$\boxed{10}$ I=$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\theta)}{\cos^3(\theta)+\sin^3(\theta)} \cdot d\theta$ et J=$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\theta)}{\cos^3(\theta)+\sin^3(\theta)} \cdot d\theta$

Pour cet exercice, j'ai envisagé un raisonnement plus calculatoire, d'autres approches sont envisageables, comme peut-être passer par I+J et I-J (et J-I) si jamais ces intégrales sont plus faciles à calculer, pour trouver I et J :

Cette méthode permettra de revoir certaines méthodes et on jonglera avec quelques astuces :
J=$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\theta)}{\cos^3(\theta)+\sin^3(\theta)} \cdot d\theta$

Pour l'existence, le dénominateur n'est pas nul le long des bornes de l'intervalle.

Alors, en multipliant numérateur et dénominateur par $\frac{1}{sin^3(\theta)}$

On obtient : J = $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\sin^2(\theta)}}{\cot^3(\theta)+1} \cdot d\theta$

Rappel qui ne fait pas de mal : cot = $\frac{\cos}{\sin}$

J'effectue un changement de variable en posant : $\theta = \tan(u)$ soit d$\theta = (1+\tan^2(u)) \cdot du = \frac{du}{\cos^2(u)}$
soit u = $\cot(\theta)$ soit du = - $\frac{d\theta}{\sin^2(\theta}$
Ainsi, on a : $\int -\frac{du}{u^3-1} = -\int \frac{du}{(u-1)(u^2+u+1)} = -\int \frac{A}{u-1} + \frac{Bu+C}{u^2+u+1}$
On a du Bu+C au numérateur car dénominateur est un polynôme à discriminant négatif

Après identification : A = $\frac{1}{3}$; B = -$\frac{1}{3}$; C = -$\frac{2}{3}$, pardon, vous voulez vraiment que je la fasse ? Allons-y :

Du coup, il y aurait égalité : $\frac{du}{(u-1)(u^2+u+1)} = \frac{A}{u-1} + \frac{Bu+C}{u^2+u+1}$

1 = A $\cdot$ (u^2+u+1) + (Bu+C) $\cdot$ (u-1)
1 = u^2 $\cdot$ (A+B) + u $\cdot$ (A-B+C) + (A-C)

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-B+C=0 \\ A-C=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A=-B \\ 2B+A-1=0 \\ C=A-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{3} \\ B=-\frac{1}{3} \\ C=-\frac{2}{3} \end{cases}$$

Bon, repassons au calcul :
J=-(-$\frac{1}{3}\int \frac{du}{u-1} - \frac{1}{6}\int \frac{2u+1}{u^2+u+1} \cdot du - \frac{1}{2}\int \frac{du}{a(u+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$)
J= -(-$\frac{1}{3} \cdot [ln(u-1)] - \frac{1}{6} \cdot \left[ln(u^2+u+1)\right] - \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\left[arctan(\frac{u+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}})\right]$

Comme u = cot(θ) et θ constituait les bornes de l'intégrale, on obtient :

$$\boxed{J= -(-\frac{1}{3}\cdot\left[ln(\cot(\theta)-1)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{6}\cdot\left[ln(cot(\theta)^2+cot(\theta)+1)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\left[arctan(\frac{cot(\theta)+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}})\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}$$

Pour I=$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\theta)}{\cos^3(\theta)+\sin^3(\theta)}\cdot d\theta$, on multiplie par $\frac{1}{cos(\theta)^3}$, on obtient :

I = $\int \frac{\frac{1}{cos(\theta)^2}}{1+tan(\theta)^3}\cdot d\theta$.
Ce sera la même chose, mais en posant :

