Contoh Soal Latihan UAS

Engineering Mathematics I

1. Tentukan dari persamaan-persamaan berikut, yang merupakan PDB orde tinggi:
   a. $y''' - y'' + 3y = 2e^{2x}$
   b. $(y^3)'' + y' + 2y = 0$
   c. $y\frac{d^2y}{dx^2} - 3y\frac{dy}{dx} - 4y = e^{2x}$
   d. $(y^2)^{(5)} + 4y^{(4)} - 8y'' + 3y' - y = 2\cos(2x)$

2. Tentukan solusi dari PDB orde tinggi non-homogen berikut!
   $y''' + 2y'' - 3y' = 5e^{4x} - 6$

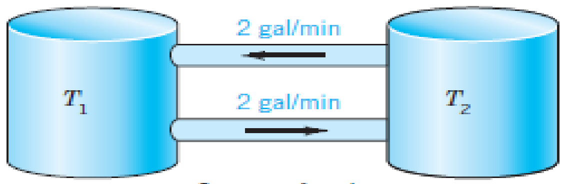
3. Sistem gerak harmonik benda digantung pada sebuah pegas, jika massa benda m=1/4 kg dan konstanta pegas k= 16 N/m, redaman = 0 (undamped). Pegas saat tertarik benda bertambah panjang 1 m dan mulai bergerak ke atas dengan kecepatan 8 m/s. Sistem tidak diberi gaya luar.
   a. Tentukan model persamaan yang menggambarkan sistem gerak harmonik pada pegas pada contoh kasus di atas!
   b. Tentukan persamaan gerak benda!
   c. Tentukan amplitudo, sudut fasa, frekuensi dan periode gerak benda!

4. Tentukanlah muatan Q dan I sebagai fungsi watku t dalam rangkaian RLC seri jika R = 16 Ω, L = 0,02 H, C = 2×10-4 F dan E = 12 volt. Anggaplah pada saat t= 0, arus I = 0 dan muatan kapasitor Q = 0

5. Ubah persamaan-persamaan berikut ke dalam bentuk sistim PDB!
   a. $y'' + 192y' + 16y = 0$
   b. $y'' - 5y = 2e^{3t}$
   c. $y''' - y'' + 3y = 0$

6. Cari solusi dari sistim PDB berikut!
   $x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} X$

7. Terdapat 2 tangki air yang mula-mula terdapat 100 gal air disetiap tangki. Dalam T1 airnya murni, sedangkan pada T2 terdapat 150 lb pupuk yang terlarut. Dengan mengsirkulasi dan mengaduk cairan, jumlah pupuk dalam T1 dan T2 berubah setiap waktu t. Berapakah waktu yang diperlukan agar T1 mengandung setidaknya setengah dari pupuk yang tersisa di T2?



System of tanks

Kunci Jawaban

1. **Pilihan (a) dan (d)**

   Pembahasan:

- PDB orde tinggi merupakan PDB yang memiliki orde > 2.
- Orde sendiri ditentukan oleh turunan tertinggi dalam PDB yang ada, berikut adalah beberapa contoh penulisan orde dalam suatu PDB:

$x\boxed{\frac{dy}{dx}} - y^2 = 0$	adalah PDB orde satu
$xy\boxed{\frac{d^2y}{dx^2}} - y^2 \sin x = 0$	adalah PDB orde dua
$\boxed{\frac{d^3y}{dx^3}} - y\frac{dy}{dx} + e^{4x} = 0$	adalah PDB orde tiga

Notasi lain,

$x\boxed{y'} - y^2 = 0$	adalah PDB orde satu
$xy\boxed{y''} - y^2 \sin x = 0$	adalah PDB orde dua
$\boxed{y'''} - yy' + e^{4x} = 0$	adalah PDB orde tiga

Apabila orde lebih dari 3 biasa ditulis dalam bentuk berikut:

$\boxed{y^{(4)}} + y''' - y'' + 3y' - y = 0$	adalah PDB orde empat
$\boxed{y^{(5)}} + y^{(4)} - y'' + 3y' - y = 0$	adalah PDB orde lima

2.

