \quad (1.4.44)$$

$$v = \cos(x) \text{senh}(y). \quad (1.4.45)$$

Las ecuaciones anteriores permiten determinar las imágenes de la frontera de R_{xy}^* .

El segmento AB se define mediante

$$\{(x, y) | x = -\frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq a\}.$$

La imagen en el plano w se obtiene con las ecuaciones 1.4.44 y 1.4.45

$$u = \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) \cosh(y) = -\cosh(y), \quad (1.4.46)$$

$$v = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) \sinh(y) = 0. \quad (1.4.47)$$

Se observa de la ecuación 1.4.46 que variar y de 0 a a , la variable u varía de -1 a $-\cosh(a)$, de manera que el segmento AB se mapea al segmento $A'B'$ sobre el eje u , como se muestra en la figura 1.48b.

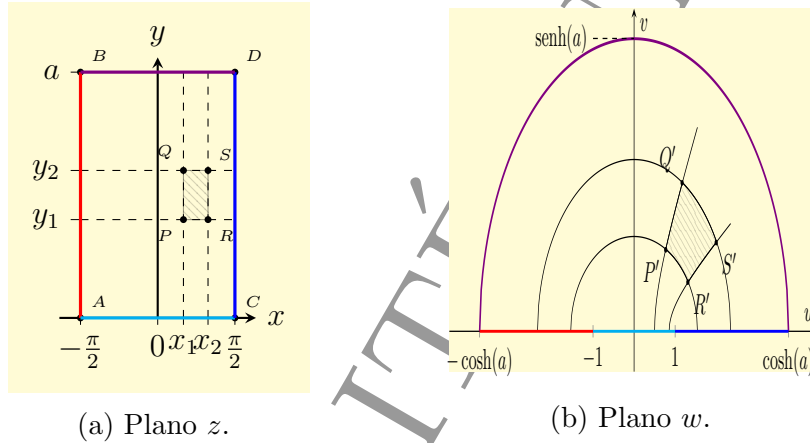


Figura 1.48: Imagen bajo la aplicación $w = \operatorname{sen}(z)$.

El segmento AC se describe mediante

$$\{(x, y) | -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, y = 0\}.$$

La imagen correspondiente en el plano w es

$$u = \operatorname{sen}(x) \cosh(0) = \operatorname{sen}(x), \quad (1.4.48)$$

$$v = -\cos(y) \sinh(0) = 0. \quad (1.4.49)$$

De la ecuación 1.4.48 se observa que al variar x de $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$, la variable u cambia de -1 a 1, de manera que el segmento AC se mapea al segmento $A'C'$ sobre el eje u , como se muestra en la figura 1.48b.

El segmento CD se describe mediante

$$\left\{ (x, y) \mid x = \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq a \right\}. \quad (1.4.50)$$

La imagen en el plano w es

$$u = \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} \right) \cosh(y) = \cosh(y), \quad (1.4.51)$$

$$v = \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) \operatorname{senh}(y) = 0. \quad (1.4.52)$$

De la ecuación 1.4.51 se observa que al variar y de 0 a a , la variable u pasa de 1 a $\cosh(a)$. El segmento CD se mapea al segmento $C'D'$ sobre el eje u , como se muestra en la figura 1.48b.

El segmento BD se describe mediante

$$\left\{ (x, y) \mid y = a, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right\}. \quad (1.4.53)$$

La imagen en el plano w es

$$u = \operatorname{sen}(x) \cosh(a), \quad (1.4.54)$$

$$v = \cos(x) \operatorname{senh}(a). \quad (1.4.55)$$

De las ecuaciones 1.4.54 y 1.4.55 se obtiene

$$\frac{u}{\cosh(a)} = \operatorname{sen}(x), \quad (1.4.56)$$

$$\frac{v}{\operatorname{senh}(a)} = \cos(x). \quad (1.4.57)$$

De las ecuaciones 1.4.56 y 1.4.57 se obtiene

$$\frac{u^2}{\cosh^2(a)} + \frac{v^2}{\operatorname{senh}^2(a)} = 1. \quad (1.4.58)$$

La ecuación anterior corresponde a una elipse centrada en el origen y con sus semiejes $a = \cosh(a)$ y $b = \operatorname{senh}(a)$, como se muestra en la figura 1.48b.

Ahora se analizará la imagen correspondiente al rectángulo $PQSR$.

La recta que contiene al segmento PQ se describe mediante

$$\{(x, y) \mid x = x_1 > 0, \quad y \geq 0\}. \quad (1.4.59)$$

La imagen en el plano w

$$\begin{aligned}u &= \operatorname{sen}(x_1) \cosh(y), \\v &= \cos(x_1) \sinh(y).\end{aligned}$$

De las ecuaciones anteriores se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{u^2}{\operatorname{sen}^2(x_1)} &= \cosh^2(y), \\ \frac{v^2}{\cos^2(x_1)} &= \sinh^2(y).\end{aligned}$$

, Restando las ecuaciones anteriores se obtiene,

$$\frac{u^2}{\operatorname{sen}^2(x_1)} - \frac{v^2}{\cos^2(x_1)} = 1 \quad (1.4.60)$$

La ecuación 1.4.60 corresponde a una hipérbola con vértice en $(\operatorname{sen}(x), 0)$ y foco en $(0,0)$. Dado que $y \geq 0$, entonces $v \geq 0$. La hipérbola permanece sobre el semiplano superior.

Ahora consideremos el segmento horizontal que contiene al segmento PR . Este segmento se representa por

$$\left\{ (x, y) \mid -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, y = y_1 \right\}.$$

de manera que

$$\begin{aligned}u &= \operatorname{sen}(x) \cosh(y_1), \\v &= \cos(x) \sinh(y_1).\end{aligned}$$

De las ecuaciones anteriores se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{u^2}{\cosh^2(y_1)} &= \operatorname{sen}^2(x), \\ \frac{v^2}{\sinh^2(y_1)} &= \operatorname{sen}^2(x).\end{aligned}$$

Sumando las ecuaciones anteriores se obtiene,

$$\frac{u^2}{\cosh^2(y_1)} + \frac{v^2}{\sinh^2(y_1)} = 1 \quad (1.4.61)$$

La ecuación anterior corresponde a una elipse centrada en el origen y con sus semiejes $a = \cosh(y_1)$ y $b = \sinh(y_1)$, como se muestra en la figura 1.48b. Sea

$y_2 > y_1$, entonces, dado que $\sinh(x_2) > \sinh(x_1)$ su semieje b se incrementa. En la figura 1.48b se muestra el cuadrilátero $P'Q'S'R'$, la cual es la imagen del rectángulo $PQSR$.

La figura 1.49 nos proporciona una imagen gráfica de como el mapeo genera la región imagen.

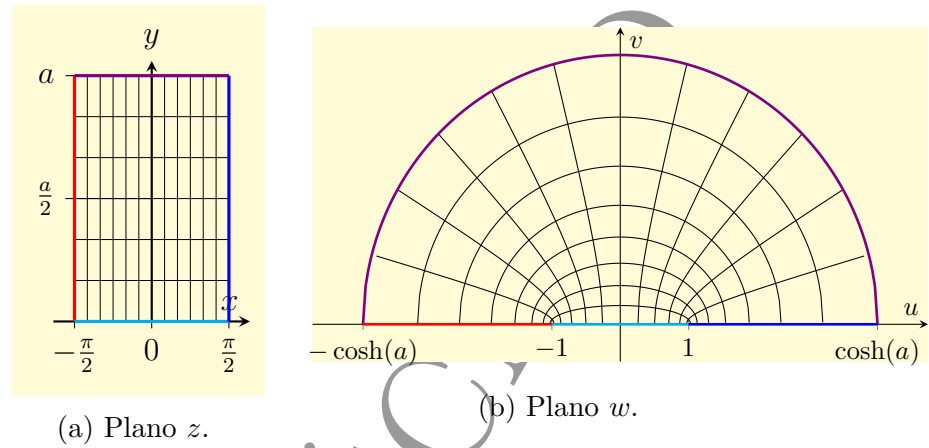


Figura 1.49: Imagen bajo la aplicación $w = \sen(z)$.

La imagen de la region R_{xy}^* se puede representar mediante

$$R_{uv}^* = \{(u, v) \mid -\cosh(a) \leq u \leq \cosh(a), 0 \leq v \leq |\tanh(a)|\sqrt{\cosh^2(a) - u^2}\}.$$

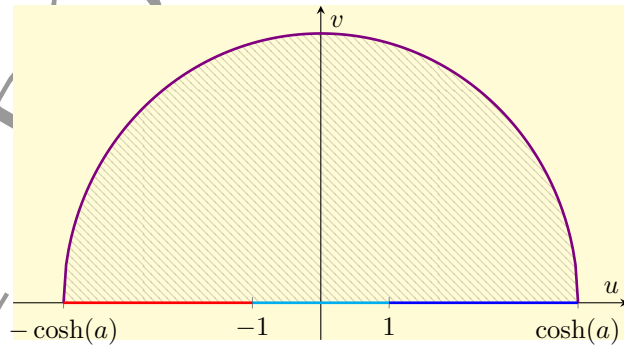


Figura 1.50: Imagen bajo la aplicación $w = \sen(z)$.

Finalmente, cuando $a \rightarrow \infty$, la región R_{xy}^* tiende a R_{xy} . La región R_{uv}^* tiende a R_{uv} , donde

$$R_{uv} = \{(u, v) \mid -\infty < u < \infty, 0 \leq v < \infty\}.$$

La región R_{xy} es mapeado al semiplano superior del plano w bajo la aplicación $w = \operatorname{sen}(z)$. La aplicación es uno a uno de la región R_{xy} sobre la región R_{uv} .

1.4.1. Transformación bilineal

Definición 1.4.11 (Transformación bilineal) Se conoce como transformación bilineal, transformación fraccionaria o transformación de Möbius a la transformación definida mediante,

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (1.4.62)$$

donde a , b , c y d son constantes complejas tales que $ad \neq bc$

La condición $ad \neq bc$ hace que la transformación definida por la 1.4.62 sea uno a uno y sobre el plano z ampliado al plano w ampliado. De hecho, cuando $ad \neq bc$ se cumple que $b/a = d/c$, de manera que para todo z , $z + b/a = z + d/c$, y la transformación se vuelve una constante, ya que

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a(z + \frac{b}{a})}{c(z + \frac{d}{c})} = \frac{a}{c}. \quad (1.4.63)$$

Claramente, la derivada es cero y la transformación se vuelve poco interesante.

Obsérvese de la ecuación 1.4.62 que $T(z)$ asigna un valor único y finito a cada $z \neq -c/d$. El punto $z = -c/d$ es una singularidad, conocida como polo simple, lo que se estudiará con detalle en el capítulo 2.

La transformación bilineal es diferenciable y su derivada es

$$T'(z) = \frac{a(cz + d) - c(az + b)}{(cz + d)^2} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \neq 0, \quad \forall z \neq -\frac{d}{c}. \quad (1.4.64)$$

La transformación bilineal es conforme en cada dominio que no contenga el punto $-c/d$.

Supóngase que $c = 0$ en la ecuación 1.4.62, de manera que

$$T(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}, \quad (1.4.65)$$

Obsérvese que si $|z| \rightarrow \infty$, entonces $|w| = |T(z)| \rightarrow \infty$; es decir, la imagen de $z = \infty$ es $w = \infty$. Se concluye que la transformación bilineal representada por la ecuación 1.4.65 es un mapeo uno a uno del plano complejo aumentado z en el plano complejo aumentado w .

Haciendo $w = T(z)$ podemos obtener la transformación inversa, es decir, $z = T^{-1}(w)$ la cual se expresa como,

$$z = T^{-1}(w) = \frac{d}{a} \left(w - \frac{b}{d} \right) = \frac{d}{a} w - \frac{b}{a}. \quad (1.4.66)$$

Obsérvese que la ecuación 1.4.66 también representa una transformación bilineal. Nuevamente, a cada valor de w le corresponde un único valor de z . Además, cuando $|w| \rightarrow \infty$, entonces $|z| = |T^{-1}(w)| \rightarrow \infty$; es decir, $w = \infty$ es imagen $z = \infty$. Se concluye que la transformación bilineal representada por la ecuación 1.4.66 es uno a uno y sobre del plano aumentado z en el plano aumentado w .

Para el caso más general, cuando $c \neq 0$, en la ecuación 1.4.62, la transformación bilineal asigna un único valor a cada $z \neq -d/c$. Ahora, cuando $z \rightarrow -d/c$, $|w| = |T(z)| \rightarrow \infty$, es decir, el punto $-d/c$ es mapeado al ∞ . De manera que la transformación bilineal mapea el plano complejo z en el plano complejo ampliado w .

Ahora supongamos que $c \neq 0$, entonces la ecuación 1.4.62 mapea cada punto del plano complejo z diferente de $z = -d/c$ en un punto del plano w . Si $z \rightarrow \infty$, entonces $w = \frac{a}{c}$ es decir, la imagen de $z = \infty$ es $w = \frac{a}{c}$. De este modo el mapeo es uno a uno del plano complejo aumentado z al plano complejo aumentado w . Por otro lado, si w está en el plano complejo aumentado w , entonces $z = T^{-1}(w)$, de la ecuación 1.4.62 se obtiene

$$z = T^{-1}(w) = \frac{dw - b}{a - cw}. \quad (1.4.67)$$

Obsérvese que la ecuación 1.4.67 también representa una transformación bilineal. Cada w es imagen de un solo punto en z en el plano z . Si $w \rightarrow \infty$ entonces $z = \frac{d}{a}$. Si $w \rightarrow a/c$, entonces $z \rightarrow \infty$. De este modo se concluye que T es un mapeo uno a uno y sobre del plano complejo aumentado z en el plano complejo aumentado w .

