UNIREMINGTON®
CORPORACIÓN UNIVERSITARIA REMINGTON
RES. 2661 MEN JUNIO 21 DE 1996

Modelos de simulación

Módulo de Aprendizaje

Ingeniería de Sistemas de la Facultad de Ciencias Básicas e Ingenierías

2024

Primera edición
2024

Modelos de simulación
John Fredy Mira Mejía
Ciencias básicas e ingeniería

Comité académico

Jorge Mauricio Sepúlveda Castaño
Decano de la Facultad de Ciencias Básicas e Ingeniería
jsepulveda@uniremington.edu.co

Francisco Javier Álvarez Gómez
Coordinador de Modalidad Virtual
falvarez@uniremington.edu.co

Juan Carlos Blanco Rodríguez
Analista Pedagógico Instruccional
jblanco@uniremington.edu.co

Edición y Montaje
Dirección de Educación a Distancia y Virtual
Equipo de diseño gráfico

www.uniremington.edu.co
virtual@uniremington.edu.co

TABLA DE CONTENIDO

Pág.

1 PROPÓSITO GENERAL

1.1 PROPÓSITOS DE FORMACIÓN DE LA ASIGNATURA

El propósito de formación de la asignatura es capacitar a los estudiantes en la resolución de problemáticas reales que pueden ser modeladas matemáticamente. A través del uso de técnicas de simulación, se busca que los estudiantes adquieran la habilidad para encontrar soluciones efectivas a dichos problemas. Se resalta la importancia de obtener resultados precisos y coherentes, reconociendo que, en los modelos de simulación, la exactitud y consistencia de los datos son fundamentales para validar los resultados obtenidos.

Además, se promueve la aplicación de estos métodos en una diversidad de áreas, preparando así a los estudiantes para afrontar los desafíos tecnológicos del futuro. Este enfoque asegura que los estudiantes estén equipados para abordar problemáticas en campos que requieren el uso de modelos de simulación, destacando la relevancia de estas habilidades en la resolución de problemas complejos en diferentes sectores empresariales.

1.2 OBJETO DE ESTUDIO

El objeto de estudio de la teoría de modelos de simulación abarca diversas temáticas fundamentales en ingeniería y ciencias aplicadas. Una de estas áreas es la teoría general de sistemas, que proporciona un marco conceptual para comprender la estructura y el comportamiento de sistemas complejos. Los modelos de simulación se utilizan para representar y analizar sistemas dinámicos en diversas disciplinas.

Dentro de la teoría de modelos de simulación, se examina también la generación de números aleatorios, que es crucial para simular la aleatoriedad inherente a muchos procesos reales. La capacidad de generar secuencias de números que se comporten de manera similar a variables aleatorias reales es esencial para la validez de los resultados de la simulación.

Un modelo clásico común es el enfocado en la teoría de colas, que se ocupa del estudio matemático de líneas de espera o colas. Los modelos de simulación se utilizan para analizar y optimizar el rendimiento de sistemas de colas en una amplia gama de aplicaciones, desde centros de atención al cliente, sistemas de transporte, telecomunicaciones, entre otros.

La teoría de inventarios es otro modelo clásico relevante en el estudio de modelos de simulación. Esta área se centra en la gestión eficiente de inventarios, considerando factores como la demanda, los costos de almacenamiento y los tiempos de entrega. Los modelos de simulación permiten evaluar diferentes políticas de inventario y prever su impacto en el desempeño operativo y financiero de una organización.

1.3 FORMULACIÓN DE LOS RESULTADOS DE APRENDIZAJE POR ASIGNATURA

(RA) POR ASIGNATURA	Diseñar y construir modelos de simulación que reproduzcan de manera precisa el comportamiento dinámico de sistemas informáticos en diferentes escenarios.
	Interpretar y comunicar los resultados obtenidos a partir de la simulación de sistemas informáticos, proporcionando información relevante para la toma de decisiones en proyectos de ingeniería.

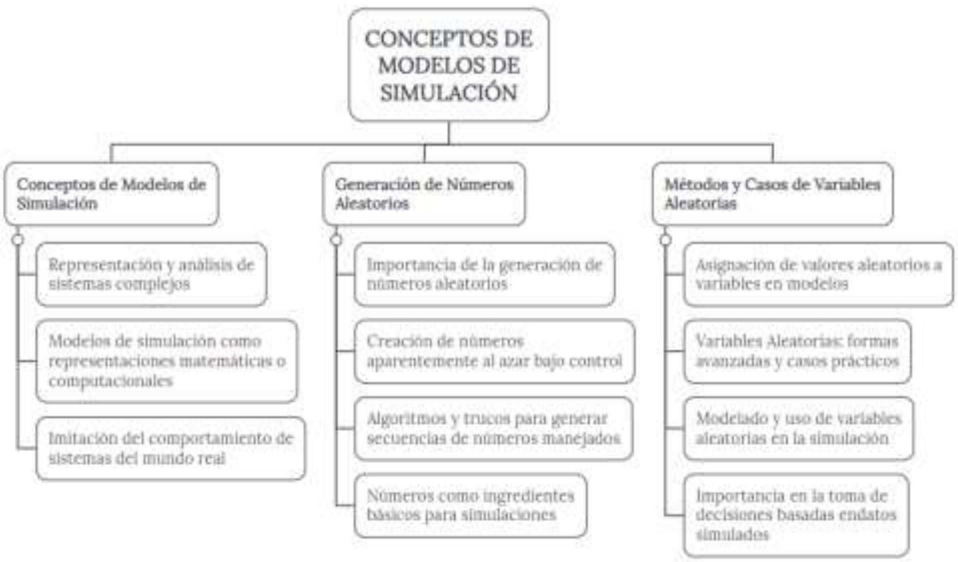
Comentado [JB1]: Tal como lo indica el título, en este aparte solo se debe consignar el Resultado de aprendizaje por Asignatura

Comentado [JM2R1]: Ok

2 UNIDAD 1 CONCEPTOS DE MODELOS DE SIMULACIÓN Y NÚMEROS ALEATORIOS

2.1 RELACIÓN DE CONCEPTOS

2.1.1 Mapa Mental o Conceptual



2.1.2 Conceptos claves

Modelos de simulación: Representaciones matemáticas o computacionales que imitan sistemas reales.

Representación y análisis de sistemas complejos: Descripción y comprensión de sistemas complicados a través de modelos para su simulación.

Simulación matemática: Uso de ecuaciones y modelos matemáticos para simular fenómenos del mundo real.

Simulación computacional: Aplicación de técnicas y algoritmos computacionales para imitar sistemas reales.

Generación de números aleatorios: Creación de secuencias de números aparentemente al azar pero controlados.

Importancia en simulaciones realistas: Reconocimiento de la relevancia de generar datos aleatorios para simulaciones efectivas.

Números aparentemente al azar bajo control: Creación de secuencias de números que parecen aleatorios, pero siguen un patrón definido.

Algoritmos y trucos para generar secuencias de números manejados: Métodos para crear números aleatorios de manera controlada.

2.2 DESARROLLO TEMÁTICO

2.2.1 TEMA 1 CONCEPTOS DE MODELOS DE SIMULACIÓN

> "La simulación nos brinda el poder de experimentar con el futuro, modelando sistemas complejos para comprender sus dinámicas y tomar decisiones más acertadas en la realidad." - Herbert A. Simon

2.2.1.1 SISTEMA Y SU REPRESENTACIÓN

Un sistema se define como una colección de entidades que interactúan para lograr un fin común. Su análisis implica comprender las relaciones entre componentes y prever comportamientos futuros. Se puede clasificar en sistemas discretos o continuos según los cambios en las variables de estado.

Representación de un sistema

Propiedades de los sistemas:

> ***Sinergia.*** Con los componentes y su interrelación se consigue más que lo que en principio resultaría de la simple suma de los componentes.
>
> ***Entropía.*** Refleja el grado de desorden del sistema. Se puede reducir la entropía ingresando información al sistema.
>
> ***Equilibrio homeostático.*** Equilibrio dinámico que mantiene los valores dentro de un rango establecido.

Cuando no es práctico experimentar directamente con el sistema, se recurre a modelos. Estos son representaciones que imitan operaciones de sistemas reales a lo largo del tiempo. Los modelos facilitan la comprensión, predicción y mejora de sistemas. Se construyen iterativamente mediante la identificación de relaciones dinámicas, formulación, validación y diseño de políticas.

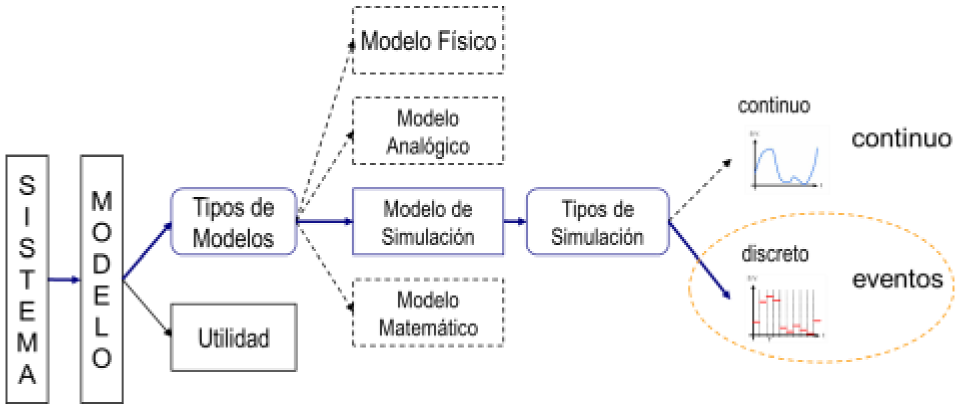
2.2.1.2 TIPOS DE MODELOS

Algunas definiciones de modelos son las siguientes:

- Es una abstracción de la realidad.
- Es una representación de la realidad que ayuda a entender su composición y/o funcionamiento.
- Es una construcción intelectual y descriptiva de una entidad en la que un observador tiene interés.
- Se construye para transmitirse.
- Se emplean supuestos simples para restringirse a lo que se considera relevante y evitar lo que no.

Los modelos se clasifican en diferentes aspectos: según su estática o dinámica, determinismo o probabilístico, discreto o continuo, prescriptivo o descriptivo y de realimentación. La simulación se aplica en experimentación, predicción, comprensión y toma de decisiones en diversos campos como manufactura, informática, militar, medio ambiente y economía.

Clasificación de los modeos



Veamos a continuación la definición de cada tipo:

1. **Estática vs. Dinámica:**

   Modelos Estáticos: son representaciones de una situación o estado específico en un momento determinado, sin tener en cuenta su evolución a lo largo del tiempo. Estos modelos capturan la estructura o características de un sistema en un instante fijo, sin considerar cómo cambian esas características con el tiempo. Por ejemplo, podrían describir la distribución de edades de una población en un momento específico, sin tomar en cuenta el envejecimiento o el crecimiento de la población a lo largo del tiempo.

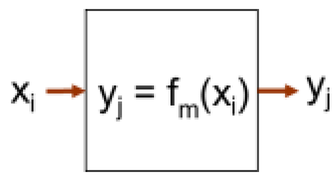
   Modelos Dinámicos: se centran en el desarrollo de una situación a lo largo del tiempo, capturando tanto el cambio como la interacción entre las variables a medida que transcurre el tiempo. Por ejemplo, un modelo dinámico podría simular el crecimiento de una población durante varios años, teniendo en cuenta cómo las variables asociadas con el crecimiento demográfico evolucionan con el paso del tiempo. En estos modelos, el tiempo desempeña un papel esencial en la variación de las variables del sistema, lo que permite comprender mejor su dinámica y evolución temporal.

$$f\,(nT)\;\neq\;f\,(\,n(T+1))$$

2. **Determinista vs. Probabilístico:**

   Modelos Deterministas: Utilizan relaciones matemáticas precisas para predecir resultados. Estos modelos no tienen en cuenta la aleatoriedad o incertidumbre en las entradas y condiciones iniciales. Por ejemplo, un modelo determinista podría predecir el tiempo de llegada de un tren en función de la velocidad y la distancia. Ante entradas fijas se producen las mismas salidas.

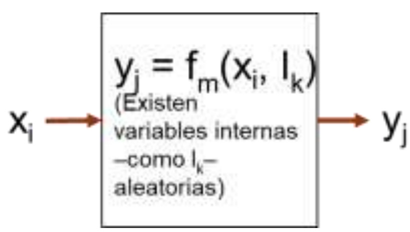
Se dice que el modelo es determinista si el estado de la variable en el siguiente instante de tiempo se puede determinar con los datos del estado actual.



Su solución de determina mediante métodos numéricos o algún método de resolución analítica.

Modelos Probabilísticos: Consideran la incertidumbre y la variabilidad en las entradas y condiciones iniciales. Estos modelos utilizan distribuciones de probabilidad para modelar eventos aleatorios. Por ejemplo, un modelo probabilístico podría simular el tiempo de llegada de los clientes a un banco, teniendo en cuenta la variabilidad en sus patrones de llegada. Contienen uno o más parámetros (variables endógenas) aleatorios. Las mismas entradas pueden ocasionar salidas diferentes.

Si el estado de la variable en el siguiente instante de tiempo no se puede determinar con los datos del momento actual



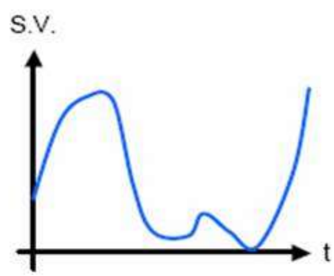
Su solución se determina mediante un método analítico, usando técnicas de probabilidades para determinar la curva de distribución de frecuencias

3. Continuo vs. Discreto:

Modelos Continuos: Modelan sistemas en los que las variables pueden tomar cualquier valor dentro de un rango continuo. Por ejemplo, un modelo continuo podría simular el flujo de tráfico en una autopista. El modelo permite que los estados del sistema cambien en cualquier momento.

El estado de las variables cambia de forma continua a lo largo del tiempo

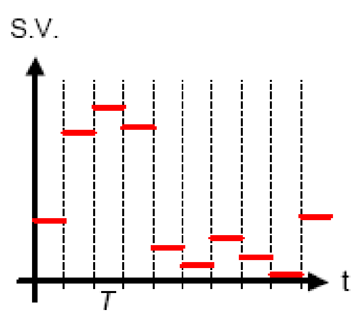
Salida de un sistema continuo



Modelos Discretos: Modelan sistemas en los que las variables solo pueden tomar valores específicos y discretos. Por ejemplo, un modelo discreto podría simular el número de clientes que entran a una tienda en intervalos de tiempo discretos. Los cambios de estado del sistema se dan en momentos discretos del tiempo.

El estado del sistema cambia en tiempos discretos del tiempo

Salida de un sistema discreto



4. **Prescriptivo vs. Descriptivo:**

   Modelos Prescriptivos: Son modelos que prescriben cómo deberían comportarse las variables en una situación dada. Estos modelos se utilizan para tomar decisiones y optimizar resultados. Por ejemplo, un modelo prescriptivo podría recomendar la cantidad óptima de inventario a mantener en una empresa.