$y''' + 2y'' - 3y' = 5e^{9x} - 6 \Rightarrow$ PDB Orde 3 Non-homogen

1. Cari Solusi Homogen (y_h).

Persamaan : $y''' + 2y'' - 3y' = 0$

Pers. Karakteristik : $r^3 + 2r^2 - 3r = 0$

Pemfaktoran : $r(r+3)(r-1) = 0$

$r_1 = 0 \vee r_2 = -3 \vee r_3 = 1$.

$y_h = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \dots + C_n e^{r_n x}$

$y_h = C_1 e^{0x} + C_2 e^{-3x} + C_3 e^{x}$

$\boxed{y_h = C_1 + C_2 e^{-3x} + C_3 e^{x}.}$

2. Cari Solusi Partikular (y_p).
→ Gunakan metode koefisien tak tentu.

$$y_p = Ae^{4x} + Bx$$
$$y'_p = 4Ae^{4x} + B$$
$$y''_p = 16Ae^{4x}$$
$$y'''_p = 64Ae^{4x}$$

Substitusi ke PDB awal

$$y''' + 2y'' - 3y' = 5e^{4x} - 6$$
$$(64Ae^{4x}) + 2(16Ae^{4x}) - 3(4Ae^{4x} + B) = 5e^{4x} - 6$$
$$64Ae^{4x} + 32Ae^{4x} - 12Ae^{4x} - 3B = 5e^{4x} - 6$$
$$\boxed{84Ae^{4x}}\boxed{-3B} = 5e^{4x} - 6$$

Bandingkan koef dengan variabel yang sama.

Maka: $84A\cancel{e^{4x}} = 5\cancel{e^{4x}}$ | $-3B = -6$

$A = \frac{5}{84}$ | $B = 2.$

Sehingga, $y_p = Ae^{4x} + Bx = \frac{5}{84}e^{4x} + 2x.$

3. Solusi ($y = y_h + y_p$)

$$y = y_h + y_p$$
$$y = C_1 + C_2e^{-3x} + C_3e^{x} + \frac{5}{84}e^{4x} + 2x$$

3.

a. Model persamaan sistem gerak harmonik pada pegas.

$$m.\frac{d^2y}{dt^2} + d.\frac{dy}{dt} + ky = F(t)$$

pada contoh kasus diketahui redaman d=0, gaya luar $() = 0$, massa m= ¼ kg , konstanta pegas k= 16 N/m, sehingga model persamaan gerak harmonik pada pegas menjadi:

$$\frac{1}{4}.\frac{d^2y}{d\,t^2} + 16y = 0$$

dengan kondisi awal:

posisi awal benda $y(0) = 1$ dan

kecepatan awal benda $\frac{dy}{dt}(0) = -8$.

b. Persamaan gerak benda.

persamaan gerak benda didapatkan dengan menyelesaikan model PD (a), yaitu:

$$\frac{1}{4}.\frac{d^2y}{dt^2} + 16y = 0 \leftrightarrow \frac{d^2y}{dt^2} + 64y = 0$$

$$y(0) = 0{,}1\,; \frac{dy}{dt}(0) = -8$$

penyelesaiannya adalah:

- persamaan karakteristik dari PD di atas $r^2 + 64 = 0$
- akar-akar persamaan karakteristik $r = \pm\, i8$
- solusi umum PD:

$$y(t) = c_1 \cos 8t + c_2 \sin 8t$$

dengan memasukkan syarat kondisi awal maka:

$$y(0) = c_1 = 1$$

$$y'(0) = 8c_2 = -8 \rightarrow c_2 = -1$$

sehingga persamaan gerak benda:

$$y(t) = \cos 8t - \sin 8t$$

c. Menentukan amplitudo, sudut fasa, frekuensi dan periode dengan membentuk persamaan () = − dalam satu sinus/cosinus. Bentuk umum persamaan satu sinus/cosinus sistem gerak pada pegas:

$$y(t) = R\,cos(\omega_0 t - \theta)$$
$$= R\,cos\,(8t - \theta)$$

dengan:

$$R = \sqrt{c_1{}^2 + c_2{}^2}$$
$$tan\,\theta = \frac{c_2}{c_1}$$
$$f = \frac{\omega_0}{2\pi}$$
$$T = 1/f = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

sehingga:

$$amplitudo\ R = \sqrt{1 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$
$$frekuensi\ f = \frac{8}{2\pi} = \frac{4}{\pi}$$
$$periode\ \ T = \frac{\pi}{4}$$
$$tan\,\theta = -1(kuadran\ IV)$$
$$sudut\ fasa\ \theta = \frac{7\pi}{4}$$

4.

Penyelesaian:

Persamaan yang digunakan untuk menyelesaikan kasus ini:

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + \ R\ \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t)$$

Dengan substitusi R = 16 Ω, L = 0,02 H, C = 2×10^{-4} F dan E = 12 *volt*, maka diperoleh:

$$0{,}02\ \frac{d^2Q}{dt^2} + \ 16\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{(2\times 10^{-4})}Q = 12$$
$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{800\ dQ}{dt} + \ 250.000\ Q = 600$$

Penyelesaian Persamaan Homogen

- Persamaan karakteristik r^2 + 800 r + 250.000 = 0, mempunyai akar-akar:

$$r_{1,2} = \frac{[-800 \pm \sqrt{640.000-1.000.000}]}{2}$$

= -400 ± 300 i

- Sehingga penyelesaian homogen:

$$Q_h = e^{-400t}\,(C1\,cos\;300t + C_2\,sin\,300t)$$

Penyelesaian TakHomogen

- Dengan menggunaan metode koefisien taktentu , maka:

$$Q_k = A,\quad \frac{dQ_k}{dt} = 0,\quad \frac{d^2Q_k}{dt^2} = 0$$

- Substitusi $Q_k = A,\ \frac{dQ_k}{dt} = 0,\ \frac{d^2Q_k}{dt^2} = 0$ ke dalam persamaan :

$$\frac{d^2Q_k}{dt^2} + 800\,\frac{dQ_k}{dt} + 250.000\,Q = 600$$

Menghasilkan $Q_k = 2{,}4 \times 10^{-3}$

Karena itu penyelesaian lengkap adalah,

$$Q(t) = 2{,}4 \times 10^{-3} + e^{-400t}\,(C_1\,cos\;300t + C_2\,sin\,300t)$$

I(t) diperoleh dengan diferensiasi $Q(t)$ didapatkan:

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = -400e^{-400t}\,(C_1\,cos\;300t + C_2\;sin\;300t)$$

$$+\,e^{-400t}\,(-300C_1\,sin\,300t + 300C_2\,cos\;300t)$$

$$I(t) = e^{-400t}\,[(-400C_1 + 300C_2)\,cos300t + (-300C_1 - 400C_2)\,sin300t]$$

Bila diberlakukan syarat awal, t = 0, I = 0, Q = 0, maka:

$$0 = 2{,}4 \times 10^3 + C_1 \rightarrow C_1 = -2{,}4 \times 10^3$$

$$0 = -400C_1 + 300C_2 \;\rightarrow\; C_2 = \frac{4C_1}{3} = -3{,}2 \times 10$$

Jadi penyelesaian lengkap muatan listrik adalah

Q(t) = 10^{-3} [2,4 – e^{-400t} (2,4 cos 300t + 3,2 sin 300t)]

5.