A continuación se definen algunos casos particulares de las transformaciones bilineales, los cuales nos permitirán comprender la forma en que opera el caso más general.

Definición 1.4.12 (Translación) Se conoce como translación a la transformación bilineal definida mediante

$$T(z) = z + b \quad (1.4.68)$$

donde b es una constante.

Si $b = b_1 + ib_2$ el efecto de la ecuación 1.4.68 es el de tomar un punto z y desplazarlo b_1 unidades horizontalmente y b_2 unidades verticalmente. De allí el nombre de translación.

Ejemplo 1.4.5 Considere el triángulo equilátero formado con las raíces cúbicas de la unidad. Determina la imagen en el plano w de los vértices del triángulo bajo la translación

$$T(z) = z + 2 + i.$$

Solución: Las raíces cúbicas de la unidad son

$$z_0 = \angle \frac{2}{3}\pi = \frac{1}{2}(-1, \sqrt{3}),$$

$$z_1 = \angle \frac{4}{3}\pi = \frac{1}{2}(-1, -\sqrt{3}),$$

$$z_2 = \angle 2\pi = (1, 0).$$

Estas números se muestran en la figura 1.51a. Las imágenes de las raíces de

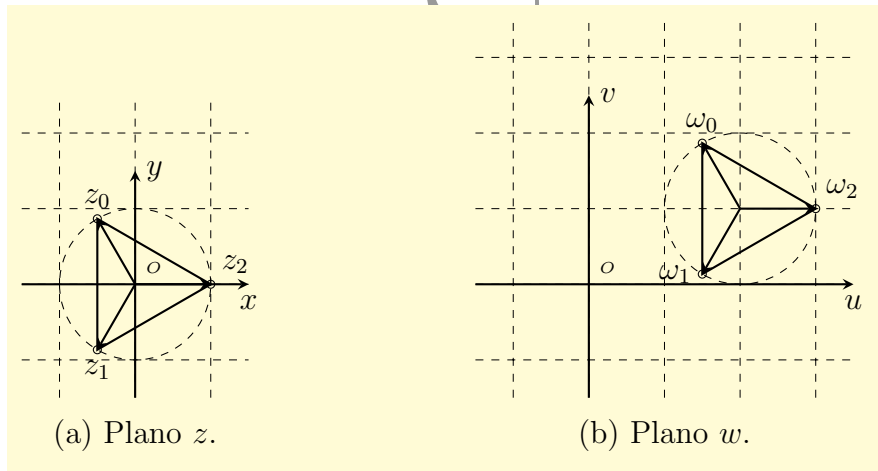


Figura 1.51: Translación

la unidad son:

$$\omega_0 = \frac{1}{2}(-1, \sqrt{3}) + (2, 1) = (1.5, 1.8660),$$

$$\omega_1 = \frac{1}{2}(-1, -\sqrt{3}) + (2, 1) = (1.5, 0.1340),$$

$$\omega_2 = (1, 0) + (2, 1) = (3, 1).$$

Estos números se muestran en la figura 1.51b.

Definición 1.4.13 (Rotación/dilatación) Se conoce como transformación Rotación/dilatación a la transformación definida mediante

$$T(z) = az, \quad (1.4.69)$$

donde a es una constante compleja diferente de cero.

Obsérvese que si w es la imagen de z ; es decir, $w = az$, entonces $|w| = |a||z|$. Esto significa que el vector w tiene un módulo que es mayor que el módulo de z , por un factor $|a|$, si $|a| > 1$ y tiene un módulo que es menor que el módulo de z , por un factor $|a|$, si $|a| < 1$. Por esta razón la ecuación 1.4.69 se conoce como transformación de dilatación.

Particularmente, si a es un real puro mayor que cero, entonces w se ubica en la misma dirección que el vector w . En contraste, si $a < 0$, entonces z se ubica en la dirección opuesta al vector z . En este caso, $T(z)$ se conoce como dilatación pura.

Ejemplo 1.4.6 Considere nuevamente las raíces cúbicas de la unidad. Determine sus imágenes bajo la dilatación $w = 2z$.

Las imágenes de las raíces cúbicas de la unidad son

$$\begin{aligned} \omega_0 &= (-1, \sqrt{3}), \\ \omega_1 &= (-1, -\sqrt{3}), \\ \omega_2 &= 2(1, 0) = (2, 0). \end{aligned}$$

Por otro lado, si expresamos tanto al número complejo a , como al número z en sus formas exponenciales, es decir,

$$\begin{aligned} a &= r_a e^{i\theta_a}, \\ z &= r e^{i\theta}, \end{aligned}$$

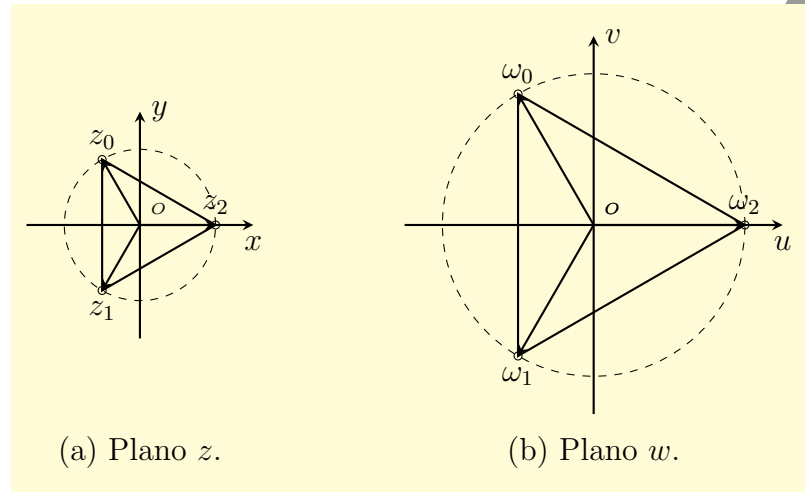
y si w es la imagen de z , entonces

$$w = az = rr_a e^{i(\theta+\theta_a)} \quad (1.4.70)$$

Supóngase, por el momento, que $r_a = 1$; es decir,

$$w = az = r e^{i(\theta+\theta_a)} \quad (1.4.71)$$

La ecuación anterior muestra que el efecto de $T(z)$ es el de rotar el número z en un ángulo θ_a en el sentido positivo, es decir, contrario al movimiento de las manecillas del reloj. Por esta razón, la transformación definida por la ecuación 1.4.71 se conoce como rotación pura.

Figura 1.52: Dilatación pura $w = 2z$.

Ejemplo 1.4.7 Considere las raíces cúbicas de la unidad. Determine sus imágenes bajo la transformación $T(z) = e^{(\frac{\pi}{4})i} z$.

Solución: Las raíces de la unidad son,

$$\begin{aligned} z_0 &= e^{(\frac{2\pi}{3})i}, \\ z_1 &= e^{(\frac{4\pi}{3})i}, \\ z_2 &= e^{2\pi i}. \end{aligned}$$

Sus imágenes bajo $T(z) = e^{(\frac{\pi}{4})i} z$ son,

$$\begin{aligned} \omega_0 &= e^{(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4})i} = e^{(\frac{11}{12})\pi i}, \\ \omega_1 &= e^{(\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{4})i} = e^{(\frac{19}{12})\pi i}, \\ \omega_2 &= e^{(\frac{\pi}{4})i} = e^{(\frac{\pi}{4})i}. \end{aligned}$$

Los vectores se muestran en la figura 1.53.

En el caso más general, cuando $r_a \neq 1$ se obtiene una combinación de efectos rotación/dilatación, de allí deriva el nombre de esta transformación.

Ejemplo 1.4.8 Considere las raíces cúbicas de la unidad. Determine sus imágenes bajo la transformación rotación/dilatación $T(z) = 2e^{(\frac{\pi}{4})i} z$.

Solución: Las raíces de la unidad son,

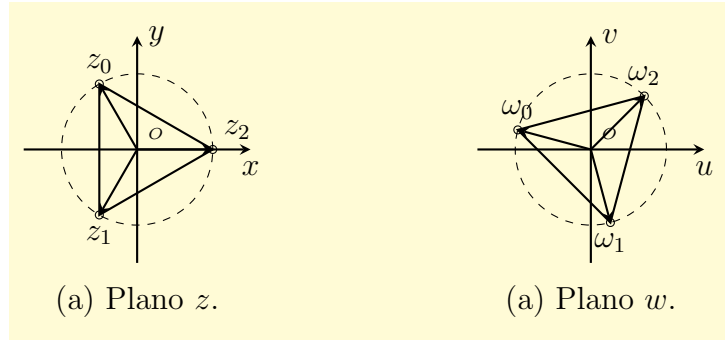


Figura 1.53: Dilatación pura $w = e^{(\frac{\pi}{4})i}z$.

$$\begin{aligned} z_0 &= e^{(\frac{2\pi}{3})i}, \\ z_1 &= e^{(\frac{4\pi}{3})i}, \\ z_2 &= 1. \end{aligned}$$

Sus imágenes bajo $T(z) = 2e^{(\frac{\pi}{4})i}z$ son,

$$\begin{aligned} \omega_0 &= 2e^{(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4})i} = 2e^{(\frac{11}{12})\pi i}, \\ \omega_1 &= 2e^{(\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{4})i} = 2e^{(\frac{19}{12})\pi i}, \\ \omega_2 &= 2e^{(\frac{\pi}{4})i} = 2e^{(\frac{\pi}{4})i}. \end{aligned}$$

Los vectores se muestran en la figura 1.54.

Definición 1.4.14 (Inversión) Se conoce como transformación de inversión a la transformación definida mediante

$$T(z) = \frac{1}{z}, \quad \forall z \neq 0. \quad (1.4.72)$$

Obsérvese que si $z = x + iy$, entonces la imagen $w = \frac{1}{z}$ está determinado por,

$$w = T(z) = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

Si z se representa en forma exponencial como $z = re^{i\theta}$, entonces

$$w = T(z) = \frac{1}{r}e^{-i\theta}.$$

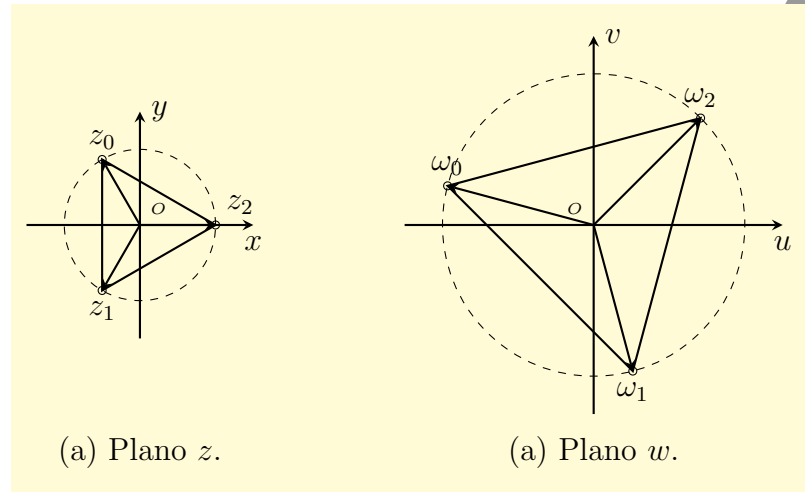


Figura 1.54: Dilatación/rotación $w = 2e^{(\frac{\pi}{4})i}z$.

Ejemplo 1.4.9 Considere las raíces cúbicas de la unidad. Determine sus imágenes bajo la transformación de inversión $T(z) = 1/z$.

Solución: Las raíces de la unidad son,

$$\begin{aligned} z_0 &= e^{(\frac{2\pi}{3})i}, \\ z_1 &= e^{(\frac{4\pi}{3})i}, \\ z_2 &= 1. \end{aligned}$$

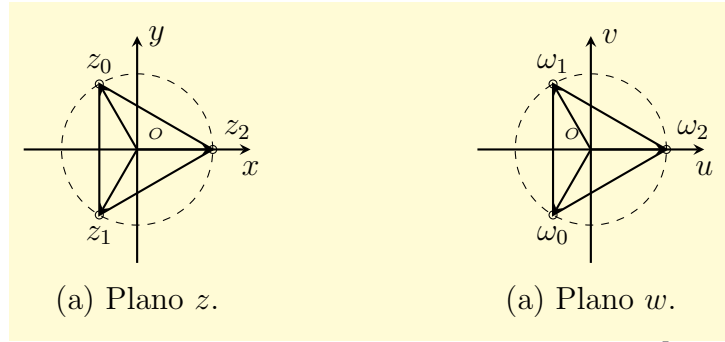
Sus imágenes bajo $T(z) = 1/z$ son,

$$\begin{aligned} \omega_0 &= e^{(-\frac{2\pi}{3})i}, \\ \omega_1 &= e^{(-\frac{4\pi}{3})i}, \\ \omega_2 &= 1 \end{aligned}$$

Los vectores se muestran en la figura 1.55.

Finalmente, toda transformación bilineal puede expresarse como una secuencia o composición de las tres transformaciones definidas anteriormente: translación, rotación/dilatación e inversión. Para sustentar lo anterior, obsérvese que la ecuación 1.4.62 puede expresarse como,

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} \frac{1}{cz + d} \quad (1.4.73)$$

Figura 1.55: Inversión $w = 1/z$.

Lo anterior puede reescribirse como:

$$\begin{aligned}
 T_1(z) &= z + d = w_1, \text{ (Traducción)} \\
 T_2(w_1) &= \frac{1}{w_1} = \frac{1}{z + d} = w_2, \text{ (Inversión)} \\
 T_3(w_2) &= \frac{bc - ad}{c} w_2 = \frac{bc - ad}{c} \frac{1}{z + d} = w_3, \text{ (Rotación/dilatación)} \\
 T_4(w_3) &= \frac{a}{c} + w_3 = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} w_2 = \frac{az + b}{cz + d} = w. \text{ (Traducción)}
 \end{aligned}$$

Es decir, $w = T_4(T_3((T_2((T_1(z)))))$.

