积分方程数值解

第二类 Fredholm 积分方程数值解

Bryan Huang

复旦大学数学科学学院

2021 年 12 月 22 日

1. 退化核方法
2. 投影方法
3. 迭代投影方法

1 退化核方法
泰勒级数逼近退化核
插值逼近退化核
退化核方法总结
2 投影方法
3 迭代投影方法

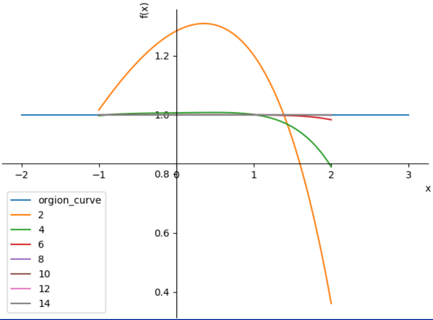
1. 退化核方法
   - 泰勒级数逼近退化核
   - 插值逼近退化核
   - 退化核方法总结
2. 投影方法
3. 迭代投影方法

方法简述

- 通过泰勒级数法构造退化核，进而求解第二类 Fredholm 方程。
- $K(t,s)=\sum_{i=0}^{\infty} k_i(t)(s-a)^i$
- $\lambda c_i-\sum_{j=1}^{n} c_j \int_a^b (s-a)^{i-1} k_{j-1}(s)ds=\int_a^b y(s)(s-a)^{i-1}ds$
- $x_n(t)=\frac{1}{\lambda}\left[y(t)+\sum_{i=0}^{n-1} c_{i+1}k_i(t)\right]$

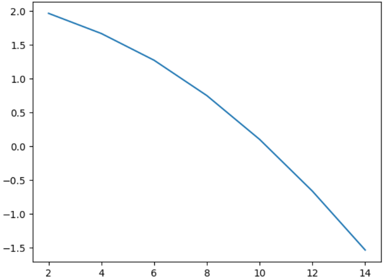
效果展示

- 取 $\lambda = 1, K(s,t) = e^{st}, y(t) = 1 - \frac{e^x - 1}{x}$ 满足 $\lambda x(t) - \int_0^1 k(s,t)x(s)ds = y(t)$，我们可以计算得到 $x = 1$ 为问题的解。(不做另外说明，之后都取该例子)
- 下图取 taylor 级数展开点 $x = 0$，并且分别选取展开级数 i in range(2,16,2)，也就是 $[2, 4, 6, 8, 10, 12, 14]$，计算在区间 $[begin, end]$ 的 L^2 范数为误差。



误差展示

- 下图将误差取对数 log10，可以看出基本上误差对数按照展开级数呈现线性变化。
- 图中 y 轴为误差的对数，x 轴则为展开的级数



1 退化核方法
泰勒级数逼近退化核
插值逼近退化核
退化核方法总结

2 投影方法

3 迭代投影方法

方法简述

- 通过插值公式构造退化核，进而求解第二类 Fredholm 方程。
- $k_n(t,s)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(t)\beta_i(s)=\sum_{i=1}^{n}l_i(t)k\left(t_i,s\right)$
- $\lambda c_i-\sum_{j=1}^{n}c_j\int_a^b l_j(s)k\left(t_i,s\right)ds=\int_a^b y(s)k\left(t_i,s\right)ds \quad i=1,2,\cdots,r$
- $x_n(t)=\frac{1}{\lambda}\left(\sum_{j=1}^{n}c_jl_j(t)+y(t)\right)$