   Modelos Descriptivos: Son modelos que describen cómo se comportan las variables en una situación dada sin necesariamente ofrecer recomendaciones para la acción. Estos modelos se utilizan para comprender y analizar sistemas. Por ejemplo, un modelo descriptivo podría analizar el impacto de diferentes políticas de impuestos en la economía.

5. **Con Realimentación:**

   Los modelos con realimentación son aquellos que incorporan la retroalimentación o retroacción de la salida de un sistema de vuelta a sus entradas. Esto puede influir en la dinámica del sistema y producir comportamientos complejos y no lineales. Por ejemplo, un modelo de control de temperatura en un horno que ajusta la entrada de energía en función de la temperatura medida es un modelo con realimentación.

Solución Analítica vs. Simulación

La solución analítica ofrece soluciones cerradas y óptimas, pero puede basarse en suposiciones poco realistas. La simulación es útil para sistemas complejos, experimentación sin alterar sistemas reales y para problemas sin solución analítica. Sin embargo, puede ser compleja, requiere tiempo y puede ser difícil validar el modelo.

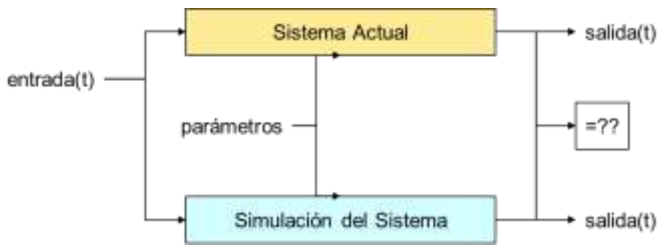
2.2.1.3 SIMULACIÓN

Es la construcción de modelos, usualmente informáticos, que describen la parte que se considera esencial del comportamiento de un sistema de interés, así como diseñar y realizar experimentos con este modelo y extraer conclusiones de sus resultados para apoyar la toma de decisiones.

Se usa como un paradigma para analizar sistemas complejos. La idea es obtener una representación simplificada de algún aspecto de interés de la realidad.

Permite experimentar con sistemas (reales o propuestos) en casos en los que de otra manera esto no sería práctico, o bien demasiado costoso o incluso imposible.

Comparativo salidas sistema real y sistema simulado



Respecto a la comparación de las salidas, tenemos que:

- La simulación del sistema imita la operación del sistema actual sobre el tiempo.
- La historia artificial del sistema puede generarse, observarse y analizarse.
- La escala de tiempo puede alterarse según la necesidad.
- Las conclusiones acerca de las características del sistema actual se pueden inferir.

Cuando utilizar simulación

- No existe una completa formulación matemática del problema.
- Cuando el sistema aún no existe.
- Es necesario desarrollar experimentos, pero su ejecución en la realidad es difícil o imposible
- Se tiene interés en establecer un periodo de observación del experimento distinto del que se podría establecer en la realidad.
- No se puede interrumpir la operación del sistema actual.

Cuando no usar simulación

- El desarrollo del modelo de simulación requiere mucho tiempo.

- El desarrollo del modelo es costoso comparado con sus beneficios.
- La simulación es imprecisa y no se puede medir su imprecisión.
  - El análisis de sensibilidad puede ayudar en estos casos.

2.2.2 TEMA 2 GENERACIÓN DE NÚMEROS ALEATORIOS

"Fue Dios quien inventó los números, todo lo demás es obra del hombre, especialmente la generación de números aleatorios." - Leopold Kronecker

- **Video Introductorio:** https://www.youtube.com/watch?v=PuvIGYz5Ifk

Como hemos discutido previamente, la simulación de sistemas se presenta como una técnica numérica que realiza experimentos en una computadora digital, empleando modelos matemáticos y lógicos para representar el comportamiento de un sistema a lo largo del tiempo.

Antes de ver la generación de los números aleatorios, se dará un énfasis en el **Modelo de Simulación Discreta** como uno de los modelos más usados en contextos reales y productivos:

En el ámbito de la simulación discreta, se aborda el tiempo de manera finita, siendo particularmente relevante en modelos que representan líneas de espera. Estos modelos implican configuraciones de entrada, llegada de elementos de trabajo, y servidores en serie o paralelo que ofrecen servicios a los elementos.

Para construir modelos de simulación discreta, es esencial considerar sus elementos fundamentales, que incluyen:

- Elementos o componentes del sistema: Agentes, elementos, procesos y subprocesos que componen el sistema.
- Variables del sistema:
  - Exógenas: Independientes y predefinidas, influyen en la dinámica del sistema, pero están fuera de sus límites.
  - Estado: Describen el estado del sistema en el tiempo, siendo el conjunto mínimo necesario para su funcionamiento.
  - Endógenas: Dependientes, generadas por la interacción entre las variables internas del modelo.

- Parámetros: Elementos determinísticos y predefinidos en los modelos, que deben ser estimados para la operación específica de un modelo.

- Relaciones funcionales y lógicas: Vinculan las diversas variables del modelo, determinadas a partir de formulaciones matemáticas y componentes lógicos.

- Variables aleatorias: Transforman a variables aleatorias al cumplir tres características: a) surgen de una experimentación aleatoria, b) tienen asociada una distribución de probabilidad, c) varían en el tiempo.

Un ejemplo ilustrativo podría ser la simulación de la cola de vehículos en una estación de servicio, donde el tiempo entre llegadas de clientes y la duración del servicio son variables aleatorias con parámetros específicos. Este modelo discreto define las variables clave y el diagrama de flujo que establece la lógica de simulación del sistema.

Ahora si veremos lo que es la **Generación de Números Aleatorios.**

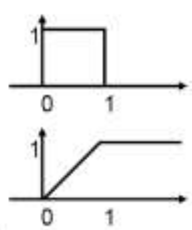
2.2.2.1 MÉTODOS DE GENERACIÓN DE NÚMEROS ALEATORIOS

En el contexto de la simulación, los valores observados en una muestra, representados como R_1, R_2, ..., R_n, extraídos de una distribución uniforme (0,1), son denominados números aleatorios. Estos números poseen características específicas, como la independencia estadística, una media que se espera sea exactamente 1/2, y una varianza que se espera sea 1/12, como se ilustra en la siguiente figura.

Propiedades de los números aleatorios.

$$f_R(r) = \begin{cases} 1 & r \in (0,1) \\ 0 & r \notin (0,1) \end{cases}$$

$$F_R(r) = \begin{cases} 0 & r \in (-\infty,0) \\ r & r \in (0,1) \\ 1 & r \in (1,\infty) \end{cases}$$



$$E[R] = \tfrac{1}{2}, \quad VAR[R] = \tfrac{1}{12}$$

En la creación de números aleatorios, generalmente se han desarrollado tres enfoques: los manuales, los mecánicos y los digitales. En los métodos manuales, los números se generan utilizando tómbolas y tablas. En los métodos mecánicos, la generación se realiza mediante la ruleta o lotería, con las ruedas de lotería siendo los primeros medios utilizados. Ambos métodos eran comunes antes del auge de las computadoras.

Con el tiempo, la necesidad de generar grandes cantidades de números aleatorios condujo al desarrollo de algoritmos y métodos basados en fórmulas recursivas. Sin embargo, estos métodos generan números pseudoaleatorios, ya que, aunque cumplen muchas pruebas de aleatoriedad, presentan la limitación de producir la misma serie de números con las mismas constantes y valores iniciales.

En la era digital, diversos métodos han surgido para la generación de números aleatorios, incluyendo la cuadrática de números intermedios, los congruenciales, generadores de registro de desplazamiento, generadores de fibonacci retardados, generadores no lineales, combinaciones de generadores y generadores paralelos de números aleatorios.

Es importante elegir cuidadosamente los parámetros a, c y m para garantizar que el generador produzca secuencias de números con buenas propiedades estadísticas, como uniformidad, independencia y aleatoriedad.

2.2.2.1.1 Método de los cuadrados centrales.

El algoritmo para la generación de números aleatorios por este método es el siguiente:

- Escogemos un número cualquiera y se obtiene el cuadrado del mismo.
- Del número obtenido tomamos los dígitos centrales.
- Dividimos este número por la potencia de 10 del número de dígitos centrales que se determina.

Ejemplo 1:

57^2=3249

24^2 = 576

76^2 = 5776

77^2= 5929

92^2= 8464

46^2 = 2116

11^2 = 121

21^2 = 441

Serie: n = {57, 24, 76, 77, 92, 46, 11, 21, 41}

Números: r = {0.57, 0.24, 0.76, 0.77, 0.92, 0.46, 0.11, 0.21,0.41}

2.2.2.1.2 Métodos congruenciales.

Es uno de los más comunes es el método de los generadores congruenciales lineales (LCG, por sus siglas en inglés). Este método utiliza una relación de recurrencia de la forma:

$$X_{n+1} = (aX_n + c) \ mod \ m$$

Donde:

- X_n es el número aleatorio en el paso n.
- a, c y m son constantes que determinan el comportamiento del generador.

Para obtener números aleatorios en el rango [0, 1), podemos normalizar los valores generados dividiéndolos por m.

En donde, los n_i son residuos módulo m. Como cada uno de los n_i es uno de los enteros $0, 1, 2, \ldots, m - 1$. Los candidatos a números pseudo-aleatorios, r_i , se obtienen de:

$$r_i = n_i/m$$

Dentro de los métodos congruenciales los de utilización más frecuente son los multiplicativos, los aditivos y los mixtos.

Los multiplicativos tienen la forma:

$$n_i \approx a * n_{i-1} \ (Modulo \ m)$$

Los aditivos tienen la forma:

$$n_i \approx n_{i-1} + n_{i-2} \ (Modulo \ m)$$

Los mixtos tienen la forma:

$$n_i \approx a * n_{i-1} + b \ (Modulo \ m)$$

Ejemplo: Sea $n_i \approx a * n_{i-1} + b$ módulo $M = 100$

$n_0 = 7$, $a = 13$, $b = 5$, entonces:

$n_1 \approx 13*7 + 5 = 96$	módulo $100 \rightarrow n_1 = 96$,	donde $r_1 = 96/100 = 0.96$
$n_2 \approx 13*96 + 5 = 1253$	módulo $100 \rightarrow n_2 = 53$,	donde $r_2 = 53/100 = 0.53$
$n_3 \approx 13*53 + 5 = 694$	módulo $100 \rightarrow n_3 = 94$,	donde $r_3 = 94/100 = 0.94$
$n_4 \approx 13*94 + 5 = 1227$	módulo $100 \rightarrow n_4 = 27$,	donde $r_4 = 27/100 = 0.27$
$n_5 \approx 13*27 + 5 = 356$	módulo $100 \rightarrow n_5 = 56$,	donde $r_5 = 56/100 = 0.56$
$n_6 \approx 13*56 + 5 = 733$	módulo $100 \rightarrow n_6 = 33$,	donde $r_6 = 33/100 = 0.33$
$n_7 \approx 13*33 + 5 = 434$	módulo $100 \rightarrow n_7 = 34$,	donde $r_7 = 34/100 = 0.34$

...

$r_1 = 0.96$, $r_2 = 0.53$, $r_3 = 0.94$, $r_4 = 0.27$, $r_5 = 0.56$, $r_6 = 0.33$, $r_7 = 0.34, \ldots$

- **Periodo de los generadores congruenciales.**

Un generador congruencial tiene periodo completo si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:

- m y b son primos entre si
- Si q es un numero primo que divide a m, entonces q divide a $a - 1$.
- Si 4 divide a m, entonces 4 divide a $a - 1$.

Estas condiciones se cumplen si $m = 2^k$, $a = 4c + 1$ y b es impar. Aqui, c, b, y k son enteros positivos.

Un generador congruencial con $m = 2^k >= 4$ tiene periodo completo si y solo si b es impar y 1 = a mod 4.

Ejemplo en Excel:

En Excel, podemos generar números pseudoaleatorios utilizando la función **ALEATORIO()** o **ALEATORIO.ENTRE()** para generar números en un rango específico. Por ejemplo, para generar números aleatorios entre 10 y 20, podemos utilizar la fórmula **ALEATORIO.ENTRE(10, 20).**

Ejemplo en Python:

En Python, podemos generar números pseudoaleatorios utilizando el módulo random. Por ejemplo, para generar 10 números aleatorios en el rango [0, 1), podemos usar el siguiente código:

```
import random

for _ in range(10):
    print(random.random())
```

Salida:

```
0.6222330274479259
0.8854078002391661
0.3650336282507275
0.9277269945416868
0.6974634426845763
0.5869857770713832
0.1833249322225947
0.2686774315647542
0.9035601584408294
0.4723019137773537
```

Para generar números aleatorios en un rango específico, como [10, 20), podemos usar la función uniform():

```
for _ in range(10):
    print(random.uniform(10, 20))
```

Salida:

```
16.732604699159737
16.438768239058987
18.534257744305663
17.162638053991664
18.006822166062207
18.84440644308313
19.43133775942487
17.991898319405912
11.217391366161216
15.70758161787473
```

2.2.2.1.3 Método de la distribución inversa:

Lo anterior son solo ejemplos simples de generación de números aleatorios en Excel y Python. Dependiendo de las necesidades específicas de tu simulación, es posible que desees utilizar métodos más avanzados de generación de números pseudoaleatorios con otro tipo de distribuciones y propiedades estadísticas deseables. Veamos algunos ejemplos:

Distribución Exponencial:

La distribución exponencial se utiliza comúnmente para modelar el tiempo entre eventos sucesivos en un proceso de Poisson. La función de densidad de probabilidad (PDF) de la distribución exponencial es:

$$f(x \mid \lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$$

donde λ es el parámetro de tasa.

Para generar números aleatorios que sigan una distribución exponencial, podemos utilizar la función inversa de la distribución exponencial:

$$x = -\frac{1}{\lambda} ln(1-u)$$

donde u es un número aleatorio generado de manera uniforme en el rango [0, 1).

Distribución Normal:

La distribución normal (o gaussiana) es una de las distribuciones más importantes en estadística y se utiliza para modelar una amplia variedad de fenómenos naturales y artificiales. La PDF de la distribución normal es:

$$f(x \mid \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma 2}}$$

donde μ es la media y σ es la desviación estándar.

Para generar números aleatorios que sigan una distribución normal, podemos utilizar el método de Box-Muller, que genera pares de números aleatorios independientes y los transforma en números aleatorios normales, también se puede usar la distribución de probabilidad inversa.

Ejemplo con Excel:

Supongamos que queremos generar 10 números aleatorios siguiendo una distribución exponencial con $\lambda = 0.5$. Podemos utilizar la siguiente fórmula en una celda de Excel:
= -1 / 0.5 * LN(1 - ALEATORIO()).

Supongamos que queremos generar números aleatorios siguiendo una distribución normal con una media de 0 y una desviación estándar de 1. Podemos utilizar la siguiente fórmula en una celda de Excel:
= NORM.INV(ALEATORIO(), 0, 1).