Teorema 1.4.2 *Toda transformación bilineal mapea cualquier circunferencia en una circunferencia o línea recta, y cualquier línea recta en una circunferencia o línea recta.*

Demostración: La prueba consiste en demostrar que las transformaciones de traducción, rotación/dilatación e inversión mapean circunferencias en circunferencias o líneas rectas, y mapean líneas rectas en circunferencias o líneas. Aquí solo se probará la parte correspondiente a las inversiones, la parte correspondiente a las traducciones y las rotaciones/dilataciones, se dejan como ejercicio al lector.

Las circunferencias y las líneas quedan determinadas por la siguiente ecuación algebraica,

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0, \quad (1.4.74)$$

donde A , B , C y D son números reales.

Claramente, si $A = 0$, pero B y C no son ambos ceros, la ecuación 1.4.74

representa una línea recta. Por otro lado, si $A \neq 0$, después de algunas manipulaciones algebraicas se obtiene

$$\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{C}{2A}\right)^2 = \frac{B^2}{4A^2} + \frac{C^2}{4A^2} - \frac{D}{A}. \quad (1.4.75)$$

La ecuación 1.4.75 representa a una circunferencia con centro en el punto $(-\frac{B}{2A}, -\frac{C}{2A})$ y de radio $r = \sqrt{\frac{B^2}{4A^2} + \frac{C^2}{4A^2} - \frac{D}{A}}$, siempre que

$$r^2 = \frac{B^2}{4A^2} + \frac{C^2}{4A^2} - \frac{D}{A} \geq 0.$$

O de manera equivalente, siempre que

$$B^2 + C^2 \geq 4AD. \quad (1.4.76)$$

Ahora recordemos las siguientes equivalencias

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= z \bar{z}, \\ x &= \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \\ y &= \frac{1}{2i}(z - \bar{z}). \end{aligned}$$

Realizando las sustituciones en la ecuación 1.4.74 se obtiene

$$Az\bar{z} + \frac{B}{2}(z + \bar{z}) + \frac{C}{2i}(z - \bar{z}) + D = 0, \quad (1.4.77)$$

La ecuación 1.4.77 es equivalente a la 1.4.74; es decir, representa una circunferencia si, $A \neq 0$ y si se satisface la desigualdad 1.4.76.

A continuación se determinará la imagen de la ecuación 1.4.77 bajo la inversión $w = 1/z$. En este caso, $z = 1/w$, $\bar{z} = 1/\bar{w}$, además, $z\bar{z} = 1/(w\bar{w})$. Sustituyendo lo anterior en la ecuación 1.4.77 se obtiene

$$A\left(\frac{1}{w\bar{w}}\right) + \frac{B}{2}\left(\frac{1}{w} + \frac{1}{\bar{w}}\right) + \frac{C}{2i}\left(\frac{1}{w} - \frac{1}{\bar{w}}\right) + D = 0,$$

Multiplicando la ecuación anterior por $w\bar{w}$ y reordenando términos se tiene

$$Dw\bar{w} + \frac{B}{2}(w + \bar{w}) - \frac{C}{2i}(w - \bar{w}) + A = 0. \quad (1.4.78)$$

La ecuación 1.4.78 tiene la misma forma que la ecuación 1.4.77 y, por tanto, representará una circunferencia en el plano w siempre que, $D \neq 0$ y si se satisface la desigualdad

$$B^2 + (-C)^2 \geq 4DA$$

La cual es la misma condición expresada por la desigualdad 1.4.76.

Si $D = 0$, entonces la ecuación 1.4.78 representa una línea recta. Por otro lado, si $z = 0$ es un punto sobre la circunferencia, entonces la ecuación 1.4.77 se satisface al sustituir $z = 0$ y, por lo tanto, $D = 0$. En conclusión, la imagen de una circunferencia que pasa por el origen es una línea recta.

Con lo discutido hasta aquí, hemos demostrado que la transformación de inversión, $w = 1/z$, mapea circunferencias en circunferencias o rectas, y líneas rectas en circunferencias o líneas rectas. ■

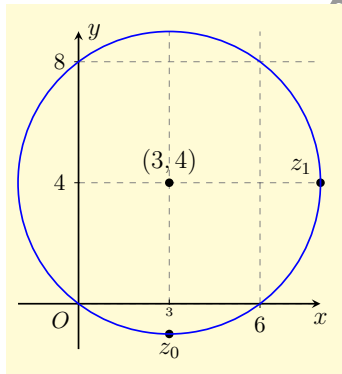
Ejemplo 1.4.10 Determine la imagen de la circunferencia $|z - 3 - 4i| = 5$ bajo la aplicación $w = 1/z$.

Solución: Obsérvese que $z = 0$ está sobre la circunferencia, lo cual implica que $D = 0$; por lo tanto, la circunferencia será mapeada a una línea recta. Para determinar la línea recta solo requerimos la imagen de dos punto. Los puntos $z_1 = (3, -1)$ y $z_2 = (8, 4)$ son puntos de la circunferencia, sus imágenes son:

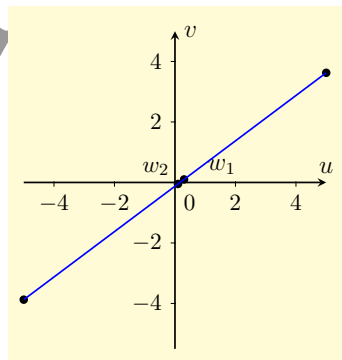
$$w_1 = \frac{1}{10}(3, 1),$$

$$w_2 = \frac{1}{80}(8, -4).$$

Las imágenes se muestran en la figura 1.56.



(a) Plano z .



(b) Plano w .

Figura 1.56: Imagen bajo la inversión $w = 1/z$.

La ecuación de la recta que pasa por los punto w_1 y w_2 es:

$$v = \frac{6u - 1}{8}.$$

Ejemplo 1.4.11 Determine la imagen de la línea recta, $y = \frac{6x-1}{8}$, bajo la aplicación $w = 1/z - 3 - 4i$.

Solución: Obsérvese que $w = T_2(T_1(z))$, donde T_1 es una inversión y T_2 es una translación.

La ecuación de la recta puede expresarse como

$$6x - 8y - 1 = 0.$$

Se observa que $A = 0$, $B = 6$, $C = -8$ y $D = -1$. Dado que $D \neq 0$ y $B^2 + C^2 \geq 4AD$, entonces la imagen es una circunferencia. La circunferencia queda completamente determinada por tres puntos sobre ésta. Tomemos entonces tres puntos sobre la recta.

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{8}(-40, -31), \\ z_2 &= \frac{1}{8}(40, 29), \\ z_3 &= \frac{1}{8}(0, -1). \end{aligned}$$

Las imágenes correspondientes bajo $T_1(z) = 1/z = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ son

$$\begin{aligned} w'_1 &= \frac{8}{2561}(-40, 31), \\ w'_2 &= \frac{8}{2441}(40, -29), \\ w'_3 &= 8(0, 1). \end{aligned}$$

Estos puntos se encuentran sobre la circunferencia $(u' - 3)^2 + (v' - 4)^2 = 25$,

la cual se muestra en la figura 1.57b.

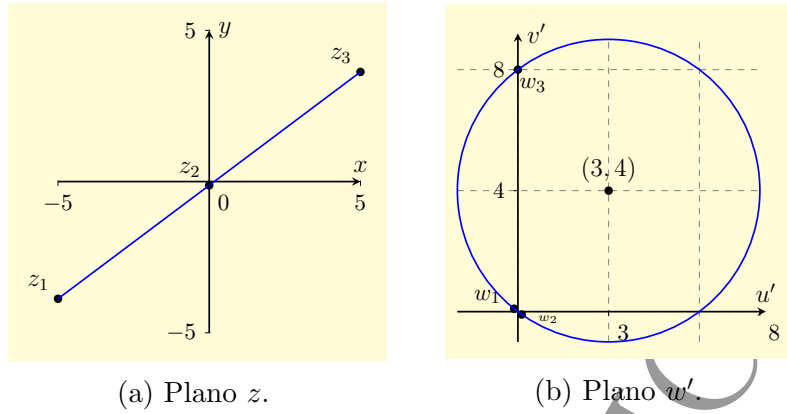


Figura 1.57: Imagen bajo la inversión $w = 1/z$.

Finalmente, $w = T_2(w')$ representa una translación, la cual desplaza los puntos de la circunferencia, 3 unidades a la izquierda del eje u' , y 4 unidades hacia abajo del eje v' , resultando la circunferencia centrada en el origen del plano w , cuya ecuación es $u^2 + v^2 = 25$. La circunferencia se muestra en la figura 1.58.

Otro tipo de problemas que surge en relación a las transformaciones bilineales, es aquel que consiste en determinar la transformación bilineal definida por la ecuación 1.4.62 si se conocen las imágenes de ciertos puntos. En general, el problema tiene solución única si para los puntos z_1 , z_2 y z_3 , se conocen las imágenes correspondientes w_1 , w_2 y w_3 . Para mostrar lo anterior, supóngase que $a \neq 0$ en la ecuación 1.4.62, de esta manera, al dividir entre a tanto el numerador como el denominador se obtiene

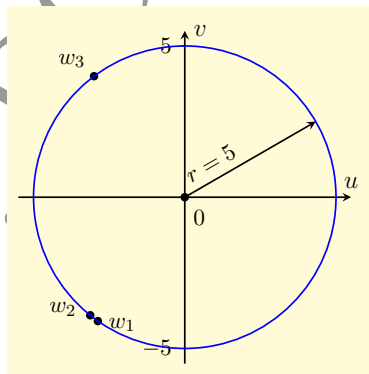


Figura 1.58: Plano w .

$$w = T(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{(z + b/a)}{(c/a)z + d/a} = \frac{z + c_1}{c_2z + c_3}, \quad (1.4.79)$$

donde $c_1 = b/a$, $c_2 = c/a$ y $c_3 = d/a$.

Después de algunas manipulaciones algebraicas, en la ecuación anterior, se obtiene

$$-c_1 + zwc_2 + wc_3 = z_3 \quad (1.4.80)$$

Al sustituir $w_i = T(z_i)$ para $i = 1, 2, 3$ se obtiene un sistema de ecuaciones lineales no homogéneo, cuya solución serán las constantes c_1 , c_2 y c_3 . El sistema resultante puede expresarse matricialmente como

$$\begin{bmatrix} -1 & z_1w_1 & w_1 \\ -1 & z_2w_2 & w_2 \\ -1 & z_3w_3 & w_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \quad (1.4.81)$$

Ejemplo 1.4.12 Determine la transformación bilineal que mapea los puntos $z_0 = 0$, $z_1 = 2$ y $z_3 = 2i$ en las imágenes $w_1 = -i$, $w_2 = 0$ y $w_3 = -1$, respectivamente.

Solución: Construyamos el sistema representado por la ecuación 1.4.81.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -i \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2i & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2i \end{bmatrix} \quad (1.4.82)$$

Resolviendo mediante la regla de Cramer se tiene

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -i \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2i & -1 \end{vmatrix} = 2.$$

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -i \\ 2 & 0 & 0 \\ 2i & -2i & -1 \end{vmatrix} = -4.$$

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -i \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2i & -1 \end{vmatrix} = -2i.$$

$$\det(A_3) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -2i & 2i \end{vmatrix} = -4i.$$

Luego,

$$\begin{aligned}c_1 &= \frac{A_1}{A} = -2, \\c_2 &= \frac{A_2}{A} = -i, \\c_3 &= \frac{A_3}{A} = -2i,\end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación 1.4.79 se obtiene

$$T(z) = \frac{z-2}{-iz-2i} = \frac{i(z-2)}{z+2}.$$

Si el sistema representado por la ecuación 1.4.82 se vuelve inconsistente, solo significaría que $a = 0$, en cuyo caso habrá que determinar las constantes b , c y d de la ecuación 1.4.62.

El método utilizado en el ejemplo anterior para determinar la transformación bilineal, resulta muy engorroso. Afortunadamente, existe un método más directo, y que se basa en la invariancia de la razón doble, como veremos a continuación.

Definición 1.4.15 (Razón doble) Se define la razón doble de los números complejos z_1, z_2, z_3 , y z_4 mediante la expresión

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)}. \quad (1.4.83)$$

Si alguno de los números es el infinito, digamos $z_k = \infty$, entonces debe sustituirse el cociente

$$\frac{z_k - z_i}{z_k - z_i} = 1$$

en la ecuación 1.4.83.

Teorema 1.4.3 (Invariancia de la razón doble) Toda transformación bilineal deja invariante la razón doble de 4 puntos, de manera más explícita,

$$(w_1, w_2, w_3, w_4) = (z_1, z_2, z_3, z_4). \quad (1.4.84)$$

Para aplicar el teorema anterior al problema de tres puntos, sustituiremos z_4 por el punto genérico z y w_4 por el punto genérico w en la ecuación de invariancia.

Ejemplo 1.4.13 Determine la transformación bilineal que mapea los puntos $z_1 = 0$, $z_2 = 2$ y $z_3 = 2i$ en las imágenes $w_1 = -i$, $w_2 = 0$ y $w_3 = -1$, respectivamente.