等距点插值

- 首先展示在等距点插值的情况，左图为计算后得到的不同插值点个数下的曲线情况，右图为对应的误差。

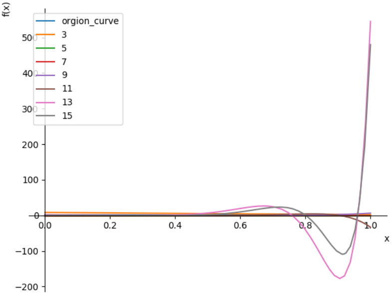


图 1: 曲线图

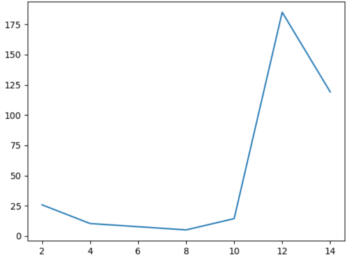


图 2: 误差图

等距点插值

- 我们可以发现，上图中，误差曲线是先下降而后急速上升，这应该和插值点的选取有关，我又选取了更多的插值点数，得到下图。
- 我们会发现点的个数增加并不能显著地降低误差，尤其是在积分的端点处。

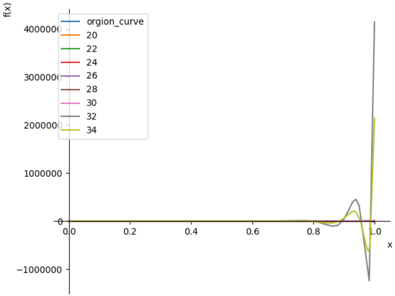


图 3: 曲线图

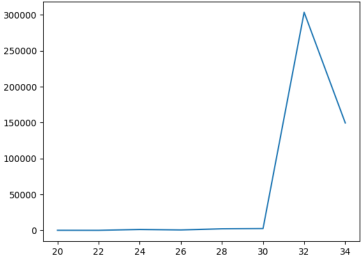


图 4: 误差图

Legendre 点插值

- 改变插值点的分布情况，我首先采取 Legendre 插值策略。

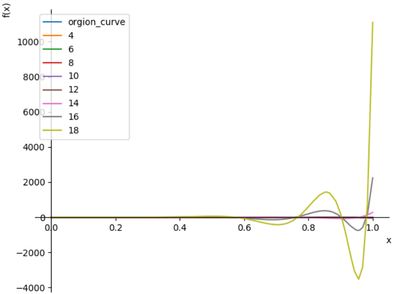


图 5: 曲线图

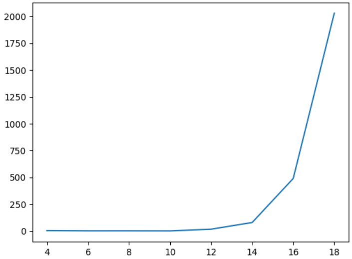


图 6: 误差图

Legendre 点插值

- 同样增加点的个数以及跨度，再次作图。
- 可惜地是，我依然发现增加插值点个数没能很好地降低误差。

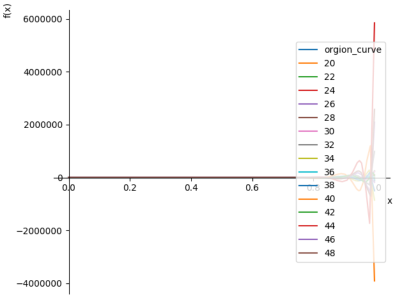


图 7: 曲线图

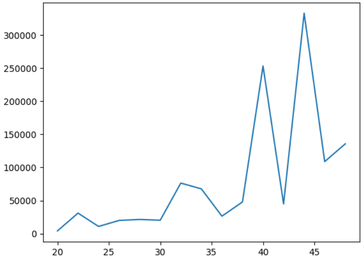


图 8: 误差图

chebyshev 点插值

- 参考微分方程数值解中采取 chebyshev 插值来应对 Runge 现象，我也尝试使用 chebyshev 插值点来处理积分核。

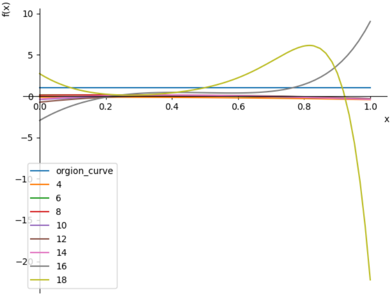


图 9: 曲线图

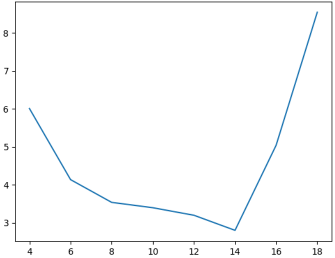


图 10: 误差图

chebyshev 点插值

- 我们可以发现，使用 chebyshev 插值看起来似乎确实比另外两种插值更好，但是依然也存在误差不减反增的情况，因此我也类似地增加了点数再次运行程序得到如下两张图。
- 我们可以发现，虽然也有凸起的时候，但是显然误差曲线是要优于另外两种插值方法的误差曲线的。

1 退化核方法
- 泰勒级数逼近退化核
- 插值逼近退化核
- 退化核方法总结

2 投影方法

3 迭代投影方法

退化核方法总结