NOTA: observe que en la generación de números aleatorios en Excel con otras distribuciones se utiliza la generación de números aleatorios uniforme entre 0 y 1.

Ejemplos con Python:

```
import random
import math

# Generación de números aleatorios con distribución exponencial
def generar_exponencial(lambd):
    u = random.random()
    return -math.log(1 - u) / lambd

# Generación de números aleatorios con distribución normal
def generar_normal(mu, sigma):
    u1 = random.random()
    u2 = random.random()
    z1 = math.sqrt(-2 * math.log(u1)) * math.cos(2 * math.pi * u2)
    z2 = math.sqrt(-2 * math.log(u1)) * math.sin(2 * math.pi * u2)
    return mu + sigma * z1  # O z2, ambos son números aleatorios normales
independientes

# Ejemplo de uso
lambd = 0.5
mu = 0
sigma = 1

print("Números aleatorios con distribución exponencial:")
for _ in range(10):
    print(generar_exponencial(lambd))

print("\nNúmeros aleatorios con distribución normal:")
for _ in range(10):
    print(generar_normal(mu, sigma))
```

Salida:

```
Números aleatorios con distribución exponencial:
6.107311404241577
1.6190128830918593
0.07552069442986938
1.2783021667595758
1.2628219583994136
0.4432644512557547
0.2781239010341019
1.0139541691341267
3.7624226006086863
1.4650001041173888
```

```
Números aleatorios con distribución normal:
-0.2819082259192407
-0.3794420253211367
-0.5857381109731182
2.1189641828253083
-0.05810354558390613
0.38190839671732696
-0.5653954176055731
0.4431486341542395
0.1999247395619669
-1.415821412808475
```

Similar a la generación de números pseudoaleatorios anteriores, se puede generar números para cualquier distribución de probabilidad usando las distribuciones inversas.

2.2.3 TEMA 3 VARIABLES ALEATORIAS

Comentado [JB3]: Este tema no es el mismo que se enuncia en el Micro Currículo.

Comentado [JM4R3]: Corregido

> "Las variables aleatorias son las musas de la simulación, dotando a nuestros modelos con la esencia de la incertidumbre." - John von Neumann

Observación de Variables Aleatorias

Una variable aleatoria evoluciona temporalmente y representa un valor numérico derivado de un experimento aleatorio. Por ejemplo, consideremos el lanzamiento de un dado, donde el resultado de cada lanzamiento es una variable aleatoria que puede tomar valores del 1 al 6.

El objetivo es obtener observaciones de estas variables aleatorias utilizando funciones de densidad de probabilidad asociadas a cada una de ellas. Por ejemplo, en el caso del dado, la función de densidad de probabilidad asigna la misma probabilidad a cada posible resultado, es decir, 1/6 para cada número del 1 al 6.

Más formalmente, una variable aleatoria es una función que asigna un valor numérico a cada resultado posible de un experimento aleatorio. Matemáticamente, una variable aleatoria X se define como una función $X\colon \Omega \rightarrow R$, donde Ω es el espacio muestral del experimento aleatorio y R es el conjunto de números reales. Las variables aleatorias se utilizan para modelar y cuantificar la incertidumbre en un sistema. Existen dos tipos de variables aleatorias:

Variables Aleatorias Discretas

Una variable aleatoria discreta es aquella que puede tomar un número finito o infinito numerable de valores. Su función de masa de probabilidad (PMF) especifica la probabilidad de que la variable tome cada uno de sus posibles valores. Por ejemplo, considere el experimento de lanzar un dado justo. La variable aleatoria X que representa el número de caras obtenidas en un lanzamiento puede tomar los valores $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ con una probabilidad de $\frac{1}{6}$ cada uno.

Variables Aleatorias Continuas

Una variable aleatoria continua es aquella que puede tomar cualquier valor dentro de un intervalo dado. Su función de densidad de probabilidad (PDF) especifica la densidad de probabilidad en cada punto del intervalo. Por ejemplo, considere el tiempo de espera en una cola, que puede tomar valores en el intervalo $[0, \infty)$. La variable aleatoria Y que representa este tiempo de espera puede tener una distribución exponencial, dada por $f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda y}$ para $y \geq 0$ donde λ es el parámetro de tasa.

Distribuciones de Probabilidad

Existen muchas distribuciones de probabilidad importantes que se utilizan para modelar diferentes tipos de fenómenos en la práctica. Algunas de las distribuciones de probabilidad más comunes incluyen:

Distribución Uniforme: Todos los valores dentro de un intervalo tienen la misma probabilidad de ocurrir.

Distribución Normal: También conocida como distribución gaussiana, es una de las distribuciones más importantes en estadística y se utiliza para modelar una amplia variedad de fenómenos naturales y sociales.

Distribución Exponencial: Se utiliza comúnmente para modelar el tiempo entre eventos en un proceso de Poisson.

Distribución de Poisson: Se utiliza para modelar el número de eventos que ocurren en un intervalo de tiempo o espacio fijo.

NOTA: Las anteriores distribuciones con todo su detalle se dejan como repaso para el estudiante.

Fundamentalmente, existen dos enfoques predominantes para generar observaciones de variables aleatorias (V.A.):

- **Enfoque Analítico:** Este enfoque utiliza métodos matemáticos para generar variables aleatorias. Por ejemplo, para generar observaciones de una distribución normal, se pueden utilizar técnicas como la transformación inversa, similar a la generación de números aleatorios visto en el tema anterior, o el método de aceptación-rechazo.

- **Enfoque de Simulación:** En este enfoque, las observaciones de las variables aleatorias se generan mediante técnicas de simulación computacional. Por ejemplo, para simular el lanzamiento de un dado, se pueden utilizar generadores de números aleatorios para generar valores entre 1 y 6, representando cada uno de los posibles resultados del dado.

Método del rechazo:

Se tiene una variable aleatoria X con función de densidad $f_x(X)$ definida en el intervalo $a \leq X \leq b$ y además conocemos:

M = el valor máximo alcanzado por la función de densidad de probabilidad en el intervalo dado:

$$MAX\ f_x(X)\ en\ a \leq X \leq b$$

De esta manera podemos definir $g(x) = \frac{f_x(x)}{M}$; $0 \leq g(x) \leq 1$

El algoritmo solución es:

Sean r_1, r_2, números aleatorios.

$X= a+(b-a)r_1$

Si $r_2 \leq g(x)$, entonces X es observación. En caso contrario ir al primer paso.

Ejemplo:

Sea $f_x(X)= \frac{2X}{9}$ Para $0 \leq X \leq 3$

La solución para generar valores para la función $f_x(X)$ es

Generar valores r_1 y r_2.

$X= a+(b-a)r_1 = 0+(3-0)r_1= 3r_1$.

Como $g(x)= x/3$ y como $x= 3r_1$; entonces $g(X)= r_1$

si $r_2 \leq g(x) = x/3$, es decir $r_2 \leq r_1$ entonces x es observación, de lo contrario volver a generar r_1 y r_2

2.3 RECURSOS

2.3.1 Material de referencia de la unidad

Tema	Enlace URL	Especificación de páginas o instrucciones de lectura

Tipos de modelos de simulación	https://elibro.net/es/lc/remington/titulos/48877?as_all=simulacion&as_all_op=unaccent__icontains&prev=as	Página 40
Generación de números aleatorios	https://elibro.net/es/lc/remington/titulos/48697?as_all=simulacion&as_all_op=unaccent__icontains&prev=as	Capítulo 5
Distribuciones de probabilidad	https://elibro.net/es/lc/remington/titulos/48697?as_all=simulacion&as_all_op=unaccent__icontains&prev=as	Sección 4.3

2.3.2 Material de profundización de la unidad

<<Diligencie la siguiente tabla con recursos pertinentes y diferentes a los que usó durante el diseño de cada uno de los temas, ya que esto se convierte en una herramienta importante para que el estudiante pueda profundizar y afianzar su aprendizaje. Antes de hacer entrega de este material, recuerde la importancia de verificar que los enlaces URL estén escritos correctamente.>>

Tema	**Enlace URL**	**Especificación de páginas o instrucciones de lectura**
Generación de números aleatorios en Excel	https://www.youtube.com/watch?v=PuvIGYz5Ifk	Video de profundización
Librería random	https://www.youtube.com/watch?v=nLKjIKz6zSI	Video de profundización
Distribuciones de probabilidad discretas	https://www.youtube.com/watch?v=BBuv9S2-fVo	Video de profundización

2.4 EJERCICIOS DE PROFUNDIZACIÓN

1. Desarrolla un programa en Python que implemente el método de los cuadrados centrales para generar una secuencia de números pseudoaleatorios. El método de los cuadrados centrales es una técnica para generar números pseudoaleatorios utilizando el cuadrado del número generado anteriormente. La semilla inicial y la cantidad de números a generar deben ser ingresadas por el usuario.

   El programa debe cumplir con los siguientes requisitos:

   - Solicitar al usuario que ingrese la semilla inicial para la generación de la secuencia de números pseudoaleatorios.
   - Solicitar al usuario que ingrese la cantidad de números pseudoaleatorios que desea generar.
   - Generar la secuencia de números pseudoaleatorios utilizando el método de los cuadrados centrales.
   - Mostrar en pantalla la secuencia de números pseudoaleatorios generados.
   - Asegúrate de documentar adecuadamente el código y de incluir comentarios que expliquen el funcionamiento del método de los cuadrados centrales y cómo se implementa en el programa.

2. Escribe un programa en Python que genere 10 números aleatorios con una distribución exponencial con parámetro lambda igual a 0.5 utilizando la biblioteca numpy.

3. Escribe un programa en Python que genere 10 números aleatorios con una distribución de Poisson con parámetro lambda igual a 3 utilizando la biblioteca numpy.

2.5 PISTAS DE APRENDIZAJE

A partir de los temas desarrollados en la unidad, escriba a modo de tips las consignas o principios fundamentales que el estudiante debería tener siempre presente. En cuanto a la longitud, no debe superar la cantidad de caracteres que tiene un twitt.

Recuerde que:

- Siempre establece una semilla inicial antes de generar números aleatorios. Esto garantizará que tus resultados sean reproducibles y consistentes.

- Elije la distribución de probabilidad adecuada para tu problema. Las distribuciones comunes incluyen uniforme, normal, exponencial, etc. Asegúrate de entender la naturaleza de tus datos y elegir la distribución que mejor se adapte.

- Antes de utilizar los números aleatorios en tu análisis, realiza pruebas para verificar su calidad. Esto puede incluir comprobar la uniformidad, la independencia y la aleatoriedad de la secuencia generada.

3 UNIDAD 2 REGRESIÓN LINEAL SIMPLE Y PRONÓSTICOS

3.1 RELACIÓN DE CONCEPTOS

3.1.1 Mapa Mental o Conceptual

3.1.2 Conceptos claves

Regresión Lineal Simple: Técnica estadística utilizada para modelar la relación lineal entre una variable dependiente y una variable independiente, con el objetivo de prever o estimar valores futuros.

Variable Dependiente: Es la variable que se está prediciendo o explicando en un modelo. En el contexto de la regresión lineal simple, es la variable que queremos predecir.

Variable Independiente: Es la variable que se utiliza para predecir o explicar la variabilidad en la variable dependiente. En la regresión lineal simple, hay una única variable independiente.

Coeficiente de Regresión: Representa la fuerza y dirección de la relación lineal entre las dos variables. Indica cuánto cambia la variable dependiente por un cambio unitario en la variable independiente.

Intercepto: Es la constante en la ecuación de regresión, representando el valor esperado de la variable dependiente cuando la variable independiente es cero.

Pronóstico: Predicción de valores futuros basada en análisis de datos históricos y tendencias. En el contexto empresarial, los pronósticos son fundamentales para la planificación estratégica y la toma de decisiones.

Datos Históricos: Información recopilada de eventos pasados que se utiliza como base para realizar predicciones sobre el futuro.

Tendencias: Patrones o direcciones identificables en los datos históricos que indican una dirección probable para el comportamiento futuro.

Demanda: Cantidad de bienes o servicios que los consumidores están dispuestos a comprar en un periodo específico. En la gestión empresarial, pronosticar la demanda es crucial para evitar excesos o faltantes de inventario.

Eficiencia Operativa: Medida de cómo una organización utiliza sus recursos para lograr los objetivos. Los pronósticos contribuyen a la eficiencia operativa al permitir una asignación adecuada de recursos.

3.2 DESARROLLO TEMÁTICO

3.2.1 TEMA 1. REGRESIÓN LINEAL SIMPLE

> "La regresión lineal simple es como mirar a través de una ventana clara: nos permite entender y predecir las relaciones lineales en datos, revelando la historia que los números quieren contar." - Sir Ronald A. Fisher

La regresión lineal simple es una herramienta fundamental en la modelización y simulación de sistemas, ya que permite analizar la relación lineal entre dos variables, una de las cuales actúa como predictora de la otra. En este contexto, es esencial comprender las variables dependientes e independientes, el modelo de regresión lineal y cómo su aplicación puede contribuir a una gestión eficiente de recursos, influyendo en la toma de decisiones.

- **Variables Dependientes e Independientes:**

Variable Dependiente (Y): Representa la respuesta o el resultado que estamos tratando de predecir o modelar. En el contexto de simulación, podría ser el rendimiento de un sistema, la eficiencia de un proceso o cualquier otro indicador de interés.

Variable Independiente (X): Actúa como el predictor o la variable que se utiliza para predecir la variable dependiente. En un entorno de simulación, esta variable podría ser el tiempo, la cantidad de recursos asignados o cualquier otro factor que impacte en el resultado del sistema.

- **Modelo de Regresión Lineal Simple:**

La regresión lineal simple establece una relación lineal entre la variable dependiente (Y) y la variable independiente (X) a través de una ecuación de la forma $Y = a + bX$. Aquí, $'a'$ es la intersección y $'b'$ es la pendiente de la línea de regresión, que representa la tasa de cambio en Y respecto a un cambio unitario en X.

En el contexto de modelos de simulación, esta ecuación puede ser utilizada para prever el comportamiento del sistema y realizar predicciones sobre la variable dependiente en función de cambios en la variable independiente.

- **Gestión Eficiente de Recursos:**

La aplicación de la regresión lineal en modelos de simulación es crucial para la gestión eficiente de recursos. Por ejemplo, si la variable dependiente representa el rendimiento de un proceso y la variable independiente es la cantidad de recursos asignados, la regresión lineal puede ayudar a identificar la relación óptima entre recursos y rendimiento.

Mediante la simulación de escenarios con diferentes asignaciones de recursos, es posible determinar cuántos recursos son necesarios para alcanzar un rendimiento deseado. Esto proporciona información valiosa para la asignación eficiente de recursos, evitando excesos o déficits que podrían afectar negativamente al sistema.

- **Aplicación en la Toma de Decisiones:**

La regresión lineal en modelos de simulación facilita la toma de decisiones informadas. Los resultados obtenidos de la simulación permiten evaluar el impacto de cambios en las variables independientes sobre la variable dependiente, lo que ayuda a los gestores a tomar decisiones estratégicas.

