Transformações Geométricas 2D

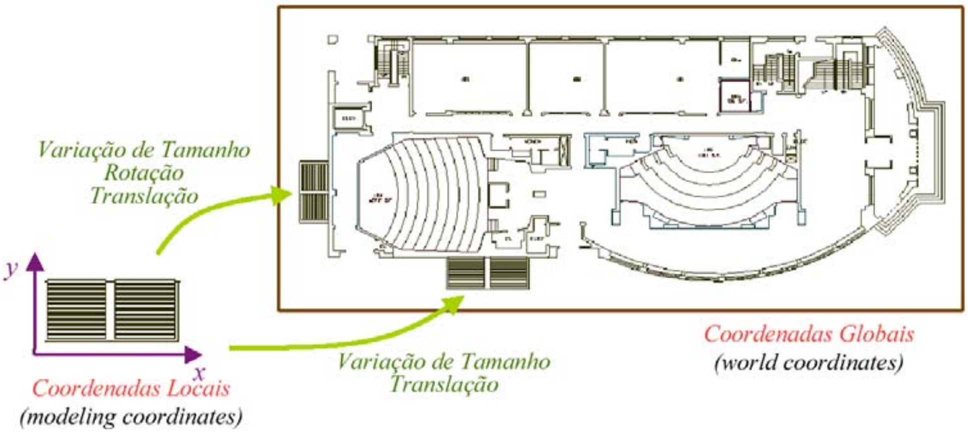
Prof. Dr. Bianchi Serique Meiguins
Prof. Dr. Carlos Gustavo Resque dos Santos

Introdução

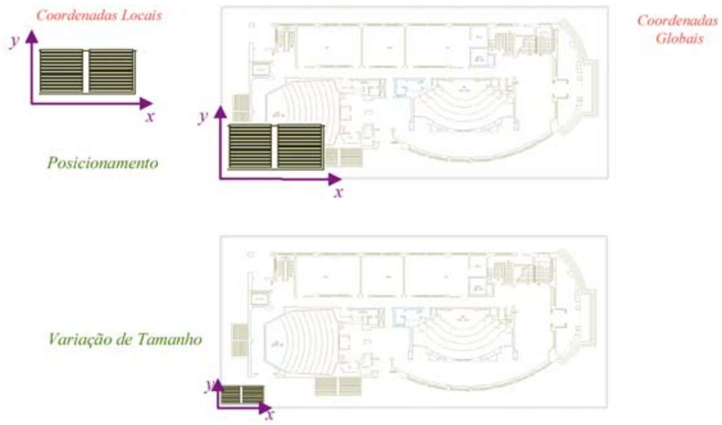
- Transformações geométricas são operações que podem ser utilizadas para alterar características de posição, forma ou tamanho do objeto a ser desenhado.

- Operações matemáticas para alterar uniformemente o aspecto de um desenho
  - Como operações de **posicionamento** de objetos em 2D e 3D.
  - Como operações de **modelagem** de objetos em 2D e 3D.
  - Como operações de **visualização** em 2D e 3D.

Modelagem de Objetos em 2D



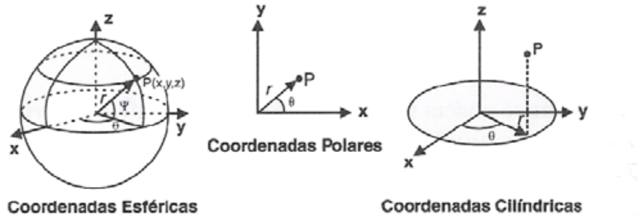
Modelagem de Objetos em 2D



Modelagem de Objetos em 2D

Sistemas de Coordenadas

- Pode-se utilizar diferentes sistemas de coordenadas para descrever os objetos modelados 2D/3D.
- O Sistema de Coordenadas serve para nos dar uma referência em termos de medidas do tamanho e posição dos objetos em nossa área de trabalho.



Sistemas de Coordenadas

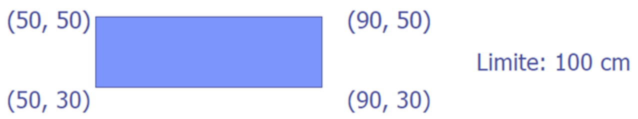
- Um determinado sistema de coordenadas é denominado sistema de referência se for um sistema de coordenadas cartesianas para alguma finalidade especifica.

