

Comment WhatsApp et d'autres compressent vos images : Grâce aux maths !

Dr. Clotilde Djuikem

Question

Comment les applications compressent-elles vos images pour un envoi rapide tout en préservant une qualité acceptable ?

Les Maths

La décomposition en valeurs singulières (SVD), une technique mathématique, pour réduire la quantité de données tout en conservant l'essentiel des détails visuels.

Cette méthode permet d'envoyer des images plus rapidement tout en minimisant la perte de qualité.

Trois éléments clés sont utilisés : La matrice d'image, la décomposition SVD, et la réduction du rang.

Qu'est-ce qu'une Matrice d'Image ?

Une image peut être représentée comme une matrice où chaque élément de la matrice correspond à un pixel de l'image, et la valeur de ce pixel indique son intensité lumineuse.

10	70	20
60	80	40
30	90	50

Cette petite matrice 3x3 représente une image simplifiée, où les chiffres indiquent l'intensité des pixels (exemple : en niveaux de gris).

La Décomposition en Valeurs Singulières (SVD)

La SVD est une méthode de factorisation matricielle qui décompose la matrice A représentant l'image en trois matrices :

$$A = U\Sigma V^T$$

- U : Contient les vecteurs singuliers à gauche de A (information sur les lignes de l'image).
- Σ : Matrice diagonale avec les valeurs singulières (mesure de l'importance des composantes).
- V^T : Contient les vecteurs singuliers à droite de A (information sur les colonnes de l'image).

Que sont les valeurs singulières ? : Les valeurs singulières d'une matrice A sont les racines carrées des valeurs propres de la matrice symétrique $A^T A$. U et V sont des vecteurs propres à gauche et à droite de $A^T A$.

Exemple Simple : Matrice 3x3

Soit la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 70 & 20 \\ 60 & 80 & 40 \\ 30 & 90 & 50 \end{pmatrix}$$

La SVD de cette matrice est : $A = U\Sigma V^T$ avec :

$$U = \begin{pmatrix} -0.4249 & 0.6406 & -0.6396 \\ -0.6365 & -0.7138 & -0.2921 \\ -0.6436 & 0.2830 & 0.7111 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 165.52 & 0 & 0 \\ 0 & 30.94 & 0 \\ 0 & 0 & 12.11 \end{pmatrix},$$

$$V^T = \begin{pmatrix} -0.3731 & -0.8373 & -0.3996 \\ -0.9029 & 0.4268 & -0.0514 \\ -0.2136 & -0.3416 & 0.9152 \end{pmatrix}$$

Analyse des Valeurs Singulières :

- 165.52 : La plus grande valeur singulière, elle représente la composante la plus importante de l'image.
- 30.94 : Moins importante, mais toujours significative.
- 12.11 : Très petite, sa contribution à l'image est minime

Interprétation : La majeure partie de l'information de l'image est capturée par les premières valeurs singulières. Les plus petites peuvent être ignorées pour la compression.

Réduction du Rang et Compression

Pour compresser l'image, nous pouvons réduire la matrice Σ en ne conservant que les valeurs singulières les plus importantes.

$$\Sigma_k = \begin{pmatrix} 165.52 & 0 & 0 \\ 0 & 30.94 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En reconstruisant l'image avec cette matrice réduite :

$$A_k = U\Sigma_k V^T = \begin{pmatrix} 8.35 & 67.36 & 27.09 \\ 59.25 & 78.79 & 43.24 \\ 31.84 & 92.94 & 42.12 \end{pmatrix}$$

Cette matrice A_k est une approximation de l'image originale, mais avec moins d'information, ce qui permet de réduire sa taille.

Pourquoi ça Marche ?

La compression via SVD fonctionne parce que la plupart des images ont des redondances, c'est-à-dire que certaines parties de l'image sont très similaires.

En éliminant les composantes moins importantes (les petites valeurs singulières), on supprime ces redondances, ce qui permet de réduire la taille du fichier tout en maintenant une qualité acceptable.

Remarque : La qualité de l'image compressée dépend du nombre de valeurs singulières conservées. Plus on en garde, meilleure sera la qualité, mais la taille du fichier sera plus grande.

Conclusion

La compression d'image via la SVD montre comment les mathématiques permettent d'optimiser le transfert d'images dans des applications comme WhatsApp. En se concentrant sur les valeurs singulières les plus significatives, il est possible de réduire considérablement la taille des fichiers sans trop affecter la qualité visuelle.

Si vous avez trouvé cette application des maths utile et intéressante, n'oubliez pas de liker et de vous abonner à **Clotilde Djuikem** sur LinkedIn et Tioh Academy sur Youtube !