Por ejemplo, si la simulación sugiere que un aumento del 10% en la asignación de recursos conduce a un incremento del 15% en el rendimiento del sistema, los tomadores de decisiones pueden ajustar las asignaciones de recursos para optimizar la eficiencia del sistema.

Veamos un caso aplicado con su solución en Python:

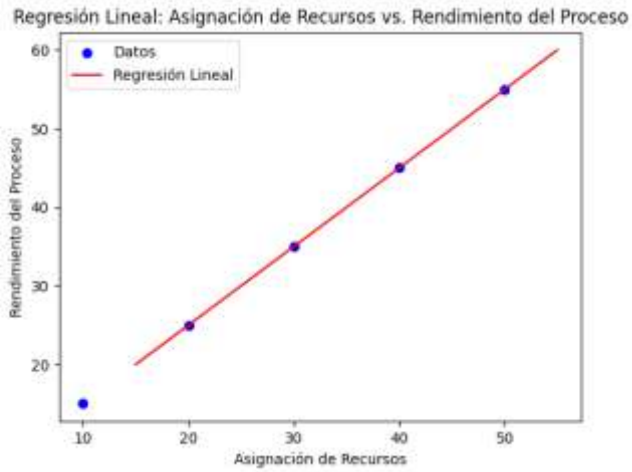
Para ilustrar el uso de regresión lineal simple en Python en el contexto descrito anteriormente, vamos a crear un ejemplo que simule la relación entre la asignación de recursos y el rendimiento de un proceso. Supongamos que hemos recopilado datos que muestran la cantidad de recursos asignados (X) y el rendimiento del proceso (Y) para varios escenarios.

Utilizaremos la biblioteca scikit-learn de Python para realizar la regresión lineal y predecir el rendimiento del proceso para diferentes asignaciones de recursos.

```
import numpy as np
from sklearn.linear_model import LinearRegression
import matplotlib.pyplot as plt

# Datos de ejemplo: asignación de recursos (X) y rendimiento del proceso (Y)
asignacion_recursos = np.array([10, 20, 30, 40, 50]).reshape(-1, 1)  # 
Convertimos a una matriz columna
rendimiento_proceso = np.array([15, 25, 35, 45, 55])

# Crear un modelo de regresión lineal
modelo_regresion = LinearRegression()

# Entrenar el modelo con los datos
modelo_regresion.fit(asignacion_recursos, rendimiento_proceso)

# Hacer predicciones para diferentes asignaciones de recursos
asignacion_recursos_prediccion = np.array([15, 25, 35, 45, 55]).reshape(-1, 
1)  # Asignaciones de recursos para predecir
rendimiento_prediccion = 
modelo_regresion.predict(asignacion_recursos_prediccion)

# Imprimir los coeficientes de la regresión
interseccion = modelo_regresion.intercept_
pendiente = modelo_regresion.coef_[0]
print("Intersección (a):", interseccion)
print("Pendiente (b):", pendiente)

# Graficar los datos y la línea de regresión
plt.scatter(asignacion_recursos, rendimiento_proceso, color='blue', 
label='Datos')
plt.plot(asignacion_recursos_prediccion, rendimiento_prediccion, color='red', 
label='Regresión Lineal')
plt.xlabel('Asignación de Recursos')
plt.ylabel('Rendimiento del Proceso')
plt.title('Regresión Lineal: Asignación de Recursos vs. Rendimiento del 
Proceso')
plt.legend()
plt.show()
```

Salida:

```
Intersección (a): 5.0
Pendiente (b): 1.0
```



3.2.2 TEMA 2 PRONÓSTICOS

> "Los pronósticos no son solo predicciones; son visiones estratégicas del futuro, trazadas con la intención de guiar el presente hacia la realización de esas visiones." - Peter Drucker

Los modelos de pronósticos son herramientas fundamentales en la toma de decisiones empresariales, ya que permiten prever el comportamiento futuro de variables relevantes para la organización. Estos modelos se utilizan en una amplia variedad de contextos, incluyendo la planificación de la producción, la gestión de inventarios, el análisis financiero y la proyección de ventas, entre otros.

3.2.2.1 MÉTODOS CUALITATIVOS

Los modelos de series de tiempo se centran en datos cuantitativos, pero existen modelos que buscan integrar elementos subjetivos o basados en opiniones en los pronósticos, los llamados modelos cualitativos. Estos últimos a menudo consideran la experiencia de expertos, evaluaciones individuales y otros factores subjetivos. Los modelos cualitativos resultan útiles cuando se anticipa que los aspectos subjetivos desempeñarán un papel crucial o cuando la obtención de datos numéricos precisos es compleja. A continuación, se presenta una breve descripción de algunas de las principales técnicas cualitativas de pronóstico diferentes.

3.2.2.1.1 Método Delphi

El método Delphi es un enfoque de pronóstico que implica consultar a un grupo de expertos para obtener opiniones sobre eventos futuros. Se lleva a cabo en varias rondas de consulta, donde los expertos revisan y comentan sobre las predicciones de los demás hasta que se alcanza un consenso.

Ejemplo: Una compañía de fabricación de automóviles utiliza el método Delphi para prever las tendencias futuras en la industria del automóvil. Reúnen a un grupo de expertos que incluye ingenieros automotrices, diseñadores de productos y expertos en tecnología de vehículos autónomos. Durante varias rondas de consulta, los expertos discuten sobre el futuro de la conducción autónoma, la electrificación de vehículos y las nuevas tecnologías de seguridad. Después de alcanzar un consenso, la empresa utiliza las predicciones del grupo para orientar su estrategia de desarrollo de productos.

3.2.2.1.2 Entrevistas a expertos

Las entrevistas a expertos implican la recolección de opiniones y percepciones de expertos en un campo específico sobre eventos futuros. Estas entrevistas pueden ser estructuradas o no estructuradas, y suelen involucrar preguntas específicas diseñadas para obtener información relevante sobre tendencias, cambios en el mercado, tecnologías emergentes y otros factores que puedan influir en el futuro. Los expertos pueden proporcionar información valiosa que complementa los datos cuantitativos y ayuda a comprender mejor los escenarios posibles.

Ejemplo: Una empresa de consultoría que se especializa en pronósticos de tendencias de la industria lleva a cabo entrevistas a expertos en tecnología para prever el futuro de la inteligencia artificial (IA). Durante estas entrevistas, los expertos discuten temas como el desarrollo de algoritmos de aprendizaje automático, la adopción de IA en diferentes sectores industriales y las implicaciones éticas y sociales de la IA. Las opiniones de estos expertos informan las predicciones de la empresa sobre el crecimiento y la evolución de la IA en los próximos años.

3.2.2.1.3 Analogías históricas

Este método implica hacer comparaciones entre situaciones o eventos pasados y el presente para predecir el futuro. Se basa en la premisa de que eventos similares en el pasado pueden tener resultados similares en el futuro.

Ejemplo: Un equipo de investigación de mercado utiliza analogías históricas para pronosticar la aceptación del mercado de un nuevo producto alimenticio. Observan el lanzamiento previo de productos similares en el mercado y analizan cómo fueron recibidos por los consumidores, considerando factores como el sabor, el empaque y la estrategia de marketing. Con base en estas analogías históricas, hacen predicciones sobre la posible aceptación del nuevo producto.

3.2.2.1.4 Estudios de Casos

Los estudios de casos implican el análisis detallado de situaciones o eventos pasados para extraer lecciones y comprender mejor cómo pueden desarrollarse situaciones similares en el futuro.

Ejemplo: Un equipo de planificación urbana utiliza estudios de casos para pronosticar el crecimiento y desarrollo de una ciudad en los próximos años. Examinan el crecimiento de otras ciudades comparables en términos de tamaño, ubicación geográfica y estructura económica, analizando los factores que contribuyeron a su crecimiento o estancamiento. Con base en estos estudios de casos, hacen proyecciones sobre la evolución futura de la ciudad y desarrollan estrategias de planificación urbana.

3.2.2.2 MÉTODOS CUANTITATIVOS

3.2.2.2.1 Series temporales

Los métodos cuantitativos utilizan datos históricos para desarrollar modelos matemáticos que permiten predecir el valor futuro de una variable. Estos métodos se dividen en dos categorías principales: métodos de series temporales y métodos de regresión, los cuales fueron vistos en la sección anterior.

Los métodos de series temporales se basan en la idea de que el comportamiento futuro de una variable está relacionado con su comportamiento pasado. Estos métodos incluyen técnicas como el promedio móvil, el suavizado exponencial y los modelos ARIMA (Autoregressive Integrated Moving Average).

Método de Promedio Móvil (Moving Average)

El valor pronosticado $\hat{Y}_{t+1}$ para el siguiente período se calcula como:

$$\hat{Y}_{t+1} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} Y_{t-i}$$

donde:

- Y_{t-i} es el valor de la serie temporal en el período $t-i$.
- n es el tamaño de la ventana.

Método de Suavización Exponencial (Exponential Smoothing)

El valor pronosticado $\hat{Y}_{t+1}$ para el siguiente período se calcula como:

$$\hat{Y}_{t+1} = \alpha \cdot Y_t + (1-\alpha) \cdot \hat{Y}_t$$

donde:

- Y_t es el valor de la serie temporal en el período actual.

- $\hat{Y}_t$ es el valor pronosticado para el período actual.

- α es el factor de suavización $(0 < \alpha < 1)$.

Método ARIMA

El modelo ARIMA (Autoregressive Integrated Moving Average) es un método estadístico ampliamente utilizado para modelar y predecir series temporales. Combina tres componentes principales: autoregresión (AR), integración (I) y media móvil (MA). Cada uno de estos componentes aborda diferentes aspectos de la estructura temporal de los datos.

Componente de Autoregresión (AR): El término "autoregresión" indica que la variable de interés depende linealmente de sus valores pasados. En un modelo AR, se predice el valor futuro de la serie temporal en función de sus valores pasados. La idea principal es que los valores anteriores contienen información que puede ayudar a predecir los valores futuros. La notación AR(p) indica que se están utilizando los últimos p valores para predecir el siguiente valor, donde "p" es el orden del modelo autoregresivo.

Componente de Media Móvil (MA): En un modelo de media móvil, el valor actual de la serie temporal se modela como una combinación lineal de errores aleatorios observados en tiempos anteriores. Esto significa que la serie temporal está influenciada por los errores residuales de predicciones pasadas. La notación MA(q) indica que se están utilizando los últimos q errores para predecir el siguiente valor, donde "q" es el orden del modelo de media móvil.

Componente de Integración (I): La integración es necesaria cuando la serie temporal no es estacionaria, lo que significa que la media y la varianza cambian con el tiempo. Al tomar diferencias entre los valores observados en diferentes momentos, podemos hacer que la serie temporal sea estacionaria. La integración se indica mediante el parámetro "d", que representa el número de diferencias requeridas para hacer estacionaria la serie temporal.

La combinación de estos tres componentes da lugar al modelo ARIMA, que se denota como ARIMA(p, d, q). El parámetro "p" es el orden de la parte autoregresiva, "d" es el grado de diferenciación y "q" es el orden de la parte de media móvil.

La ecuación de pronóstico para un modelo ARIMA (p, d, q) puede expresarse de la siguiente manera:

$$\widehat{y_t} = c + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \cdots + \phi_p y_{t-p} - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2} - \cdots - \theta_q e_{t-q}$$

Donde:

$\widehat{y_t}$ es el valor pronosticado en el tiempo t.

c es una constante (el intercepto).

$\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ son los coeficientes de los términos autoregresivos.

$y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-p}$ son los valores observados en los tiempos ant

A continuación, veamos un ejemplo en Python de la implementación de cada uno de los anteriores métodos.

Ejemplo en python

Supongamos que eres un analista de datos en una empresa de comercio minorista que está interesada en predecir las ventas futuras de un producto específico. Tienes datos históricos de ventas mensuales del producto durante los últimos tres años y deseas utilizar diferentes métodos de pronóstico, como promedio móvil, suavización exponencial y ARIMA, para prever las ventas del próximo trimestre.

Utilizando Python y su librería `statsmodels`, implementa los métodos de pronóstico de promedio móvil, suavización exponencial y ARIMA para predecir las ventas mensuales del próximo trimestre para un producto específico. Los datos históricos de ventas se proporcionan en una tabla CSV llamada "ventas.csv". Realiza lo siguiente:

1. Carga los datos del archivo CSV en un DataFrame de pandas.
2. Calcula las predicciones de ventas utilizando los siguientes métodos de pronóstico:
    - Promedio móvil con una ventana de 3 meses.
    - Suavización exponencial con un factor de suavizado de 0.3.
    - Modelo ARIMA con los parámetros (p, d, q) determinados automáticamente.
3. Grafica las ventas históricas junto con las predicciones de cada método.
4. Evalúa el rendimiento de cada método utilizando métricas apropiadas, como el error absoluto medio (MAE) o el error cuadrático medio (MSE).
5. Muestra las predicciones de ventas del próximo trimestre para cada método en una tabla.

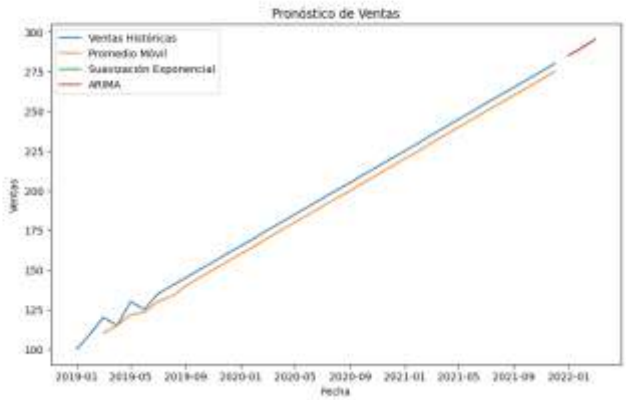
Datos a continuación

Ventas.csv

```
import pandas as pd
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from statsmodels.tsa.api import ExponentialSmoothing
from statsmodels.tsa.arima.model import ARIMA
```

```python
# Paso 1: Carga de datos
data = pd.read_csv("Ventas.csv", parse_dates=['Fecha'], index_col='Fecha')

# Paso 2: Pronósticos
# Promedio móvil
rolling_mean = data['Ventas'].rolling(window=3).mean()

# Suavización exponencial
model_exp = ExponentialSmoothing(data['Ventas'],
trend='additive').fit(smoothing_level=0.3)
forecast_exp = model_exp.forecast(steps=3)

# ARIMA
model_arima = ARIMA(data['Ventas'], order=(1, 1, 1)).fit()
forecast_arima = model_arima.forecast(steps=3)

# Paso 3: Gráficas
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(data.index, data['Ventas'], label='Ventas Históricas')
plt.plot(rolling_mean.index, rolling_mean, label='Promedio Móvil')
plt.plot(forecast_exp.index, forecast_exp, label='Suavización Exponencial')
plt.plot(forecast_arima.index, forecast_arima, label='ARIMA')
plt.legend()
plt.title('Pronóstico de Ventas')
plt.xlabel('Fecha')
plt.ylabel('Ventas')
plt.show()

# Paso 4: Evaluación del rendimiento
# Se omite para simplificar el ejemplo, queda como ejercicio para el estudiante

# Paso 5: Predicciones del próximo trimestre
predicciones = pd.DataFrame({
    'Promedio Móvil': rolling_mean.tail(1).values,
    'Suavización Exponencial': forecast_exp.values,
    'ARIMA': forecast_arima.values
}, index=['Mes 1', 'Mes 2', 'Mes 3'])

print("Predicciones del próximo trimestre:")
print(predicciones)
```

Salida:




```
Predicciones del próximo trimestre:
       Promedio Móvil  Suavización Exponencial        ARIMA
Mes 1           275.0                285.128704  285.081701
Mes 2           275.0                290.167323  290.163398
Mes 3           275.0                295.205941  295.245092
```

3.2.2.2.2 Métodos mediante simulación

- **Incrementos Fijos de Tiempo**

La progresión temporal puede manifestarse en minutos, horas, días, entre otros. Este enfoque implica avanzar una unidad temporal predefinida y actualizar los sucesos en el sistema simulado.

