METODO DE NEWTON

- Este método es uno de los más usados y efectivos.

- A diferencia de los métodos anteriores, el método de Newton-Raphson no trabaja sobre un intervalo sino que basa su fórmula en un proceso iterativo.

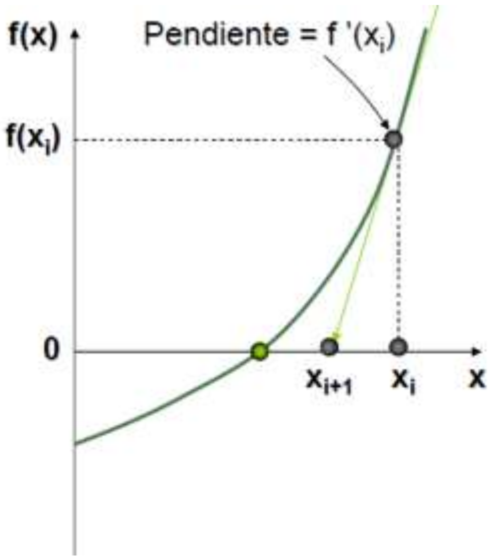
A partir de la expansión en series de Taylor, se tiene:

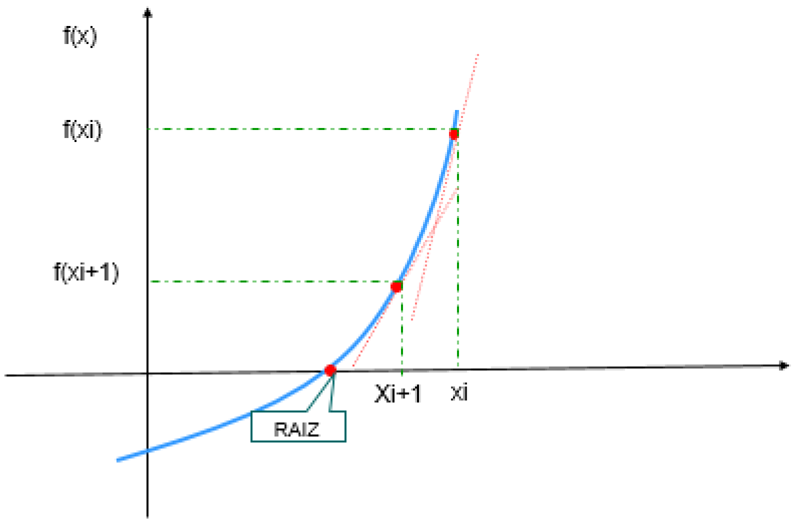
$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - 0}{x_i - x_{i+1}}$$

que se reordena para obtener

$$\boxed{x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}}$$

la cual se conoce como fórmula De Newton Raphson





Convergencia

TEOREMA

- **$f : [a,b] \rightarrow R$ de clase C^2 ([a,b])** Existe su 2da derivada y es continua
- **$f(a) \cdot f(b) < 0$**
- **$f'(x) \neq 0 \quad \forall\ x \in\ ]a,b[$**
- **$f''(x) \neq 0 \quad \forall\ x \in\ ]a,b[$**

Si tomamos un valor inicial x_0 tal que $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$ las sucesivas aproximaciones del Método de Newton-Raphson convergen a la raíz.

- **Ejemplo 1**
  Usar el método de Newton-Raphson, para aproximar la raíz de $f(x) = e^{-x} - \ln x$, comenzando con $x_0 = 1$ y hasta que $|\epsilon_a| < 1\%$
- ***Solución***
  En este caso, tenemos que

$$f'(x) = -e^{-x} - \frac{1}{x}$$

- De aquí tenemos que: $$x_{i+1} = x_i - \frac{e^{-x_i} - \ln(x_i)}{-e^{-x_i} - \frac{1}{x_i}} = x_i + \frac{e^{-x_i} - \ln(x_i)}{e^{-x_i} + \frac{1}{x_i}}$$
- Comenzamos con $X_0=1$ y obtenemos:

$$x_1 = x_0 + \frac{e^{-x_0} - \ln(x_0)}{e^{-x_0} + \frac{1}{x_0}} = 1.268941421$$

- En este caso, el error aproximado es,
- Continuamos el proceso hasta reducir el error aproximado hasta donde se pidió.

$$|\epsilon_a| = \left| \frac{1.268941421 - 1}{1.268941421} \times 100\% \right| = 21.19\%$$