Sistema de Coordenadas

- Sistema de Referência do Universo (SRU)
  - Coordenadas do mundo ou universo, depende da aplicação, milímetro ou metro, sistema de radar ?
- Sistema de Referência do Objeto (SRO)
  - Cada objeto é um mini universo individual
- Sistema de Referência Normalizado (SRN)
  - Valores entre 0<=x <=1, 0<=y <=1
  - Sua principal aplicação é tornar a geração das imagens independentes de dispositivos.
- Sistema de Referência do Dispositivo(SRD)
  - Sistema de coordenadas baseado características dos dispositivos

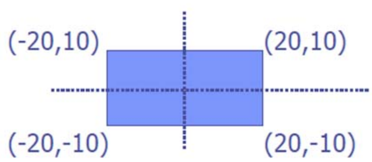
Sistema de Referência do Universo(SRU)

- Descreve os objetos em termos das coordenadas utilizadas pelo usuário em determinada aplicação;
- Cada tipo de aplicação especifica o seu universo de trabalho próprio.
  - CAD – metro/centímetros
  - Aplicação de mecânica de precisão, milímetros/ nanômetros
- Cada um destes sistemas tem uma escala e seus limites extremos (coordenadas mínimas e máximas).



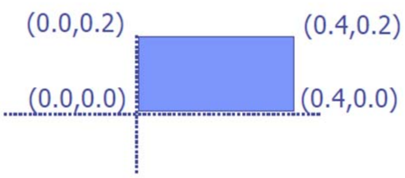
Sistema de Referência do Objeto(SRO)

- É o sistema de coordenadas onde se definem os modelos dos objetos da aplicação.
- Trata o objeto como um miniuniverso individual;
- Cada objeto tem suas particularidades descritas em função de seu sistema;
- Geralmente o centro do sistema de coordenadas coincide com o seu centro de gravidade (pivô).



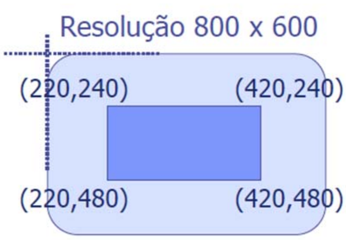
Sistema de Referência Normalizado (SRN)

- Trabalha com coordenadas normalizadas (valores entre 0 e 1, onde 0<=x<=1 e 0<=y<=1);
- Serve como um sistema de referência intermediário entre o SRU e o SRD;
- Torna a geração das imagens independente do dispositivo.



Sistema de Referência do Dispositivo(SRD)

- Utiliza coordenadas que podem ser fornecidas diretamente para um dispositivo de saída específico;
- Em dispositivo de vídeo pode indicar o número máximo de pixels que podem ser acesos ou a resolução especificada na configuração do SO.
  - Ex. (800 x 600), (1.024 x768)

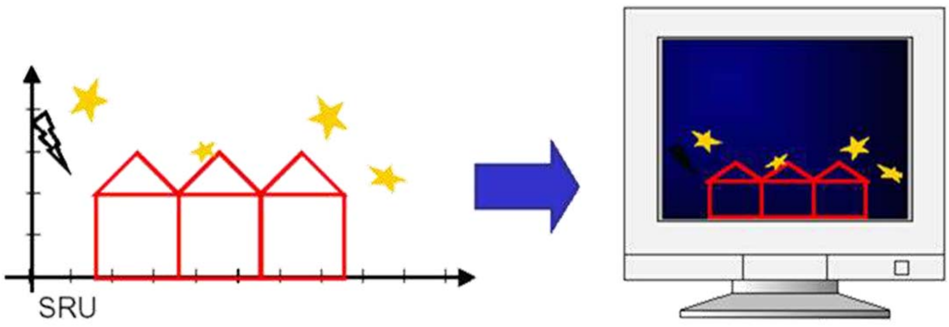


Transformações entre Sistemas de Coordenadas

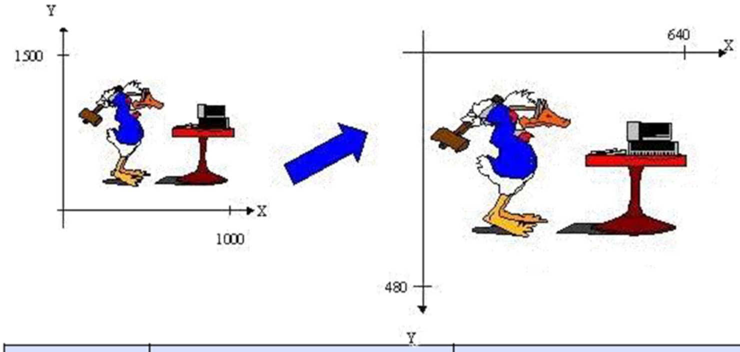
- Aplicações gráficas frequentemente requerem transformações de um sistema de coordenadas para outro.
  - 3D - > 2D
- Para tal é preciso definir as razões e proporções entre cada um dos sistemas.
- O Processo de conversão é chamado de Mapeamento.

Transformações entre Sistemas de Coordenadas

- Permite que se exiba em uma tela, ou em outro dispositivo, um conjunto de instâncias de objetos com coordenadas totalmente diferentes daquelas nas quais a tela está definida.