- 相较于另外两种插值方法，chebyshev 插值退化核方法要更稳定。
- 可能受限于数值积分方法，在某些插值点上存在积分的误差，导致对最终结果造成影响。
- 对于本例，相比于插值法，泰勒级数法在积分区间上更加稳定，误差关于展开级数呈现对数下降的趋势。

1. 退化核方法
2. 投影方法
   - 配置法
   - Garlekin 法
3. 迭代投影方法

1 退化核方法

2 投影方法

配置法

Garlekin 法

3 迭代投影方法

方法简述

- 选取投影算子，满足 $P_n(\lambda I - K)x_n = P_n y$。
- 配置法是满足：$x_n(t_i) = x(t_i) \quad i = 1, 2, \cdots, n$
- 使得有式子：
  $\lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \phi_i(t_j) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\int_a^b k(t_j, s) \phi_i(s) ds \right) = y(t_j) \quad j = 1, 2, \cdots, n$ 成立。
- 选取 $\lambda = 1, K(s,t) = e^{st}, y(t) = t + (1 - e^t)/(2t)$。满足 $\lambda x(t) - \int_0^1 k(s,t)x(s)ds = y(t)$，在之后相应的迭代算法中，也使用该方程。

效果展示

- 选取投影算子，满足 $P_n(\lambda I - K)x_n = P_n y$。
- 配置法是满足：$x_n(t_i) = x(t_i) \quad i = 1, 2, \cdots, n$
- 使得有式子：
  $\lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \phi_i(t_j) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\int_a^b k(t_j, s) \phi_i(s) ds \right) = y(t_j) \quad j = 1, 2, \cdots, n$ 成立。

傅立叶级数基

- 取 $\lambda = 1, K(s,t) = e^{st}st^2, x(t) = 1 + e^t + t^2$ 满足 $\lambda x(t) - \int_0^1 k(s,t)x(s)ds = y(t)$ ，我们可以计算得到 $y(x) =$

