Projeções

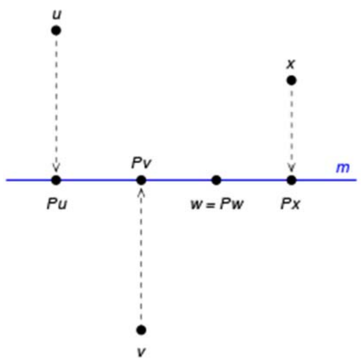
Prof. Dr. Bianchi Serique Meiguins

Prof. Dr. Carlos Gustavo Resque dos Santos

Projeções (Álgebra Linear)

- É uma transformação linear que reduz a dimensão dos pontos. Ex: $\boldsymbol{P^n} \rightarrow \boldsymbol{P^{n-1}}$
- Mais especificamente:
  - Projeta os pontos em um hiperplano.

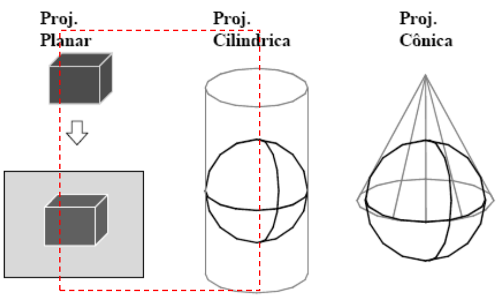
Na geometria, um hiperplano pode ser um espaço vetorial, transformação afim ou o sub-espaço de dimensão n-1.
Em particular, num espaço tridimensional um hiperplano é um plano habitual. Num espaço bidimensional, um hiperplano é uma reta. Num espaço unidimensional, um hiperplano é um ponto.

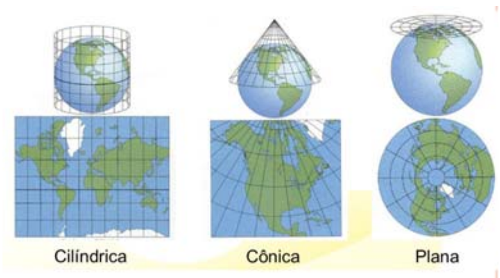


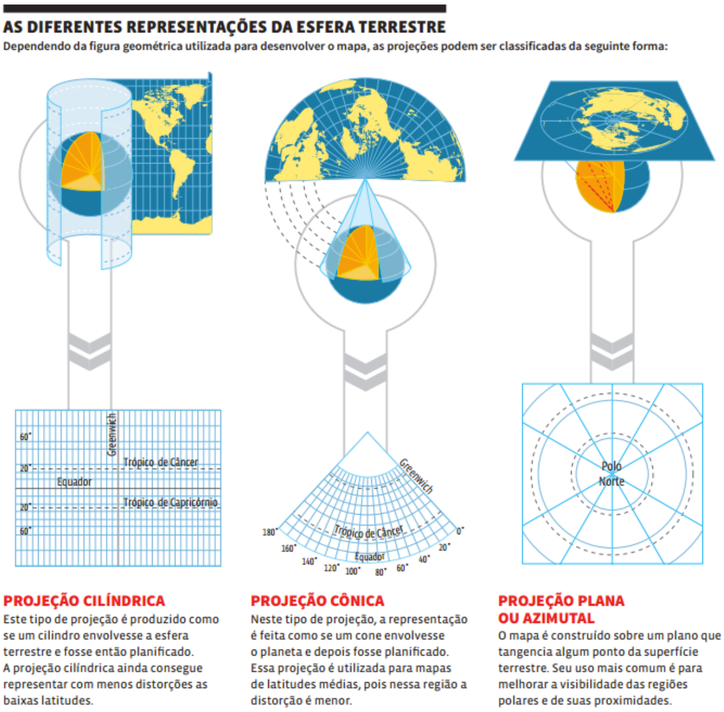
Projeções Geométricas

- Também conhecida como Projeções Gráficas
- Objetiva as projeções do tipo: $\boldsymbol{P}^3 \rightarrow \boldsymbol{P}^2$
- Permite que objetos 3D sejam desenhados na tela 2D

Tipos de Projeções

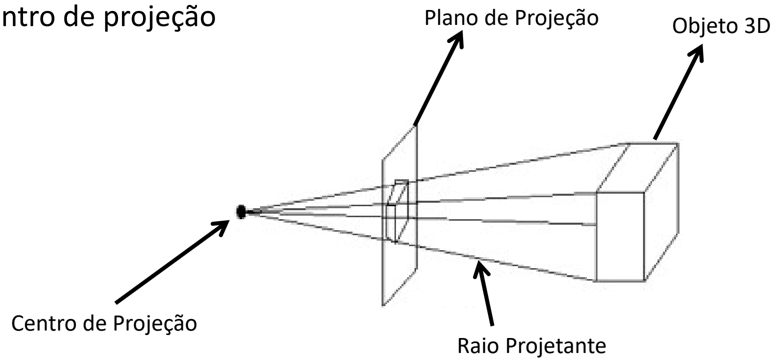






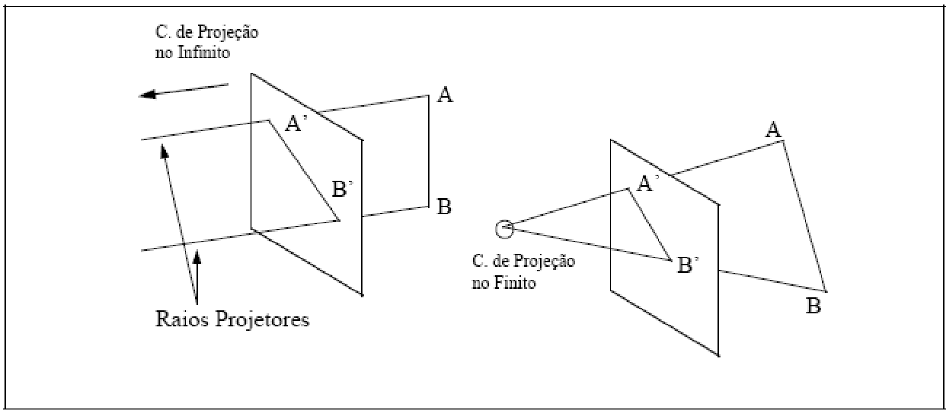
Projeções planares

- Elementos básicos para uma projeção:
  - Plano de projeção
  - Raio projetante
  - Centro de projeção