Ejemplo: Simulación de Demanda de Energía

En la figura se presenta el diagrama de un sistema que emplea valores unitarios para realizar incrementos fijos de tiempo. En este caso, supongamos que la unidad es un mes y se busca simular la demanda de energía eléctrica en una empresa, el costo total de energía en un año y el gasto promedio mensual. Inicialmente, se requiere conocer la distribución mensual de la demanda y el costo de cada kilovatio consumido.

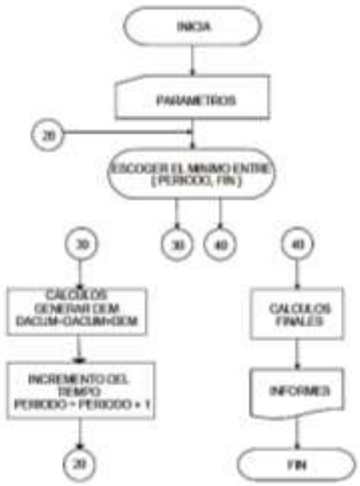
Durante la simulación, se generan observaciones de una Variable Aleatoria (VA) que representa la demanda de energía (puede ser una distribución normal con baja varianza) y se acumulan en la variable DACUM para cada período. Al concluir la simulación, se realizan cálculos para obtener la demanda total, el costo total de la energía y el gasto promedio mensual. Estos cálculos son sencillos:

La variable DACUM refleja la demanda total durante el período simulado.

El costo total de la energía demandada es DACUM multiplicado por CUNITARIO (el costo unitario de la energía demandada).

El gasto mensual promedio se calcula como (DACUM * CUNITARIO) dividido por el PERIODO.

Es importante destacar que el avance del tiempo se produce mediante la fórmula recursiva: PERIODO = PERIODO + 1. Este método es particularmente adecuado cuando una serie de situaciones o eventos ocurren en un intervalo de tiempo fijo con patrones de comportamiento similares en todos los periodos. También es útil cuando las variables relevantes para tomar decisiones se evalúan diaria, semanal o mensualmente, así como para representar rutinas repetidas en un intervalo de tiempo.



Incrementos fijos de tiempo

Aplicaciones Adecuadas:

1. Sistemas de inventarios con pedidos y despachos diarios.
2. Acumulación de materiales o fluidos en sistemas naturales o industriales.
3. Registros financieros como utilidades, facturaciones, gastos, demandas o pérdidas semanales o mensuales.
4. Evaluación de ensayos realizados en periodos consecutivos de tiempo.

5. Simulación de juegos de azar para evaluar estrategias y beneficios esperados.

Limitaciones:

Este método puede ser inadecuado para eventos que ocurren en intervalos irregulares a lo largo de varios periodos de tiempo.

- **Incrementos Variables de Tiempo**

Bajo la perspectiva de incrementos variables de tiempo, el sistema progresa en función de la aparición del próximo evento. En la Figura se ilustra cómo, para un escenario hipotético, se elige el primero entre los eventos posibles A, B, C, D y FIN. Una vez seleccionado, se procede a simular las repercusiones de lo acontecido y la actualización de las variables. Cuando el evento más próximo es FIN, se efectúan cálculos basados en el estado de las variables en ese momento de la simulación y se presentan los resultados.

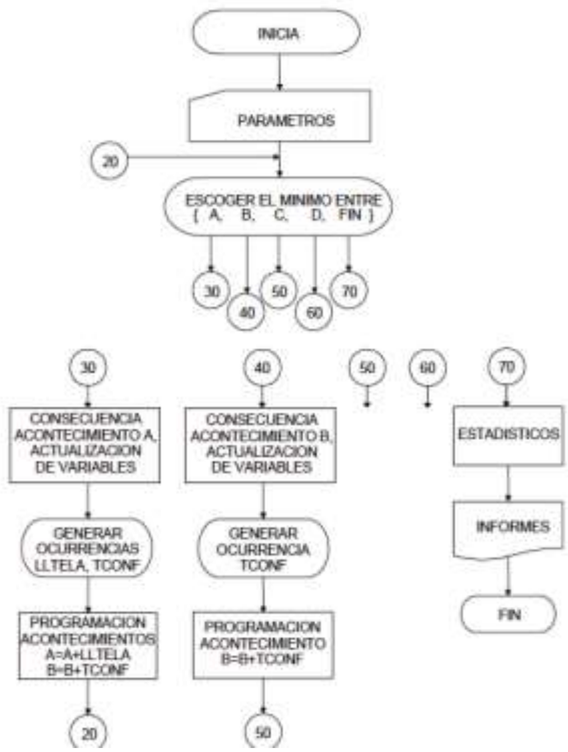
Ejemplo: Simulación en una Fábrica de Confecciones

En una fábrica de confecciones se identificaron dos actividades: la llegada de tela para cortar y la confección de diversas piezas. Conforme al diagrama de la Figura 2, se debe determinar constantemente si el próximo evento es la llegada de tela o la conclusión de la confección de una pieza (blusa, vestido, chaqueta, etc.). Si la llegada de tela es lo próximo, se actualizan las estadísticas de tela disponible y se generan: a) un intervalo de tiempo hasta la llegada de un nuevo lote de tela (LLTELA) y b) el tiempo necesario para concluir la confección de una pieza (TCONF), en caso de que algún confeccionista esté disponible; se calcula de inmediato cuándo ocurrirá la llegada del nuevo lote de tela (A = A + LLTELA).

Si la conclusión de una pieza es lo próximo, se actualizan las estadísticas del número de piezas confeccionadas y el tiempo empleado en la confección de todas las piezas; se simula un nuevo intervalo de tiempo para reflejar el tiempo necesario para la confección de una nueva pieza (TCONF), en caso de tener suficiente tela disponible; y se calcula el momento en que ocurrirá este evento (B = B + TCONF).

Si lo próximo es la conclusión de la jornada laboral, se obtienen los totales de las estadísticas sobre:

- Cantidad de tela cortada en la jornada.
- Número de piezas confeccionadas.
- Tiempo promedio empleado en la confección de cada pieza.
- Otros.



Incrementos variables de tiempo.

Aplicaciones Adecuadas:

1. Sistemas de colas.
2. Producción industrial.
3. Interacción entre especies en sistemas ecológicos.
4. Operación de sistemas comerciales o administrativos.

Elección del Método:

En ciertas circunstancias, uno de los dos métodos de avance de tiempo puede ser más adecuado, pero no hay una regla clara al respecto. En muchos casos, la elección del método depende de la destreza desarrollada por el modelador en la utilización de uno de los mecanismos.

3.3 RECURSOS

3.3.1 Material de referencia de la unidad

Tema	Enlace URL	Especificación de páginas o instrucciones de lectura
Modelos cualitativos o modelos subjetivos	https://elibro.net/es/lc/remington/titulos/130781?as_all=pronosticos&as_all_op=unaccent__icontains&prev=as	Capítulo II
Modelos Matemáticos	https://elibro.net/es/lc/remington/titulos/130781?as_all=pronosticos&as_all_op=unaccent__icontains&prev=as	Capítulo III
Modelos de series de tiempo	https://elibro.net/es/lc/remington/titulos/130781?as_all=pronosticos&as_all_op=unaccent__icontains&prev=as	Capítulo V

3.3.2 Material de profundización de la unidad

Tema	Enlace URL	Especificación de páginas o instrucciones de lectura
Análisis Técnico con Python - Media Móvil Simple - Media Móvil Exponencial	https://www.youtube.com/watch?v=AFqukhe6C7M	Video de profundización, visualizar todo el video detalladamente
Promedio Móvil Simple - Pronostico de la Demanda en Excel	https://www.youtube.com/watch?v=eq-o_-wtXd0	Video de profundización,

Comentado [JB5]: La idea de esta sección es que al estudiante se le den las indicaciones especificas de lo que debe detallar del material relaciondo, en este caso, se le debe indicar si es todo el video que debe ver o una fracción del mismo y qué tiempos serían.

Comentado [JM6R5]: Ok.Es visualizar todo el video

		visualizar todo el video detalladamente
Promedio móvil Ponderado- Pronostico de la Demanda en Excel	https://www.youtube.com/watch?v=eSV1WMQc4Hk	Video de profundización, visualizar todo el video detalladamente

3.4 EJERCICIOS DE PROFUNDIZACIÓN

EJERCICIO 1. Eres un analista financiero en una empresa de inversiones interesada en predecir el precio futuro de una acción específica en el mercado de valores. Tienes datos históricos de los precios diarios de la acción durante los últimos dos años y deseas utilizar diferentes métodos de pronóstico para prever el precio de cierre de la acción para los próximos 30 días hábiles.

Usando Python, implementa los métodos de pronóstico de promedio móvil, suavización exponencial y ARIMA para predecir el precio de cierre diario de una acción específica para los próximos 30 días hábiles. Los datos históricos de precios de la acción los debes buscar, de tal forma que se tomen los dos últimos años recientes de una acción de interés para el estudiante:

1. Carga los datos del archivo CSV en un DataFrame de pandas. Asegúrate de que la columna de fechas esté en el formato adecuado y establece esta columna como el índice del DataFrame, como esta en el ejemplo.
2. Calcula las predicciones de precios utilizando los siguientes métodos de pronóstico:
   - Promedio móvil con una ventana de 10 días.
   - Suavización exponencial con un factor de suavizado de 0.2.
   - Modelo ARIMA con los parámetros (p, d, q) determinados automáticamente.
3. Grafica los precios históricos junto con las predicciones de cada método para visualizar las tendencias.
4. Evalúa el rendimiento de cada método utilizando métricas apropiadas, como el error absoluto medio (MAE) o el error cuadrático medio (MSE).
5. Muestra las predicciones de precios para los próximos 30 días hábiles para cada método en una tabla.

3.5 PISTAS DE APRENDIZAJE

A partir de los temas desarrollados en la unidad, escriba a modo de tips las consignas o principios fundamentales que el estudiante debería tener siempre presente. En cuanto a la longitud, no debe superar la cantidad de caracteres que tiene un twitt.

Recuerde que:

- Conoce tus datos y el entorno en el que se aplicarán los pronósticos.
- Prueba una variedad de técnicas de pronóstico para encontrar la más adecuada.
- Utiliza la validación cruzada para evaluar la precisión de tus pronósticos y evitar sesgos.

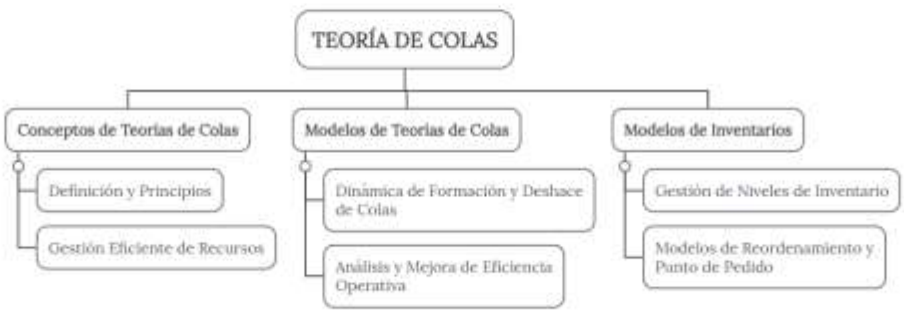
4 UNIDAD 3 TEORÍA DE COLAS Y MODELOS DE INVENTARIOS

Comentado [JB7]: Falta diligenciar el título.

Comentado [JM8R7]: ok

4.1 RELACIÓN DE CONCEPTOS

4.1.1 Mapa Mental o Conceptual



4.1.2 Conceptos claves

Teoría de Colas: Área de estudio que se enfoca en el análisis y gestión de líneas de espera, examinando cómo se forman, se mueven y se deshacen las colas en sistemas donde los elementos esperan para ser atendidos.

Línea de Espera: Secuencia de elementos que esperan su turno para ser atendidos o procesados en un sistema. La teoría de colas busca optimizar el tiempo de espera y la eficiencia en la atención.

Gestión de Recursos: Estrategias para asignar y utilizar eficientemente los recursos disponibles, como personal, máquinas o instalaciones, con el objetivo de minimizar los tiempos de espera.

Tiempo de Espera: Período que un elemento pasa esperando en una cola antes de ser atendido. La reducción del tiempo de espera es un objetivo clave en la teoría de colas.

Dinámica de Colas: Descripción de cómo se forman y se deshacen las colas en un sistema específico a lo largo del tiempo. Los modelos de teorías de colas ayudan a analizar y mejorar la eficiencia operativa del sistema.

Capacidad del Sistema: Capacidad máxima que un sistema puede manejar para atender elementos en un período de tiempo determinado. La comprensión de esta capacidad es esencial para evitar congestiones.

Estrategias de Gestión de Demandas de Servicios: Métodos utilizados para manejar eficientemente la demanda de servicios, como asignación de recursos, priorización y programación.

Gestión de Inventarios: Conjunto de prácticas y estrategias para manejar los niveles de inventario de manera eficiente. Esto incluye la determinación de cuánto y cuándo ordenar productos.

Cadena de Suministro: Red de procesos que abarca la producción, distribución y entrega de productos. Los modelos de inventarios contribuyen a optimizar esta cadena, asegurando un flujo eficiente.

Costos de Almacenamiento: Gastos asociados con el mantenimiento de inventarios, incluyendo costos de almacenamiento, deterioro y obsolescencia. La gestión eficiente de inventarios busca minimizar estos costos.

Excesos y Faltantes: Situaciones en las que hay un exceso de inventario (sobreabastecimiento) o una falta de inventario (desabastecimiento). Los modelos de inventarios buscan equilibrar la oferta y la demanda para evitar estas situaciones.