Solución: La invariancia de la razón doble permite establecer

$$\frac{(w_1 - w_2)(w_3 - w)}{(w_1 - w)(w_3 - w_2)} = \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z)}{(z_1 - z)(z_3 - z_2)}.$$

Sustituyendo los puntos dados en la ecuación anterior,

$$\begin{aligned} \frac{(-i - 0)(-1 - w)}{(-i - w)(-1 - 0)} &= \frac{(0 - 2)(2i - z)}{(0 - z)(2i - 2)} \\ \frac{i(1 + w)}{(i + w)} &= \frac{(2i - z)}{z(i - 1)} \end{aligned}$$

Debemos despejar w de la última ecuación, para lo cual

$$\begin{aligned} zi(1 + w)(i - 1) &= (i + w)(2i - z), \\ zi(i - 1 + iw - w) &= -2 - iz + 2iw - zw, \\ -z - zi - wz - iwz &= -2 - iz + 2iw - zw, \\ -z - zi - iwz &= -2 - iz + 2iw, \\ -z - iwz &= -2 + 2iw, \end{aligned}$$

De la última ecuación se obtiene,

$$w = T(z) = \frac{i(z - 2)}{z + 2}. \quad (1.4.85)$$

Este resultado ya había sido obtenido por otro método en el ejemplo 1.4.12.

Ejemplo 1.4.14 Los puntos $z_1 = 0$, $z_2 = 2$ y $z_3 = 2i$ del ejemplo se encuentran sobre la circunferencia $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = \sqrt{2}$. Determine la transformación de la circunferencia bajo la transformación bilineal definida por 1.4.85.

Solución: La transformación 1.4.85 puede, mediante la ecuación 1.4.73, reescribirse como

$$\begin{aligned} w = T(z) &= i + \frac{-4i(z - 2)}{z + 2}, \\ &= i + \frac{4e^{i(\frac{3\pi}{4})}(z - 2)}{z + 2}. \end{aligned}$$

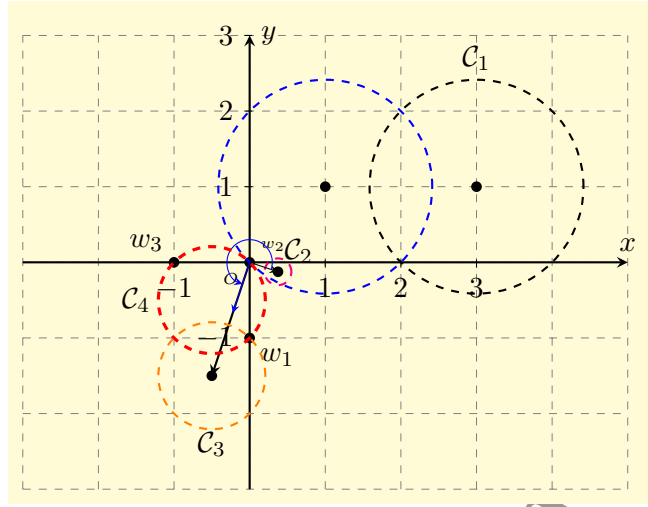


Figura 1.59

Podemos interpretar $w = T(z) = T_4(T_3((T_2((T_1(z))))))$ donde T_1 es una translación, T_2 es una inversión, T_3 es una rotación/dilatación y T_4 es una translación. Los efectos de cada transformación se muestran en la figura 1.59.

La translación T_1 mueve la circunferencia original 2 unidades hacia la derecha del eje x , generando la circunferencia C_1 de radio $r_1 = \sqrt{2}$ y centro en $(3, 1)$. La composición, $T_2(T_1(z))$, tiene como efecto una inversión de la circunferencia C_1 , generando la circunferencia C_2 de radio $r_2 = \frac{1}{4\sqrt{2}}$ y centro en $(3/8, -1/8)$. La composición $T_3(T_2(T_1(z)))$ produce una rotación/dilatación de la circunferencia C_2 , generando la circunferencia C_3 de radio $\frac{1}{\sqrt{2}}$ y con centro en

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{\frac{5}{2}} / -\arctan(1/3) + \frac{4}{3}\pi, \\ &= -\sqrt{\frac{5}{2}}(\sin(\alpha), \cos(\alpha)), \\ &= -\sqrt{\frac{5}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right), \\ &= (-1/2, -3/2). \end{aligned}$$

Finalmente, la composición $T_4(T_3(T_2(T_1(z))))$ produce como efecto una translación de la circunferencia C_3 una unidad hacia arriba, generando la circunferencia C_4 con centro en $(-1/2, -1/2)$ y radio $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

El efecto final se muestra en la figura 1.60.

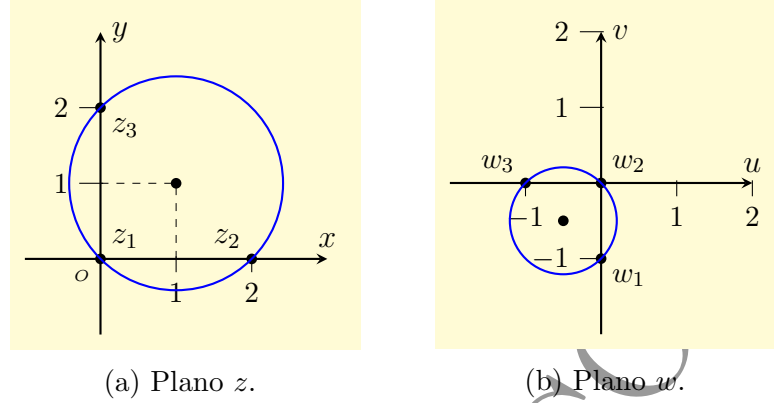


Figura 1.60: Imagen bajo la transformación $w = \frac{i(z-2)}{z+2}$.

1.4.2. Construcción de la carta de Smith

Definición 1.4.16 (La carta de Smith) *La carta de Smith es un método gráfico que se usa en ingeniería eléctrica para analizar líneas de transmisión de alta frecuencia. Establece una relación entre dos variables complejas: la impedancia normalizada, $Z = r + xi$, ($r \geq 0, -\infty < x < \infty$) y el coeficiente de reflexión, $\Gamma = u + iv$ donde u y v son reales. La transformación bilineal*

$$\Gamma(Z) = \frac{Z - 1}{Z + 1},$$

se aplica a una malla formada por rectas verticales infinitas y rectas horizontales semi-infinitas en el semiplano derecho. La imagen de esta malla en el plano Γ es el diagrama de Smith.

Nuestro propósito es construir la carta de Smith a partir de los conocimientos, adquiridos en la unidad 1, acerca de las transformaciones bilineales.

La transformación bilineal 1.4.16 se define sobre el conjunto complejo aumentado, de manera que el punto $z = 1$ en el plano Z es mapeado al punto ∞ en el plano Γ y $\gamma = -1$ en el plano Γ es mapeado al punto ∞ en el plano Z .

En el plano complejo de impedancias se tiene que,

$$Z = \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma}. \quad (1.4.86)$$

La representación cartesiana de Z se expresa como,

$$Z = \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma} = r + xi. \quad (1.4.87)$$

Ahora, en el plano Γ , $\Gamma = u+iv$, luego, sustituyendo lo anterior en la ecuación 1.4.87 se obtiene

$$\begin{aligned}
 r + xi &= \frac{1 + u + iv}{1 - u - iv}, \\
 &= \frac{(1 - u + iv)(1 + u + iv)}{(1 - u)^2 + v^2}, \\
 &= \frac{[(1 - u)(1 + u) - v^2] + i[v(1 + u) + v(1 - u)]}{(1 - u)^2 + v^2}, \\
 &= \frac{(1 - u^2 - v^2) + 2vi}{(1 - u)^2 + v^2}. \tag{1.4.88}
 \end{aligned}$$

Igualando la parte real y la parte imaginaria en ambos lados de la ecuación 1.4.88 resulta,

$$r = \frac{1 - u^2 - v^2}{(1 - u)^2 + v^2}, \tag{1.4.89}$$

$$x = \frac{2v}{(1 - u)^2 + v^2}. \tag{1.4.90}$$

Desarrollando la ecuación 1.4.89 se obtiene

$$(1 - u^2 - v^2) = r((1 - u)^2 + v^2).$$

Agrupando términos

$$\frac{1 - r}{1 + r} = u^2 + v^2 - 2\frac{r}{1 + r}u.$$

Finalmente, completando el trinomio cuadrado perfecto, se tiene

$$\left(u - \frac{r}{r + 1}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{(r + 1)^2}. \tag{1.4.91}$$

De manera análoga, de la ecuación 1.4.90, resulta

$$(u - 1)^2 + \left(v - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2}. \tag{1.4.92}$$

Las rectas verticales $Z = r$, con $r \geq 0$, corresponden a líneas de resistencia constante, las cuales son mapeadas por la transformación bilineal 1.4.16 a las circunferencias descritas por la ecuación 1.4.91, como se muestra en la figura 1.61

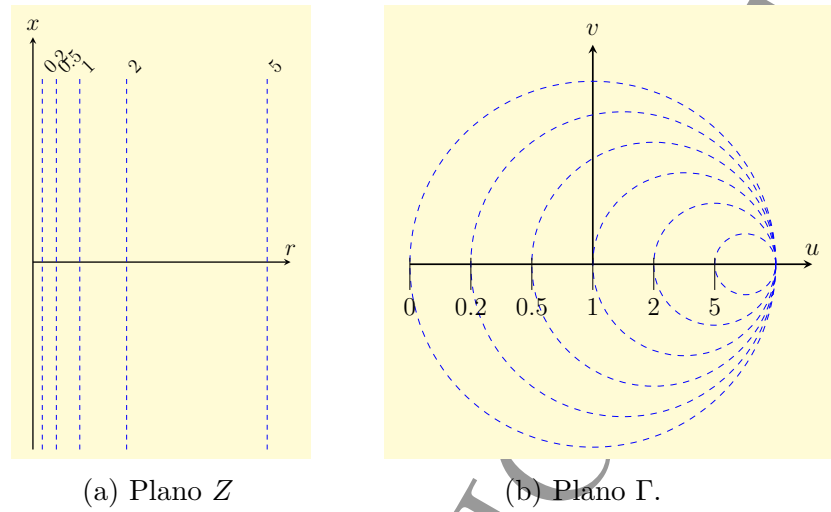


Figura 1.61: Líneas verticales de resistencia constante.

Las rectas horizontales $Z = ix$, correspondientes a líneas de reactancia constante, son mapeadas por la transformación bilineal 1.4.16 a las circunferencias descritas por la ecuación 1.4.92, como se muestra en la figura 1.62

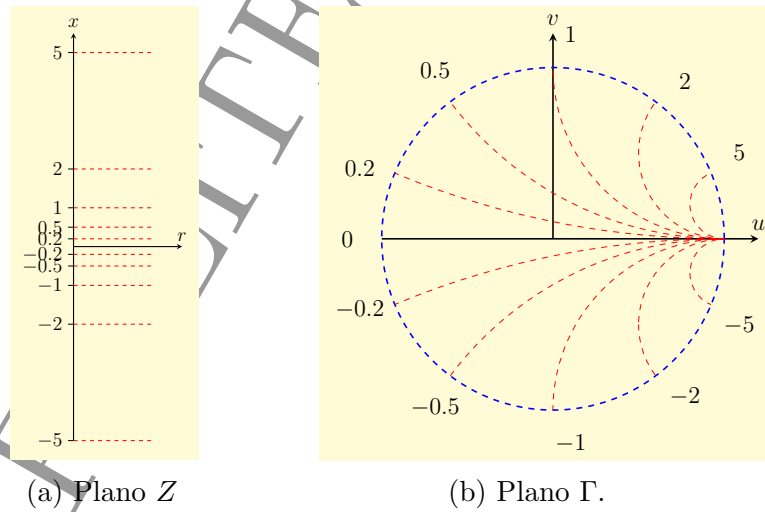
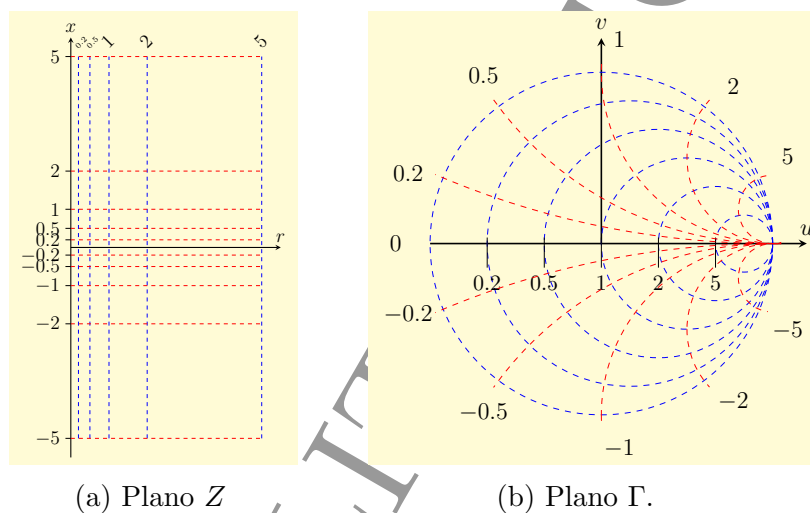


Figura 1.62: Líneas horizontales de reactancia constante.

Finalmente, las rectas verticales $Z = r$, con $r \geq 0$, correspondientes a líneas de resistencia constante, y las rectas horizontales $Z = ix$, correspondientes a líneas de reactancia constante, se convierten a través de la transformación bilineal 1.4.16 en las circunferencias del plano complejo aumentado que definen la Carta de Smith, como se muestra en la figura 1.63.



(a) Plano Z

(b) Plano Γ .

Figura 1.63: Carta de Smith.

INST. POLITÉCNICO NACIONAL

Apéndices

INST. POLITÉCNICO NAL.

Apéndice A

Aplicaciones o mapeos

Definición A.0.1 (Mapeo o aplicación) Sean A y B dos conjuntos cualesquiera, entonces diremos que una aplicación o un mapeo de A en B es una asociación o correspondencia que asigna a cada elemento del conjunto A un único elemento del conjunto B . El único elemento de B que se asocia con cualquier elemento de A se conoce como imagen del elemento de A en el mapeo.