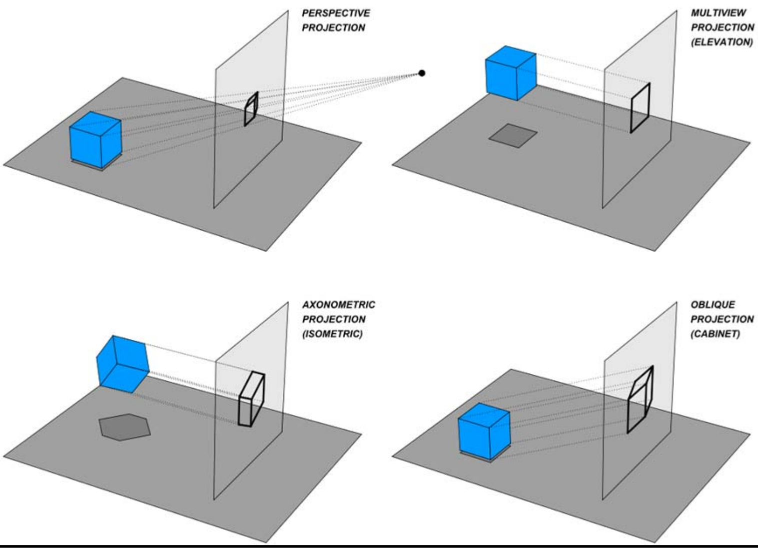


Projeções planares

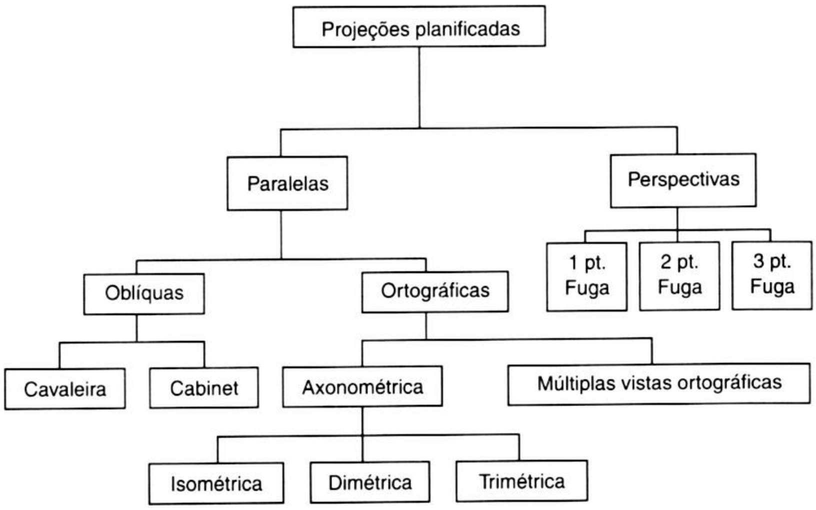
- Centro de Projeção



Projeções Planares

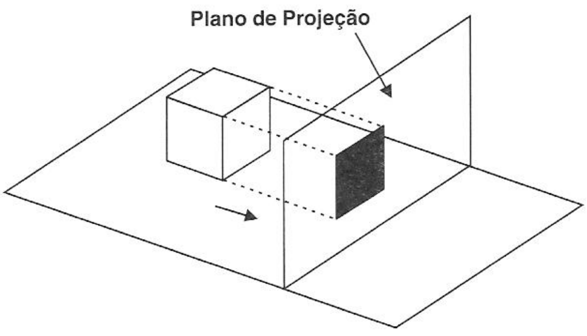


Projeções planares

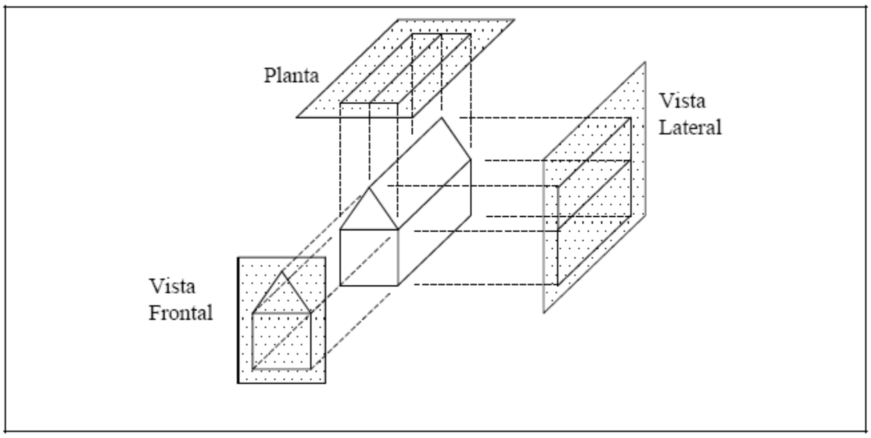


Projeção Paralela Ortográfica

- Centro de Projeção no infinito
- Linhas de projeção paralelas
- Linhas de projeção perpendiculares ao plano de projeção.