(5) Transformasi

$$y^{(n)} = Fn(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$$
$$x_1 = y,\ x_2 = y',\ \dots,\ x_n = y^{(n-1)}$$

a. $y'' + 192y' + 16y = 0$

$x_1 = y$
$x_2 = y'$

- $x_1' = y'$
  $\boxed{x_1' = x_2}$
- $x_2' = y''$
- $y'' + 192y' + 16y = 0.$
  $x_2' + 192x_2 + 16x_1 = 0$
  $\boxed{x_2' = -192x_2 - 16x_1}$

Sistim PDB: $\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -16x_1 - 192x_2 \end{cases}$

b. $y'' - 5y = 2e^{3t}$

$x_1 = y$
$x_2 = y'$

- $\boxed{x_1' = x_2}$
- $x_2' = y''$
- $y'' - 5y = 2e^{3t}$
  $x_2' - 5x_1 = 2e^{3t}$
  $\boxed{x_2' = 5x_1 + 2e^{3t}}$

Sistim PDB: $\boxed{\begin{matrix} x_1' = x_2 \\ x_2' = 5x_1 + 2e^{3t} \end{matrix}}$

c. $y''' - y'' + 3y = 0$

$x_1 = y$
$x_2 = y'$
$x_3 = y''$

- $\boxed{x_1' = x_2}$
- $\boxed{x_2' = x_3}$
- $x_3' = y'''$
- $y''' - y'' + 3y = 0.$
  $x_3' - x_3 + 3x_1 = 0$
  $\boxed{x_3' = -3x_1 + x_3}$

Sistim PDB = $\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ x_3' = -3x_1 + x_3 \end{cases}$

6.

(6) $x' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}}_{A} x$

1. Cari Vektor Eigen Dari matriks A.

→ Cari nilai eigen

$\boxed{|A - \lambda I| = 0} \Rightarrow$ Rumus, I = matriks Identitas

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

$$[(1-\lambda)(1-\lambda)] - 4(1) = 0$$

$$1 - 2\lambda + \lambda^2 - 4 = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

$$(\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda_1 = 3 \vee \lambda_2 = -1$$

→ Cari Vektor eigen u/ kedua nilai eigen.

(a) Jika $\lambda_1 = 3$ dan $V_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, maka:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$-2a + b = 0 \ldots (1) \Rightarrow b = 2a.$

$4a - 2b = 0 \ldots (2)$

maka, $V_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 2a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, misi $a = 1$

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(b) Jika $\lambda_2 = -1$ dan $V_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, maka :

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} - (-1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2c + d = 0 \ldots (1) \Rightarrow d = -2c$$

$$4c + 2d = 0 \ldots (2)$$

Maka $V_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ -2c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, mis : $c = 1$

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(2) $x_n = V_n e^{\lambda n t}$

$X = C_1 x_1 + C_2 x_2 + \ldots + C_n x_n$

maka :

$X = C_1 x_1 + C_2 x_2$

$X = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}$

atau

$x_1 = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t}$

$x_2 = 2C_1 e^{3t} - 2C_2 e^{-t}$

7.

(7) 1. Buat Permodelan matematikanya

$y_1' =$ Inflow / min − Outflow / min

$= \frac{2}{100} y_2 - \frac{2}{100} y_1$

$y_2' =$ Inflow / min − Outflow / min

$= \frac{2}{100} y_1 - \frac{2}{100} y_2$

Sehingga,

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= -0{,}02\, y_1 + 0{,}02\, y_2 \\ y_2' &= 0{,}02\, y_1 - 0{,}02\, y_2 \end{aligned}\right\} y' = \begin{pmatrix} -0{,}02 & 0{,}02 \\ 0{,}02 & -0{,}02 \end{pmatrix} y$$

2. Cari Solusi umum sistem PDB

$$y' = \underbrace{\begin{pmatrix} -0{,}02 & 0{,}02 \\ 0{,}02 & -0{,}02 \end{pmatrix}}_{A} y$$