Denotaremos un mapeo α del conjunto A en el conjunto B , mediante:

$$\alpha : A \rightarrow B.$$

Además, si $b \in B$ es la imagen de $a \in A$ bajo α escribiremos, $b = \alpha(a)$.

Definición A.0.2 (Mapeo uno a uno)

Un mapeo α de un conjunto A en un conjunto B se conoce como mapeo uno a uno de A en B si las imágenes de distintos elementos de A corresponden a distintos elementos de B .

Definición A.0.3 (Mapeo sobre) Si en un mapeo de un conjunto A en un conjunto B cada elemento del conjunto B es una imagen, diremos que el mapeo es de A sobre B . Si algún elemento de B no es una imagen, entonces diremos que el mapeo es de A en B , pero no de A sobre B .

Definición A.0.4 (Mapeo uno a uno y sobre) Si un mapeo α de un conjunto A en un conjunto B satisface las dos definiciones anteriores, diremos entonces que α es un mapeo uno a uno de A sobre B .

Definición A.0.5 (Mapeo identidad) Dado cualquier conjunto A , se conoce como mapeo identidad ϵ , a la aplicación uno a uno de A sobre A , definida como,

$$\epsilon(a) = a, \quad \forall a \in A.$$

En general un mapeo de un conjunto A en un conjunto B es un subconjunto de $A \times B$ ¹ donde cada elemento de A ocurre una y solamente una vez como la primer componente en los elementos del subconjunto.

En cualquier mapeo α de un conjunto A en un conjunto B , el conjunto A se conoce como dominio y el conjunto B como codominio de α . Si el mapeo α es de A sobre B , entonces B se conoce como rango de α , en otro caso, el rango es un subconjunto propio de B que consiste de las imágenes de todos los elementos de A .

Definición A.0.6 (Mapeos equivalentes o iguales) Diremos que dos mapeos α y β son iguales o equivalentes si estos mapeos tienen el mismo dominio A y si $\alpha(a) = \beta(a)$ para todo $a \in A$.

Definición A.0.7 (Producto o composición de aplicaciones) Sea α un mapeo de A en B y sea β un mapeo de B en C , sabemos que el efecto de α es mapear cada elemento $a \in A$ en $\alpha(a) \in B$ y el efecto de β es mapear cada $\alpha(a) \in B$ en $\beta(\alpha(a)) \in C$. El resultado final de aplicar α seguido de β es un mapeo de A en C definido por,

$$(\beta \circ \alpha)(a) = \beta(\alpha(a)), \quad \forall a \in A,$$

$\beta \circ \alpha$ se conoce como producto o composición de los mapeos α y β en este orden.

Teorema A.0.1 Si α es una aplicación de A en B , entonces

$$\begin{aligned} \epsilon_B \circ \alpha &= \alpha \\ \alpha \circ \epsilon_A &= \alpha \end{aligned}$$

donde ϵ_A y ϵ_B son las aplicaciones identidad en A y B , respectivamente.

Demostración:

- a) Como α es una aplicación de A en B y ϵ_B es una aplicación de B en B , entonces, $\epsilon_B \circ \alpha$ es una aplicación de A en B . Además, si $\alpha(a) = b$, entonces

$$\begin{aligned} (\epsilon_B \circ \alpha)(a) &= \epsilon_B(\alpha(a)), \\ &= \epsilon_B(b), \\ &= b, \\ &= \alpha(a). \end{aligned}$$

¹Este conjunto se conoce como conjunto producto y consta de todas las parejas ordenadas (a,b) tales que $a \in A$, $b \in B$.

Por lo tanto, se concluye que, $\epsilon_B \circ \alpha = \alpha$.

- b) De manera análoga al inciso anterior, como α es una aplicación de A en B y ϵ_A es una aplicación de A en A , entonces, $\alpha \circ \epsilon_A$ es una aplicación de A en B , de manera que si $\alpha(a) = b$, entonces,

$$\begin{aligned} (\alpha \circ \epsilon_A)(a) &= \alpha(\epsilon_A(a)), \\ &= \alpha(a). \end{aligned}$$

Concluimos que, $\alpha \circ \epsilon_A = \alpha$. ■

Teorema A.0.2 (Asociatividad de las composiciones) *Consideremos las aplicaciones α , β y γ tales que α mapea A en B , β mapea B en C y γ mapea C en D , entonces*

$$(\gamma \circ \beta) \circ \alpha = \gamma \circ (\beta \circ \alpha). \quad (\text{A.0.1})$$

Demostración: Verifiquemos que las aplicaciones que aparecen en la ecuación A.0.1 estén permitidas. Las aplicaciones están definidas de la siguiente manera:

$$\alpha : A \rightarrow B,$$

$$\beta : B \rightarrow C,$$

$$\gamma : C \rightarrow D.$$

Además para las composiciones se tiene,

$$\gamma \circ \beta : B \rightarrow D,$$

$$\beta \circ \alpha : A \rightarrow C.$$

de manera que,

$$(\gamma \circ \beta) \circ \alpha : A \rightarrow D, \quad (\text{A.0.2})$$

y

$$\gamma \circ (\beta \circ \alpha) : A \rightarrow D. \quad (\text{A.0.3})$$

Las ecuaciones A.0.2 y A.0.3 muestran que las composiciones involucradas en la ecuación A.0.1 tienen el mismo dominio. Verifiquemos ahora que los mapeos de elementos iguales son los mismos.

De la definición de composición tenemos,

$$\forall a \in A,$$

$$\begin{aligned}
 ((\gamma \circ \beta) \circ \alpha)(a) &= (\gamma \circ \beta)(\alpha(a)), \\
 &= \gamma(\beta(\alpha(a))).
 \end{aligned} \tag{A.0.4}$$

Procediendo de la misma manera,

$$\begin{aligned}
 (\gamma \circ (\beta \circ \alpha))(a) &= \gamma((\beta \circ \alpha)(a)), \\
 &= \gamma(\beta(\alpha(a))).
 \end{aligned} \tag{A.0.5}$$

Comparando las ecuaciones A.0.4 y A.0.5 se concluye la demostración. ■

Definición A.0.8 (Mapeo inverso) Si α es una aplicación de A en B y si existe una aplicación de B en A , tal que

$$\begin{cases} \beta \circ \alpha = \epsilon_A, \\ \alpha \circ \beta = \epsilon_B, \end{cases} \tag{A.0.6}$$

donde ϵ_A y ϵ_B son las aplicaciones identidad en A y B , respectivamente, entonces decimos que α es invertible y que β es su inversa.

Teorema A.0.3 Si α es un mapeo uno a uno de un conjunto A sobre un conjunto B , entonces α tiene una inversa única, e inversamente.

Demostración: \Rightarrow) Como α es uno a uno y sobre, entonces si $a \in A$, existe un único $b \in B$ tal que, $\alpha(a) = b$. Podemos entonces asociar cada elemento $b \in B$ con un único elemento $a \in A$. Es decir, α induce una aplicación uno a uno y sobre que mapea B sobre A . Denotaremos este mapeo como β y verificaremos que satisface la definición anterior. Sea,

$$\beta : B \rightarrow A,$$

y

$$\beta(b) = a, \text{ para todo } b \in B.$$

Ahora consideremos las composiciones $\alpha \circ \beta$ y $\beta \circ \alpha$.

$$\alpha \circ \beta : B \rightarrow B,$$

$$\beta \circ \alpha : A \rightarrow A,$$

Determinemos las composiciones:

$$\begin{aligned}
 (\alpha \circ \beta)(b) &= \alpha(\beta(b)), \\
 &= \alpha(a), \\
 &= b.
 \end{aligned}$$

Por lo anterior, $\alpha \circ \beta = \epsilon_B$.

Ahora consideremos,

$$\begin{aligned} (\beta \circ \alpha)(a) &= \beta(\alpha(a)), \\ &= \beta(b), \\ &= a. \end{aligned}$$

Se observa que, $\beta \circ \alpha = \epsilon_A$.

En conclusión,

$$\begin{cases} \beta \circ \alpha = \epsilon_A \\ \alpha \circ \beta = \epsilon_B \end{cases}$$

Ahora demostraremos que la aplicación inversa es única, para lo cual supondremos que existe otra aplicación γ que satisface la ecuación A.0.6; es decir,

$$\gamma \circ \alpha = \epsilon_A,$$

y

$$\alpha \circ \gamma = \epsilon_B.$$

Consideremos la segunda ecuación y formemos la composición $(\gamma \circ \alpha) \circ \beta$; es decir,

$$\begin{aligned} (\gamma \circ \alpha) \circ \beta &= \epsilon_A \circ \beta, \\ \gamma \circ (\alpha \circ \beta) &= \beta, \\ \gamma \circ \epsilon_B &= \beta, \\ \gamma &= \beta. \end{aligned}$$

Concluimos que la inversa es única. De aquí en adelante la denotaremos como α^{-1} . Además α^{-1} satisface las ecuaciones:

$$\begin{cases} \alpha^{-1} \circ \alpha = \epsilon_A, \\ \alpha \circ \alpha^{-1} = \epsilon_B. \end{cases}$$

\Leftrightarrow) Supongamos ahora que α tiene una inversa única, nuestro propósito es demostrar que α es uno a uno y sobre.

- i) En esta parte probaremos que α es uno a uno. Supongamos para tal efecto que existen a_1 y $a_2 \in A$ tales que, $a_1 \neq a_2$ y además,

$$\alpha(a_1) = \alpha(a_2).$$

En este caso α no sería un mapeo uno a uno de A en B ; sin embargo, aplicando α^{-1} a la ecuación anterior obtenemos,

$$\begin{aligned}\alpha(a_1) &= \alpha(a_2), \\ \alpha^{-1}(\alpha(a_1)) &= \alpha^{-1}(\alpha(a_2)), \\ (\alpha^{-1} \circ \alpha)(a_1) &= (\alpha^{-1} \circ \alpha)(a_2), \\ \epsilon_A(a_1) &= \epsilon_A(a_2), \\ a_1 &= a_2.\end{aligned}$$

Por lo tanto, existe una contradicción, la cual surge de suponer que α no era una aplicación uno a uno de A en B . En conclusión α es una aplicación uno a uno de A en B .

- ii) Demostraremos en esta parte que α es una aplicación de A sobre B . Consideremos un elemento $b \in B$, luego,

$$\begin{aligned}b &= \epsilon_B b, \\ b &= (\alpha \circ \alpha^{-1})(b), \\ b &= \alpha(\alpha^{-1}(b)).\end{aligned}$$

La última ecuación muestra que existe un $a \in A$ tal que $\alpha(a) = b$; por lo tanto, b es imagen de a bajo α . Como esto es cierto para todo $b \in B$, entonces B es una aplicación de A sobre B . ■

Teorema A.0.4 Si α es un mapeo uno a uno de un conjunto A sobre un conjunto B y β es un mapeo uno a uno del conjunto B sobre un conjunto C , entonces $(\beta \circ \alpha)$ es invertible y su inversa es $(\beta \circ \alpha)^{-1} = \alpha^{-1} \circ \beta^{-1}$.

Demostración: Como α y β son aplicaciones uno a uno y sobre, entonces tienen inversas tales que,

$$\begin{aligned}\alpha^{-1} &: B \rightarrow A, \\ \beta^{-1} &: C \rightarrow B,\end{aligned}$$

por lo anterior,

$$\alpha^{-1} \circ \beta^{-1} : C \rightarrow A,$$

por otro lado,

$$\beta \circ \alpha : A \rightarrow C,$$

además,

$$(\alpha^{-1} \circ \beta^{-1}) \circ (\beta \circ \alpha) : A \rightarrow A.$$

Consideremos entonces la última composición y utilicemos la propiedad asociativa para desarrollarla.

$$\begin{aligned}
 (\alpha^{-1} \circ \beta^{-1}) \circ (\beta \circ \alpha) &= \alpha^{-1} \circ (\beta^{-1} \circ (\beta \circ \alpha)), \\
 &= \alpha^{-1} \circ ((\beta^{-1} \circ \beta) \circ \alpha), \\
 &= \alpha^{-1} \circ (\epsilon_B \circ \alpha), \\
 &= \alpha^{-1} \circ \alpha, \\
 &= \epsilon_A.
 \end{aligned}$$

De manera análoga, consideremos la composición

$$(\beta \circ \alpha) \circ (\alpha^{-1} \circ \beta^{-1}) : C \rightarrow C.$$

$$\begin{aligned}
 (\beta \circ \alpha) \circ (\alpha^{-1} \circ \beta^{-1}) &= \beta \circ (\alpha \circ (\alpha^{-1} \circ \beta^{-1})), \\
 &= \beta \circ ((\alpha \circ \alpha^{-1}) \circ \beta^{-1}), \\
 &= \beta \circ (\epsilon_A \circ \beta^{-1}) \\
 &= \beta \circ \beta^{-1} \\
 &= \epsilon_C.
 \end{aligned}$$

Con esto hemos demostrado, de acuerdo con la definición, que $\beta \circ \alpha$ es invertible y por el teorema A.0.3 sabemos que la inversa es única, de manera que:

$$(\beta \circ \alpha)^{-1} = \alpha^{-1} \circ \beta^{-1}. \quad \blacksquare$$

INST. POLITÉCNICO NAL.

Apéndice B

Funciones generalizadas

Los desarrollos matemáticos teóricos que sustentan las propiedades de la delta de Dirac fueron proporcionados por Laurent Schwartz¹, su formalismo se conoce como el de las distribuciones; sin embargo, este enfoque es exigente en cuanto a la formación matemática teórica. Un segundo enfoque es el de las funciones generalizadas, el cual resulta más inteligible para los estudiantes de Física e ingenierías. Este enfoque fue desarrollado George Temple².