Projeção Paralela Ortográfica



Projeção Paralela Ortográfica

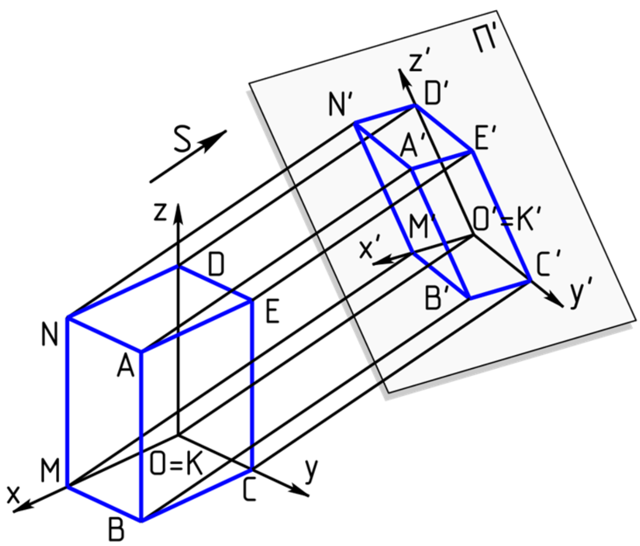
- Projeção no Plano XY ($z = 0$)
  - $[x' \quad y' \quad 0 \quad 1]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$
- Projeção no Plano XY ($z = T_z$)
  - $[x' \quad y' \quad T_z \quad 1]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$

Projeção Paralela Ortográfica

- Projeção no Plano YZ ($\mathrm{x} = T_x$)
  - $[T_x \quad y' \quad z' \quad 1]^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$

- Projeção no Plano XZ ($\mathrm{y} = T_y$)
  - $[x' \quad T_y \quad z' \quad 1]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$

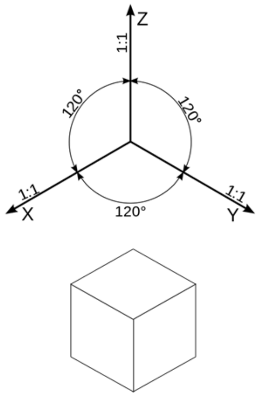
Projeções Paralelas Axométricas



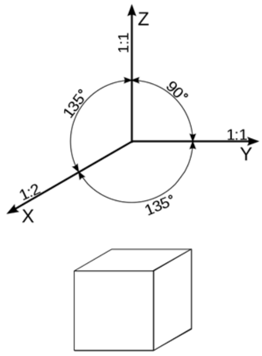
Projeções Paralelas Axométricas

- Os planos do objeto são inclinados com relação ao plano de projeção
  - **Isométrica**: três eixos terão a mesma redução
  - **Dimétrica**: apenas dois eixos terão a mesma redução
  - **Trimétrica**: cada eixo sofrerá uma transformação de escala própria