$|A - \lambda I| = 0.$

$$\left| \begin{pmatrix} -0{,}02 & 0{,}02 \\ 0{,}02 & -0{,}02 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} -0{,}02-\lambda & 0{,}02 \\ 0{,}02 & -0{,}02-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\left[(-0{,}02-\lambda)(-0{,}02-\lambda)\right] - \left[(0{,}02)(0{,}02)\right] = 0$$

$$\cancel{0{,}04} + 0{,}04\lambda + \lambda^2 \cancel{- 0{,}04} = 0.$$

$$\lambda^2 + 0{,}04\lambda = 0$$

$$(\lambda + 0{,}04)\lambda = 0$$

$$\boxed{\lambda_1 = 0 \vee \lambda_2 = -0{,}04}$$

↳ Nilai Eigen

ⓐ Jika $\lambda_1 = 0$, $V_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, maka:

$$\left(\begin{pmatrix} -0{,}02 & 0{,}02 \\ 0{,}02 & -0{,}02 \end{pmatrix} - 0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -0{,}02 & 0{,}02 \\ 0{,}02 & -0{,}02 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$$

$-0{,}02a + 0{,}02b = 0 \ldots (1) \Rightarrow \cancel{0{,}02}a = \cancel{0{,}02}b$

$0{,}02a - 0{,}02b = 0 \ldots (2) \quad a = b$

Maka, $V_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, mis: $b = 1$

$$\boxed{V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

ⓑ Jika $\lambda_1 = -0{,}04$, $V_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, maka:

$$\left(\begin{pmatrix} -0{,}02 & 0{,}02 \\ 0{,}02 & -0{,}02 \end{pmatrix} - (-0{,}04) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0{,}02 & 0{,}02 \\ 0{,}02 & 0{,}02 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$0{,}02c + 0{,}02d = 0 \ldots (1) \Rightarrow \cancel{0{,}02}d = -\cancel{0{,}02}c$

$d = -c$

$0{,}02c + 0{,}02d = 0 \ldots (2)$

Maka, $V_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ -c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, mis: $c = 1$

$$\boxed{V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

ⓒ Maka solusi umum:

$$y = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{0t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-0{,}04t}$$

$$\boxed{y = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-0{,}04t}}$$

③ Gunakan syarat / kondisi awal)

$y_1(0) = 0 \quad , y_2(0) = 150, t = 0$

$\Rightarrow y = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-0{,}04t}$

$\Rightarrow y(0) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 150 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 0 \quad \ldots (1) \\ C_1 - C_2 &= 150 \quad \ldots (2) \\ \hline 2C_2 &= -150 \\ C_2 &= -75 \end{aligned}$$

$\Rightarrow C_1 + C_2 = 0$

$C_1 - 75 = 0$

$C_1 = 75$

$\Rightarrow y = 75 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 75 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-0{,}04t}$.

atau

$y_1 = 75 - 75 e^{-0{,}04t}$ (untuk T_1)

$y_2 = 75 + 75 e^{-0{,}04t}$ (untuk T_2)

④ Jawaban Pertanyaan

$\Rightarrow T_1 = \frac{1}{2} T_2 \quad , T_1 + T_2 = 150$ (Jumlah Pupuk)

$\rightarrow T_1 + 2T_1 = 150$

$3T_1 = 150$

$T_1 = 50$

ketika $T_1 = 50$ maka terjadi kondisi $T_1 = \frac{1}{2} T_2$

$\rightarrow y_1 = 75 - 75 e^{-0{,}04t} = 50$

$$\begin{aligned} -75 e^{-0{,}04t} &= -25 \\ e^{-0{,}04t} &= \frac{1}{3} \\ \ln(e^{-0{,}04t}) &= \ln\left(\frac{1}{3}\right) \\ -0{,}04t &= -\ln(3) \\ t &= \frac{-\ln(3)}{-0{,}04} \end{aligned}$$

$\boxed{t \approx 27{,}47 \text{ sekon}}$

Jadi, waktu yang dibutuhkan agar T_1 mengandung ½ pupuk dari T_2 adalah 27,47 sekon