u = tan(θ) soit du = $\frac{d\theta}{cos(\theta)^2}$

Ainsi, on obtient I = $\int \frac{du}{u^3+1}$

On refait la même décomposition d'éléments simples :
I = $\int \frac{du}{(u+1)(u^2-u+1)} = \int (\frac{A}{u+1} + \frac{Bu+C}{u^2-u+1})\cdot du$
On a par la méthode des pôles : A = $\frac{1}{3}$; B = -$\frac{1}{3}$; C=$\frac{2}{3}$
I = $\frac{1}{3}\int \frac{du}{u+1} - \frac{1}{3}\int \frac{u-2}{u^2-u+1}\cdot du$
= $\frac{1}{3}\int \frac{du}{u+1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{2u-4}{u^2-u+1}\cdot du$
=$\frac{1}{3}\int \frac{du}{u+1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{2u-1-3}{u^2-u+1}\cdot du$
= $\frac{1}{3}\int \frac{du}{u+1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{2u-1}{u^2-u+1}\cdot du - \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\int \frac{du}{u^2-u+1}$
=$\frac{1}{3}\cdot\left[ln(u+1)\right] - \frac{1}{6}\cdot\left[ln(u^2-u+1)\right] + \frac{1}{2}\frac{4}{3}\int \frac{du}{(\frac{2u-1}{\sqrt{3}})^2+1}$
=$\frac{1}{3}\cdot\left[ln(u+1)\right] - \frac{1}{6}\cdot\left[ln(u^2-u+1)\right] + \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\left[arctan(\frac{2u-1}{\sqrt{3}})\right]$
=$\frac{1}{3}\cdot\left[ln(u+1)\right] - \frac{1}{6}\cdot\left[ln(u^2-u+1)\right] + \frac{1}{\sqrt{3}}\left[arctan(\frac{2u-1}{\sqrt{3}})\right]$
Comme u = tan(θ), on a ainsi

$$\boxed{I=\frac{1}{3}\cdot\left[ln(\tan(\theta)+1)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{6}\cdot\left[ln(\tan(\theta)^2-\tan(\theta)+1)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\left[arctan(\frac{2\tan(\theta)-1}{\sqrt{3}})\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}$$

A la suite, après le conseil de notre coach, pour pas que cela n'explose en $\frac{\pi}{2}$ pour les tangentes, réunissons les logarithmes en un seul :
I=$\frac{2}{6}\cdot\left[ln(\tan(\theta)+1)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{6}\cdot\left[ln(\tan(\theta)^2-\tan(\theta)+1)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\left[arctan(\frac{2\tan(\theta)-1}{\sqrt{3}})\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$
I=$\frac{1}{6}\cdot\left[2\cdot ln(\tan(\theta)+1)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{6}\cdot\left[ln(\tan(\theta)^2-\tan(\theta)+1)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\left[arctan(\frac{2\tan(\theta)-1}{\sqrt{3}})\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$
I=$\frac{1}{6}\cdot\left[ln((\tan(\theta)+1)^2)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{6}\cdot\left[ln(\tan(\theta)^2-\tan(\theta)+1)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\left[arctan(\frac{2\tan(\theta)-1}{\sqrt{3}})\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$
I=$\frac{1}{6}\cdot\left[ln(\tan(\theta)^2+2\cdot\tan(\theta)+1)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{6}\cdot\left[ln(\tan(\theta)^2-\tan(\theta)+1)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\left[arctan(\frac{2\tan(\theta)-1}{\sqrt{3}})\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$
I=$\frac{1}{6}\cdot\left[ln(\frac{\tan(\theta)^2+2\cdot\tan(\theta)+1}{\tan(\theta)^2-\tan(\theta)+1})\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\left[arctan(\frac{2\tan(\theta)-1}{\sqrt{3}})\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$
I=$\frac{1}{6}\cdot\left[ln(\frac{\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}^2+2\cdot\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}+1}{\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}^2-\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}+1})\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\left[arctan(\frac{2\tan(\theta)-1}{\sqrt{3}})\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

