UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

INGENIERIA DE SISTEMAS Y COMPUTACIÓN

TÍTULO DEL TRABAJO

(ÁLGEBRA ABSTRACTA)

BRAYAN SANTIAGO MALDONADO APARICIO

PROFESOR: FRANCISCO ALBEIRO GOMEZ JARAMILLO

FEBRERO - 2023

Ejercicio 1

Demostrar si la operación de la tabla es grupo por medio de la propiedad de la asociatividad.

°	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	c	d	d	d
c	a	b	d	c
d	d	a	c	b

Como podemos apreciar, la operación binaria en la tabla cumple con la condición de ser cerrada, ahora procederemos a verificar su asociatividad, para eso tomaremos varios casos:

1)

$$\mathbf{(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)}$$
$$\mathrm{b \circ c = a \circ d}$$
$$\mathrm{d = d}$$

En este primer caso se cumple la propiedad asociativa, sin embargo debe de cumplirse con todos los elementos. Probemos el siguiente.

2)

$$\mathbf{(b \circ c) \circ d = b \circ (c \circ d)}$$
$$\mathrm{d \circ d = b \circ c}$$
$$\mathrm{b = d}$$
$$\mathrm{b \neq d}$$

Observemos que no se cumple la propiedad asociativa en este caso, y al no ser asociativa para todos los casos, no se cumple la condición para que sea un grupo.

Ejercicio 2

Demostrar que el producto de matrices cuadradas no es asociativo.
Digamos que el producto de matrices está definido de la siguiente manera:

Sean A y B matrices reales cuadradas llamaremos al producto C = (A*B) como el resultado de multiplicar las filas de A por las columnas de B

$$A = \begin{bmatrix} a11 & a12 & \\ a21 & a22 & \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$B = \begin{bmatrix} b11 & b12 & \\ b21 & b22 & \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$C = \begin{bmatrix} (a11 * b11 + a12 * b21) & (a11 * b21 + a12 * b22 & \\ (a21 * b11 + a22 * b21 & (a21 * b12 + a22b22) & \end{bmatrix} \tag{3}$$

Podemos apreciar que cada elemento de la matriz resultante C está conformado por una suma de productos reales, y como lo hemos podido evidenciar en ejercicios resueltos en clase, la suma y los productos en los reales son Asociativos, por lo tanto podemos decir que la multiplicación de matrices cuadradas también lo es, de tal forma que si generalizamos para un producto D = A*B*C donde A y B son marices cuadradas reales podemos apreciar que:

d11 = (a11*b11 + a12*b12)*c11) + ((a11*b21 + a21*b22)*c12) = ((b11*c11 + b12*c21)*a11) + ((b11*c12 + b12*c22)*a21)

Lo que nos demuestra este resultado es que pertenece al de una suma de productos Reales, para la cual ya está demostrada la Asociatividad, lo que implica que esta propiedad la heredan todos los elementos de la matriz real D.

Ejercicio 3

Probar que el conjunto de los números complejos es grupo con respecto a la operación del producto.

Empecemos primero por definir el conjunto de los números complejos como conjunto de los números reales:

$$R + i = \sqrt[2]{-1} \tag{4}$$

Donde definiremos a cualquier numero complejo como:

$$c \in Complejos(C) = (a + ib), a, b \in R \tag{5}$$

Así mismo definamos el producto de complejos de la siguiente forma:

$$c, d \in C, productoP = C * D \tag{6}$$

$$C = (a + ib), D = (e + if) \tag{7}$$

$$P = (a * e - b * f) + (a * f + b * e)i \tag{8}$$

Hecho esto definamos la forma plar de los numeros complejos de esta forma:

Sea c $\in Csuformapolares : c = r(cos(\theta) + sen(\theta)i)$ Entonces:

$$r = \sqrt{a^2 b^2}\theta = tan^-1(\frac{b}{a}) \tag{9}$$

Donde a $\neq$ 0

Debido a la formula de euler se sabe que:

$$e^i\theta = cos(\theta) + sen(\theta)i \tag{10}$$

Con la ayuda de la formula de Euler podremos demostrar las propiedades de grupo en los numeros complejos pues nos guiaremos del producto de exponentes en los reales junto a sus propiedades ya estudiadas.

Bien ahora que nos hes más fácil trabajar con los números complejos pasaremos a probar las propiedades de grupo:

- Elemento neutro:
  Expresemos a y b como complejos de la forma:

$$a = e^i\theta \ \ , \ \ b = e^i\beta \ \ con \ \ \theta \ \ y \ \ \beta \in R \tag{11}$$

$$a * b = e^i(\theta + \beta) \tag{12}$$

  Como podemos apreciar hay una suma de reales, cuyas propiedades ya fueron comprobadas, por lo tanto el elemento neutro de la suma de reales es el número 0 de forma que vamos a reemplazar por 0 y así encontraremos el elemento neutro en dicho producto:

$$\theta = 0 \tag{13}$$

$$a * b = e^i(\theta + \beta) = e^i(0 + \beta) = e^i(\beta) \tag{14}$$

$$a * b = e^i(\theta) * e^i(\beta) = e^i(0) * e^i(\beta) = 1 * e^i(\beta) = e^i(\beta) \tag{15}$$

Sabemos que gracias a las propiedades de los exponensiales reales $e^0 = 1$, lo que nos da como resultado el elemento neutro del producto de numeros complejos, el cuál es el número 1.

- Inverso:
  Para encontrar el inverso multiplicativo es necesario tener en cuenta el inverso aditivo de los reales, sabemos que: $\forall \ a \in R \ \exists \ -a$

  Entonces -a + a = 0 de manera que: $\beta = -\theta$:

$$a * b = e^i(\theta + \beta) = e^i(\theta - \beta) = e^i(0) = 1 \tag{16}$$

  Aplicando propiedades de exponentes:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \tag{17}$$

  Entonces:

$$e^{i-\theta} = \frac{1}{e^i(\theta)} \tag{18}$$

  Y como conclusión podemos afirmar que el inverso de un número complejo C es:

$$\frac{1}{c} \tag{19}$$

- Propiedad Asociativa:
  Tomemos 3 números complejos al azar con su forma exponencial, de la siguiente manera:

$$(e^i(\alpha) * e^i(\beta)) * e^i(\theta) = e^i(\alpha) * (e^i(\beta) * e^i(\theta)) \tag{20}$$

$$e^i(\alpha + \beta) * e^i(\theta) = e^i(\alpha) * e^i(\beta + \theta) \tag{21}$$

$$e^i((\alpha + \beta) + \theta) = e^i(\alpha + (\beta + \theta)) \tag{22}$$

$$e^i(\alpha) * e^i(\beta) * e^i(\theta) = e^i(\alpha) * e^i(\beta) * e^i(\theta) \tag{23}$$

  Y es así que con la ayuda de las propiedades de los exponenentes en los reales pudimos demostrar que el producto de los números complejos es asociativo.

  Para finalizar podemos concluir que el conjunto de los números complejos es un grupo con respecto a la operación del producto.