Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Occidente

Materia: Finanzas Cuantitativas

Tarea 2: Estimación de Parámetros Máxima Verosimilitud

Fecha:
31 de mayo de 2021

Profesor:
José Mario Zárate
Departamento de Matemáticas y Física

Grupo:
Bryan Juárez
Rubén Hernández
Juan Pablo Ruiz

1. Estimación de Parámetros de la Función de Máxima Verosimilitud

https://en.wikipedia.org/wiki/Bernoulli_distribution

$$f(k;p) = \begin{cases} p & \text{si } k = 1, \\ q = 1 - p & \text{si } k = 0. \end{cases}$$

https://en.wikipedia.org/wiki/Poisson_distribution

$$p(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k \in N$$

1.1. Estimación del parámetro p correspondiente a la distribución de Bernoulli.

Establecemos nuestra Hipótesis Nula.

- H_0: Nuestra variable aleatoria distribuye como una bernoulli.

De manera que nuestra hipótesis nula la representamos así:

- $H_0 : x_i \sim bernoulli$

Recordando la función de densidad de bernoulli:

$$f(x) = p^x(1-p)^{1-x}$$

Definimos nuestra función Verosimilitud.

$$L(x,p) = \prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}$$

**Utilizando la propiedad de la suma de exponentes,
obtenemos la siguiente expresión simplificada.**

$$L(x,p) = p^{n\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p)^{n\sum_{i=1}^{n} 1-x_i}$$

Aplicamos logaritmo en ambos lados para simplificar aún más la expresión.

$$lnL(x,p) = ln[p^{n\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p)^{n\sum_{i=1}^{n} 1-x_i}]$$

Aplicamos propiedades de los logaritmos.

$$lnL(x,p) = ln[p^{n\sum_{i=1}^{n} x_i}] + ln[(1-p)^{n\sum_{i=1}^{n} 1-x_i}]$$

Aplicamos propiedades de los exponentes.

$$lnL(x,p) = n\sum_{i=1}^{n} x_i ln[p] + n\sum_{i=1}^{n} 1 - x_i ln[1-p]$$

Optimizamos nuestra función Verosimilitud, es decir, maximizaremos respecto al parámetro deseado. Para esto utilizaremos la condición de primer orden.

Derivamos parcialmente respecto a *p* e igualamos a cero.

$$\frac{\partial L}{\partial p} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial p} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i}{p} - \frac{n\sum_{i=1}^{n} 1 - x_i}{1-p}$$

$$\frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i}{p} - \frac{n\sum_{i=1}^{n} 1 - x_i}{1-p} = 0$$

Despejamos y resolvemos la expresión algebraicamente.

$$\frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i}{p} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} 1 - x_i}{1-p}$$

$$\frac{1-p}{p} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} 1 - x_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$\frac{1-p}{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} 1}{\sum_{i=1}^{n} x_i} - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$\frac{1}{p} - 1 = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} - 1$$

Finalmente, obtenemos que el mejor estimador del parámetro *p*, es:

$$p = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$