UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

INGENIERIA DE SISTEMAS Y COMPUTACIÓN

TÍTULO DEL TRABAJO

(Ecuaciones en Diferencias)

BRAYAN SANTIAGO MALDONADO APARICIO

PROFESOR: FRANCISCO ALBEIRO GOMEZ JARAMILLO

MAYO - 2023

Taller - Ecuaciones en diferencias

1. Una bomba de vacío elimina un tercio del aire restante en un cilindro con cada acción. Formule una ecuación que represente esta situación, ¿después de cuantas acciones hay solamente 1/1000000 de aire inicial?

$$(\pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi r^2 h)$$

$$(\pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi r^2 h) - \frac{1}{3}(\pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi r^2 h)$$

$$\pi r^2 h\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\pi r^2 h\frac{2}{3}$$

$$\pi r^2 h(\frac{2}{3} - \frac{2}{9})$$

$$\pi r^2 h\frac{4}{9}$$

$$\frac{2}{3}\pi r^2 h(1 - \frac{1}{3})$$

$$\frac{2}{3}\pi r^2 h\frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3}^n = \frac{1}{1000000}$$

$$2(\log(\frac{2}{3}))^n$$

$$n\log(\frac{2}{3}) = \log(\frac{1}{1000000})$$

2. Una población se incrementa a una tasa de 25 por cada mil por año. Formule una ecuación en diferencias que describa esta situación. Resuelvala y encuentre la población en 15 años, asumiendo que la población ahora es de 200 millones. ¿Qué tan largo tomara que la población alcance 750 millones?

   K = Población

   Tasa de crecimiento $= K * \frac{25}{1000} = 0.025K$ y $U_n =$ Población luego de n años

$$U_1 = K + 0.025K = 1.025K$$

$$U_2 = U_1 + 0.025U_1 = 1.025U_1$$

$$U_2 = 1.025(1.025K) = (1.025)^2 K$$

$$U_3 = U_2 + 0.025U_2 = 1.025U_2$$

$$U_3 = 1.025((1.025)^2K) = (1.025)^3K$$

$$U_4 = U_3 + 0.025U_3 = 1.025U_3$$

$$U_4 = 1.025((1.025)^3K) = (1.025)^4K$$

Entonces:

$$U_n = (1.025)^nK$$

¿Cuál sería la población en 15 años?

$$K = 200M$$

$$U_{15} = (1.025)^{15} * 200$$

$$U_{15} \approx 289.6596M$$

Por lo que podemos apreciar la población en 15 años será de aproximadamente 289.6596 millones.
¿Qué tan largo tomara que la población alcance 750 millones?

$$U_n = 750 = (1.025)^n * 200$$

$$\frac{750}{200} = (1.025)^n$$

$$3.75 = (1.025)^n$$

$$log(3.75) = n * log(1.025)$$

$$n = \frac{log(3.75)}{log(1.025)}$$

$$n = \approx 53.5284$$

Va a tomar al rededor de 54 años que la población alcance los 750 millones.

3. Resuelva:

$$u_n = 4u_{n-1} - 1, para n \geq 2$$

$$u_n = 3u_{n-1} + 2, para n \geq 2$$

Empleando:

$$U_n = KU_{n-1} + C \Rightarrow U_n = K^{n-1}U_1 + \frac{C(K^{n-1}-1)}{K-1}, \qquad K \neq 1$$

Decimos que: K = 4 y C = -1

Por lo que:

$$U_n = 4^{n-1}U_1 - \frac{(4^{n-1}-1)}{3}$$

Ahora comprobando por sustitución:

$$U_2 = 4U_1 - 1$$

$$U_3 = 4U_2 - 1 = 4(4U_1 - 1) - 1 = 4^2U_1 - 4 - 1$$

$$U_4 = 4U_3 - 1 = 4(4^2U_1 - 4 - 1) - 1 = 4^3U_1 - 4^2 - 4 - 1$$

$$U_5 = 4U_4 - 1 = 4(4^3U_1 - 4^2 - 4 - 1) - 1 = 4^4U_1 - 4^3 - 4^2 - 4 - 1 = 4^4U_1 - (4^3 + 4^2 + 4 + 1)$$

Ya que:

$$K^{n-2} + K^{n-3} + ... + 1 = \frac{(K^{n-1}-1)}{K-1}, \qquad n \geq 2$$

Para K = 4, se tiene:

$$\frac{(4^{n-1}-1)}{3}$$

Observando así el patrón de:

$$U_n = 4^{n-1}U_1 - \frac{(4^{n-1}-1)}{3}$$

Ahora para:

$$u_n = 3u_{n-1} + 2, para, n \geq 2$$

Nuevamente empleando:

$$U_n = KU_{n-1} + C \Rightarrow U_n = K^{n-1}U_1 + \frac{C(K^{n-1}-1)}{K-1}, \qquad K \neq 1$$

tenemos: K = 3 y C = 2

Luego:

$$U_n = 3^{n-1}U_1 - \frac{2(3^{n-1}-1)}{2}$$

$$U_n = 3^{n-1}U_1 - (3^{n-1} - 1)$$

Comprobando por sustitución:

$$U_2 = 3U_1 + 2$$

$$U_3 = 3U_2 + 2 = 3(3U_1 + 2) + 2 = 3^2U_1 + (3)(2) + 2$$

$$U_4 = 3U_3 + 2 = 3(3^2U_1 + (3)(2) + 2) + 2 = 3^3U_1 + (3^2)(2) + (3)(2) + 2$$

$$U_5 = 3U_4+2 = 3(3^3U_1+(3^2)(2)+(3)(2)+2)+2 = 3^4U_1+(3^3)(2)+(3^2)(2)+(3)(2)+2 = 3^4U_1+2(3^3+3^2+3+1$$

Ya que:

$$K^{n-2} + K^{n-3} + ... + 1 = \frac{(K^{n-1} - 1)}{K - 1}, \qquad n \geq 2$$

Para K = 3, se tiene:

$$\frac{(3^{n-1} - 1)}{2}$$

Resultando así el patrón en:

$$U_n = 3^{n-1}U_1 - \frac{2(3^{n-1} - 1)}{2}$$

$$U_n = 3^{n-1}U_1 - (3^{n-1} - 1)$$

4. Encuentre la solución general para las siguientes ecuaciones:

$$u_n + 4un - 1 + 3 = 0, para, n \geq 1$$

$U_n = -4U_{n-1} - 3$, para $n \geq 1$
Empleando:

$$U_n = KU_{n-1} + C \Rightarrow U_n = K^nU_0 + \frac{C(K^n - 1)}{K - 1}, \qquad K \neq 1$$

Observamos que:K = -4 y C = -3
Ahora:

$$U_n = (-4)^nU_0 + \frac{-3((-4)^n - 1)}{-5}$$

$$U_n = (-4)^nU_0 + \frac{3((-4)^n - 1)}{5}$$

Comprobando por sustitución:

$$U_1 = -4U_0 - 3$$

$$U_2 = -4U_1 - 3 = -4(-4U_0 - 3) - 3 = (-4)^2U_0 + (-4)(-3) - 3$$

$U_3 = -4U_2 - 3 = -4((-4)^2U_0 + (-4)(-3) - 3) - 3 = (-4)^3U_0 + (-4)^2(-3) + (-4)(-3) - 3 = (-4)^3U_0 - 3((-$

Ya que:

$$K^{n-1} + K^{n-2} + K^{n-3} + ... + 1 = \frac{(K^n - 1)}{K - 1}$$

Para K = -4, se tiene:

$$\frac{((-4)^n - 1)}{-5}$$

Observando así que el patrón es:

$$U_n = (-4)^nU_0 - 3 * \frac{((-4)^n - 1)}{-5}$$

$$U_n = (-4)^nU_0 + \frac{3((-4)^n - 1)}{5}$$

Ahora la otra ecuación:

$$u_n + 2un - 1 - 13 = 0, para, n \geq 1$$

$U_n = -2U_{n-1} + 13$, para $n \geq 1$

Igualmente empleando:

$$U_n = KU_{n-1} + C \Rightarrow U_n = K^nU_0 + \frac{C(K^n - 1)}{K - 1}, \qquad K \neq 1$$