4.2 DESARROLLO TEMÁTICO

4.2.1 TEMA 1 CONCEPTOS DE TEORÍAS DE COLAS

> "Las colas son como la vida, siempre esperamos que llegue nuestro turno, pero a veces, el tiempo se vuelve eterno." - William Feather

Es agobiante esperar en una fila de un supermercado, frente a un cajero bancario o en un restaurante de comida rápida. Añadir más cajeros o empleados no siempre es la estrategia más económica para mejorar el servicio. Por ello, las empresas deben encontrar formas de mantener los tiempos de espera dentro de límites aceptables. En este contexto, la teoría de colas emerge como un salvavidas, ofreciendo modelos elaborados que guían a los administradores en la comprensión y toma de decisiones precisas sobre la gestión de las líneas de espera. Este cuerpo de conocimiento, repleto de fórmulas y relaciones matemáticas, no solo se enfoca en las operaciones, sino que se convierte en el faro que ilumina el camino hacia la eficiencia y la satisfacción del cliente.

En el análisis de las características de un sistema de colas, nos sumergimos en la esencia matemática que define su estado estable. En esta sección, desentrañamos fórmulas cruciales para determinar las características operativas de una línea de espera de un solo canal. Estas fórmulas encuentran su aplicación cuando las llegadas obedecen una distribución de probabilidad de Poisson y los tiempos de servicio siguen una distribución exponencial.

Dos variables cruciales emergen en este escenario:

λ: Representa la cantidad promedio de llegadas por periodo, es decir, la tasa media de llegada.

μ: Encarna la cantidad promedio de servicios por periodo, indicando la tasa media de servicio.

Estas variables no solo son cifras abstractas, sino los cimientos sobre los cuales se erige la eficiencia del sistema. En el intrincado tejido de la teoría de colas, estos parámetros se relacionan en algunas fórmulas que sirven como herramientas de diagnóstico, permitiendo una comprensión precisa y cuantificada del rendimiento del sistema en un estado de equilibrio.

La teoría de colas es un área de estudio que se centra en el análisis matemático y estadístico de líneas de espera o colas. A continuación, se presentan algunos conceptos teóricos clave de la teoría de colas:

Sistema de Colas: Un sistema de colas está compuesto por una o más entidades de servicio (como servidores) y clientes que llegan al sistema para ser atendidos. El objetivo es analizar y optimizar el rendimiento del sistema para minimizar el tiempo de espera de los clientes y maximizar la eficiencia de los recursos.

Proceso de Llegadas: Se refiere al patrón o distribución de llegadas de clientes al sistema de colas. Puede ser aleatorio y seguir diferentes distribuciones, como la distribución exponencial, la distribución de Poisson, etc.

Proceso de Servicio: Se refiere al proceso de atención o servicio proporcionado a los clientes en el sistema de colas. Puede ser determinista o aleatorio, y su duración también puede seguir diferentes distribuciones.

Disciplina de la Cola: Es la regla que dicta cómo se atienden los clientes en el sistema de colas. Algunas disciplinas comunes incluyen FIFO (First In, First Out), LIFO (Last In, First Out), Prioridad, etc.

Medidas de Desempeño: Son métricas utilizadas para evaluar el rendimiento del sistema de colas. Algunas medidas comunes incluyen el tiempo de espera promedio, la longitud promedio de la cola, la tasa de utilización del servidor, etc.

Modelos de Colas: Son modelos matemáticos que describen el comportamiento de un sistema de colas en función de ciertos parámetros, como la tasa de llegada de clientes y la tasa de servicio. Los modelos de colas más comunes incluyen el modelo M/M/1, el modelo M/M/c, el modelo M/G/1, etc.

Ley de Little: Es un teorema fundamental en la teoría de colas que establece una relación entre el tiempo promedio que un cliente pasa en el sistema de colas (L), la tasa promedio de llegada de clientes al sistema (λ) y la cantidad promedio de clientes en el sistema (L). La ecuación de la Ley de Little es $L = \lambda W$, donde W es el tiempo promedio que un cliente pasa en el sistema.

Simulación de Colas: Es una técnica utilizada para modelar y analizar sistemas de colas utilizando simulación computacional. Permite estudiar el comportamiento del sistema bajo diferentes condiciones y evaluar el impacto de cambios en los parámetros del sistema.

Un sistema de colas puede dividirse en dos componentes principales:

- La cola

- La instalación del servicio

Los clientes o llegadas vienen en forma individual para recibir el servicio.

Los clientes o llegadas pueden ser:

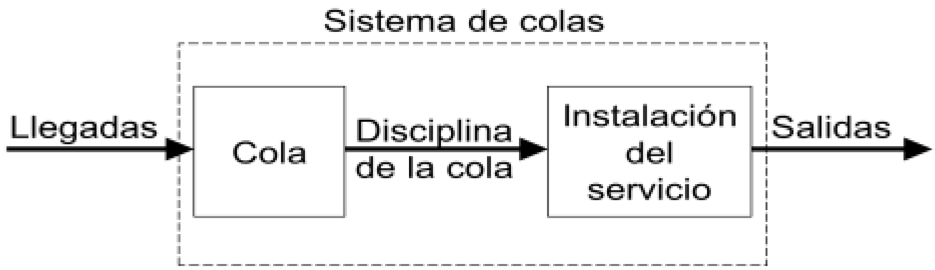
- Personas
- Automóviles
- Máquinas que requieren reparación
- Documentos
- Entre muchos otros tipos de artículos

Si cuando el cliente llega no hay nadie en la cola, pasa de una vez a recibir el servicio, si no, se une a la cola. Es importante señalar que la cola no incluye a quien está recibiendo el servicio.

Las llegadas van a la instalación del servicio de acuerdo con la disciplina de la cola, generalmente ésta es primero en llegar, primero en ser servido (FIFO), pero puede haber otras reglas o colas con prioridades.

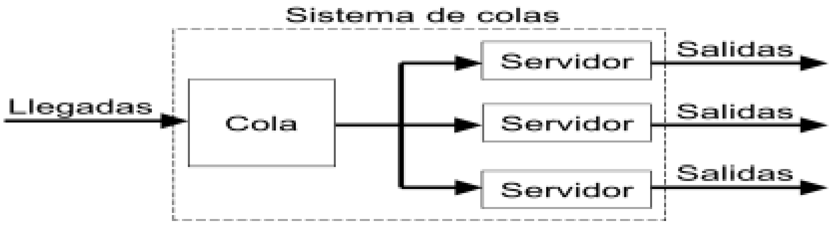
A continuación, se representa el modelo de una cola de una línea con un servidor:

Modelo de una cola de una línea con un servidor



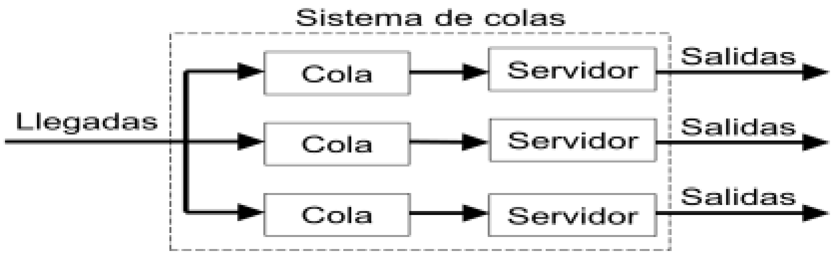
Existe también el modelo de una cola con múltiples servidores como se muestra a continuación.

Modelo de una cola con múltiples servidores



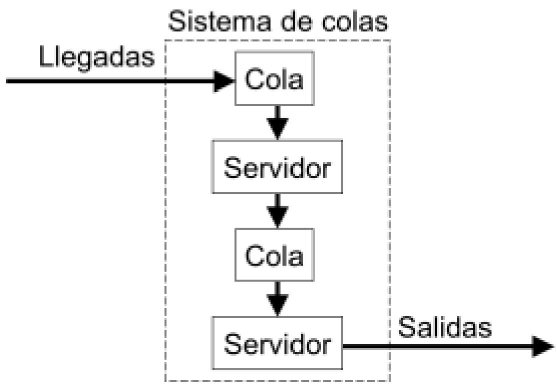
O el modelo de múltiples colas con múltiples servidores.

Modelo de múltiples colas con múltiples servidores



También se tiene el modelo de una línea con servidores secuenciales.

Modelo de una línea con servidores secuenciales



En el siguiente tema, detallaremos algunos modelos de la teoría de colas y su respectiva solución.

4.2.2 TEMA 2 MODELOS DE TEORÍAS DE COLAS

"En el intricado ballet de la teoría de colas, el arte de gestionar esperas se convierte en una danza entre eficiencia y satisfacción del cliente, donde cada fórmula es un paso hacia la armonía operativa." - Erlang B.

- **Modelo de línea de espera de un solo canal con llegadas de Poisson.**

El Modelo de línea de espera de un solo canal con llegadas de Poisson comúnmente conocido como el "Modelo M/M/1", ofrece un detallado panorama de las características fundamentales de un sistema en equilibrio. Enfocándonos en las métricas cruciales, destacamos las siguientes:

LAS LLEGADAS

Distribución Poisson: Es una distribución discreta empleada con mucha frecuencia para describir el patrón de las llegadas a un sistema de colas

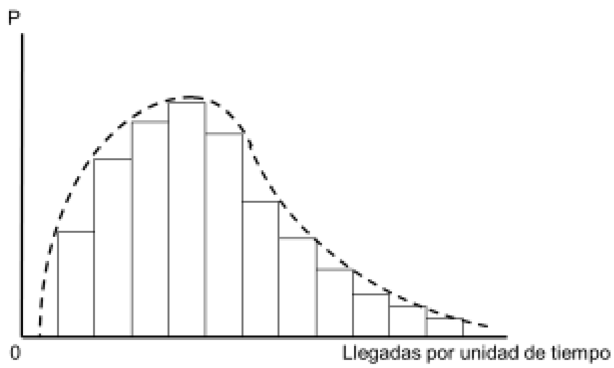
Para tasas medias de llegadas pequeñas es asimétrica y se hace más simétrica y se aproxima a la binomial para tasas de llegadas altas

- Su forma algebraica es:

$$P(k) = \frac{\lambda^{k} e^{-\lambda}}{K!}$$

- Donde:
  - $\boldsymbol{P(k)}$: probabilidad de k llegadas por unidad de tiempo
  - λ : tasa media de llegadas
  - $\boldsymbol{e}$ = *2,7182818…*

Llegadas – Distribución Poisson



LA COLA

El número de clientes en la cola es el número de clientes que esperan el servicio.

El número de clientes en el sistema es el número de clientes que esperan en la cola más el número de clientes que actualmente reciben el servicio.

La capacidad de la cola es el número máximo de clientes que pueden estar en la cola. Generalmente se supone que la cola es infinita, aunque también la cola puede ser finita.

La disciplina de la cola se refiere al orden en que se seleccionan los miembros de la cola para comenzar el servicio. La más común es PEPS: primero en llegar, primero en servicio, pero también puede darse: selección aleatoria, prioridades, UEPS, entre otras.

El servicio puede ser brindado por un servidor o por servidores múltiples. El tiempo de servicio varía de cliente a cliente. El tiempo esperado de servicio depende de la tasa media de servicio (μ).

El tiempo esperado de servicio equivale a $1/\mu$

Por ejemplo, si la tasa media de servicio es de 25 clientes por hora, entonces el tiempo esperado de servicio es $1/\mu = 1/25 = 0.04\ horas$, o $2.4\ minutos$.

Es necesario seleccionar una distribución de probabilidad para los tiempos de servicio. Hay dos distribuciones que representarían puntos extremos:

- La distribución exponencial (σ=media)
- Tiempos de servicio constantes (σ=0)

En la teoría de colas se acostumbra a usar la Notación de Kendall: A/B/c.

Donde:

- A: Distribución de tiempos entre llegadas
- B: Distribución de tiempos de servicio
  - M: distribución exponencial
  - D: distribución degenerada
- c: Número de servidores

En principio el sistema está en un estado inicial. Se supone que el sistema de colas llega a una condición de estado estable (nivel normal de operación), sin embargo, existen otras condiciones anormales (horas pico, etc.). Se aclara que lo que interesa es el estado estable.

Para evaluar el desempeño se busca conocer dos factores principales:

- El número de clientes que esperan en la cola
- El tiempo que los clientes esperan en la cola y en el sistema

A continuación, se muestran las fórmulas de las medidas de desempeño, también llamadas fórmulas de las características operativas del sistema.

Probabilidad de que no haya unidades en el sistema: Representa la posibilidad de que el sistema esté libre de unidades esperando o siendo atendidas.

$$P_o = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

Cantidad promedio de unidades en la línea de espera: Indica la cantidad típica de unidades esperando su turno para recibir servicio.

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$

Cantidad promedio de unidades en el sistema: Mide la cantidad promedio total de unidades en el sistema, tanto en espera como siendo atendidas.

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

Tiempo promedio que pasa una unidad en la línea de espera: Cuantifica el tiempo promedio que una unidad espera antes de recibir servicio.

$$w_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

Tiempo promedio que pasa una unidad en el sistema: Refleja el tiempo total promedio que una unidad pasa en el sistema, desde su llegada hasta su servicio completo.

$$W = w_q + \frac{1}{\mu}$$

Probabilidad de que una unidad que llega tenga que esperar por el servicio: Evalúa la probabilidad de que una unidad que llega deba esperar debido a que la instalación de servicio está ocupada.

$$P_w = \frac{\lambda}{\mu}$$

Probabilidad de n unidades en el sistema: Calcula la probabilidad de que haya n unidades en el sistema en un momento dado.

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_o$$

Los valores de la tasa media de llegada λ y la tasa media de servicio μ claramente son componentes importantes para determinar las características operativas. La ecuación $P_W = \lambda/\mu$ muestra que la razón de la tasa media de llegada y la tasa media de servicio λ/μ proporciona la probabilidad de que, al llegar, una unidad tenga que esperar debido a que la instalación de servicio está en uso. Por lo tanto, λ/μ con frecuencia se conoce como el factor de utilización para la instalación de servicio.

Las características operativas presentadas en las ecuaciones 1 a 7 solo son aplicables cuando la tasa media de servicio μ es mayor que la tasa media de llegada λ; en otras palabras, cuando $\lambda/\mu < 1$. Si no existe esta condición, la línea de espera continuará creciendo sin límite debido a que la instalación de servicio no tiene suficiente capacidad para manejar las unidades que llegan por tanto al usar las ecuaciones 1 a 7 debemos tener $\mu > \lambda$.

- **Modelo de línea de espera con canales múltiples**

El Modelo de línea de espera con canales múltiples, a menudo denominado como el "Modelo M/M/K", es un enfoque específico en la teoría de colas que considera la presencia de varios canales de servicio idénticos.

Las siguientes formulas pueden usarse para determinar las características operativas de estado estable para una línea de espera de varios canales. Estas fórmulas son aplicables bajo ciertas condiciones específicas:

  - Las llegadas siguen una distribución de probabilidad de Poisson.
  - El tiempo de servicio para cada canal sigue una distribución de probabilidad exponencial.
  - La tasa media de servicio (μ) es la misma para cada canal.
  - Las llegadas esperan en una sola línea y luego pasan al primer canal disponible para el servicio.