En este trabajo se proporcionarán los conceptos de función generalizada, derivada generalizada y la derivada generalizada de una función con discontinuidades de salto. El lector interesado podrá encontrar un desarrollo más amplio de la teoría de las funciones generalizadas en las referencias [?] y [?].

B.1. Funciones generalizadas

Definición B.1.1 (Conjunto K de las funciones de prueba) *Es el conjunto de todas las funciones reales $\phi(t)$ con derivadas continuas de todos los órdenes con soporte compacto (lo cual significa que la función se anula fuera de una región acotada).*

Puede probarse que el conjunto K con las operaciones usuales de suma de funciones y multiplicación por un escalar, forman un espacio vectorial.

Ejemplo B.1.1 *Las funciones $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con derivadas continuas de todos los órdenes, tales que $\phi(t) = 0$ si $t \in (\infty, a) \cup (b, \infty)$ donde $a < b$ son*

¹Laurent Moïse Schwartz (1915-2002). Fue un matemático francés, pionero en el desarrollo de la teoría de distribuciones.

²George Frederick James Temple (1901-1992). Matemático inglés, realizó importantes contribuciones en una amplia variedad de tópicos como: análisis, relatividad, aerodinámica y mecánica cuántica.

funciones de prueba. Por ejemplo,

$$\phi(t, a) = \begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2-t^2}}, & \text{si } |t| < a, \\ 0, & \text{si } |t| \geq a. \end{cases} \quad (\text{B.1.1})$$

Esta función tiene derivada de todos los órdenes y se anula fuera del intervalo $(-a, a)$. Las gráficas de $\phi(t, a)$ y de su primera derivada se muestran en la figura B.1.

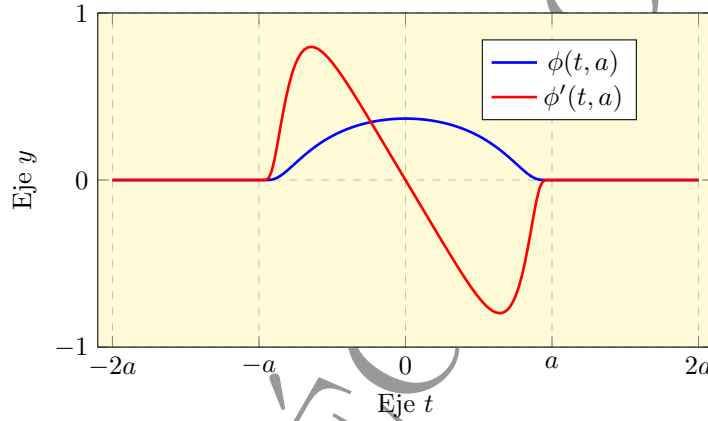


Figura B.1: Función de prueba y su primera derivada.

Teorema B.1.1 Para toda función continua f (no necesariamente con soporte compacto) existe una función $\phi \in K$ arbitrariamente cercana a ella; es decir, para todo $\epsilon > 0$, se satisface que $|f(t) - \phi(t)| < \epsilon$, para toda x .

Demostración: Considérese la función f_δ definida mediante

$$f_\delta(t) = C_\delta \int_{|x-\xi|<\delta} f(\xi) \phi(t - \xi, \delta) d\xi, \quad (\text{B.1.2})$$

donde

$$\phi(t, \delta) = \begin{cases} e^{-\frac{\delta^2}{\delta^2-t^2}}, & |t| < \delta, \\ 0, & |t| \geq \delta, \end{cases} \quad (\text{B.1.3})$$

y

$$C_\delta^{-1} = \int_{|t-\xi|<\delta} \phi(t - \xi, \delta) d\xi. \quad (\text{B.1.4})$$

Tomando la diferencia

$$\begin{aligned}
f(t) - f_\delta(t) &= C_\delta f(t) C_\delta^{-1} - f_\delta(t), \\
&= C_\delta f(t) \int_{|t-\xi|<\delta} \phi(t-\xi, \delta) d\xi - C_\delta \int_{|t-\xi|<\delta} f(\xi) \phi(t-\xi, \delta) d\xi, \\
&= C_\delta \int_{|t-\xi|<\delta} f(t) \phi(t-\xi, \delta) d\xi - C_\delta \int_{|t-\xi|<\delta} f(\xi) \phi(t-\xi, \delta) d\xi, \\
&= C_\delta \int_{|t-\xi|<\delta} (f(t) - f(\xi)) \phi(t-\xi, \delta) d\xi.
\end{aligned}$$

Ahora, debido a que f es una función continua de t , entonces para una δ suficientemente pequeña con $|t - \xi| < \delta$, se tiene que $|f(t) - f(\xi)| < \epsilon$ para un ϵ dado. De esta manera, con la δ apropiada, se satisface que,

$$|f(t) - f_\delta(t)| < C_\delta \epsilon \int_{|t-\xi|<\delta} \phi(t-\xi, \delta) d\xi = C_\delta \epsilon C_\delta^{-1} = \epsilon. \quad \blacksquare \quad (\text{B.1.5})$$

Definición B.1.2 (Sucesión convergente a cero en K) Se dice que la sucesión $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$ de funciones de prueba converge a cero en K , si cada una de las funciones se anulan fuera de alguna región acotada fija (la cual es la misma para todas las funciones), y convergen uniformemente a cero (en el sentido usual) junto con todas sus derivadas de cualquier orden.

Ejemplo B.1.2 Considérese la sucesión en K definida por $\psi_n(t) = n^{-1}\phi(t, a)$, donde $\phi(t, a)$ es la función de prueba definida por la ecuación B.1.1. Esta sucesión converge a cero junto con todas sus derivadas en el intervalo acotado $(-a, a)$, y todas las funciones se anulan fuera de éste, como se puede ver en la figura B.2. Por otra parte, dado un $\epsilon > 0$ existe un N en los naturales tal que $\epsilon > 1/2N$. Además, dado que $|\psi(t, a)| \leq e^{-1} < 1/2$, entonces

$$|\psi_n(t)| = \frac{1}{n} |\psi(t, a)| < \frac{1}{2n} < \epsilon.$$

De manera análoga se prueba la convergencia uniforme de las derivadas. Por lo tanto, $\psi_n(t)$ es una función convergente a cero en K .

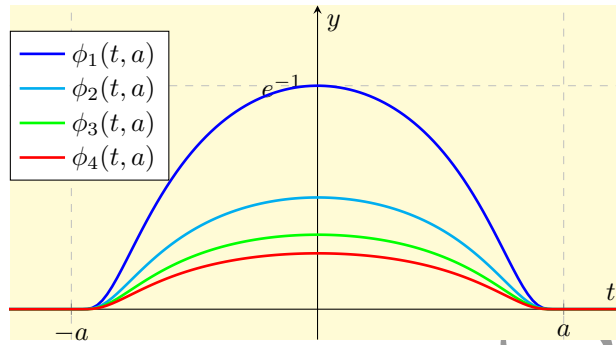


Figura B.2: Sucesión convergente a cero en K .

Ejemplo B.1.3 *Considérese la sucesión en K definida por $\varphi_n(t) = \frac{1}{n}\phi(t/n, a)$, donde $\phi(t, a)$ está determinado por la ecuación B.1.1. Esta es una sucesión que converge uniformemente a cero junto con todas sus derivadas, lo cual se demuestra de manera análoga al ejemplo anterior; sin embargo, no es una función convergente a cero en K , ya que no existe un intervalo acotado común, fuera del cual todas las funciones se anulen, de hecho, $\varphi_n(t)$ tiene soporte compacto $(-na, na)$, como se muestra en la figura B.3.*

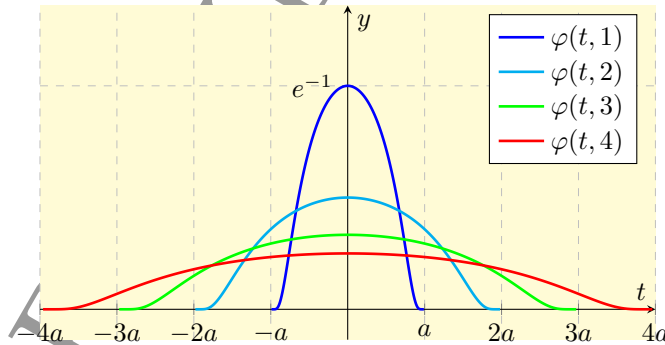


Figura B.3: Sucesión no convergente a cero en K .

Definición B.1.3 (Funcional lineal continuo) Se dice que f es un funcional lineal continuo sobre K , si existe una regla que asocia a cada función de prueba $\phi \in K$ el número real (f, ϕ) que satisface las siguientes propiedades.

- a) **Propiedad de Linealidad:** Para todo a_1 y a_2 en \mathbb{R} y cualesquiera dos funciones ϕ_1 y ϕ_2 en K ,

$$(f, a_1\phi_1 + a_2\phi_2) = a_1(f, \phi_1) + a_2(f, \phi_2). \quad (\text{B.1.6})$$

- b) **Propiedad de continuidad:** Si la sucesión $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a cero en K , entonces la sucesión $\{(f, \phi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a cero en \mathbb{R} .

Definición B.1.4 (Funciones localmente sumables) Se conoce con este nombre al conjunto C de todas las funciones integrables en toda región acotada.

Ejemplo B.1.4 Si para todo $f \in C$ y para todo $\phi \in K$ se define $(f, \phi) = 0$ entonces f es un funcional lineal continuo. La linealidad y la continuidad se heredan de las propiedades de los números reales.

Ejemplo B.1.5 (Funcionales regulares) Sea f cualquier elemento de C , entonces

$$(f, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\phi(t) dt, \quad (\text{B.1.7})$$

representa un funcional lineal continuo. Estos funcionales se conocen como regulares.

- a) **Linealidad:** Se sigue de la linealidad de la integral.

$$\begin{aligned} (f, a_1\phi_1 + a_2\phi_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} (f(t)(a_1\phi_1(t) + a_2\phi_2(t))) dt, \\ &= a_1 \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\phi_1(t) dt + a_2 \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\phi_2(t) dt, \\ &= a_1(f, \phi_1) + a_2(f, \phi_2). \end{aligned}$$

- b) **Continuidad:** Se sigue del hecho de que f es sumable, lo cual permite intercambiar el orden del límite y la integral.

Sea $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión convergente a cero en K , entonces

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (f, \phi_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\phi_n(t) dt, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(t) \right) dt, \\ &= 0. \end{aligned}$$

Definición B.1.5 (Funcionales singulares) *Los funcionales que no pueden representarse de acuerdo con la ecuación B.1.7 (para alguna función en C) se conocen como funcionales singulares.*

Ejemplo B.1.6 (El funcional delta) *Si f es el funcional que asocia con cada $\phi \in K$ su valor en $t = 0$; es decir,*

$$(f, \phi) = \phi(0), \quad (\text{B.1.8})$$

entonces, f define un funcional lineal continuo. A continuación se prueban la linealidad y la continuidad del funcional.

a) *Linealidad:*

$$\begin{aligned} (f(t), (a_1\phi_1 + a_2\phi_2)(t)) &= a_1\phi_1(0) + a_2\phi_2(0), \\ &= a_1(f, \phi_1) + a_2(f, \phi_2). \end{aligned}$$

b) *Continuidad: Sea $\{\phi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión convergente a cero en K , entonces,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f, \phi_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(0) = 0,$$

ya que $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(t) = 0$, en particular, la sucesión de números reales $\{\phi_n(0)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a cero.

El funcional lineal continuo descrito por la ecuación B.1.8 se conoce como “función delta de Dirac”. Puede probarse que este funcional no se puede representar en la forma descrita por la ecuación B.1.7 con cualquier función f localmente sumable. Para mostrar lo anterior, supóngase que f es una función localmente sumable que asocia con cada función de prueba $\phi \in K$ el número real,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\phi(t) dt = \phi(0). \quad (\text{B.1.9})$$

Si usamos la función de prueba

$$\phi(t) = \begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2-t^2}}, & \text{si } |t| < a, \\ 0, & \text{si } |t| \geq a. \end{cases} \quad (\text{B.1.10})$$

La integral (lado izquierdo de la ecuación B.1.9) tiende a cero, cuando $a \rightarrow 0$, mientras que $\phi(0) = e^{-1}$, lo que vuelve a la ecuación B.1.9 inconsistente. Esto prueba que el funcional delta es un funcional singular.

Definición B.1.6 (Función generalizada) Una función generalizada es un funcional lineal continuo definido sobre K . Denotaremos al conjunto de todas las funciones generalizadas mediante la letra K' . Los funcionales que se definen de acuerdo con la ecuación B.1.7 se conocen como regulares, de otra manera se les conoce como singulares.

Definición B.1.7 (Suma de funciones generalizadas) Si f y g son dos funciones generalizadas, la suma de f y g denotada por $f + g$ se define mediante,

$$(f + g, \phi) = (f, \phi) + (g, \phi). \quad (\text{B.1.11})$$

Definición B.1.8 (Multiplicación por un escalar) Si f es una función generalizada y k es un número real, entonces la multiplicación de f por un escalar k , denotado como kf , se define mediante,

$$(kf, \phi) = (f, k\phi) = k(f, \phi). \quad (\text{B.1.12})$$

Puede probarse que el conjunto K' es cerrado bajo la suma y bajo la multiplicación por un escalar; es decir, la suma de dos funciones generalizadas es otra función generalizada y la multiplicación de una función generalizada por un escalar es, del mismo modo, otra función generalizada.

