$\boxed{39}$ ♡ Soit f un endomorphisme de (E, +, .). Montrons l'équivalence entre Im(f) = Im($f^3$) et Im(f) = Im($f^2$),
soit pour que vous voyez bien : Im(f) = Im($f^3$) $\Leftrightarrow$ Im(f) = Im($f^2$) (Waa, là je vois beaucoup mieux).

Il y a ainsi DEUX SENS à montrer.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que Im(f) = Im($f^3$),
ainsi, Im(f) $\subset$ Im($f^3$) et Im(f) $\supset$ Im($f^3$)
Or, on a Im($f^3$) $\subset$ Im($f^2$) (par la propriété : E $\supset$ Im(f) $\supset$ Im($f^2$) $\supset$ Im($f^3$) $\supset$ Im($f^4$) ..)
ainsi Im(f) $\subset$ Im($f^3$) et Im($f^3$) $\subset$ Im($f^2$), alors $\boxed{\text{Im(f)} \subset \text{Im}(f^2)}$
Mais qu'en est-il de l'autre sens? Im(f) $\supset$ Im($f^2$) ?
Ceci, je l'ai dit plus tôt, ça vient de : E $\supset$ $\boxed{\text{Im(f)} \supset \text{Im}(f^2)}$ $\supset$ Im($f^3$) $\supset$ Im($f^4$) ..
qui peut lui-même venir de la propriété : pour f et g, deux endomorphismes de (E,+,.), $\boxed{\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)}$
On a bien l'implication : $\boxed{\text{Im(f)} = \text{Im}(f^3) \Rightarrow \text{Im(f)} = \text{Im}(f^2)}$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que Im(f) = Im($f^2$),
ainsi, Im(f) $\subset$ Im($f^2$) et Im(f) $\supset$ Im($f^2$)
On a facilement Im(f)$\supset$ Im($f^2$) $\supset$ Im($f^3$), ainsi $\boxed{\text{Im(f)} \supset \text{Im}(f^3)}$.
Pour l'autre sens, comment avoir : Im(f) $\subset$ Im($f^3$) ?
Comme Im(f) $\subset$ Im($f^2$) (par hypothèse), Prenons $\vec{a}$ dans Im($f^2$). Il s'écrit $\vec{a}$=$f^2(\vec{b})$ pour au moins un $\vec{b}$ dans (E,+,.)
*On doit montrer que* $\vec{a}$=$f^3(\vec{c})$ pour au moins un $\vec{c}$ bien choisis
Afin d'utiliser l'hypothèse, on écrit $\vec{a}$=f(f($\vec{b}$)). Le vecteur f($\vec{b}$) est dans Im(f).
Par hypothèse "on n'a rien perdu de f à $f^2$", il est donc dans Im($f^2$). Il s'écrit f($\vec{b}$) = $f^2(\vec{c})$ pour au moins un $\vec{c}$ dans (E,+,.).
Mais alors, on a $\vec{a}$=f($f^3(\vec{c})$). C'est gagné $\vec{a}$ est dans Im($f^3$)
on lit : $\boxed{\text{Im(f)} \subset \text{Im}(f^3)}$
On a également l'implication : $\boxed{\text{Im(f)} = \text{Im}(f^2) \Rightarrow \text{Im(f)} = \text{Im}(f^3)}$

Comme on a bien les deux implications, on a l'équivalence, enfin, on peut encadrer ceci : $\boxed{\text{Im(f)} = \text{Im}(f^3) \Leftrightarrow \text{Im(f)} = \text{Im}(f^2)}$