Projeções Paralelas Axométricas

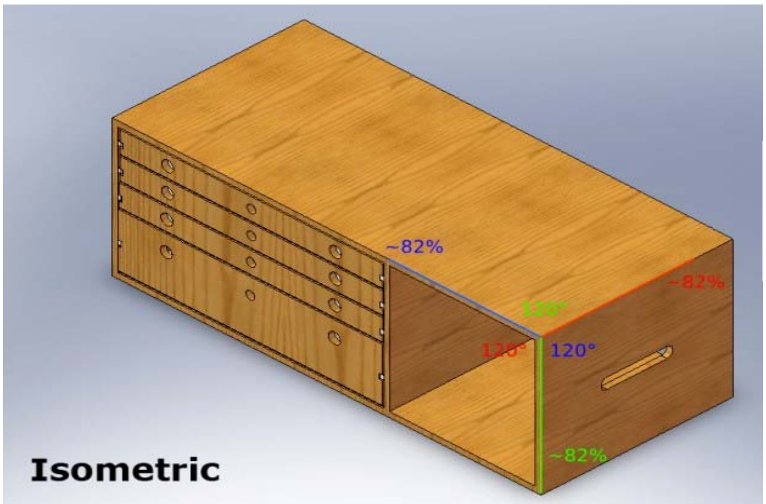


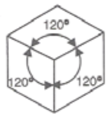
isométrica



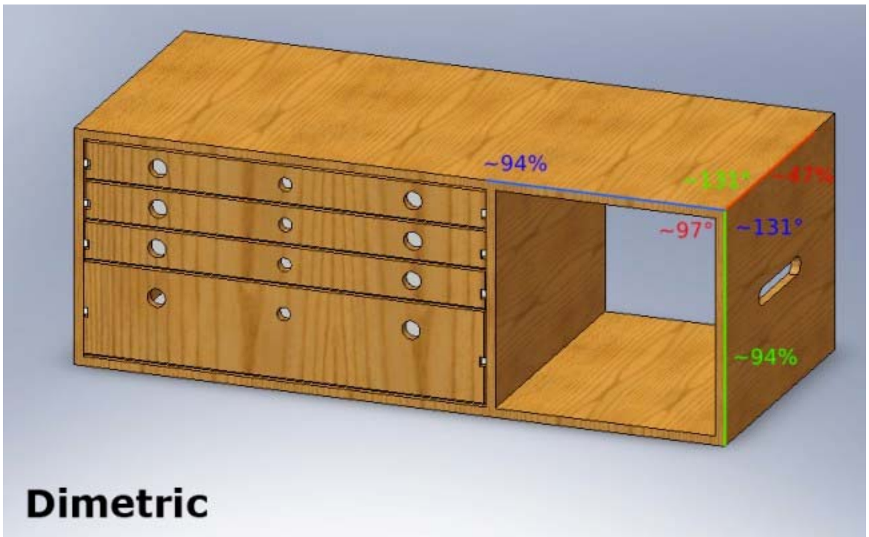
dimétrica

Isométrica

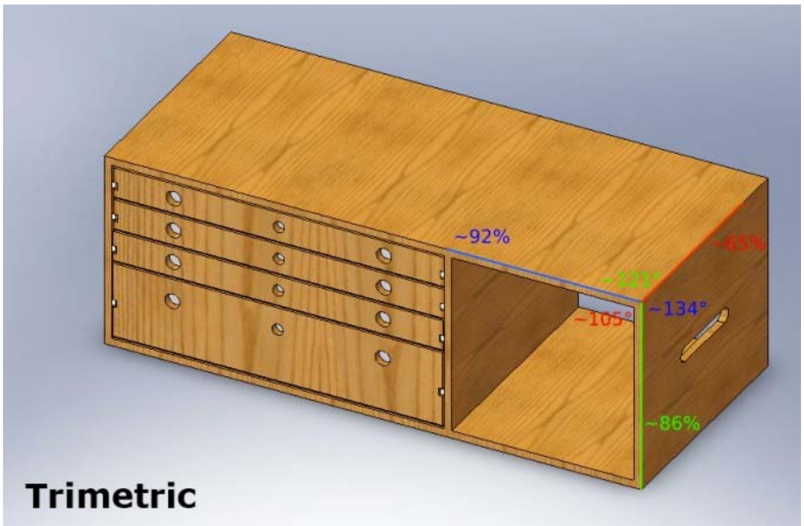




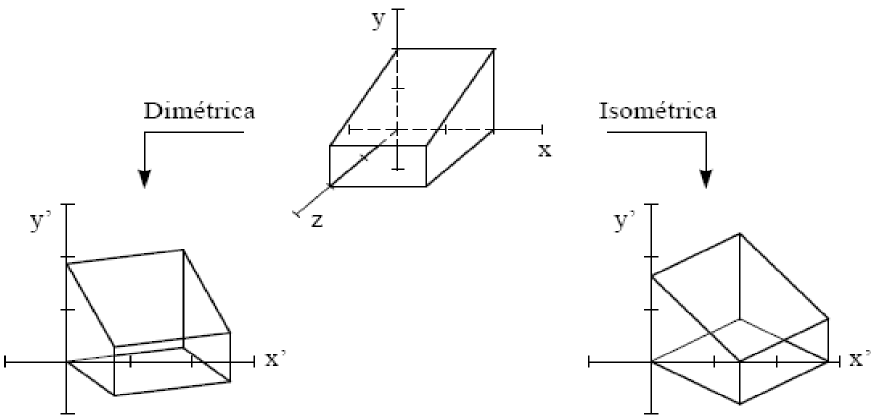
Dimétrica



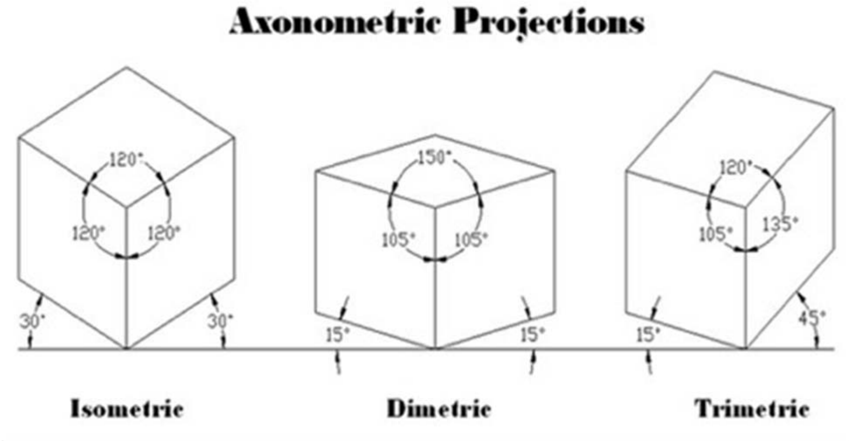
Trimétrica



Comparação



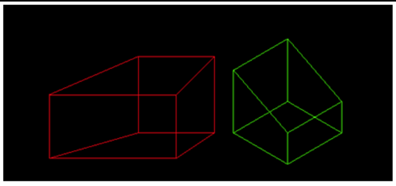
Trimétrica e Comparações



Projeção Axométrica

- Matriz de Projeção
  - $[x' \quad y' \quad 0 \quad 1]^T = PO_z R_x R_y \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$
  - Para isométrica
    - $Ry(\alpha) \rightarrow \alpha = 45°$
    - $Rx(\theta) \rightarrow \theta = 35.264°$
  - Para dimétrica
    - $Ry(\alpha) \rightarrow \alpha = 45°$
    - $Rx(\theta) \rightarrow \theta = pode\ variar$

Projeção Isométrica



Pontos
A (0,0,2) E (0,0,0)
B (2,0,2) F (2,0,0)
C (2,1,2) G (2,2,0)
D (0,1,2) H (0,2,0)

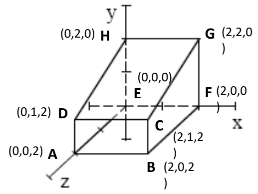
Arestas
AB, BC, CD, DA,
EF, FG, GH, HE
CG, BF, DH, AE

Pontos' = $P_z . R_x . R_y . Pontos$

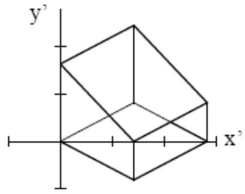
$Ry(\alpha) \rightarrow \alpha = 45°$
$Rx(\theta) \rightarrow \theta = 35.264°$