Aquí están las características operativas de este modelo, junto con las fórmulas asociadas para calcular las características operativas de estado estable, donde:

λ = la tasa media de llegada para el sistema

μ = la tasa media de servicio para cada canal

K = la cantidad de canales

Probabilidad de que no haya unidades en el sistema:

$$P_o = 1/\sum_{n=0}^{k-1}\left(\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \left(\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!}\right)\left(\frac{k\mu}{k\mu-\lambda}\right)\right)$$

Cantidad promedio de unidades en la línea de espera:

$$L_q = \frac{\left(\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \lambda\mu\right)}{(k-1)!\,(k\mu-\lambda)^2}P_o$$

Cantidad promedio de unidades en el sistema:

$$L = L_{q} + \frac{\lambda}{\mu}$$

Tiempo promedio que pasa una unidad en la línea de espera:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

Tiempo promedio que pasa una unidad en el sistema:

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

Probabilidad de que una unidad que llega tenga que esperar por el servicio:

$$P_w = \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \left(\frac{k\mu}{k\mu-\lambda}\right) P_o$$

Probabilidad de n unidades en el sistema:

$$P_n = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} P_o \quad \text{para } n \leq k$$

$$P_n = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{k!\,k^{n-k}} P_o \quad \text{para } n > k$$

Debido de que μ es la tasa media de servicio para cada canal, $k\mu$ es la tasa media del servicio para el sistema de canales múltiples. Como sucedió con el modelo de línea de espera de un solo canal, las fórmulas para las características operativas de las líneas de espera con múltiples canales sólo pueden aplicarse en situaciones donde la tasa media de servicio para el sistema es mayor que la tasa media de llegada para el sistema, es decir las fórmulas son aplicables solo si $k\mu$ es mayor que λ.

Ejemplos:

1. Un lavacar puede atender un auto cada 5 minutos y la tasa media de llegadas es de 9 autos por hora Obtenga las medidas de desempeño de acuerdo con el modelo M/M/1. Además, la

probabilidad de tener 0 clientes en el sistema, la probabilidad de tener una cola de más de 3 clientes y la probabilidad de esperar más de 30 min en la cola y en el sistema.

Solución:

$$\lambda = 9, \mu = 12, \rho = \frac{9}{12} = 0.75$$

$$L_s = \frac{\lambda}{\lambda - \mu} = 3 clientes \qquad L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = 2.25 clientes$$

$$W_s = \frac{1}{\mu - \lambda} = 0.33 hrs = 20 \min$$

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = 0.25 hrs = 15 \min$$

$$P_0 = (1 - \rho)\rho^0 = 0.25 \qquad P(L_s > 3) = \rho^{3+1} = 0.32$$

$$P(W_s > 30/60) = e^{-\mu(1-\rho)t} = 0.22$$

$$P(W_q > 30/60) = \rho e^{-\mu(1-\rho)t} = 0.17$$

Ejemplo con Python:

Se desea simular el comportamiento de una fila en un banco utilizando un sistema de colas M/M/1. Los clientes llegan a la fila de acuerdo con un proceso de llegadas Poisson, con una tasa promedio de llegada de 2 clientes por minuto. Cada cliente es atendido por un único cajero con una tasa de servicio exponencial, con un promedio de 3 clientes atendidos por minuto. La simulación se llevará a cabo durante un período de 10 minutos.

Se desea calcular las siguientes medidas de desempeño:

- Tiempo promedio de espera de los clientes en la fila.
- Longitud promedio de la cola durante la simulación.

Código Python:

```
# Función para calcular el tiempo promedio de espera en la cola (Wq) para un
sistema M/M/1
def tiempo_promedio_espera(tasa_llegada, tasa_servicio):
    rho = tasa_llegada / tasa_servicio
    Wq = rho / (tasa_servicio * (1 - rho))
    return Wq
```

```
# Función para calcular la longitud promedio de la cola (Lq) para un sistema
M/M/1
def longitud_promedio_cola(tasa_llegada, tasa_servicio):
    rho = tasa_llegada / tasa_servicio
    Lq = rho**2 / (1 - rho)
    return Lq

# Parámetros del sistema
tasa_llegada = 2  # Tasa de llegada (clientes por unidad de tiempo)
tasa_servicio = 3  # Tasa de servicio (clientes por unidad de tiempo)

# Calcular características operativas de la cola
Wq = tiempo_promedio_espera(tasa_llegada, tasa_servicio)
Lq = longitud_promedio_cola(tasa_llegada, tasa_servicio)

# Imprimir resultados
print("Características Operativas de la Cola:")
print("Tiempo Promedio de Espera en la Cola (Wq):", Wq)
print("Longitud Promedio de la Cola (Lq):", Lq)
```

Salida:

```
Características Operativas de la Cola:
Tiempo Promedio de Espera en la Cola (Wq): 0.6666666666666666
Longitud Promedio de la Cola (Lq): 1.3333333333333333
```

En caso de que la anterior cola fuera multicanal, con dos canales, también conocida como M/M/c=2, podemos calcular características operativas como el tiempo promedio de espera en la cola y la longitud promedio de la cola utilizando fórmulas específicas para este tipo de sistema. Aquí tienes un ejemplo de cómo implementar estas fórmulas en Python:

```
# Función para calcular el tiempo promedio de espera en la cola (Wq) para un
sistema M/M/c
def tiempo_promedio_espera_multicanal(tasa_llegada, tasa_servicio, c):
    rho = tasa_llegada / (c * tasa_servicio)
    Wq = rho / (c * tasa_servicio * (1 - rho)) * (1 + rho / (c * (1 - rho)))
    return Wq

# Función para calcular la longitud promedio de la cola (Lq) para un sistema
M/M/c
def longitud_promedio_cola_multicanal(tasa_llegada, tasa_servicio, c):
    rho = tasa_llegada / (c * tasa_servicio)
    Lq = rho**2 * (1 + rho / (c * (1 - rho)))
    return Lq
```

```
# Parámetros del sistema
tasa_llegada = 2  # Tasa de llegada (clientes por unidad de tiempo)
tasa_servicio = 3  # Tasa de servicio (clientes por unidad de tiempo)
canales = 2  # Número de canales en el sistema

# Calcular características operativas de la cola multicanal
Wq_multicanal = tiempo_promedio_espera_multicanal(tasa_llegada, tasa_servicio, canales)
Lq_multicanal = longitud_promedio_cola_multicanal(tasa_llegada, tasa_servicio, canales)

# Imprimir resultados
print("Características Operativas de la Cola Multicanal:")
print("Tiempo Promedio de Espera en la Cola (Wq):", Wq_multicanal)
print("Longitud Promedio de la Cola (Lq):", Lq_multicanal)
```

Salida:

```
Características Operativas de la Cola Multicanal:
Tiempo Promedio de Espera en la Cola (Wq): 0.10416666666666666
Longitud Promedio de la Cola (Lq): 0.1388888888888889
```

Ejercicio

A un supermercado llegan en promedio 80 clientes por hora que son atendidos entre sus 5 cajas. Cada caja puede atender en promedio a un cliente cada 3 minutos. Obtenga las medidas de desempeño de acuerdo con el modelo M/M/1. Además, la probabilidad de tener 2 clientes en el sistema, la probabilidad de tener una cola de más de 4 clientes y la probabilidad de esperar más de 10 min. en la cola

4.2.3 TEMA 3 MODELOS DE INVENTARIOS

> "En el mundo de los negocios, los modelos de inventarios son la partitura que dirige el equilibrio entre la oferta y la demanda; cada decisión, una nota que resuena en la sinfonía de la gestión eficiente." - Kenneth J. Arrow

- **Modelo de lote Económico a Ordenar (LEO)**

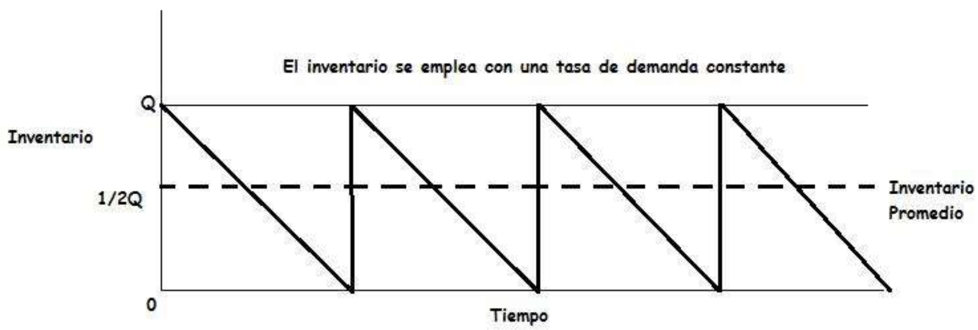
El Modelo de Lote Económico a Ordenar (LEO) encuentra su aplicación cuando la demanda de un producto se mantiene constante o casi constante, y toda la cantidad solicitada llega al inventario simultáneamente. La constancia en la tasa de demanda implica que se retira la misma cantidad de unidades del inventario en cada periodo.

En términos de costos, el costo de mantener se vincula con los gastos asociados al nivel de inventario, incluyendo el costo financiero por el capital invertido, expresado generalmente como un porcentaje de la inversión. Además, otros costos de mantenimiento, como seguros, impuestos, riesgos de quiebra, robo y gastos generales del almacén, dependen del valor del inventario.

Por otro lado, el costo de ordenar se considera fijo, independientemente de la cantidad pedida, cubriendo aspectos como la preparación de la orden de compra, franqueo, teléfono, transporte, verificación de factura y recepción. Estos dos costos, junto con la información de la demanda, son cruciales para aplicar el modelo LEO.

La fórmula para calcular el costo anual de mantener una unidad en inventario es $Ch = I * C$, donde I es la tasa de costo de mantenimiento anual y C es el costo unitario del elemento del inventario.

Patrón de Inventario Para el Modelo de Inventario LEO (Creación del facilitador)



Algunos de los supuestos básicos del modelo son los siguientes:

1. **Demanda constante**: La demanda del producto es constante y uniforme a lo largo del tiempo.

2. **Tiempo de Reposición Constante:** El tiempo entre cada reposición de inventario es constante y conocido.

3. **Costos Constantes:** Los costos de ordenar, los costos de mantenimiento de inventario y los costos de escasez son constantes y conocidos.

El modelo de lote económico se basa en la minimización de los costos totales de inventario, que incluyen los siguientes componentes:

1. **Costos de Ordenar** (Co)**:** Son los costos asociados con la realización de un pedido de inventario, que incluyen los costos de procesamiento de pedidos, costos de envío y recepción, y cualquier otro gasto administrativo relacionado con el pedido.

2. **Costos de Mantenimiento de Inventario** (Ch): Son los costos asociados con el almacenamiento y mantenimiento de inventario, que incluyen costos de almacenamiento, costos de obsolescencia y cualquier otro costo relacionado con el mantenimiento del inventario.

Las ecuaciones fundamentales para el modelo de lote económico son:

$$Q* = \sqrt{\frac{2 \times Co \times D}{Ch}}$$

$$N = \frac{D}{Q}$$

$$T = \frac{Q}{D}$$

$$IM = Q$$

$$IMin = 0$$

Utilizando estas ecuaciones y las variables especificadas, una empresa puede determinar la cantidad óptima de inventario a ordenar y mantener en stock para minimizar los costos totales de inventario y optimizar su eficiencia operativa.

En cuanto a la decisión de cuándo ordenar, se establece en función de un punto de reorden, que es la posición del inventario en la cual se debe realizar un nuevo pedido. Este modelo ofrece una herramienta eficaz para gestionar eficientemente los costos asociados con el mantenimiento y la reposición del inventario.

Ejemplo:

Una tienda de suministros para oficina necesita gestionar su inventario de bolígrafos. La demanda anual de bolígrafos es de 1000 unidades. El costo de ordenar un pedido es de $50 y el costo de mantener un bolígrafo en inventario durante un año es de $2. ¿Cuál es la cantidad óptima de bolígrafos que la tienda debe pedir en cada reposición para minimizar los costos totales de inventario?

Código en Python para la solución:

```
import math

# Definición de variables
```

```
D = 1000  # Demanda anual de bolígrafos
Co = 50   # Costo de ordenar un pedido
Ch = 2    # Costo de mantenimiento de inventario por unidad por año

# Cálculo de la cantidad óptima de pedido (Q)
Q = math.sqrt((2 * Co * D) / Ch)

# Cálculo del número de pedidos por año (N)
N = D / Q

# Cálculo del tiempo entre pedidos (T)
T = Q / D

# Cálculo del inventario máximo (IM)
IM = Q

# Cálculo del inventario mínimo (IMin)
IMin = 0

# Costo total de inventario por año
CT = Co * N + Ch * IM

# Resultados
print(f"La cantidad óptima de bolígrafos por pedido es: {round(Q, 2)} 
unidades.")
print(f"El número de pedidos por año es: {round(N, 2)} pedidos.")
print(f"El tiempo entre pedidos es: {round(T, 2)} años.")
print(f"El inventario máximo es: {round(IM, 2)} unidades.")
print(f"El inventario mínimo es: {IMin} unidades.")
print(f"El costo total de inventario por año es: ${round(CT, 2)}.")
```

Salida:

```
La cantidad óptima de bolígrafos por pedido es: 223.61 unidades.
El número de pedidos por año es: 4.47 pedidos.
El tiempo entre pedidos es: 0.22 años.
El inventario máximo es: 223.61 unidades.
El inventario mínimo es: 0 unidades.
El costo total de inventario por año es: $670.82.
```

- **Punto de Reorden**

En sistemas de inventario que asumen una tasa de demanda constante y un tiempo de entrega fijo, el Punto de Reorden coincide con la demanda durante el tiempo de entrega. La fórmula general para el Punto de Reorden en estos sistemas es:

$$r = d * m$$

Donde:

r = punto de reorden

d = demanda por día

m = tiempo de remisión para un nuevo pedido en días

Tiempo del ciclo

Es el período entre pedidos

$$T = \frac{Días\ hábiles}{\frac{D}{Q*}}$$

D = Demanda anual

$Q*$ = pedido mínimo (LEO)

Continuando con el ejemplo anterior, se tiene que el punto de reorden y tiempo de ciclo son como sigue a continuación:

```
import math

# Definición de variables
D = 1000       # Demanda anual de bolígrafos
Co = 50        # Costo de ordenar un pedido
Ch = 2         # Costo de mantenimiento de inventario por unidad por año
m = 10         # Tiempo de remisión para un nuevo pedido en días

# Cálculo de la cantidad óptima de pedido (Q)
Q = math.sqrt((2 * Co * D) / Ch)

# Cálculo del tiempo entre pedidos (T)
T = Q / D

# Cálculo de la tasa de demanda diaria (d)
d = D / 365    # Suponiendo 365 días en un año

# Cálculo del tiempo de plomo (LT)
LT = T * d

# Cálculo del punto de reorden (r)
```

```
r = d * m

# Tiempo del ciclo
Tiempo_ciclo = LT + m

# Resultados
print(f"La cantidad óptima de bolígrafos por pedido es: {round(Q, 2)}
unidades.")
print(f"El punto de reorden es: {round(r, 2)} unidades.")
print(f"El tiempo del ciclo es: {round(Tiempo_ciclo, 2)} días.")
```

Salida:

```
La cantidad óptima de bolígrafos por pedido es: 223.61 unidades.
El punto de reorden es: 27.4 unidades.
El tiempo del ciclo es: 10.61 días.
```

En términos de aplicaciones prácticas, el modelo de inventario por el método LEO se visualiza en un video que destaca las variables necesarias para su implementación. El video aborda una situación problemática relacionada con la determinación del lote económico a ordenar, demostrando que cuando los costos anuales de mantenimiento y los costos anuales de ordenar son iguales, se logra la cantidad que minimiza los costos totales.