Tenemos: K = -2 y C = 13 por lo tanto:

$$U_n = (-2)^nU_0 + \frac{13((-2)^n - 1)}{-3}$$

Comprobando por sustitución:

$$U_1 = -2U_0 + 13$$

$$U_2 = -2U_1 + 13 = -2(-2U_0 + 13) + 13 = (-2)^2U_0 + (-2)13 + 13$$

$U_3 = -2U_2 + 13 = -2((-2)^2U_0 + (-2)13 + 13) + 13 = (-2)^3U_0 + (-2)^2 13 + (-2)13 + 13 = (-2)^3U_0 + 13((-2)$

Ya que:

$$K^{n-1} + K^{n-2} + K^{n-3} + ... + 1 = \frac{(K^n - 1)}{K - 1}$$

Para K = -2, se tiene:

$$\frac{((-2)^n - 1)}{-3}$$

Observando así el patrón:

$$U_n = (-2)^n U_0 + 13 * \frac{((-2)^n - 1)}{-3}$$

$$U_n = (-2)^n U_0 - \frac{13((-2)^n - 1)}{3}$$

5. Encuentre las soluciones particulares para:

$$u_n = 3u_{n-1} + 5, para, n \geq 1 v_0 = 1$$

$$a = 3$$

$$b = 5$$

$$U_n = (U_0 - \frac{b}{1-a)} \cdot a^n + \frac{b}{1-a}$$

$$U_n = (1 - \frac{5}{1-3} \cdot 3^n + \frac{5}{1-3}$$

$$= \frac{7}{2} \cdot 3^n - \frac{5}{2}$$

$u_n = 2u_n - 1 + 6$, Para: $n \geq 2$ $u_1 = 3$

$$a = -2$$

$$b = 6$$

$$U_3 = -2 \cdot 0 + 6$$

$$U_n = aU_{n-1} + 6$$

$$U_2 = aU_1 + 6$$

$$U_3 = a(aU_1 + b) + b = a^2 U_1 + ab + b$$

$$U_4 = a(a^2 U_1 + ab + b) + b = a^3 U_1 + a^2 b + ab + b$$

En general:

$$Un = a^{n-1} U_1 + a^{n-2} b + ... + a^2 b + ab + b$$

$$S_a = a^{n-2}b + ... + a^2b + ab + b$$

$$S_a = b$$

$$aS_a = a^{n-1}b$$

$$S_a - aS_a = b - a^(n-1)b$$

$$S_a(1-a) = b - a^{n-1}b$$

$$S_a = \frac{b(1-a^{n-1}}{a^{n-1}}$$

$$U_n = a^{n-1}U_1 + \frac{b(1-a^{n-1})}{1-a}$$

$$U_n = (-2)^{n-1} \cdot 3 + \frac{6(1-(-2)^{n-1})}{3}$$

Ahora la siguiente ecuación:

$$u_n = -2u_{n-1} + 6, para, n \geq 2v_1 = 3$$

Podemos observar que:

$$17 - 7 = 10 \rightarrow 7 = 17 - 10$$

$$37 - 17 = 20 \rightarrow 17 = 37 - 20$$

$$77 - 37 = 40 \rightarrow 37 = 77 - 40$$

$$157 - 77 = 80 \rightarrow 77 = 157 - 80$$

$$a_n = kr^n \ Homogenea$$

$$a_n - a_{n+1} + 2^n \cdot 10 = 0$$

$$r^n - r^n r = 0$$

$$r^n(1-r) = 0 \rightarrow r = 1$$

$$a_n = k1^n \rightarrow a_n = k$$

$$f(t) = -2^n \cdot 10$$

Teniendo en cuenta los casos particulares vistos en clase:

$$2^n \cdot 10$$

Caso:

$$A \cdot 2^n = a_{np}$$

$$a_{n+1p} = A \cdot 2^{n+1}$$

Ahora reemplazamos en:$a_n - a_{n+1} + 2^n \cdot 10 = 0$

$$A \cdot 2^n - A \cdot 2^{n+1} = -2^n \cdot 10$$

$$A \cdot 2^n - A \cdot 2^n \cdot 2 = -2^n \cdot 10$$

$$-A2^n = -2^n \cdot 10 \; entonces \; A = 10$$

$$a_{np} = 10 \cdot 2^n \rightarrow Particular$$

$$a_n = k \rightarrow Homogenea$$

Ahora la solución general:

$$a_n = k + 10 \cdot 2^n, \; k = -3$$

6. Encuentre y resuelva la ecuación en diferencias asociada a 7, 17, 37, 77, 157,...

7. Encuentre el pago mensual por un prestamo por 400 millones de pesos en un periodo de 3 años a una tasa de interes del 21% por año.
   Por medio de la ecuación

$$Pago = C * (1+i)^n * i/(1+i)^n - 1$$

Donde:
C es la inversión inicial
n es el número de periodos de pago del prestamo en meses
i es la tasa de interés mensual

$$C = 400'000.000$$

$$n = 3 * 12 = 36$$

$$i = 21\%/12 = 1,75\% = 1,75/100$$

Si reemplazando en la ecuación tenemos que:

$$Pago = 400'000.000 * \frac{(1 + \frac{1,75}{100})^{36} * \frac{1,75}{100}}{(1 + \frac{1,75}{100})^{36} - 1}$$

$$Pago = 15'070.026, 93$$

Por lo tanto la solución es $15'070.026, 93$.

8. Una plantación de café incrementa su producción un 1% por mes desde una tasa de 200 toneladas por mes. Las ordenes (uso de café) permanecen en 1600 toneladas por mes- ¿Cuánto café se puede apilar después de un periodo de 12 meses, después de un periodo de 2 años?

$$U_1 = 200t + 200t \cdot 1\% - 1600t$$

$$U_n = U_{n-1} + U_{n-1} \cdot 1\% - 1600t$$

$$P_0 = 200t$$

$$U_{n-1} \cdot \frac{101}{100} - 1600t$$

$$P_n = (P_o - \frac{b}{1-a}a^n + \frac{b}{1-a}$$

$$U_n = (200t - \frac{-1600t}{1-\frac{101}{100}}) \cdot (\frac{101}{100})^n + (\frac{-1600t}{1-\frac{101}{100}})$$

$$(-159800t) \cdot (\frac{101}{100})^n + 160000t$$

$$200t + 200t \cdot 1\% - 1600t = -1398$$

Es difícil lograr cubrir una demanda de 1600 unidades con una producción de solo 200 unidades y un incremento de solo el 1%. Si la demanda es mayor que el incremento, nunca se podrá acumular suficiente café.

Para lograr la acumulación de café: Demanda $< P_{n-1} \cdot m\%$

9. La productividad en una plantación de 2000 arboles se incrementa 5% cada año por la implementación de mejores tecnicas de agricultura. El granjero tambien planta ademas 100 arboles por año. Estime el porcentaje de mejora en la productividad durante los siguientes 10 años.

$$U_0 = 2000$$

$$U_1 = 2000 + 2000 \cdot 5\% + 100$$

$$U_n = U_{n-1}\frac{21}{20} + 100$$

$$U_n = (2000 - \frac{100}{1-21/20} \cdot (\frac{21}{20})^n + \frac{100}{1-21/20}$$

$$U_n = (4000) \cdot (\frac{21}{20})^n - 2000$$

$$U_10 = 4515,58$$

$$\delta\% = \frac{4515,58 - 2000}{2000} \approx 126\%$$

10. Resuelva $u_n = 3u_{n-1} + n, para, u_1 = 5$ Observamos como ecuación general a: $u_n = 3u_{n-1} + n$ Para lo que unicamente tenemos que reemplazar desde el menor valor hasta el valor de u que queramos obtener:

$$u_2 = 3u_1 + 2 = 3 * 5 + 2 = 17$$

$$u_3 = 3u_2 + 3 = 3 * 17 + 3 = 54$$

$$u_4 = 3u_3 + 4 = 3 * 54 + 4 = 166$$

$$u_5 = 3u_4 + 5 = 3 * 166 + 5 = 503$$

$$u_6 = 3u_5 + 6 = 3 * 503 + 6 = 1515$$

La secuencia que tenemos desde u_1 hasta u_6 es: $17, 54, 166, 503, 1515$

11. Encuentre la solución general para $u_n = un - 1 + 2^n y u_n = 2u_{n-1} + n$ Solucion general para: $u_n = u_{n-1} + 2^n$:Al emplear la técnica de sustitución inversa, es posible observar que al ir realizando los reemplazos se descubre una forma o patrón recurrente.

$$U_n = U_0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^n$$

Al analizar la suma de las potencias de 2, podemos notar que sigue una progresión geométrica. El primer elemento de la progresión geométrica es 2, obtenido al elevar 2 a la potencia 1. La razón común entre los términos sucesivos es 2, y el número total de términos en la progresión es n. Como resultado, la suma de las potencias de 2 se calcula mediante la siguiente expresión:

$$S = 2 * (2^n - 1)/(2 - 1)$$

$$S = 2 * (2^n - 1)$$

Ahora, sustituyendo esta suma en la ecuación recursiva original, tenemos:

$$U_n = U_0 + 2 * (2^n - 1)$$

Por lo tanto, la solución general para la secuencia recursiva dada $U_n = U_{n-1} + 2^n$ es:

$$U_n = U_0 + 2 * (2^n - 1)$$

Donde U_0 es el término inicial de la secuencia.

Ahora Solución general para $u_n = 2u_{n-1} + n$:

Por medio de sustitución inversa se llega a la expresión:

$$U_n = 2^n * U_0 + [2^{n-1} * 1 + 2^{n-2} * 2 + ... + 2^{n-n} * n]$$

$$U_n = 2^n * U_0 + [2^{n-1} + 2^{n-2} * 2 + ... + 2^0 n]$$

$$U_n = 2^n * U_0 + [2^{n-1} + 2^{n-2} * 2 + ... + n]$$

En la parte derecha se encuentra una suma de factores de 2 con exponente que va desde $n-1$ hasta 0, multiplicados por un término que va desde 1 hasta n.

12. Si $u_n = ku_{n-1} + 5$ y $u_1 = 4$ y $u_2 = 17$ encuentre los valores de k y u_6.
    Para esto debemos de encontrar los valores de k, para lo cual solo es necesario despejar en la ecuación de:

$$u_2$$

$$u_2 = k * u_1 + 5$$

$$17 = k * 4 + 5$$

$$17 - 5 = k * 4$$

$$12/4 = k$$

$$k = 3$$

Y con esto encontramos que $k = 3$
Ya conociendo el valor de k podemos hallar u_6

$$u_3 = k * u_2 + 5 = 3 * 17 + 5 = 56$$

$$u_4 = k * u_3 + 5 = 3 * 56 + 5 = 173$$

$$u_5 = k * u_4 + 5 = 3 * 173 + 5 = 524$$

$$u_6 = k * u_5 + 5 = 3 * 524 + 5 = 1577$$

Y haciendo la secuencia obtenemos que $u_6 = 1577$

13. Use iteración para resolver la siguiente relación de recurrencia $u_n = \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}}$, para $n \geq 2$,sujeto a la condición inicial $u_1 = \frac{1}{6}$. Para esto debemos de escribir las ecuaciones desde:

$$u_n = \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}}$$

$$u_2 = \frac{u_1}{u_0} == \frac{1/6}{u_0} = \frac{1}{6u_0}$$

$$u_3 = \frac{u_2}{u_1} = \frac{\frac{1}{6u_0}}{1/6} = \frac{1}{u_0}$$

$$u_4 = \frac{u_3}{u_2} = \frac{\frac{1}{u_0}}{\frac{1}{6u_0}} = 6$$

$$u_5 = \frac{u_4}{u_3} = \frac{6}{\frac{1}{u_0}} = 6u_0$$

$$u_6 = \frac{u_5}{u_4} = \frac{6u_0}{6} = u_0$$

Podemos concluir de que los valores se van a repetir cada 6 valores de u

14. Investigue el límite de $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ si $u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2}$ Observemos que:

$$U_{n+1} = U_n + 2U_{n-1}$$

$$\frac{U_n}{U_{n-1}} = \frac{U_{n-1} + 2U_{n-2}}{U_n + 2U_{n-1}}$$

Si $\lim_{n\to\infty} \frac{U_n}{U_{n+1}} \exists$ (converge a L), por lo que $\lim_{n\to\infty} U_{n\pm i}$ también $\exists$ y es L

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_n}{U_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{U_{n-1} + 2U_{n-2}}{U_n + 2U_{n-1}}$$

$$L = \frac{L + 2L}{L + 2L} \sim L = 1$$

Es decir, el límite $\frac{U_n}{U_{n+1}} = 1$

15. Encuentre el n-esimo termino de la siguiente secuencia: -3,21,3,129,147,... Para $n > 1$:

$$U_1 = -2 = (-1)(-3) - 5$$

$$U_2 = 21 = (-1)^2(-3)^2 + 12$$

$$U_3 = 3 = (-1)^3(-3)^3 - 24$$

$$U_4 = 129 = (-1)^4(-3)^4 + 48$$

$$U_5 = 147 = (-1)^5(-3)^5 - 96$$

$$f(n) = (-1)^n(-3)^n - (-1)^n \cdot 6 \cdot 2^{n-1}$$

16. Resuelva $u_n - 6u_{n-1} + 8u_{n-2} = 0$, para $n \geq 3$ dado $u_1 = 10$ y $u_2 = 28$. Evalue u_6 .

    Para $u_n - 6u_{n-1} + 8u_{n-2} = 0$ se aplica el polinomio auxiliar donde:$m = 1$, $p = 6$ y $q = -8$
    Obteniendo la expresión de: $m^2 - 6m + 8 = 0$.
    Hallando las raices se tiene que $m_1 = 4$ y $m_2 = 2$.
    Las raices se reemplazan de la forma

    $$U_n = A(4)^n + B(2)^n$$

    Reemplazando con los valores de U_1 y U_2 antes dados se tiene un sistema de dos ecuaciones con dos incognitas donde se despejan A y B:

    $$U_1 = 10 = A(4)^1 + B(2)^1$$

    $$U_2 = 28 = A(4)^2 + B(2)^2$$

    Para el cual se cumple que $A = 1$ y $B = 3$ y se obtiene finalmente la expresión:

    $$U_n = 4^n + 3(2)^n$$

    Evaluando para U_6:

    $$U_6 = 4^6 + 3(2)^6 = 4288$$

17. Encuentre la solución particular para $u_{n+2} + 2u_{n+1} + u_n = 0$, para $n \geq 1$, cuando $u_1 = -1$, $u_2 = -2$.

    $$u_{n+2} + 2u_{n+1} + u_n = 0$$

    Podemos encontrar usar la formula cuadratica para hallar la solución general

    $$(r^2 + 2r + 1) = 0$$

$$(r+1)(r+1)=0$$

$$r=-1, r=-1$$

Ahora que tenemos lo valores podemos ponerlos en la solución general

$$u_n = P(-1)^n + n * Q(-1)^n$$

$$-1 = P(-1)^1 + Q(-1)^1 * 1$$

$$-1 = -P + -Q$$

Hacemos lo mismo con la otra solución

$$-2 = P(-1)^2 + Q(-1)^2 \dot{2}$$

$$-2 = P + 2Q$$

$$-1 = -P + 3$$

$$P = 4$$

$$-1 = -4 - Q$$

$$-3 = Q$$

Entonces la solucion particular es:

$$U_n = 4(-1)^n - 3(-1)^n n$$

18. Encuentre la solución general de la siguiente ecuación $u_n - 5u_{n-1} + 6u_{n-2} = f(n)$, cuando $f(n) = 2$, $f(n) = n$, $f(n) = 5^n$ y $f(n) = 1 + n^2$.

