frieder nake | 218 3525 | 9595 1267 | nake@informatik.uni-bremen.de

9. Februar 2007

Zufall & Notwendigkeit

„Zufall ist das unberechenbare Geschehen, das sich unserer Vernunft und Absicht entzieht."
– Gebr. Grimm: Deutsches Wörterbuch

„Man spricht von Zufall – oder noch klarer von reinem Zufall –, wenn ein Ereignis nicht kausal notwendig auftritt. Vom heutigen Standpunkt aus sind die Phänomene der Quantenphysik der einzige Bereich, in dem es einen reinen Zufall geben könnte." – Wikipedia

Was ***Zufall*** sei und ob es ihn denn überhaupt „wirklich" gäbe, und – wenn es ihn gäbe – wie das dann sei, wenn auf einem Computer – also auf der Maschine der praktischen Berechenbarkeit – etwas zufällig geschehen solle, das sind heiße Fragen. Bei dem, was Ihr zu der Aufgabe geschrieben habt, die es im Kurs gegeben hatte, kommt immer wieder das Wort vom "reinen" Zufall vor. Ihr traut der Sache nicht so richtig, habt hier einen Zweifel und dort, wollt der Tendenz nach aber doch an etwas festhalten, was unvorgesehen, unvorhersehbar vielleicht sogar, irgendwo aus einer fernen, uns unerreichbaren Tiefe zu kommen scheint, urplötzlich geschieht und „da" ist …

Vermutlich ist es gut, an den Würfel anzuknüpfen, um etwas festeren Boden unter die Füße zu kriegen. Also ein Geschehen zu betrachten, auf das wir Einfluss nehmen und doch meinen, keinen bestimmbaren Einfluss zu haben. Wir wissen genau, was es heißt zu würfeln. Wir nehmen jenes kleine Ding in die Hand und werfen es mit einer charakteristischen Bewegung vor uns auf Fläche, so dass hüpfend, springend, rollend sich bewegt, bis es zur Stilllage kommt. Diese allein interessiert uns an der ganzen Angelegenheit. Wir sind meist geradezu gespannt auf den Ausgang. Im Normalfall besteht der daraus, dass wir feststellen, welche der sechs Würfelseiten oben zu liegen kommt. Die Anzahl der Augen kennzeichnet diese Seite, und diese Augenanzahl bedeutet (!) uns etwas. Glück oder weniger davon.

Wir haben also einen Prozess vor uns, der 6 mögliche Ergebnisse besitzt, wenn wir auslassen, dass der Würfel auch auf einer Kante oder Ecke stehen bleiben könnte. Wir gehen davon aus, dass jedes der 6 möglichen Ereignisse mit der gleichen Wahrscheinlichkeit eintrifft, nämlich mit der Wahrscheinlichkeit 1/6.

„Wahrscheinlichkeit" ist ein theoretischer Begriff. Wir verwenden ihn, um ein Modell vom Prozess des Würfelns zu schaffen. Wenn wir das tatsächliche Würfeln beobachten, seine Ergebnisse registrieren, dann haben wir es mit Häufigkeiten zu tun. Wir fangen zu einem Zeitpunkt an zu würfeln, tun das endlich oft und haben zu jedem Zeitpunkt eine endliche empirisch gewonnene Verteilung der tatsächlich stattgefundenen Würfelereignisse vor uns. Eine Strichliste, die für jedes der möglichen Ereignisse zeigt, wie oft es bei unserem wiederholten Versuch eingetreten ist. Häufigkeit ist das, was wir messen können, die äußere Erscheinung. Wahrscheinlichkeit ist das, was wir uns ausdenken, das innere Wesen vielleicht.

Die diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung können wir für den Würfel so angeben:

$$P\,[W = i] = 1/6 \qquad \text{für } i = 1, 2, \ldots, 6$$

Das lesen wir so: für jeden Wert von i (nämlich 1, 2, … oder 6) ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Experiment des Würfelwurfes das Ergebnis i bringt (W = i), gleich ein Sechstel. Wenn es hingegen so wäre, dass der Würfel den Wahrscheinlichkeiten

frieder nake | 218 3525 | 9595 1267 | nake@informatik.uni-bremen.de

$P [W = i] = 1/10$ falls $i = 1, 2, ..., 5$

$P [W = 6] = 1/2$

folgte, so würden wir diesen Würfel als keinen korrekten Würfel ansehen. Er hätte zweifellos eine Vorliebe für die Zahl 6. Eben das würde uns überraschen und wir würden nach einer Ursache dafür suchen. Wobei wir aus den Häufigkeiten, die wir beobachten können, aber noch gar nichts über die Wahrscheinlichkeiten wüssten, die diesem merkwürdigen Würfel innewohnen. Wir würden im Laufe der Zeit nur immer mehr annehmen, dass hier etwas faul sei. Die „Zufälligkeit" würden wir dem Würfel langsam absprechen.

