

[31] Calculons $I = \int_0^1 2^x \cdot 3^{-x} \cdot 4^x \cdot 5^{-x} \cdot dx$:

Je ne vais rien vous apprendre mais : $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ et $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$

Ainsi $I = \int_0^1 2^x \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x \cdot 4^x \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x \cdot dx$

soit $I = \int_0^1 \left(\frac{8}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x \cdot dx$ voire même $I = \int_0^1 \left(\frac{8}{15}\right)^x \cdot dx$

Comment intégrer ça ? On va utiliser la forme $e^{\ln(\cdot)}$:

Ainsi : $a^x = e^{x \cdot \ln(a)}$ et $x \longrightarrow e^{x \cdot \ln(a)}$ se primitive en : $x \longrightarrow \frac{e^{x \cdot \ln(a)}}{\ln(a)}$

Maintenant, il ne reste plus grand chose, on a : $I = \left[\frac{\left(\frac{8}{15}\right)^x}{\ln\left(\frac{8}{15}\right)} \right]_0^1 = \left[\frac{8^x}{\ln\left(\frac{8}{15}\right) \cdot 15^x} \right]_0^1$

Après calcul, on obtient : $I = \frac{8^1}{\ln\left(\frac{8}{15}\right) \cdot 15^1} - \frac{8^0}{\ln\left(\frac{8}{15}\right) \cdot 15^0} = -\frac{7}{\ln\left(\frac{8}{15}\right) \cdot 15}$