Cos 35.264° =0,8165
Sen 35.264° =0,5773
Cos 45° =0,7071
Sen 45° = 0,7071

$$\text{Pontos'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,82 & -0,58 & 0 \\ 0 & 0,58 & 0,82 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0,71 & 0 & 0,71 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0,71 & 0 & 0,71 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



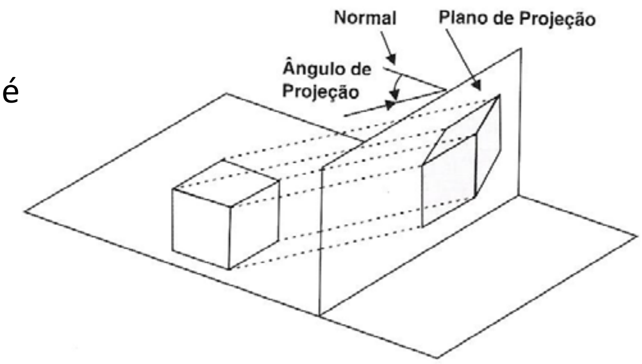
$$\text{Pontos'} = \begin{bmatrix} 1.42 & 2.84 & 2.84 & 1.42 & 0 & 1.42 & 1.42 & 0 \\ -0.82 & 0 & 0.82 & 0 & 0 & 0.82 & 2.46 & 1.64 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



Projeção Paralela Oblíqua

- Centro de Projeção no infinito
- Linhas de projeção paralelas
- Linhas de projeção possuem um ângulo de projeção

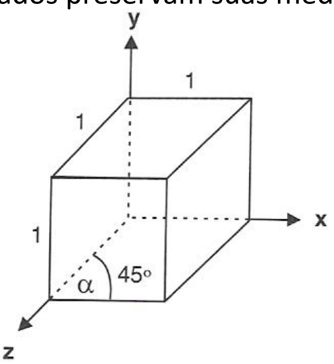
- O ângulo de projeção é medido em relação à normal do plano de projeção

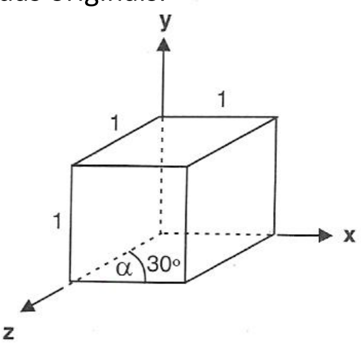


Projeção Paralela Oblíqua

- Quando:
  - Ângulo de Projeção = 45º ou 30º
  - Os pontos projetados preservam suas medidas originais.

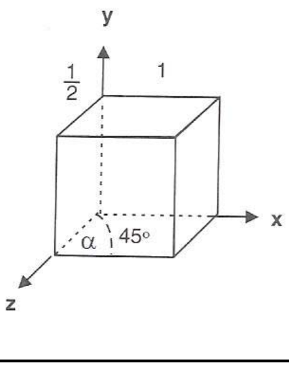
Esta projeção é chamada de Cavaleira ou *Cavalier*

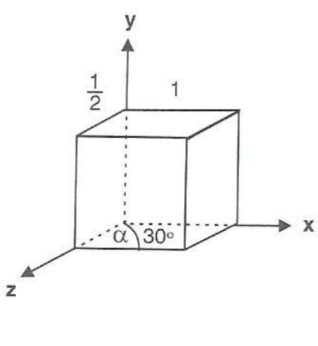




Projeção Paralela Oblíqua

- Para manter uma noção de profundidade podemos considerar a profundidade com metade da sua medida original.
  - Temos a projeção Cabinet





Projeção Paralela Oblíqua

- Matriz de projeção Oblíqua

- $[x' \quad y' \quad 0 \quad 1]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \delta\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 1 & \delta\,\mathrm{sen}(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$

θ é o ângulo da projeção

δ é um fator que estabelece a relação de profundidade em 3D com a elevação vertical da projeção.

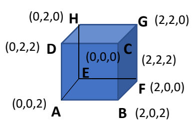
$\delta = 1$: Cavalier

$\delta = {}^{1}/_{2}$: Cabinet

Projeção Paralela Oblíqua

Pontos
A (0,0,2) E (0,0,0)
B (2,0,2) F (2,0,0)
C (2,2,2) G (2,2,0)
D (0,2,2) H (0,2,0)

Arestas
AB, BC, CD, DA,
EF, FG, GH, HE
CG, BF, DH, AE



Cabinet 30º $\delta = {}^{1}/_{2}$

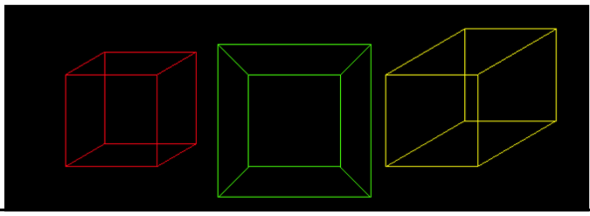
$$\text{Pontos'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.5\text{x}0.86 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5\text{x}0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

0.86	2.86	2.86	0.86	0	2	2	0
0.5	0.5	2.5	2.5	0	0	2	2
0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1

Cavaleira 30º $\delta = 1$

$$\text{Pontos'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.86 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

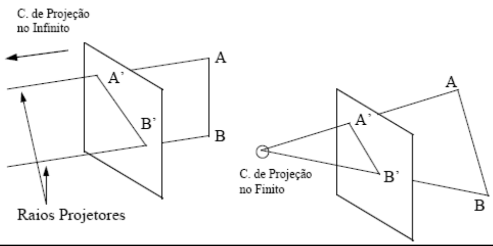
1.72	3.72	3.72	1.72	0	2	2	0
1	1	3	3	0	0	2	2
0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1



Projeções

- Projeções Perspectivas:
  - A distância do centro de projeção para o plano de projeção é **finita**.