Con lo establecido hasta este punto, vemos que hablar del valor de una función generalizada en un punto específico no tiene ningún significado; sin embargo, se seguirá utilizando la notación $f(t)$ para denotar a las funciones generalizadas. Además, algunas veces, denotaremos (f, ϕ) por $\int f(t)\phi(t) dt$. En particular, para la función generalizada delta escribiremos $\int \delta(t)\phi(t) dt$ en lugar de $(\delta(t), \phi(t))$.

B.2. Sucesiones de funciones generalizadas

Definición B.2.1 (Sucesión convergente de funciones generalizadas)

Dada una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones generalizadas, se dice que ésta converge a una función generalizada f , si para toda función de prueba $\phi \in K$ se satisface que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n, \phi) = (f, \phi). \quad (\text{B.2.13})$$

Teorema B.2.1 (Linealidad del límite de funciones generalizadas) Si a es un número real y ϕ es una función de prueba, y sean $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones de funciones generalizadas que convergen a f y g , respectivamente, entonces

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n + g_n, \phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n, \phi) + \lim_{n \rightarrow \infty} (g_n, \phi).$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} (af_n, \phi) = a \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n, \phi).$$

Demostración: Se sigue de la convergencia de sucesiones de números reales. ■

Definición B.2.2 (Sucesión regular de funciones generalizadas) Una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones generalizadas regulares se conoce como regular si,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(t) \phi(t) dt \quad (\text{B.2.14})$$

existe para toda $\phi(t)$ en K .

Teorema B.2.2 Toda función generalizada singular puede obtenerse como el límite de una sucesión de funciones generalizadas regulares.

La demostración queda fuera de los alcances de este curso. El lector interesado puede consultar la demostración en la referencia [?], págs. (99-100).

B.3. Sucesiones regulares de la función generalizada delta

Definición B.3.1 (Sucesiones delta convergentes) Una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones generalizadas regulares se conoce como sucesión delta convergente, si ésta converge a la función delta de Dirac; es decir, si

$$(\delta(t), \phi(t)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(t) \phi(t) dt = \phi(0), \quad (\text{B.3.15})$$

o de manera equivalente,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \phi(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(t) \phi(t) dt = \phi(0). \quad (\text{B.3.16})$$

Existen muchas maneras de definir a las sucesiones deltas; sin embargo, éstas deben, de forma general, satisfacer:

a) Para todo $M > 0$ y $|a| \leq M$, $|b| \leq M$ las cantidades

$$\int_a^b f_n(t) dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

deben estar acotadas por una constante independiente de a , b y n ; es decir, la constante solo puede depender de M .

b)

$$\int_a^b f_n(t) dt = \begin{cases} 1, & \text{si } a < 0 < b, \\ 0, & \text{si } a < b < 0, \text{ o } 0 < a < b. \end{cases} \quad (\text{B.3.17})$$

La sucesión de funciones regulares que se define a continuación, constituye una sucesión delta convergente.

$$\delta_n(t) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nt^2}. \quad (\text{B.3.18})$$

La figura B.4 muestra algunos elementos de la sucesión delta definida mediante B.3.18.

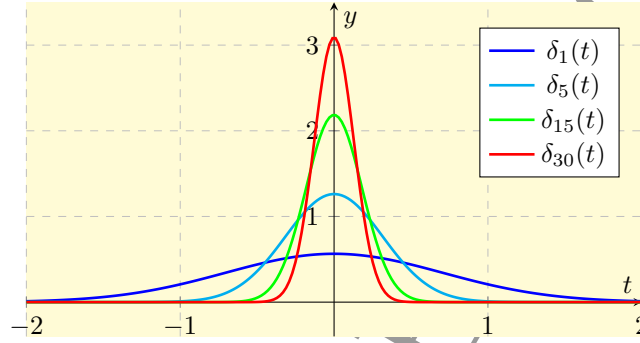


Figura B.4: Sucesión de funciones normales.

Otra sucesión delta se define de la siguiente manera

$$\delta_n(t) = \begin{cases} n, & \text{si } |t| < \frac{1}{2n}, \\ 0, & \text{si } |t| > \frac{1}{2n}. \end{cases} \quad (\text{B.3.19})$$

La figura B.5 muestra algunos elementos de la sucesión delta definida mediante B.3.19.

La sucesión delta definida por la ecuación B.3.19 está relacionada con la función pulso unitario la cual se define mediante,

$$\delta_\epsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon}, & \text{si } |t| < \epsilon, \\ 0, & \text{si } |t| > \epsilon. \end{cases} \quad (\text{B.3.20})$$

Obsérvese que el área bajo la curva es igual a la unidad. El funcional delta de Dirac se obtiene como

$$(\delta, \phi) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty \delta_\epsilon(t) \phi(t) dt. \quad (\text{B.3.21})$$

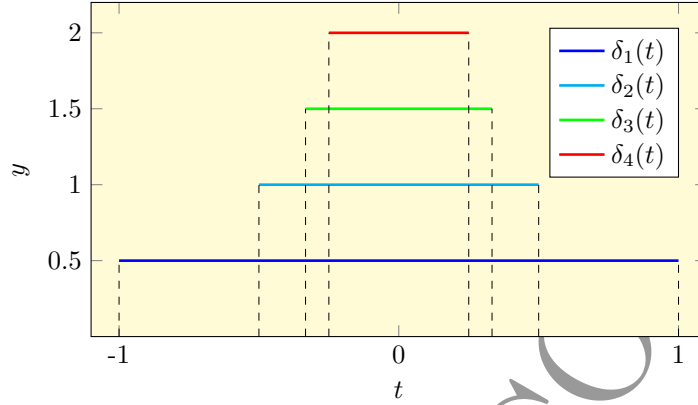


Figura B.5: Sucesión de pulsos unitarios.

Ejemplo B.3.1 Usando la sucesión delta convergente definida por la ecuación B.3.20 verifique que la función generalizada delta de Dirac satisface

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \delta(t) dt = \phi(0).$$

Solución: Para la sucesión delta dada se debe satisfacer que,

$$(\delta(t), \phi(t)) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\delta_{\epsilon}(t), \phi(t));$$

es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \phi(t) dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \delta_{\epsilon}(t) dt, \quad (\text{B.3.22})$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \phi(t) \delta_{\epsilon}(t) dt, \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \phi(t) \frac{1}{2\epsilon} dt, \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \phi(t) dt. \end{aligned} \quad (\text{B.3.23})$$

Dado que ϕ es continua, entonces, por el teorema del valor medio, existe un $\xi \in [-\epsilon, \epsilon]$ tal que

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \phi(t) dt = 2\epsilon \phi(\xi). \quad (\text{B.3.24})$$

Sustituyendo la ecuación B.3.24 en la ecuación B.3.23 se obtiene,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \phi(t) dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \phi(\xi). \quad (\text{B.3.25})$$

Dado que ϕ es una función continua,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \delta(t) dt = \phi\left(\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \xi\right) = \phi(0). \quad (\text{B.3.26})$$

Ejemplo B.3.2 Usando la sucesión delta convergente definida por la ecuación B.3.20 verifique que la función generalizada delta de Dirac desplazada satisface

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \delta(t - t_0) dt = \phi(t_0).$$

Solución: Realizando una translación de la sucesión convergente $\delta_\epsilon(t)$ al punto t_0 ; es decir,

$$\delta_\epsilon(t - t_0) = \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon}, & \text{si } |t - t_0| \leq \epsilon, \\ 0, & \text{si } |t - t_0| > \epsilon. \end{cases} \quad (\text{B.3.27})$$

entonces,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \delta_\epsilon(t - t_0) dt &= \int_{t_0 - \epsilon}^{t_0 + \epsilon} \phi(t) \delta_\epsilon(t - t_0) dt, \\ &= \int_{t_0 - \epsilon}^{t_0 + \epsilon} \phi(t) \frac{1}{2\epsilon} dt, \\ &= \frac{1}{2\epsilon} \int_{t_0 - \epsilon}^{t_0 + \epsilon} \phi(t) dt. \end{aligned} \quad (\text{B.3.28})$$

Dado que ϕ es continua, por el teorema del valor medio, existe un $\eta \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$ tal que

$$\int_{t_0 - \epsilon}^{t_0 + \epsilon} \phi(t) dt = 2\epsilon \phi(\eta). \quad (\text{B.3.29})$$

Sustituyendo la ecuación B.3.29 en la ecuación B.3.28 se obtiene,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \delta_\epsilon(t - t_0) dt = \phi(\eta). \quad (\text{B.3.30})$$

Tomando el límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$ en ambos lados de la ecuación anterior se obtiene,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \delta(t - t_0) dt = \phi\left(\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \eta\right) = \phi(t_0). \quad (\text{B.3.31})$$

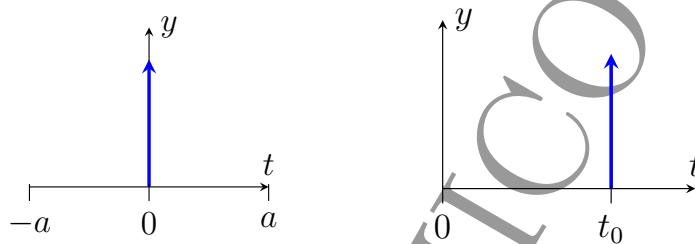
Por lo anterior

$$(\delta(t), \phi(t)) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\delta_\epsilon(t - t_0), \phi(t)) = \phi(t_0). \quad (\text{B.3.32})$$

De manera equivalente,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \delta(t - t_0) dt = \phi(t_0). \quad (\text{B.3.33})$$

Las funciones delta y la delta desplazada se representan gráficamente como se muestra en la siguiente figura.



(a) Representación de $\delta(t)$. (b) Representación de $\delta(t - t_0)$.

Figura B.6: Representación de la función delta de Dirac.

Teorema B.3.1 Las siguientes identidades de la función delta son verdaderas.

1. $\delta(t) = \delta(-t)$,
2. $t\delta(t) = 0$,
3. $\phi(t)\delta(t) = \phi(0)\delta(t)$,
4. $\phi(t)\delta(t - t_0) = \phi(t_0)\delta(t - t_0)$,
5. $\delta(t^2 - t_0^2) = \frac{1}{2t_0}[\delta(t - t_0) + \delta(t + t_0)]$, $t_0 > 0$,
6. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\eta - \xi)\delta(\xi - b) d\xi = \delta(\eta - b)$.

Demostración:

1. Sea $\phi(t)$ una función de prueba, y $\delta_n(t)$ una sucesión delta convergente, entonces

$$(\delta(-t), \phi(t)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(-t) \phi(t) dt.$$

Mediante el cambio de variables $v = -t$ se obtiene,

$$\begin{aligned}(\delta(-t), \phi(t)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(v) \phi(-v) dv, \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(t) \phi(-t) dt, \\&= \phi(0), \\&= (\delta(t), \phi(t)).\end{aligned}$$

Se concluye que $\delta(t) = \delta(-t)$; es decir, la función delta de Dirac es par.

2. Sea $\phi(t)$ una función de prueba y $\delta_n(t)$ una sucesión delta convergente, entonces

$$(t\delta_n(t), \phi(t)) = (\delta_n(t), t\phi(t))$$

Tomando el límite cuando $n \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned}(t\delta(t), \phi(t)) &= (\delta(t), t\phi(t)), \\&= t\phi(t)|_{t=0} = 0.\end{aligned}$$

Se concluye que $t\delta(t) = 0$.

3. De acuerdo con la definición de la función generalizada delta,

$$(\delta(t), \phi(t)) = \phi(0)$$

y

$$(\delta(t), \phi(0)) = \phi(0).$$

Las ecuaciones anteriores permiten establecer

$$(\delta(t), \phi(t)) = (\delta(t), \phi(0)).$$

La ecuación anterior puede expresarse de manera equivalente como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \phi(t) dt = \phi(0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt,$$

Lo cual permite concluir que,

$$\delta(t)\phi(t) = \phi(0)\delta(t).$$

4. La delta desplazada satisface

$$(\delta(t - t_0), \phi(t)) = \phi(t_0).$$

Por otro lado,

$$(\delta(t - t_0), \phi(t_0)) = \phi(t_0).$$

Las ecuaciones anteriores permiten concluir que

$$(\delta(t - t_0), \phi(t)) = (\delta(t - t_0), \phi(t_0)),$$

o de manera equivalente,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \delta(t - t_0) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t_0) \delta(t - t_0) dt. \quad (\text{B.3.34})$$

5. Considérese la siguiente integral

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \delta(t^2 - t_0^2) dt &= \int_{-\infty}^0 \phi(t) \delta(t^2 - t_0^2) dt + \int_0^{\infty} \phi(t) \delta(t^2 - t_0^2) dt, \\ &= \phi(-t_0) \int_{-\infty}^0 \delta(t^2 - t_0^2) dt \\ &\quad + \phi(t_0) \int_0^{\infty} \delta(t^2 - t_0^2) dt \end{aligned} \quad (\text{B.3.35})$$

Haciendo el cambio de variable t por $-t$ en la primera integral del lado derecho de la ecuación B.3.35 se obtiene,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 \delta(t^2 - t_0^2) dt &= - \int_{\infty}^0 \delta(t^2 - t_0^2) dt, \\ &= \int_0^{\infty} \delta(t^2 - t_0^2) dt. \end{aligned} \quad (\text{B.3.36})$$

La ecuación B.3.36 permite reescribir la ecuación B.3.35 de la siguiente manera,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \delta(t^2 - t_0^2) dt = [\phi(-t_0) + \phi(t_0)] \int_0^{\infty} \delta(t^2 - t_0^2) dt. \quad (\text{B.3.37})$$

Realizando el cambio de variable $y = t^2 - t_0^2$, entonces $dt = \frac{dy}{2\sqrt{y+t_0^2}}$. De este modo, la ecuación B.3.37 se transforma en,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \delta(t^2 - t_0^2) dt &= \frac{(\phi(t_0) + \phi(-t_0))}{2} \int_{-t_0^2}^{\infty} \frac{\delta(y)}{\sqrt{y + t_0^2}} dy \\ &= \frac{1}{2|t_0|} [\phi(-t_0) + \phi(t_0)]. \end{aligned} \quad (\text{B.3.38})$$

Las ecuaciones B.3.34 y B.3.38 permiten establecer

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \delta(t^2 - t_0^2) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2t_0} [\phi(t) \delta(t - t_0) + \phi(t) \delta(t + t_0)] dt.$$

De la ecuación anterior se concluye,

$$\delta(t^2 - t_0^2) = \frac{1}{2t_0} [\delta(t - t_0) + \delta(t + t_0)].$$

6. Considérese

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) \delta(\eta - \xi) \delta(\xi - b) d\xi d\eta, \quad (\text{B.3.39})$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi - b) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) \delta(\eta - \xi) d\eta, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \delta(\xi - b) d\xi, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) \delta(\eta - b) d\eta. \end{aligned} \quad (\text{B.3.40})$$

Comparando las ecuaciones B.3.39 y B.3.40 se concluye que,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\eta - \xi) \delta(\xi - b) d\xi = \delta(\eta - b).$$

B.4. Derivadas de funciones generalizadas

Definición B.4.1 (La derivada de una función generalizada) Si f es una función generalizada, llamaremos la derivada de f a la función que satisface

$$(f', \phi) = (f, -\phi'); \quad (\text{B.4.41})$$

es decir, si

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(t) \phi(t) dt = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \phi'(t) dt, \quad (\text{B.4.42})$$

donde $\phi(t)$ es una función de prueba. Denotaremos a f' como $f'(t) = \frac{df(t)}{dt}$.

