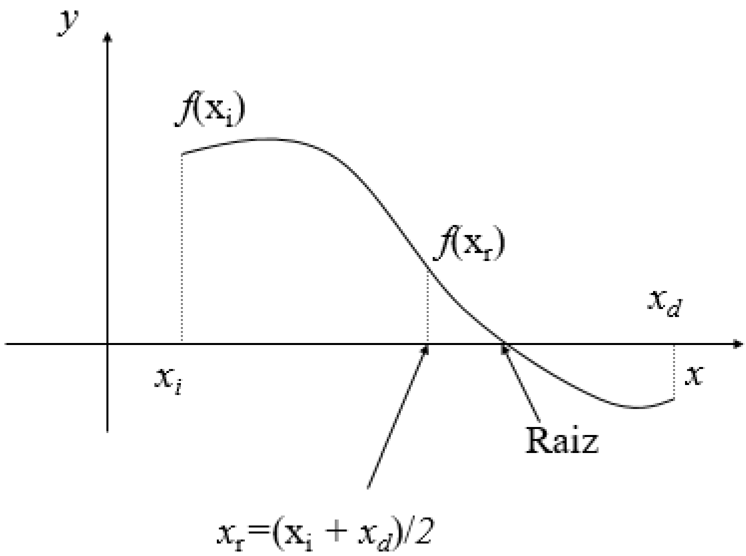
METODO DE LA BISECCIÓN



En este método suponemos que f es una función continua definida en el intervalo [xi, xd] con f(xi) y f(xd) con signos diferentes.

Tomando en cuenta el teorema del valor medio, existe un número p ∈ [xi, xd] tal que f (p) = 0.

- Por razones de simplicidad, asumamos que la raíz en este intervalo es real y única.

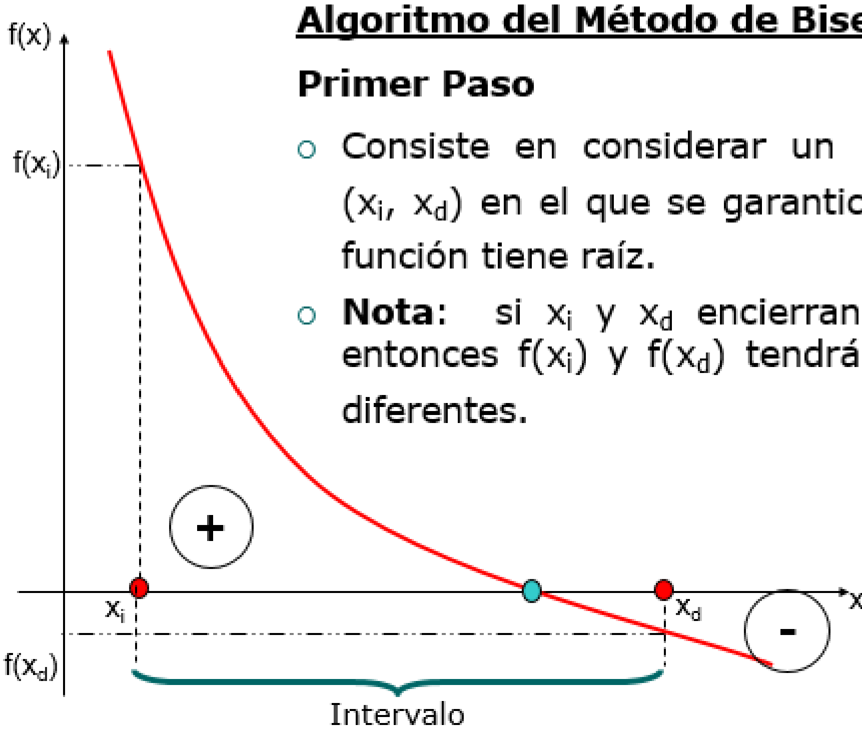
El método requiere dividir varias veces a la mita el intervalo [xi, xd] y en cada paso localizar la mitad que contenga a p.