- Projeções Paralelas:
  - A distância do centro de projeção para o plano de projeção é **infinita**.



Projeção Perspectiva

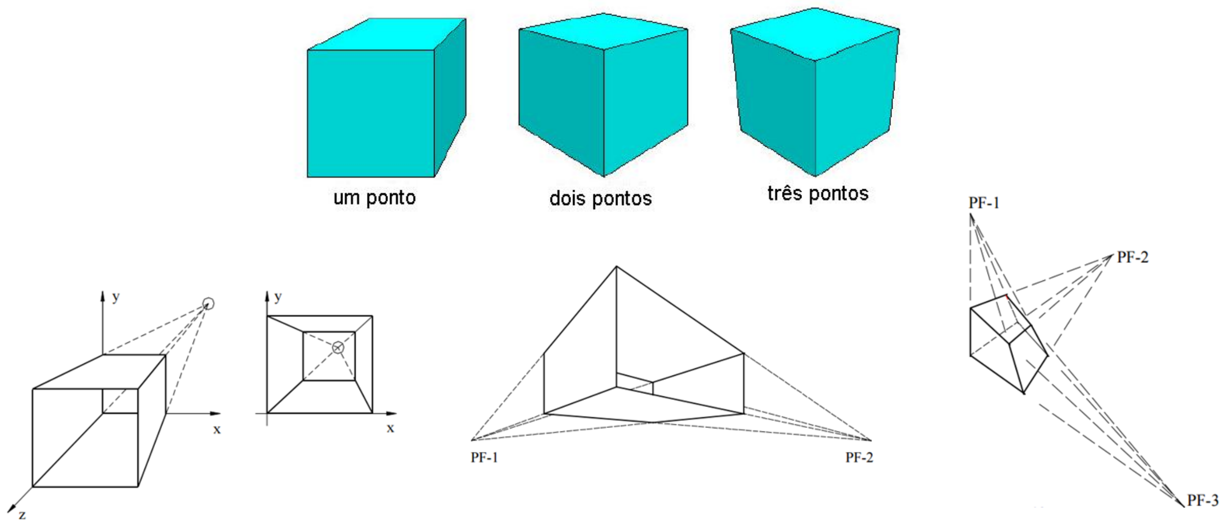
- Representam a cena a partir de um ponto a uma distância **finita**

- Baseia-se no número de pontos de fuga

- Geram cenas mais realistas (aproximação com a visão humana)

- **Não** reproduzem as medidas reais do objeto

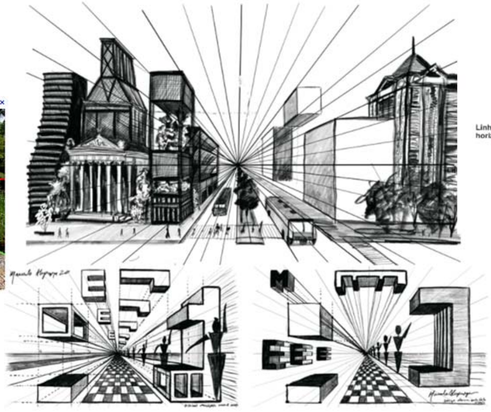
Pontos de Fuga



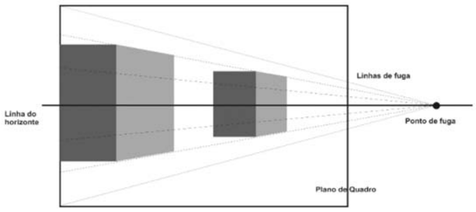
Perspectiva com 1 Ponto de Fuga

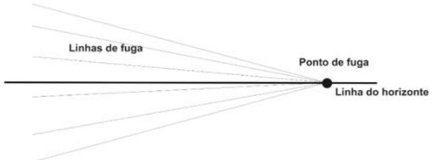
- **1 ponto de fuga:** Na perspectiva com 1 ponto de fuga, objeto ou uma paisagem tridimensional é projetando um plano a partir de um ponto – o *ponto de fuga*, que se encontra sobre a *linha de horizonte* imaginária.
- Todas as linhas de projeção do desenho convergem para esse ponto, que, apesar de poder não estar representado, tem uma relevante presença na estrutura do objetou paisagem .
- Os elementos mais distantes do olho são os que se encontram mais próximos do eixo de visão.