I=$\frac{1}{6}\cdot\left[ln(\frac{\sin(\theta)^2+2\cdot\sin(\theta)\cdot\cos(\theta)+\cos(\theta)^2}{\sin(\theta)^2-\sin(\theta)\cos(\theta)+\cos(\theta)^2})\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\left[arctan(\frac{2\tan(\theta)-1}{\sqrt{3}})\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$
I=$\frac{1}{6}\cdot\left[ln(\frac{\sin(\theta)^2+sin(2\cdot\theta)+\cos(\theta)^2}{\sin(\theta)^2-\sin(\theta)\cos(\theta)+\cos(\theta)^2})\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\left[arctan(\frac{2\tan(\theta)-1}{\sqrt{3}})\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$
I=$\frac{1}{6}\cdot\left[ln(\frac{1+sin(2\cdot\theta)}{1-\sin(\theta)\cos(\theta)})\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\left[arctan(\frac{2\tan(\theta)-1}{\sqrt{3}})\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$
I=$\frac{1}{6}\cdot\left[ln(\frac{1+\sin(2\cdot\theta)}{1-\frac{1}{2}\cdot sin(2\cdot\theta)})\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\left[arctan(\frac{2\tan(\theta)-1}{\sqrt{3}})\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$
Comme le terme : $ln(\frac{1+\sin(2\cdot\theta)}{1-\frac{1}{2}\cdot sin(2\cdot\theta)})$ tend vers 1, au ln, cela faut 0..
Pour l'arctangente, il suffit de faire la limite en $\frac{\pi}{2}$ On obtient alors :
I= $\frac{1}{\sqrt{3}}(\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{6}))$
I= $\frac{1}{\sqrt{3}}(\frac{2\cdot\pi}{3})$

$$\boxed{\text{I}=\frac{2\cdot\pi}{3\cdot\sqrt{3}}}$$

Bon, je vous admets, j'ai calculé I+J = $\frac{4\cdot\pi}{3\sqrt{3}}$ (M A I S c'est un prétexte pour ne pas faire la même chose avec J..)

Ainsi, -J = I - (I+J) = $\frac{2\cdot\pi}{3\cdot\sqrt{3}}-\frac{4\cdot\pi}{3\sqrt{3}}=-\frac{2\cdot\pi}{3\sqrt{3}}$

Finalement : $\boxed{\text{J}=\frac{2\cdot\pi}{3\cdot\sqrt{3}}}$

Je l'admets, c'est extrêmement calculatoire.. J'ai essayé avec la somme et la différence, et le petit coup de pouce du prof : $\frac{(a+b)}{a^3+b^3}$ Cela se simplifie..!

Rectification pour la somme (28/06) :

Tout d'abord petit rappel : $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ ainsi $\frac{a+b}{a^3+b^3}=\frac{1}{(a^2-ab+b^2)}$

Calculons alors :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(\theta)+\cos(\theta)}{\sin(\theta)^3+\cos(\theta)^3}\cdot d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin(\theta)^2-\sin(\theta)\cdot\cos(\theta)+\cos(\theta)^2}\cdot d\theta\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1-\sin(\theta)\cdot\cos(\theta)}\cdot d\theta\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1-\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}\cdot\cos(\theta)^2}\cdot d\theta\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1-\tan(\theta)\cdot\cos(\theta)^2}\cdot d\theta\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1-\tan(\theta)\cdot\frac{1}{1+\tan(\theta)^2}}\cdot d\theta\end{aligned}$$

On applique le changement de variable : $t=\tan(\theta)$ ainsi $d\theta=\frac{dt}{1+t^2}$, on obtient alors :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\theta)+\cos(\theta)}{\sin(\theta)^3+\cos(\theta)^3}\cdot d\theta &= \int_0^x \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1-\frac{t}{1+t^2}} \\ &= \int_0^x \frac{dt}{1-t+t^2} \\ &= \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot arctan(\frac{2}{\sqrt{3}(t-\frac{1}{2})})\right]_0^x \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2}))-\underbrace{\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(-\frac{1}{\sqrt{3}})}_{+\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6}}\end{aligned}$$

Enfin,

$$\lim x\to\infty \tfrac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\tfrac{2}{\sqrt{3}}(x-\tfrac{1}{2}))-\underbrace{\tfrac{2}{\sqrt{3}}\arctan(-\tfrac{1}{\sqrt{3}})}_{+\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6}} = \tfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot\tfrac{\pi}{2}+\tfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot\tfrac{\pi}{6} = \tfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot\tfrac{2\cdot\pi}{3} = \boxed{\tfrac{4\cdot\pi}{3\sqrt{3}}}$$