Si f(p1) = 0, entonces p1 = p; de no ser así, si f(p1) tiene el mismo signo que f(xi), entonces p ∈ (p1, xd); si f(p1) tiene el mismo signo que f(xd), entonces p ∈ (xi, p1); y aplicamos el mismo procedimiento a este nuevo intervalo.

Algoritmo del Método de Bisección

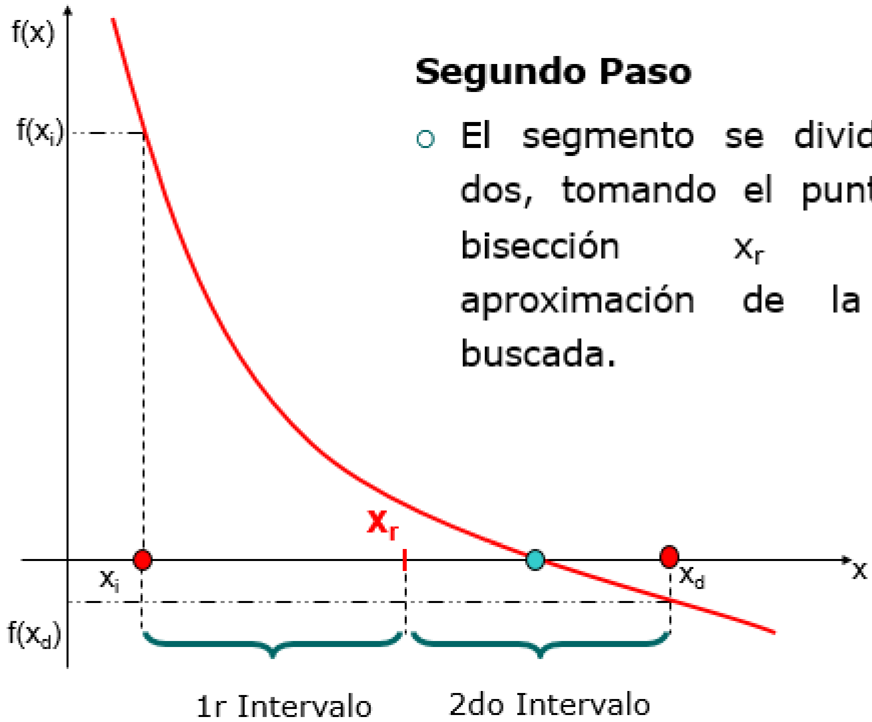
Primer Paso

- Consiste en considerar un intervalo (x_i, x_d) en el que se garantice que la función tiene raíz.
- **Nota**: si x_i y x_d encierran la raíz, entonces $f(x_i)$ y $f(x_d)$ tendrán signos diferentes.



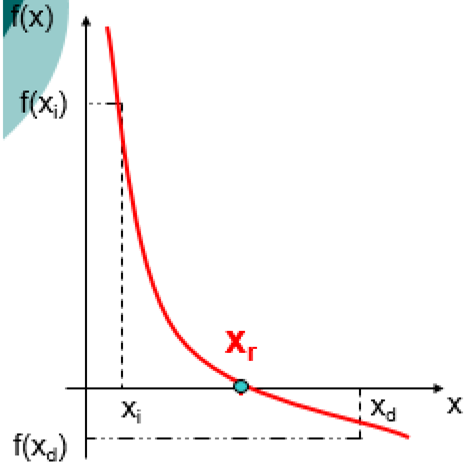
Segundo Paso

- El segmento se divide en dos, tomando el punto de bisección x_r como aproximación de la raíz buscada.