Perspectiva com 1 Ponto de Fuga

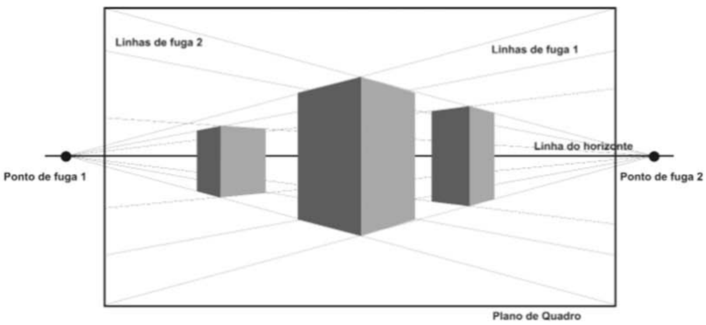


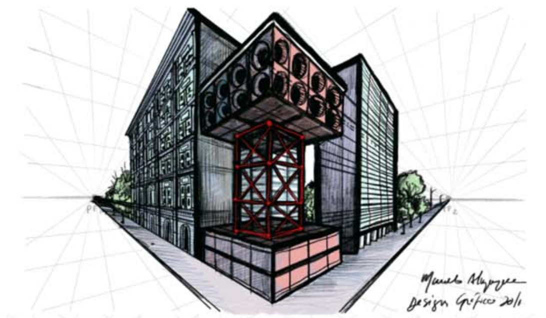
IPAD E PROCREATE
MARCELO ALBUQUERQUE, 2020

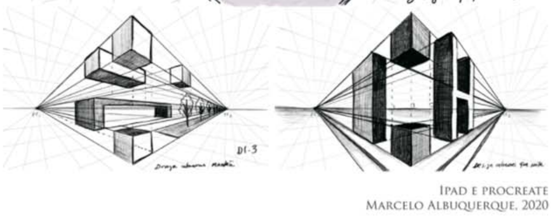




Perspectiva com 2 Pontos de Fuga

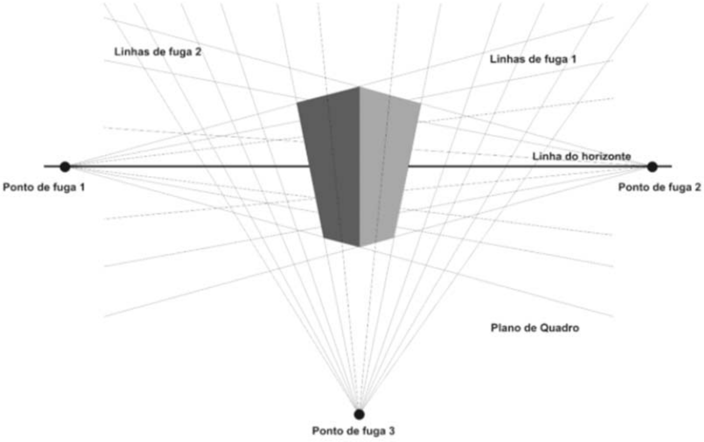


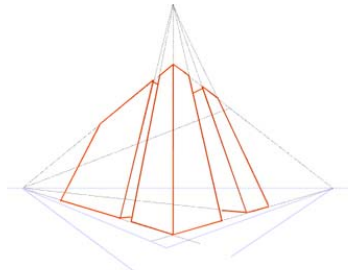


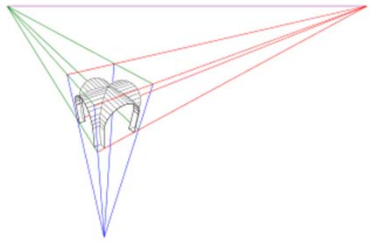


IPAD E PROCREATE
MARCELO ALBUQUERQUE, 2020

Perspectiva com 3 Pontos de Fuga

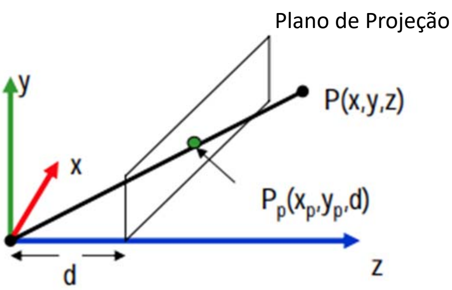


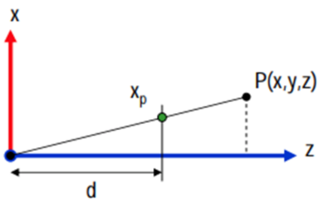


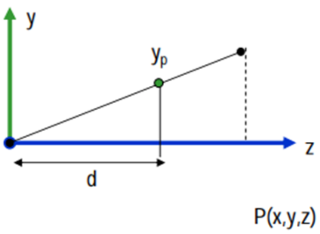


Projeção Perspectiva – Caso mais Simples

- C é o centro de projeção, f é a distância focal (C ao plano-imagem).
- C esta em Z=0







$$\frac{x_p}{d} = \frac{x}{z} \qquad \frac{y_p}{d} = \frac{y}{z}$$

$$x_p = \frac{x.d}{z} \qquad x_p = \frac{x}{z/d}$$

$$y_p = \frac{y.d}{z} \qquad y_p = \frac{y}{z/d}$$

Projeção Perspectiva – Caso mais Simples

$$x_p = \frac{x.d}{z}$$

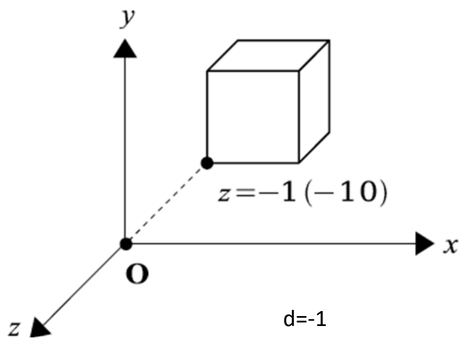
$$y_p = \frac{y.d}{z}$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{PER}} = \begin{bmatrix} d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{PER}} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cdot d \\ y \cdot d \\ z \cdot d \\ z \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x \cdot d \\ y \cdot d \\ z \cdot d \\ z \end{bmatrix} / z = \begin{bmatrix} \frac{x \cdot d}{z} \\ \frac{y \cdot d}{z} \\ d \\ 1 \end{bmatrix}$$

Projeção Perspectiva – Caso mais Simples

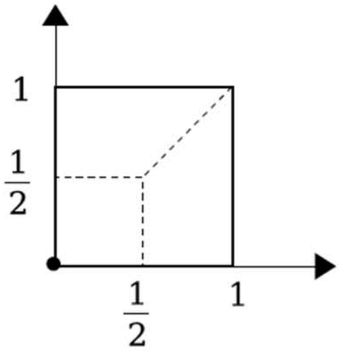


$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

d=-1

$$\mathbf{P}_{\mathbf{PER}} \cdot \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -2 & -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