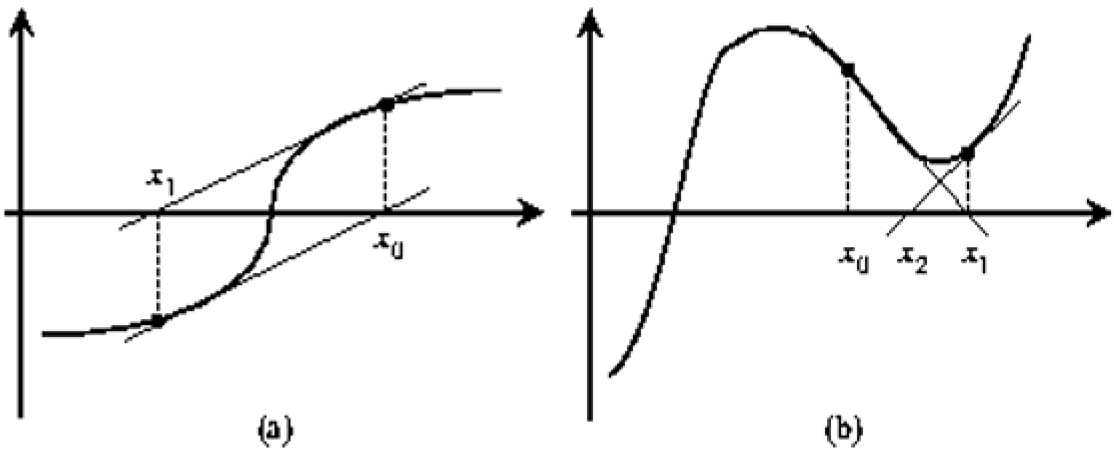
Resumimos los resultados en la siguiente tabla:

Aprox. a la raíz	Error aprox.
1	
1.268941421	21.19%
1.309108403	3.06%
1.309799389	0.052%

De lo cual concluimos que la aproximación obtenida es: $x_3 = 1.309799389$

Nota:

El método de Newton es muy rápido y eficiente ya que la convergencia es de tipo cuadrático (el número de cifras significativas se duplica en cada iteración). Sin embargo, la convergencia depende en gran medida de la forma que adopta la función en las proximidades del punto de iteración. En la figura (2) se muestran dos situaciones en las que este método no es capaz de alcanzar la convergencia (figura (2a)) o bien converge hacia un punto que no es un cero de la ecuación (figura (2b)).



Dos situaciones en las que el método de Newton no funciona adecuadamente: (a) el método no alcanza la convergencia y (b) el método converge hacia un punto que no es un cero de la ecuación.

Ejemplo

Dada $f(x)=x\,e^x-2$. Aproxima la raíz de la ecuación $f(x)=0$ en el intervalo [0,2] por el método de Newton-Raphson con tres iteraciones.

¿Es adecuado escoger por ejemplo $c_0=1.5$? $\longrightarrow$ Sí, se cumplen las hipótesis del teorema anterior.

<u>1ª ITERACIÓN</u>

$$c_1=1.5-\frac{f(1.5)}{f'(1.5)}=\frac{1.5\,e^{1.5}-2}{2.5\,e^{1.5}}=\boxed{1.078}$$