    Para $f(n) = 2$

$$U_n - 5U_{n-1} + 6Un_{n-2} = 2$$

Solución homogénea (válida para todo $f(n)$)

$$U_n - 5U_{n-1} + 6Un_{n-2} = 0$$

$$r^n r^2 - 5r^n r + 6r^n = 0$$

$$r^n(r^2 - 5r + 6) = 0 \sim r1 = 2, r2 = 3$$

$$U_n = k_1(2)^n + k_3(3)\ sin\ condiciones\ iniciales$$

Solución particular $U_n = a = U_{n-1} = U_{n-2}$

$$U_n - 5U_{n-1} + 6U_{n-2} = 2$$

$$a - 5a + 6a = 2 \rightarrow 2a = 2 \sim a = 1$$

$$U_n = k_1(2)^n + k_3(3)^n + 1$$

Para $f(n) = n$
Solcuión particular:

$$U_n = a + bn$$

$$U_{n-1} = a + b(n-1)$$

$$U_{n-2} = a + b(n-2)$$

$$Un - 5U_{n-1} + 6U_{n-2} = n$$

$$a + bn - 5a - 5b(n-1) + 6a + 6b(n-2) = n$$

$$a + bn - sa - 5bn + 5b + 6a + 6bn - 12b = n$$

$$2a - 7b + 2bn = n \sim \begin{cases} 2a - 7b = 0 \\ 2b = 1 \end{cases}$$

$$a = \frac{7}{4}, b = \frac{1}{2} \text{ entonces,}$$

$$U_n = k_1 \cdot (2)^n + k_3 \cdot (3)^n + \frac{7}{4} + \frac{1}{2}n$$

Para $f(n) = 5^n$
Solución particular

$$U_n = a5^n,\ U_{n-1} = a5^{n-1},\ U_{n-2} = a5^{n-2}$$

$$a5^n - 5a5^{n-1} + 6a5^{n-2} = 5^n$$

$$6a5^{n-2} = 5^n$$

$$\frac{6a5^n}{25} = 5^n \sim a = \frac{25}{6}$$

$$U_n = k_1 \cdot (2)^n + k_3(3)^n + \frac{25}{6}5^n$$

$$k_1 \cdot (2)^n + k_3(3)^n + \frac{5^{n+2}}{6}$$

Para $f(n) = 1 + n^2$

$$U_n = a + bn + cn^2$$

$$U_{n-1} = a + b(n-1) + c(n-1)^2$$

$$U_{n-2} = a + b(n-2) + c(n-2)^2$$

$$U_n - 5U_{n-1} + 6U_{n-2} = 1 + n^2$$

$$a + bn + cn^2 - 5a - 5b(n-1) - 5c(n-1)^2 + 6a + 6b(n-2) + 6c(n-2)^2 = 1 + n^2$$

$$\sim$$

$$(2a - 7b + 19c) + n(2b - 14c) + n^2(2c) = 1 + n^2$$

$$\sim$$

$$a = 8,\ b = frac72,\ c = frac12$$

$$U_n = k_1 \cdot (2)^n + k_3 \cdot (3)^n + 8 + \frac{7}{2}n + \frac{1}{2}n^2$$

19. Resuelva las siguientes ecuaciones en diferencias utilizando la función generatríz $u_n - 3u_{n-1} + 4u_{n-2} = 0$, dado $u_0 = 0$, y $u_1 = 20$, $n \geq$.