Doch tatsächlich heißt das alles nur, dass wir nun mit hoher Wahrscheinlichkeit, nämlich 0.5, vorhersagen können, dass eine 6 kommt. Ob sie jetzt kommt oder nachher, wissen wir aber auch nun nicht. Nach wie vor können wir nicht wirklich vorhersagen, was jetzt sofort passiert. Nur mit Wahrscheinlichkeit können wir Aussagen machen. Das aber ist die Eigenschaft, die den „Zufall" ausmacht, das Zufällige vom Bestimmten trennt.

Wir sagen also, ein ***Ereignis*** sei ein ***zufälliges*** und der Prozess, der es hervorgebracht hat, sei ein ***Zufallsprozess***, wenn wir über das Eintreten oder Nicht-Eintreten des Ereignisses nur Wahrscheinlichkeitsaussagen machen können.

Nach welcher bestimmten Wahrscheinlichkeitsverteilung die möglichen Ereignisse tatsächlich eintreten, spielt für die Tatsache der Zufälligkeit keine Rolle – es sei denn, der Prozess X besäße ein Ereignis e sodass $P [X = e] = 1$ und $P [X = a] = 0$ sonst. Denn dann tritt Ereignis e mit Wahrscheinlichkeit 1 ein, für die anderen bleibt keine Luft – was jedoch nicht heißt, dass e *sicher* und sonst gar nichts eintritt.

Die ***Gleichverteilung*** ist dann nichts so Besonderes mehr. Sie sagt nur, dass bei einem gleichverteilten Prozess unsere wahrscheinlichen Voraussagen besonders schwach sind.

Zufälligkeit ist nun aber nur die Schwester der ***Notwendigkeit*** und wir können von dem einen nicht sprechen, ohne auch das andere zu denken. Zwischen ***zufällig*** und ***notwendig*** besteht eine Dialektik oder Polarität. Sie markieren Extreme unserer Fähigkeit, Prozesse zu beschreiben. Die Bewegung zwischen beiden treibt manche unserer Kenntnisse voran.

Letzten Endes sehen wir, dass die natürlichen oder technischen Prozesse das sind, was sie sind und nichts anderes, und dass sie ablaufen, wie sie ablaufen und nicht anders, und dass unser Reden darüber (Notwendigkeit, Zufall) unser Reden darüber ist und nichts anderes. In unserem Reden können wir der ablaufenden Wirklichkeit erstaunlich nahe kommen, wir haben guten Grund zu sagen, so eben sei es, wie wir das sagen – wenngleich m.E. kein Weg daran vorbei geht, die Unerkennbarkeit der Welt einzugestehen, also einzugestehen, dass unser Reden über die Welt unser Reden über die Welt bleivt, die Welt aber während dessen die Welt bleibt, wie sehr wir uns auch abmühen, sie zu erkennen. Wenn es passt – und es passt immer –, so können wir von Zufälligkeit und Notwendigkeit im Weltgeschehen reden. Immer beides zugleich, bitte!

Auf dem Computer nun spielt der ***programmierte Zufall*** eine wichtige Rolle. Mit Programmen können wir deterministisch Zahlenfolgen berechnen. Ihrer Entstehung nach haftet ihnen nichts Zufälliges an. Betrachten wir eine solche Folge aber als Menge (oder als Folge von Mengen) und untersuchen die Zahlen, die eine dieser Mengen beinhaltet, statistisch, so müssen wir feststellen, dass sie manchen Test auf Zufälligkeit überstehen. Wir könnten dann begründet davon sprechen, dass eine Menge von Zufallszahlen „zufällig hinsichtlich einer (endlichen) Menge von statistischen Tests" ist. Solche berechneten Zahlenfolgen verhalten sich dann hinsichtlich einiger statistischer Kriterien so, dass sie von anderen solchen Zahlenfolgen nicht zu unterscheiden sind. Man nennt sie aber doch lieber "Pseudo-Zufallszahlen".