$$
x^2 - \begin{cases} 0 \\ \qquad -x\left(\frac{4x^8}{x^{11}+3x^9+3x^7+x^5} - \frac{24x^6}{x^{11}+3x^9+3x^7+x^5} - \frac{66x^4}{x^{11}+3x^9+3x^7+x^5} - \frac{70x^2}{x^{11}+3x^9+3x^7+x^5} - \frac{24}{x^{11}+3x^9+3x^7+x^5}\right) \\ + x\left(-\frac{ex^{10}\cos(x)}{x^{11}+3x^9+3x^7+x^5} - \frac{2x^{10}\cos(x)}{x^{11}+3x^9+3x^7+x^5} + \frac{6x^9\sin(x)}{x^{11}+3x^9+3x^7+x^5} + \frac{3ex^9\sin(x)}{x^{11}+3x^9+3x^7+x^5} + \frac{8x^8\cos(x)}{x^{11}+3x^9+3x^7+x^5} + \frac{4ex^8\cos(x)}{x^{11}+3x^9+3x^7+x^5} - \frac{4ex^7\sin(x)}{x^{11}+3x^9+3x^7+x^5}\right. \\ \quad - \frac{6x^7\sin(x)}{x^{11}+3x^9+3x^7+x^5} - \frac{3ex^6\cos(x)}{x^{11}+3x^9+3x^7+x^5} + \frac{12x^6\cos(x)}{x^{11}+3x^9+3x^7+x^5} - \frac{54x^5\sin(x)}{x^{11}+3x^9+3x^7+x^5} + \frac{ex^5\sin(x)}{x^{11}+3x^9+3x^7+x^5} - \frac{32x^4\cos(x)}{x^{11}+3x^9+3x^7+x^5} - \frac{66x^3\sin(x)}{x^{11}+3x^9+3x^7+x^5} \\ \qquad \left. - \frac{58x^2\cos(x)}{x^{11}+3x^9+3x^7+x^5} - \frac{24x\sin(x)}{x^{11}+3x^9+3x^7+x^5} - \frac{24\cos(x)}{x^{11}+3x^9+3x^7+x^5}\right) \end{cases}
$$

  为问题的解。（不做另外说明，之后都取该例子）
- 采用函数 L2 范数作为误差函数。

效果展示

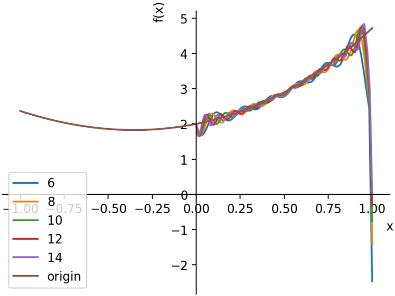


图 11: 曲线图

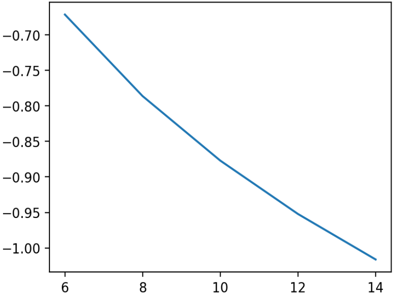


图 12: 误差图

帽子函数基

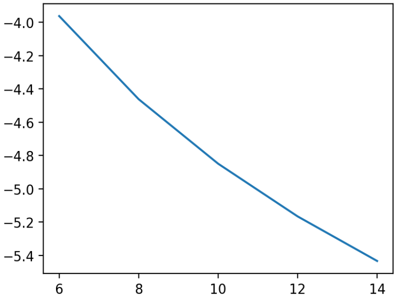


图 13: 曲线图

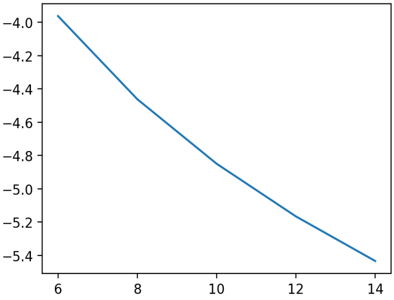


图 14: 误差图

1. 退化核方法
2. 投影方法
   - 配置法
   - Garlekin 法
3. 迭代投影方法

方法简述

- 选取 $\lambda = 1, K(s,t) = e^{st}, x(t) = 1 + 5t + e^{t}$。满足 $\lambda x(t) - \int_0^1 k(s,t)x(s)ds = y(t)$，在之后相应的迭代算法中，也使用该方程。
- 同理可以计算得到 $y(x) =$

$$5x - \begin{cases} 7 - \frac{11}{e} & \text{for } x = -1 \\ \frac{5}{2} + e & \text{for } x = 0 \\ \frac{ex^2e^x}{x^3+x^2} + \frac{6x^2e^x}{x^3+x^2} - \frac{2x^2}{x^3+x^2} + \frac{xe^x}{x^3+x^2} & \text{otherwise} \\ \quad + \frac{4x}{x^3+x^2} - \frac{5e^x}{x^3+x^2} + \frac{5}{x^3+x^2} & \end{cases} + e^x + 1$$