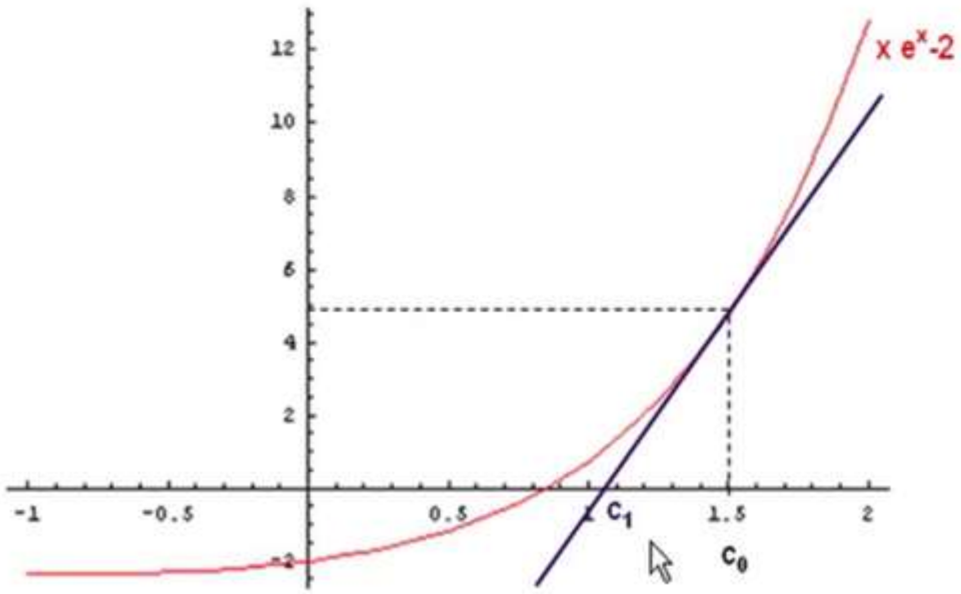
<u>2ª ITERACIÓN</u>

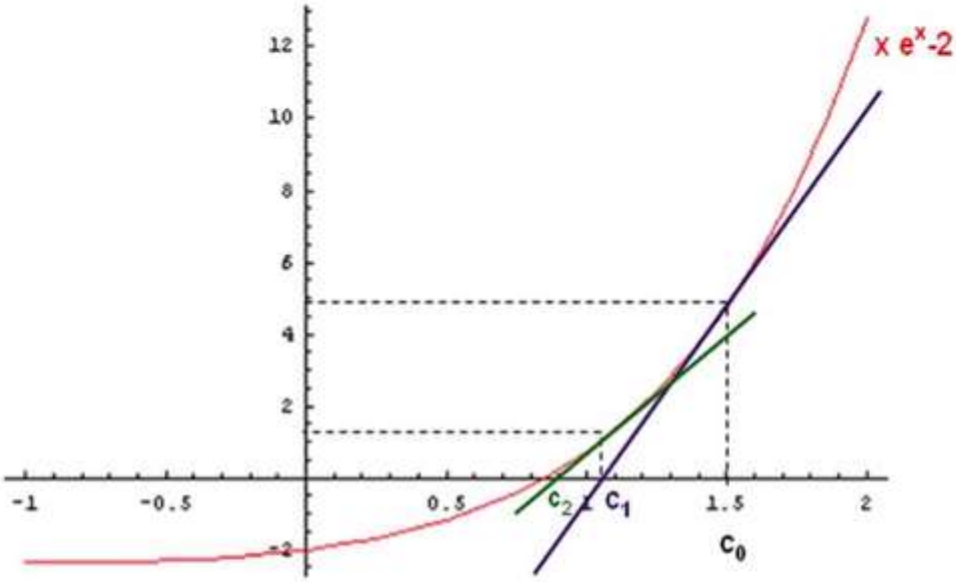
$$c_2=1.078-\frac{f(1.078)}{f'(1.078)}=\frac{1.078e^{1.078}-2}{2.078\,e^{1.078}}=\boxed{0.887}$$

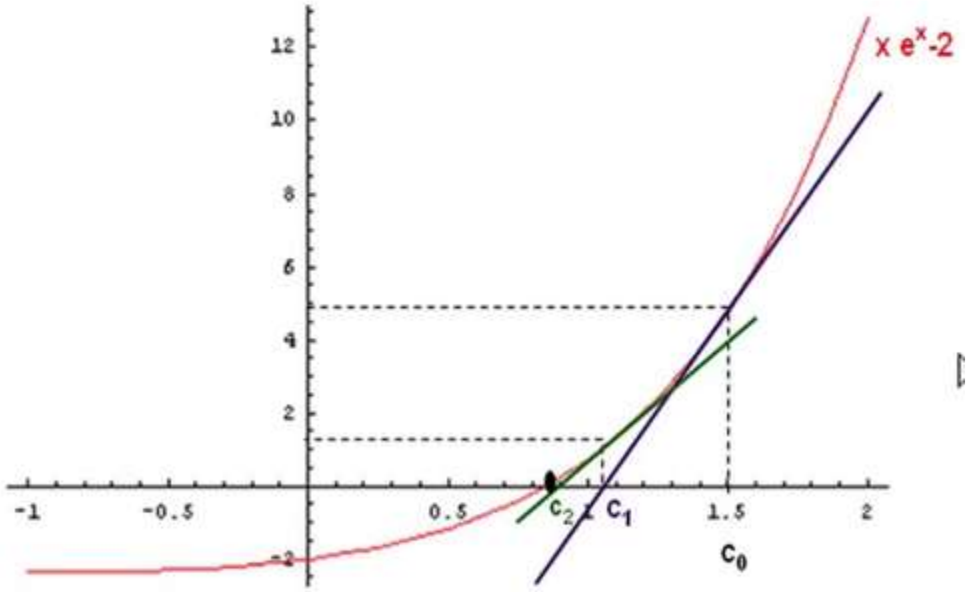
<u>3ª ITERACIÓN</u>

<u>EXACTA</u> $\boxed{c=0.854}$

$$c_3=0.887-\frac{f(0.887)}{f'(0.887)}=\frac{0.887e^{0.887}-2}{1.887\,e^{0.887}}=\boxed{0.854}$$







Desventajas:

- Lenta convergencia debida a la naturaleza de una función en particular.
- Cuando un punto de inflexión, $f''(x) = 0$, ocurre en la vecindad de una raíz.
- No existe un criterio general de convergencia.
- Tener un valor suficientemente cercano a la raíz.
- Apoyarse de herramientas gráficas.
- Conocimiento del problema físico.
- Evaluación de la derivada.