$$G(x) = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + ...$$

$$= 0 + 20x + u_2 x^2 + ...$$

Expresando los resultados:

$$u_2 = 3u_1 - 4u_0$$

$$u_3 = 3u_2 - 4u_1$$

$$u_4 = 3u_3 - 4u_2$$

Se escribe la generatriz junto a la ecuación:

$$20x + (-3u_1 + 4u_0)x^2 + (-3u_2 + 4u_1)x^3$$

$$20x + (3u_1 x^2 + 3u_2 x^3 + 3u_3 x^4 + ...)$$

$$-(4u_0 x^2 + 4u_1 x^3 + 4u_2 x^4 + ...)$$

Hallando el factor común:

$$= 20x + 3x(u_1x + u_2x^2 + u_3x^3 + -....)$$

$$-4x^2(u_0 + u_1x + u_2x^2 + ...)$$

$$= 20x + 3x(G(X) - u_0) - 4x^2G(x)$$

$$= 20x + 3x(G(x) - 0) - 4x^2G(x)$$

$$G(x) = 20x + 3xG(x) - 4x^2G(x)$$

$$G(x) = -3xG(x) + 4x^2G(x) = 20x$$

$$G(x) = (1 - 3x + 4x^2) = 20x$$

$$G(x) = \frac{20x}{1 - 3 + 4x^2}$$

Ahora usando fracciones parciales:

$$G(x) = \frac{-20}{(4x-1)(x+1)} = \frac{A}{(4x-1)} + \frac{B}{(x+1)}$$

$$-20 = A(x+1) + B(4x-1)$$

$$-20 = A(1-1) + B(4(-1-1))$$

$$-20 = 0 + B(-5)$$

$$B = -4$$

$$-20 = A((\frac{1}{4}) + 1) + B(4\frac{1}{4}) - 1$$

$$-20 = A\frac{5}{4} + 0$$

$$A = \frac{-20 * 4}{5} = \frac{-4 * 4 * 5}{5} = -16$$

$$G(x) = \frac{-16}{(4x-1)} + \frac{4}{x+1}$$
$$(1-4x)^{-1} = 1 + 4x + (4x)^2 + (4x)^3$$
$$(1+x)^{-1} = 1 - x + (x)^2 + (-x)^3 + ...$$

Por lo que:

$$G(x) = 16(1 + 4x + (4x)^2 + ...) + 4(1 - x + (x) - ....)$$

Ahora sancando el n-ésimo término de cada paréntesis se obtiene:

$$U_n = 16(4)^n + 4(-1)^n$$

$$U_n = 4(4 \cdot 4^n + (-1)^n)$$

$$U_n = 4(4^{n+1} + (-1)^n)$$

20. Encuentre la función generatriz de la secuencia de Fibonacci. Asumiendo la secuencia de Fibonacci como: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...$

    Asi, la secuencia $U_n = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...$ donde $n = 0, 1, 2, 3....$

    Ahora, la funcion generatriz para la secuencia u_n de numero reales es definida como:

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n Z^n$$

para la subseccion de fibonacci

$$G(z) = 1 + z + 2z^2 + 3z^3 + 5z^4 + 8z^5 + 13z^6 + ... + f_n z^n + ...$$

Ahora, cambia una posición a la derecha y multiplicamos por z

$$zG(z) = z + z^2 + 2z^3 + 3z^4 + 5z^5 + 8z^6 + ...$$

Ahora, cambiamos una posición más a la derecha y multiplicamos por z

$$z^2G(z) = z^2 + z^3 + 2z^4 + 3z^5 + 5z^6 + 8z^7 + ...$$

Ahora, la ecuación 2 y ecuación 3

$$zG(z) + z^2G(z) = z + 2z^2 + 3z^3 + 5z^4 + 8z^5 + 13z^6 + ..$$

$$zG(z) + z^2G(z) = G(z) - 1$$

$$zG(z) - zG(z) - z^2G(z) = 1$$

Entonces, la funcion generatriz para la serie de fibonacci es

$$G(z) = \frac{1}{1 - z - z^2} = 1 + z + 2z^2 + 3z^3 + 5z^4 + 8z^5 + 13z^6 + ... + f_n z^n + ...$$

21. Utilice el método de la función generatriz para resolver $u_n - 2u_{n-1} = 3^n$, para $n \geq$ dado $u_0 = 1$