- 同样采用 L2 范数

傅立叶函数基

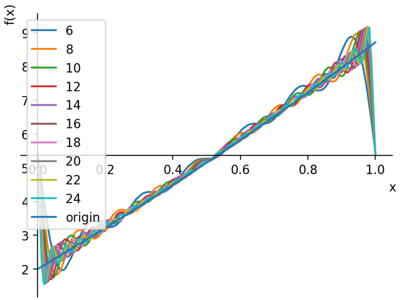


图 15: 曲线图

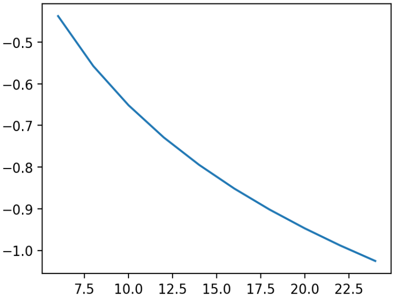


图 16: 误差图

1. 退化核方法
2. 投影方法
3. 迭代投影方法
   - 配置法 + 迭代投影算法
   - Garlekin 方法 + 迭代投影算法

1. 退化核方法
2. 投影方法
3. 迭代投影方法
   - 配置法 + 迭代投影算法
   - Garlekin 方法 + 迭代投影算法

方法简述

- 选取 $\lambda = 1, K(s,t) = e^{st} * x * y * *2, x(t) = 1 + e^t + t^2$。满足 $\lambda x(t) - \int_0^1 k(s,t)x(s)ds = y(t)$，在之后相应的迭代算法中，也使用该方程。
- 同理可以计算得到 $y(x) =$

$$x^2 - \left\{\begin{array}{l} 0 \\ \qquad -x\left(\frac{4x^8}{x^{11}+3x^9+3x^7+x^5} - \frac{24x^6}{x^{11}+3x^9+3x^7+x^5} - \frac{66x^4}{x^{11}+3x^9+3x^7+x^5} - \frac{70x^2}{x^{11}+3x^9+3x^7+x^5} - \frac{24}{x^{11}+3x^9+3x^7+x^5}\right) \\ + x\left(-\frac{ex^{10}\cos(x)}{x^{11}+3x^9+3x^7+x^5} - \frac{2x^{10}\cos(x)}{x^{11}+3x^9+3x^7+x^5} + \frac{6x^9\sin(x)}{x^{11}+3x^9+3x^7+x^5} + \frac{3ex^9\sin(x)}{x^{11}+3x^9+3x^7+x^5} + \frac{8x^8\cos(x)}{x^{11}+3x^9+3x^7+x^5} + \frac{4ex^8\cos(x)}{x^{11}+3x^9+3x^7+x^5} - \frac{4ex^7\sin(x)}{x^{11}+3x^9+3x^7+x^5}\right. \\ \quad - \frac{6x^7\sin(x)}{x^{11}+3x^9+3x^7+x^5} - \frac{3ex^6\cos(x)}{x^{11}+3x^9+3x^7+x^5} + \frac{12x^6\cos(x)}{x^{11}+3x^9+3x^7+x^5} - \frac{54x^5\sin(x)}{x^{11}+3x^9+3x^7+x^5} + \frac{ex^5\sin(x)}{x^{11}+3x^9+3x^7+x^5} - \frac{32x^4\cos(x)}{x^{11}+3x^9+3x^7+x^5} - \frac{66x^3\sin(x)}{x^{11}+3x^9+3x^7+x^5} \\ \qquad \left. - \frac{58x^2\cos(x)}{x^{11}+3x^9+3x^7+x^5} - \frac{24x\sin(x)}{x^{11}+3x^9+3x^7+x^5} - \frac{24\cos(x)}{x^{11}+3x^9+3x^7+x^5}\right) \end{array}\right.$$