Projeção Perspectiva – Caso mais Simples

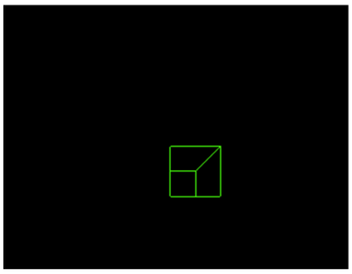


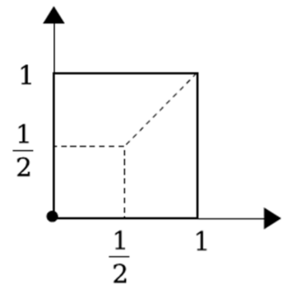
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Projeção Perspectiva – Caso mais Simples

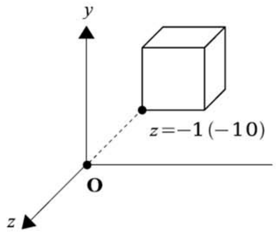
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
		0	1	1	0	0	1	1	0	
		0	0	1	1	0	0	1	1	
		-1	-1	-1	-1	-2	-2	-2	-2	
		1	1	1	1	1	1	1	1	
	-1	0	0	0			1	0	0	0
	0	-1	0	0			0	1	0	0
	0	0	-1	0			0	0	0	0
	0	0	1	0			0	0	0	1
	0	-1	-1	0	0	-1	-1	0		
	0	0	-1	-1	0	0	-1	-1		
	0	0	0	0	0	0	0	0		
	-1	-1	-1	-1	-2	-2	-2	-2		
	0	1	1	0	0	0.5	0.5	0		
	0	0	1	1	0	0	0.5	0.5		
	0	0	0	0	0	0	0	0		
	1	1	1	1	1	1	1	1		

```
  const points = [];
points.push( new THREE.Vector3( 0, 0, 0 ) );//A
points.push( new THREE.Vector3( 1, 0, 0 ) );//B
points.push( new THREE.Vector3( 1, 1, 0 ) );//C
  points.push( new THREE.Vector3( 0, 1, 0 ) );//D
  points.push( new THREE.Vector3( 0, 0, 0 ) );

  points.push( new THREE.Vector3( 0, 0, 0 ) );//E
  points.push( new THREE.Vector3( 0.5, 0, 0 ) );//F
  points.push( new THREE.Vector3( 0.5, 0.5, 0 ) );//G
  points.push( new THREE.Vector3( 0, 0.5, 0 ) );//H
  points.push( new THREE.Vector3( 0, 0, 0 ) );


  points.push( new THREE.Vector3( 0, 0, 0 ) );//A
  points.push( new THREE.Vector3( 0, 1, 0 ) );//D
   points.push( new THREE.Vector3( 0, 0.5, 0 ) );//H
   points.push( new THREE.Vector3( 0, 0, 0 ) );//E
  points.push( new THREE.Vector3( 0, 0, 0 ) );//A

  points.push( new THREE.Vector3( 1, 0, 0 ) );//B
  points.push( new THREE.Vector3( 1, 1, 0 ) );//C
   points.push( new THREE.Vector3( 0.5, 0.5, 0 ) );//G
 points.push( new THREE.Vector3( 0.5, 0, 0 ) );//F
 points.push( new THREE.Vector3( 1, 0, 0 ) );//B
```





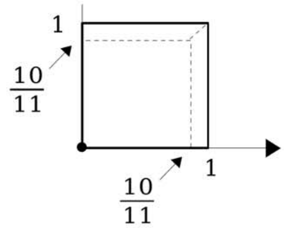
Projeção Perspectiva – Caso mais Simples



$$\mathbf{C}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -10 & -10 & -10 & -10 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{C}' = \begin{bmatrix} 0 & -10 & -10 & 0 & 0 & -10 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & -10 & 0 & 0 & -10 & -10 \\ 100 & 100 & 100 & 100 & 110 & 110 & 110 & 110 \\ -10 & -10 & -10 & -10 & -11 & -11 & -11 & -11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{10}{11} & \frac{10}{11} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{10}{11} & \frac{10}{11} \\ -10 & -10 & -10 & -10 & -10 & -10 & -10 & -10 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

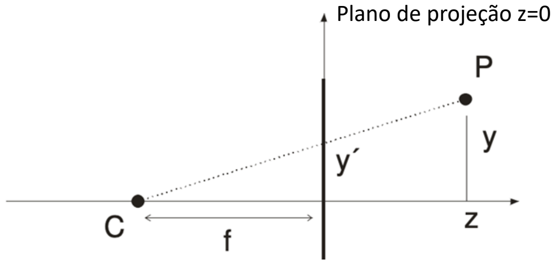


Projeção Perspectiva ou Cônica

- Pode-se utilizar as transformações de translação e translação inversa para utilizar o caso simples

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -tx \\ 0 & 1 & 0 & -ty \\ 0 & 0 & 1 & -tz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & tx \\ 0 & 1 & 0 & ty \\ 0 & 0 & 1 & tz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Projeção Perspectiva – Outro Modelo



$$\frac{y'}{f} = \frac{y}{z+f} \Rightarrow \begin{cases} y' = \dfrac{f}{z+f}\, y \\ x' = \dfrac{f}{z+f}\, x \end{cases} \qquad \begin{aligned} y' &= y \\ x' &= x \\ w' &= \frac{z+f}{f} = 1 + \frac{z}{f} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/f & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \\ z/f + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \\ (z+f)/f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x.f/(z+f) \\ y.f/(z+f) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Perspectiva com 2 e 3 Pontos de Fuga

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ p & q & r & 0 \end{bmatrix}$$

p=1/dx, q=1/dy, r=1/dz

Câmera Virtual

- A o gerar imagens de cenas 3D em computação gráfica, é comum fazermos uma analogia com uma máquina fotográfica.
- Posição do câmera, sua orientação, foco, tipo de projeção e a posição dos planos que limitam a visibilidade da cena.