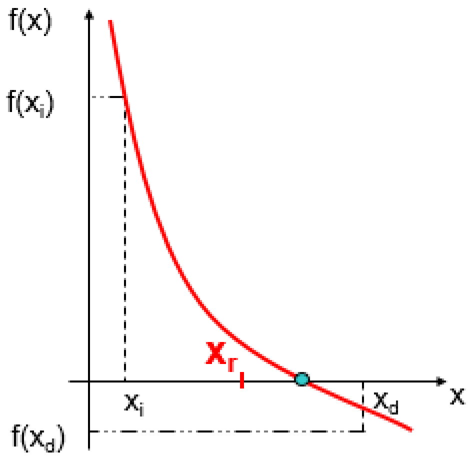


Tercer Paso

- Si x_r es la raíz buscada - $f(x_r)=0$ – fin de proceso;
- Si no, determinar en cual de las dos mitades se encuentra la raíz



$f(x_r)=0$
x_r – solución

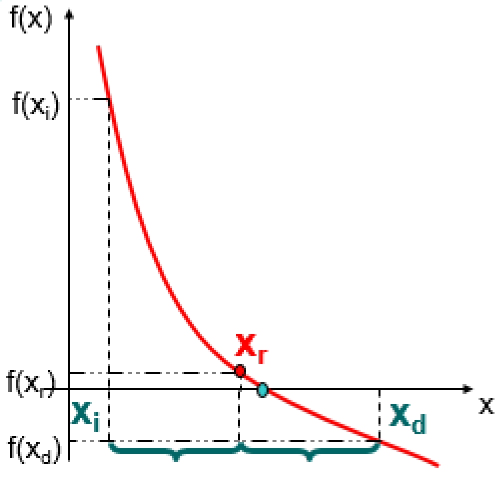


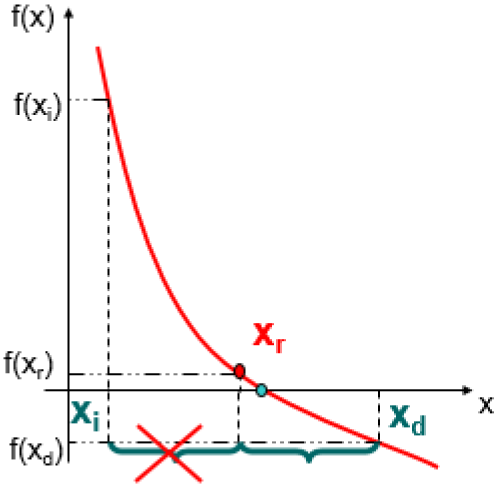
$f(x_r)\neq 0$
xr – no es una solución

- si $f(x_r)$ y $f(x_i)$ tienen el mismo signo, entonces $x_i=x_r$
- si $f(x_r)$ y $f(x_d)$ tiene signos opuestos, entonces $x_d=x_r$

$f(x_i)$	$f(x_d)$	$f(x_r)$
+	-	+

$$X_i = X_r$$





Criterios de paro y estimaciones de errores

- Un criterio objetivo de definir cuándo un método numérico debe terminar, es estimar el error de forma tal que no se necesite el conocimiento previo de la raíz. Como se estudió previamente, se puede calcular el error relativo porcentual ε_a de la siguiente manera

$$\varepsilon_a = \left| \frac{x_r^{nuevo} - x_r^{anterior}}{x_r^{nuevo}} \right|$$

- Cuando ε_a es menor que un valor previamente fijado ε_s, termina el cálculo.

Número de iteraciones

El error absoluto en la primera iteración es:

$$E_a^0 = x_b^0 - x_a^0 = \Delta x^0$$

El error absoluto en la iteración n-ésima es:

$$E_a^n = \frac{\Delta x^0}{2^n}$$

Si el error deseado es E_{ad}, El número de iteraciones será:

$$n = \frac{\log\left(\Delta x^0 / E_{ad}\right)}{\log 2} = \log_2\left(\frac{\Delta x^0}{E_{ad}}\right)$$