- 同样采用 l2 范数

效果展示

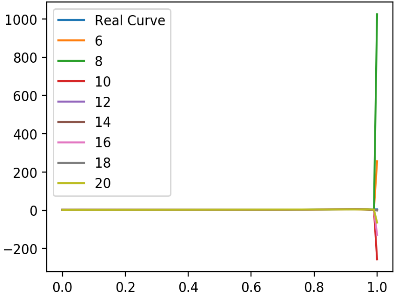


图 17: 曲线图

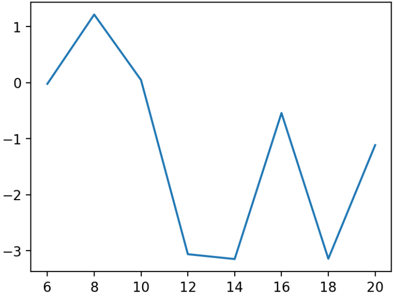


图 18: 误差图

1. 退化核方法
2. 投影方法
3. 迭代投影方法
   - 配置法 + 迭代投影算法
   - Garlekin 方法 + 迭代投影算法

方法简述

- 选取 $\lambda = 1, K(s,t) = e^{st}, x(t) = 1 + 5t + e^{t}$。满足 $\lambda x(t) - \int_0^1 k(s,t)x(s)ds = y(t)$，在之后相应的迭代算法中，也使用该方程。
- 同理可以计算得到 $y(x) =$

$$5x - \begin{cases} 7 - \frac{11}{e} & \text{for } x = -1 \\ \frac{5}{2} + e & \text{for } x = 0 \\ \frac{ex^2e^x}{x^3+x^2} + \frac{6x^2e^x}{x^3+x^2} - \frac{2x^2}{x^3+x^2} + \frac{xe^x}{x^3+x^2} + \frac{4x}{x^3+x^2} - \frac{5e^x}{x^3+x^2} + \frac{5}{x^3+x^2} & \text{otherwise} \end{cases} + e^x + 1$$

- 同样采用 l2 范数

效果展示

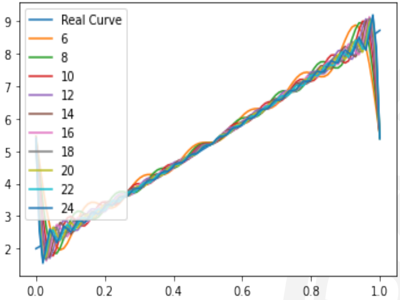


图 19: 曲线图

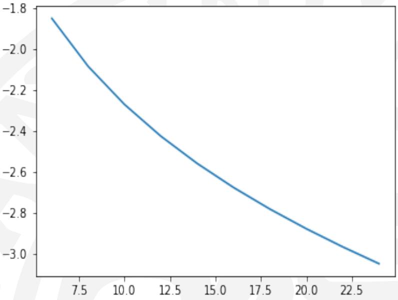


图 20: 误差图

使用迭代投影方法的优点

- 由于投影方法大多采用符号计算，得到的结果是一个数学函数。是连续的，可以进行直接积分，采用了 L2 范数。
- 迭代投影方法是处理投影方法的结果，其中涉及到一步计算含参变量积分，我原本也想借助符号计算库实现比较完美地处理，但是结果证实，使用 python 的 sympy 库导致结果需要可能 ∞ 的时间。因此退而求其次，采用 numpy 和 scipy 的数值计算，导致并不是在每一种情况下都会使得结果更优。
- 但是我们可以横向比较 Galerkin 方法和其迭代方法，我们可以发现精度是得到了几倍提升。