- **Modelo de inventario por corrida de producción**

Al igual que con el modelo LEO, el Modelo de Inventario por Corrida de Producción incorpora los costos de mantenimiento en el inventario promedio, correspondiente a la mitad del nivel máximo de inventario. Dado que el reaprovisionamiento del inventario ocurre durante un periodo mientras la demanda continúa, el inventario máximo será menor que la cantidad pedida Q. El costo anual de mantenimiento o reserva de inventario se desarrolla con las siguientes variables:

El Modelo de Inventario por Corrida de Producción es una técnica utilizada en la gestión de inventarios para determinar la cantidad óptima de producción en cada lote, minimizando así los costos totales de inventario. En este modelo, los productos se producen en lotes, y el objetivo es encontrar el tamaño óptimo de cada lote de producción para satisfacer la demanda y minimizar los costos asociados con el inventario.

Variables:

- Q: Tamaño del lote de producción.
- Co: Costo de configuración o preparación de la máquina por lote.
- Ch: Costo de mantenimiento de inventario por unidad por período.

- P: Tasa de producción por período.
- d: Tasa de demanda por período.
- t: Duración de la corrida de producción en períodos.

Ecuaciones:

1. Tamaño del lote de producción (Q):

$$Q = \sqrt{\frac{2 \times Co \times P \times D}{Ch}}$$

2. Número de producciones por año (N):

$$N = \frac{D}{Q}$$

3. Tiempo entre producciones (T):

$$T = \frac{Q}{P}$$

4. Inventario máximo (IM):

$$IM = Q$$

5. Inventario mínimo ($IMin$):

$$IMin = 0$$

6. Costo Total de Inventario:

$$CT = Co \times N + Ch \times IM$$

Este modelo permite a las empresas determinar la cantidad óptima de producción en cada lote para minimizar los costos totales de inventario y optimizar la eficiencia de la producción.

Ejemplo:

Se desea optimizar el tamaño del lote de producción para una fábrica de muebles que produce sillas. La fábrica tiene una demanda constante de 200 sillas por semana y puede producir sillas a una tasa constante de 50 sillas por día. El costo de configuración por cada corrida de producción es de $500, y el costo de mantenimiento de inventario por silla por semana es de $2. Determina el tamaño óptimo del lote de producción y calcula los costos totales de inventario para un año.

```
import math

# Datos del problema
demand_per_week = 200
production_rate_per_day = 50
setup_cost_per_production = 500
maintenance_cost_per_unit_per_week = 2
weeks_per_year = 52

# Calcular la demanda por día y por año
demand_per_day = demand_per_week / 7
annual_demand = demand_per_week * weeks_per_year

# Calcular el tamaño del lote de producción (Q)
Q = math.sqrt((2 * setup_cost_per_production * production_rate_per_day *
annual_demand) / maintenance_cost_per_unit_per_week)

# Calcular el número de producciones por año (N)
N = annual_demand / Q

# Calcular el tiempo entre producciones (T)
T = Q / (production_rate_per_day * 7)

# Calcular el inventario máximo (IM)
IM = Q

# Calcular el costo total de inventario (CT)
CT = (setup_cost_per_production * N) + (maintenance_cost_per_unit_per_week * IM
* weeks_per_year)

# Resultados
print("Tamaño del lote de producción (Q):", round(Q, 2), "sillas")
print("Número de producciones por año (N):", round(N, 2))
print("Tiempo entre producciones (T):", round(T, 2), "semanas")
print("Inventario máximo (IM):", round(IM, 2), "sillas")
print("Costo total de inventario (CT): $", round(CT, 2))
```

Salida:

```
Tamaño del lote de producción (Q): 16124.52 sillas
Número de producciones por año (N): 0.64
Tiempo entre producciones (T): 46.07 semanas
Inventario máximo (IM): 16124.52 sillas
Costo total de inventario (CT): $ 1677272.1
```

- **Modelo de Descuento por Cantidad**

El Modelo de Descuento por Cantidad es una técnica utilizada en la gestión de inventarios para determinar los descuentos ofrecidos por los proveedores en función de la cantidad de productos ordenados. Este modelo ayuda a las empresas a optimizar sus decisiones de compra al considerar los descuentos disponibles y los costos asociados con la compra de inventario en grandes cantidades.

Variables:

(D): Demanda anual de productos.

(P): Precio unitario del producto.

(Co): Costo de ordenar por pedido.

(Ch): Costo de mantenimiento de inventario por unidad por período.

(Q): Cantidad de productos por pedido.

(r): Tasa de descuento por unidad.

Ecuaciones:

1. Cantidad de productos por pedido (Q):

$$Q *= \sqrt{\frac{2 \times Co \times D}{Ch}}$$

2. Costo total de inventario (CT):

$$CT = Co \times \frac{D}{Q} + Ch \times \frac{Q}{2} + P \times D \times (1 - r)$$

3. Precio unitario efectivo (P_{efectivo}):

$$P_{\text{efectivo}} = P \times (1 - r)$$

Costo Total de Compra:

$$TC = P_{\text{efectivo}} \times D$$

Este modelo permite a las empresas determinar la cantidad óptima de productos a ordenar por pedido, considerando los descuentos ofrecidos por los proveedores y minimizando los costos totales de inventario y compra.

El proceso para determinar la cantidad de costo mínimo se resume de la siguiente manera:

1. **Exploración de Precio de Descuento $(\boldsymbol{C})$:**

- Se comienza con la exploración de diferentes precios de descuento (C) ofrecidos por el proveedor.

2. **Cálculo de la Cantidad Económica de Pedido (LEO)}:**

Para cada precio de descuento (C), se calcula la Cantidad Económica de Pedido (Q=LEO) utilizando la fórmula:

$$LEO = \sqrt{\frac{2 \times D \times Co}{C \times (1 - r)}}$$

LEO representa la cantidad óptima a ordenar por pedido para minimizar los costos totales de inventario y compra.

3. **Ajuste de la Cantidad de Pedido $(\boldsymbol{Q})$:**

- Si la LEO calculada es menor que el mínimo requerido para recibir el descuento, se ajusta la cantidad de pedido (Q) al mínimo necesario para calificar para el descuento.

4. **Cálculo del Costo Total:**

Para cada LEO calculada o cantidad de pedido ajustada, se calcula el costo total de inventario y compra utilizando la siguiente fórmula:

$$CT = DC + \left(\frac{D}{Q} \times Co\right) + \left(\frac{Q}{2} \times Ch\right)$$

5. **Selección de la Cantidad de Costo más Bajo:**

- Se selecciona la cantidad de pedido que resulta en el costo total más bajo entre todas las opciones consideradas.

Estas tendencias guían el proceso de optimización para determinar la cantidad de costo mínimo en el Modelo de Descuento por Cantidad, permitiendo a las empresas tomar decisiones informadas sobre sus compras y maximizar sus ahorros.

En resumen, el proceso para determinar la cantidad de costo mínimo es de la siguiente manera:

- Para cada precio de descuento (C), calcule LEO
- Si LEO < mínimo para recibir el, ajuste la cantidad de Q= mínimo para descuento.
- Para cada LEO o Q ajustada, calcule el costo total CT= DC + (D/Q) Co + Q / 2 Ch
- Seleccione la cantidad de costo más bajo.

Ejemplo:

Una empresa compra un producto a un proveedor a un precio unitario de $10 por unidad. El proveedor ofrece un descuento por cantidad según la siguiente tabla:

Cantidad	Descuento (%)
100	2
200	5
300	7

Las otras variables del problema son las siguientes:

- Demanda anual (D): 1000 unidades.

- Costo de ordenar (Co): $50 por pedido.
- Costo de mantenimiento de inventario por unidad por período (Ch): $2 por unidad por año.
- Tasa de descuento (r): 0.02.

El objetivo es determinar la cantidad de pedido óptima que minimiza los costos totales de inventario y compra, considerando los descuentos ofrecidos por el proveedor.

Solución en Python:

```
import math

# Variables del problema
D = 1000  # Demanda anual
Co = 50   # Costo de ordenar por pedido
Ch = 2    # Costo de mantenimiento de inventario por unidad por año
r = 0.02  # Tasa de descuento

# Precios de descuento y sus cantidades correspondientes
descuentos = {100: 0.02, 200: 0.05, 300: 0.07}

# Función para calcular la cantidad económica de pedido (LEO)
def calcular_LEO(C):
    return math.sqrt((2 * D * Co) / (C * (1 - r)))

# Función para calcular el costo total
def calcular_costo_total(C, Q):
    return D * C + (D / Q) * Co + (Q / 2) * Ch

# Inicializar variables para el cálculo
mejor_costo = float('inf')
mejor_C = None
mejor_Q = None

# Calcular el costo total para cada precio de descuento
for cantidad, descuento in descuentos.items():
    C = 10 * (1 - descuento)  # Calcular el precio con descuento
    Q = calcular_LEO(C)       # Calcular la cantidad económica de pedido
    costo_total = calcular_costo_total(C, Q)  # Calcular el costo total

    # Actualizar la mejor solución encontrada hasta el momento
    if costo_total < mejor_costo:
        mejor_costo = costo_total
```

```python
        mejor_C = C
        mejor_Q = Q

# Imprimir la solución encontrada
print("Cantidad de Pedido óptima:", round(mejor_Q, 2))
print("Costo Total mínimo:", round(mejor_costo, 2))
print("Precio de Descuento correspondiente:", round(mejor_C, 2))
```

Salida:

```
Cantidad de Pedido óptima: 104.75
Costo Total mínimo: 9882.08
Precio de Descuento correspondiente: 9.3
```

4.3 RECURSOS

4.3.1 Material de referencia de la unidad

<<A partir del material en el que se apoyó para diseñar cada uno de los temas, diligencie correctamente la siguiente tabla, la cual servirá como recurso para que el estudiante pueda ir a los autores referenciados y así fortalecer aún su proceso de aprendizaje. Antes de hacer entrega de este material, recuerde la importancia de verificar que los enlaces URL estén escritos correctamente.>>

Tema	**Enlace URL**	**Especificación de páginas o instrucciones de lectura**
Conceptos de teoría de inventarios	https://elibro.net/es/lc/remington/titulos/59186?as_all=inventarios&as_all_op=unaccent__icontains&prev=as	Capítulo 1 elaboración y gestión de inventarios
Teoría de inventarios	https://elibro.net/es/lc/remington/titulos/59186?as_all=inventarios&as_all_op=unaccent__icontains&prev=as	Capítulo 2 valoración y cálculo de inventarios
Teoría de colas	https://elibro.net/es/lc/remington/titulos/132820?as_all=teorias__de__colas&as_all_op=unaccent__icontains&prev=as	Capítulo 1 Teoría de colas y tiempos de espera

		Capítulo 2 Distribuciones usuales en teoría de colas

4.3.2 Material de profundización de la unidad

<<Diligencie la siguiente tabla con recursos pertinentes y diferentes a los que usó durante el diseño de cada uno de los temas, ya que esto se convierte en una herramienta importante para que el estudiante pueda profundizar y afianzar su aprendizaje. Antes de hacer entrega de este material, recuerde la importancia de verificar que los enlaces URL estén escritos correctamente.>>

Tema	**Enlace URL**	**Especificación de páginas o instrucciones de lectura**
Modelo de inventarios: EOQ Básico. Simulador en Excel. Explicación conceptos	https://www.youtube.com/watch?v=pwU9quc86Hs	Video de profundización, visualizar todo el video
Modelo de inventarios: EOQ Básico. Punto de reorden. Simulador en Excel.	https://www.youtube.com/watch?v=1K5SnH6CbIU	Video de profundización, visualizar todo el video
Teoría de colas simulación en excel	https://www.youtube.com/watch?v=kPNf4je_hTU	Video de profundización, visualizar todo el video

4.4 EJERCICIOS DE PROFUNDIZACIÓN

1. Seleccionar un problema real de la vida cotidiana donde se evidencia un problema de colas. (almacenes de cadena, restaurantes, cajeros automáticos, mesas de servicio, etc)

2. Identificar la dinámica de la cola y hacer un análisis descriptivo de la misma. (cantidad de servidores, LIFO o FIFO, demás descripción del problema, tipo de modelo M/M/s).

5. Realizar el análisis matemático de la cola (medidas de desempeño Ls, Lq, Ws, Wq, P0, etc)

6. Plantear dos o tres preguntas orientadoras y de análisis para la cola. (¿Cuál es la probabilidad de que hallan más de 5 personas en la cola?, ¿Cuál es la probabilidad de que las personas tengan que esperar más de 5 minutos en la cola?)

7. Plantea al menos dos conclusiones significativas del proceso.

4.5 PISTAS DE APRENDIZAJE

A partir de los temas desarrollados en la unidad, escriba a modo de tips las consignas o principios fundamentales que el estudiante debería tener siempre presente. En cuanto a la longitud, no debe superar la cantidad de caracteres que tiene un twitt.

Recuerde que:

- Encuentra un balance entre minimizar costos y asegurar una experiencia satisfactoria para el cliente al diseñar sistemas de colas.

- Mantén niveles óptimos de inventario para minimizar los costos de almacenamiento y evitar la escasez de productos, utilizando técnicas como el punto de pedido y el inventario de seguridad.

- Evalúa regularmente las políticas de inventario para identificar oportunidades de mejora, como ajustar parámetros de reorden o implementar sistemas de gestión de inventarios más avanzados.

5 BIBLIOGRAFÍA

Burbano Pantoja, V. M. Á. Valdivieso Miranda, M. A. & Burbano Valdivieso, Á. (2018). Aplicaciones de la teoría de colas y líneas de espera en contextos específicos de investigación: (ed.). Editorial UPTC. https://elibro.net/es/lc/remington/titulos/132820

Cruz Fernández, A. (2017). Gestión de inventarios. UF0476: (ed.). IC Editorial. https://elibro.net/es/lc/remington/titulos/59186

D. Ríos, S. Ríos y J. Martín. 2000. Simulación: Métodos y Aplicación.

J. Barceló. 1996. Simulación de Sistemas Discretos.

Moreno Castro, T. F. (2019). El pronóstico de ventas en los negocios: modelos y aplicaciones: (ed.). RIL editores. https://elibro.net/es/lc/remington/titulos/130781

Sheldom M. Ross. 1999. Simulación. 2da. Edición.

Urquía Moraleda, A. & Martín Villalba, C. (2016). Métodos de simulación y modelado: (ed.). UNED - Universidad Nacional de Educación a Distancia. https://elibro.net/es/lc/remington/titulos/48877