Criterios de paro y estimación de errores

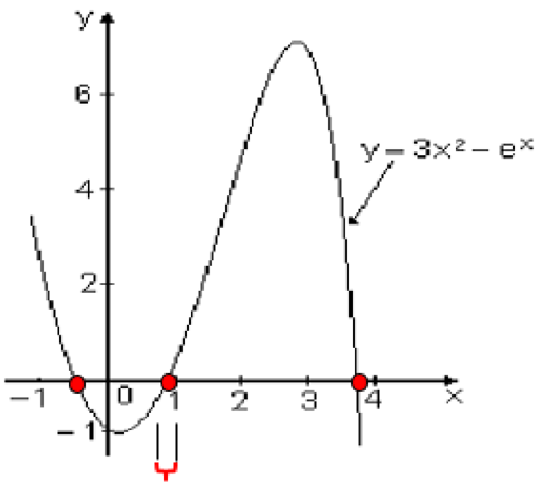
- Numero máximo de iteraciones

$$n = \log_2\left(\frac{\Delta x^0}{Tol}\right)$$

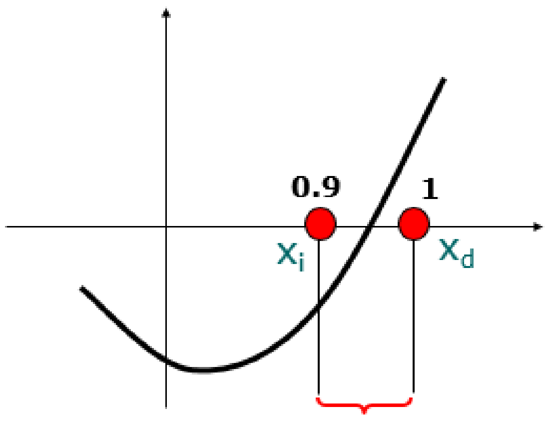
  - donde $\Delta x^0 = x_d - x_i$ (en la primera iteración)

Ejemplo:

- $3x^2 - e^x = 0$
- usemos el método de Bisección para encontrar la segunda raíz en el intervalo [0.9; 1.0].

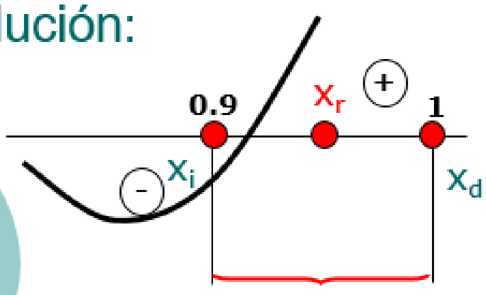


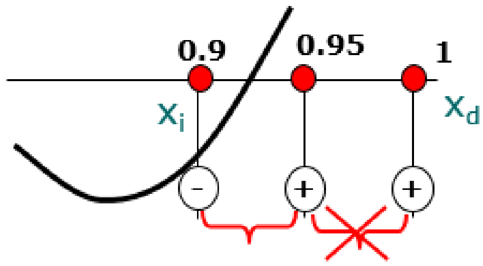
Intervalo 0.9 – 1.0



Intervalo 0.9 – 1.0

Solución:





n	x_i	x_d	x_r	$f(x_i)$	$f(x_d)$	$f(x_r)$
1	0.9	1.0	0.95	-0.0296 -	**0.2817** +	**0.1218** +
2	0.9	0.95	0.925	-0.0296	0.1218	$4.50*10^{-2}$

Resultados

n	x_i	x_d	x_r	$f(x_i)$	$f(x_d)$	$f(x_r)$
1	0.9	1.0	0.95	-0.0296 -	**0.2817** +	**0.1218** +
2	0.9	0.95	0.925	-0.0296	0.1218	$4.50*10^{-2}$
3	0.9	0.925	0.9125	-0.0296	$4.50*10^{-2}$	$7.42*10^{-3}$
4	0.9	0.9125	0.90625	**-0.0296**	$7.42*10^{-3}$	$\mathbf{-1.11*10^{-2}}$
5	0.90625	0.9125	0.909375	$-1.11*10^{-2}$	$7.42*10^{-3}$	$-1.88*10^{-3}$
6	0.909375	0.9125	0.9109375	$-1.88*10^{-3}$	$\mathbf{7.42*10^{-3}}$	$\mathbf{2.76*10^{-3}}$
7	0.909375	0.9109375	0.9101563	$2.76*10^{-3}$	$7.42*10^{-3}$	$4.42*10^{-4}$
8	0.909375	0.9101563	**0.9097656**	$2.76*10^{-3}$	$4.42*10^{-4}$	$-7.19*10^{-4}$