Puede verificarse fácilmente que la ecuación B.4.41 es consistente con la definición ordinaria de derivada, ya que esta ecuación resulta de la aplicación directa del método de integración por partes y observando que la función de prueba se anula en $\pm\infty$. Puede también probarse que la derivada que acabamos de definir es una función generalizada.

B.5. Derivadas de la delta de Dirac

Teorema B.5.1 (Derivadas de la delta de Dirac) *La derivada n -ésima de la función delta de Dirac está determinada por la ecuación*

$$(\delta^{(n)}, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \delta^{(n)}(t) dt = (-1)^n \phi^{(n)}(0). \quad (\text{B.5.43})$$

Demostración: Sustituyendo $n = 1$ en la ecuación B.5.43 se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \frac{d\delta(t)}{dt} dt = -\phi'(0). \quad (\text{B.5.44})$$

Por otro lado, de la definición de la derivada de una función generalizada,

$$(\delta', \phi) = (\delta, -\phi') = - \int_{-\infty}^{\infty} \phi'(t) \delta(t) dt = -\phi'(0). \quad (\text{B.5.45})$$

La ecuación B.5.43 proporciona el resultado correcto para $n = 1$. Ahora nos proponemos probar la ecuación B.5.43 mediante el método de inducción matemática.

- i) El resultado es válido para $n = 1$, de acuerdo con las ecuaciones B.5.44 y B.5.45.
- ii) Supóngase que el resultado es válido para un cierto $k > 1$; es decir,

$$(\delta^{(k)}, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \delta^{(k)}(t) dt = (-1)^k \phi^{(k)}(0). \quad (\text{B.5.46})$$

- iii) Probemos que el resultado es válido para $k + 1$. Sea

$$(\delta^{(k+1)}, \phi) = \left(\frac{d}{dt} \delta^{(k)}, \phi \right) = (\delta^{(k)}, -\phi'). \quad (\text{B.5.47})$$

En la ecuación B.5.47 hemos aplicado el resultado de la ecuación B.5.45. Ahora, usando la hipótesis de inducción (B.5.46)

$$\begin{aligned} (\delta^{(k+1)}, \phi) &= -(\delta^{(k)}, \phi'), \\ &= -1(-1)^k (\phi')^{(k)} \Big|_{t=0}, \\ &= (-1)^{k+1} (\phi)^{(k+1)}(0). \end{aligned} \quad (\text{B.5.48})$$

Este es el resultado que se obtiene al sustituir $n = k + 1$ en la ecuación B.5.43; por lo tanto, se concluye la demostración. ■

Teorema B.5.2 Si $u(t)$ es la función generalizada de Heaviside definida por,

$$(u, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\phi(t) dt = \int_0^{\infty} \phi(t) dt, \quad (\text{B.5.49})$$

entonces

$$\delta(t) = \frac{d}{dt}u(t). \quad (\text{B.5.50})$$

Demostración: De acuerdo con la definición de la derivada generalizada se tiene

$$(u'(t), \phi(t)) = (u, -\phi') = - \int_0^{\infty} \phi'(t) dt \quad (\text{B.5.51})$$

Evaluando la integral se tiene,

$$(u'(t), \phi(t)) = \phi(0) - \lim_{b \rightarrow \infty} \phi(b), \quad (\text{B.5.52})$$

$$= \phi(0), \quad (\text{B.5.53})$$

$$= (\delta(t), \phi(t)). \quad (\text{B.5.54})$$

De la última igualdad se concluye que $u'(t) = \delta(t)$.

B.6. Derivada generalizada de una función con discontinuidades de salto

En esta sección haremos uso de la delta de Dirac para construir la serie de Fourier de la derivada de una función $f(t)$, la cual es periódica y presenta discontinuidades de salto en un número finito de puntos, como se muestra en la figura siguiente.

Considérese una función $f(t)$ continua por tramos con discontinuidades de salto de magnitudes a_1, a_2, \dots, a_n en los puntos t_1, t_2, \dots, t_n . Las magnitudes de las discontinuidades de salto se definen como

$$a_k = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(t_k + \epsilon) - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(t_k - \epsilon). \quad (\text{B.6.55})$$

Por otro lado, sea

$$u_T(t) = \sum_{k=1}^n a_k u(t - t_k), \quad (\text{B.6.56})$$

donde

$$u(t - t_k) = \begin{cases} 1, & \text{si } t > t_k, \\ 0, & \text{si } t < t_k. \end{cases} \quad (\text{B.6.57})$$

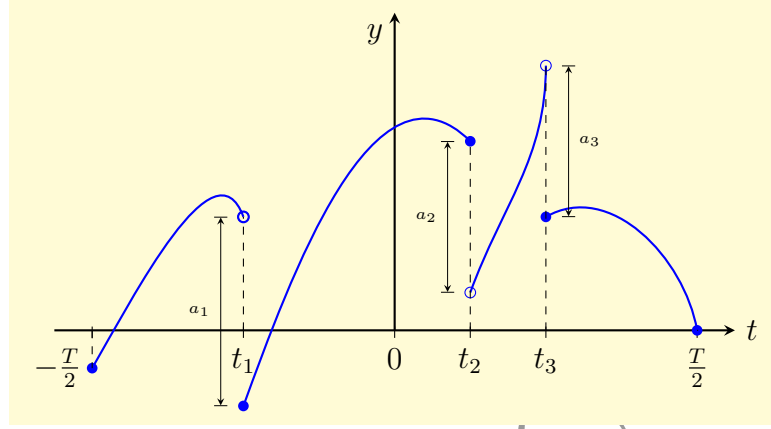
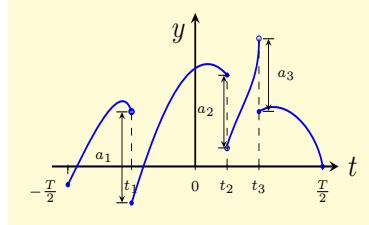


Figura B.7: Gráfica de una función con discontinuidades de salto.

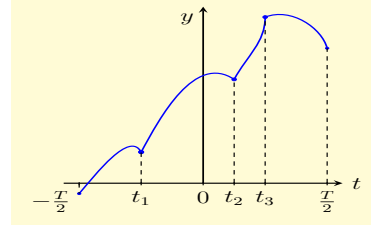
es la función de Heaviside desplazada al punto t_k , entonces la función $g(t)$ definida como

$$g(t) = f(t) - u_T(t) = f(t) - \sum_{k=1}^n a_k u(t - t_k), \quad (\text{B.6.58})$$

es una función continua en todo el período T . Obsérvese que el término $-u_T(t)$ elimina los saltos contenidos en $f(t)$ (ver la figura B.8b).



(a) La función $f(t)$.



(b) La función $g(t)$.

Figura B.8: Continuidad de la función $g(t)$.

Las funciones $f(t)$ y $g(t)$ tienen las mismas derivadas, excepto en los puntos t_1, t_2, \dots, t_n . Dado que la función $u_T(t)$ es una función generalizada, con derivada generalizada, entonces la derivada generalizada de $g(t)$ (ecuación B.6.58) se define mediante,

$$g'(t) = f'(t) - \sum_{k=1}^n a_k \delta(t - t_k). \quad (\text{B.6.59})$$

La ecuación anterior permite definir la derivada generalizada de una función $f(t)$, con un número finito de discontinuidades de salto en un período de la siguiente manera:

Definición B.6.1 Si $f(t)$ es una función continua por tramos con discontinuidades de salto de magnitudes a_1, a_2, \dots, a_n en los puntos t_1, t_2, \dots, t_n , y sea ϕ una función de prueba, entonces se define la derivada generalizada f' mediante

$$(f', \phi) = (g'(t) + \sum_{k=1}^n a_k \delta(t - t_k), \phi). \quad (\text{B.6.60})$$

La derivada generalizada de una función con discontinuidades de salto coincide con la derivada ordinaria en todos los puntos en los cuales la derivada ordinaria exista, más las sumas de los productos $a_k \delta(t - t_k)$ en las discontinuidades de salto t_1, t_2, \dots, t_n .

Ejemplo B.6.1 Determine la derivada generalizada de la función $\text{sgn}(t)$.

Solución: La función signo se define de la siguiente manera.

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t > 0, \\ -1, & \text{si } t < 0, \\ 0, & \text{si } t = 0. \end{cases} \quad (\text{B.6.61})$$

La función $\text{sgn}(t)$ tiene una discontinuidad de salto, de magnitud $a_1 = 2$ en $t = 0$. De acuerdo con la ecuación B.6.60,

$$\text{sgn}'(t) = g'(t) + 2\delta(t),$$

donde $g'(t) = 0$ para todo $t \neq 0$. Es decir, la derivada generalizada está determinada por

$$\text{sgn}'(t) = 2\delta(t).$$

B.7. Reglas generales de diferenciación para funciones generalizadas

Las funciones generalizadas satisfacen las mismas reglas generales de diferenciación que las funciones ordinarias.

Teorema B.7.1 Si f y g son funciones generalizadas, ϕ y φ son funciones de prueba, entonces

$$a) ((f + g)', \phi) = (f', \phi) + (g', \phi),$$

$$b) ((\varphi f)', \phi) = (f\varphi', \phi) + (f'\varphi, \phi).$$

Demostración: Se probará solamente el inciso b. El inciso a) se deja como ejercicio al lector.

Partiendo de la definición de derivada generalizada,

$$\begin{aligned} ((\varphi f)', \phi) &= -(f\varphi, \phi'), \\ &= -(f, \varphi\phi'), \\ &= -(f, (\varphi\phi)' - \varphi'\phi), \\ &= -(f, (\varphi\phi)') + (f, \varphi'\phi), \\ &= (f', (\varphi\phi)) + (f\varphi', \phi), \\ &= (f'\varphi, \phi) + (f\varphi', \phi), \\ &= (f'\varphi + f\varphi', \phi). \blacksquare \end{aligned}$$

Obsérvese que hemos utilizado la derivada de un producto, para las funciones de prueba.

Ejemplo B.7.1 Determine la derivada generalizada de la función $f(t) = |t|$.

Solución: La función $|t|$ puede representarse como $|t| = t \operatorname{sgn}(t)$, de modo que,

$$\begin{aligned} (|t|', \phi) &= (t \operatorname{sgn}'(t) + t' \operatorname{sgn}(t), \phi), \\ &= (2t\delta(t) + \operatorname{sgn}(t), \phi), \\ &= (2t\delta(t), \phi) + (\operatorname{sgn}(t), \phi), \\ &= (\operatorname{sgn}(t), \phi), \end{aligned}$$

Series de Funciones generalizadas

Teorema B.7.2 Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones generalizadas que converge a f , entonces la sucesión $\{f'_n\}_1^{\infty}$ converge a f' .

Demostración: Se sabe que

$$(f'_n, \phi) = -(f_n, \phi'),$$

así que, tomando el límite,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (f'_n, \phi) &= - \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n, \phi'), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (f'_n, \phi) &= -(f, \phi'), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (f'_n, \phi) &= (f', \phi). \end{aligned}$$

Es decir, la sucesión $\{f'_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a f' en el sentido de la convergencia de las funciones generalizadas. ■

Teorema B.7.3 Si $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ es una serie de funciones generalizadas que converge a una función f , entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n$ converge a f' .

Demostración: Sea ϕ una función de prueba, entonces

$$\begin{aligned} \left(\left(\sum_{k=1}^n f_k \right)', \phi \right) &= - \left(\sum_{k=1}^n f_k, \phi' \right), \\ &= \sum_{k=1}^n (f_k, -\phi'), \\ &= \sum_{k=1}^n (f'_k, \phi), \\ &= \left(\sum_{k=1}^n f'_k, \phi \right). \end{aligned}$$

Ahora tomando el límite cuando $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\sum_{k=1}^n f_k \right)', \phi \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n f'_k, \phi \right), \\ (f', \phi) &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} f'_k, \phi \right). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Lo anterior significa que una serie de funciones generalizadas puede diferenciarse término a término y la serie resultante converge (en el sentido de la convergencia de las funciones generalizadas) a f' .