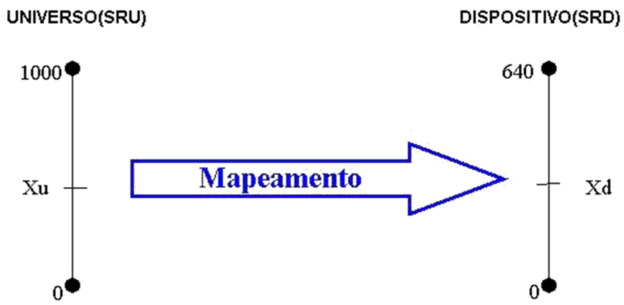


Transformações entre Sistemas de Coordenadas



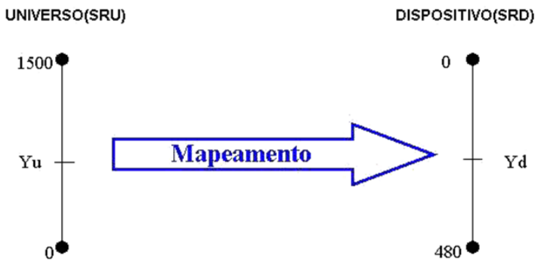
	Limites do SRU	Limites do SRD
Mínimo	(0,0)	(0,0)
Máximo	(1000,1500)	(640,480)

Transformações entre Sistemas de Coordenadas



$$\frac{Xd - 0}{Xu - 0} = \frac{640 - 0}{1.000 - 0} \rightarrow \quad Xd = \frac{Xu * 640}{1.000}$$

Transformações entre Sistemas de Coordenadas



$$\frac{Yd-480}{Yu-0} = \frac{0-480}{1500-0} \quad \text{ou} \quad Yd = \frac{Yu * (-480)}{1500} + 480$$

equações de conversão são:
Xd = (Xu * 640)/1000 e Yd =[(Yu * (-480)/1500)]+480

Matrizes em Computação Gráfica

- Todas as transformações geométricas podem ser representadas na forma de equações.
  - Necessita de muitas operações aritméticas simples.
- Computadores entendem e manipulam melhor matrizes

Pontos, Vetores e Matrizes

- P(2,3) ➔P=[2,3]
- Matriz quadrada

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Aritmética de Matrizes

- Soma

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

- Multiplicação por um Escalar

$$1/2 \times \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Aritmética de Matrizes

- Transposta

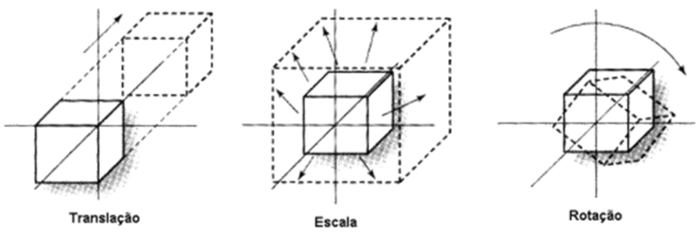
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- Multiplicação

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1X1+2X3 & 1x2+2X4 \\ 3X1+4x3 & 3x2+4x4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}$$

Transformações Básicas

- Transformações mais comuns: translação, rotação e escala.



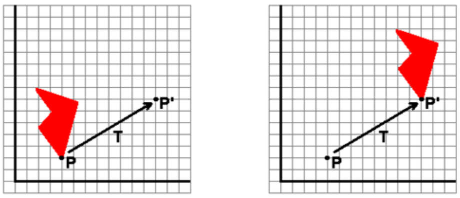
Translação

- Translação o ato de levar um objeto de um ponto a outro, num sistema de referência.
- Cada ponto em (x,y) pode ser movido por Tx unidades em relação ao eixo x, e por Ty unidades em relação ao eixo y.

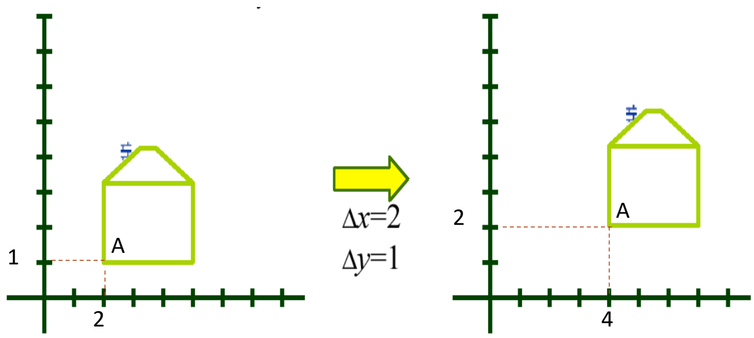
Translação

$$\begin{cases} x' = x + Tx \\ y' = y + Ty \end{cases} \Longrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Tx \\ Ty \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- Onde o par (Tx, Ty) é chamado de vetor de translação ou vetor de deslocamento: Tx indica quantos pixels a figura está deslocada na direção horizontal, e Ty na direção vertical.



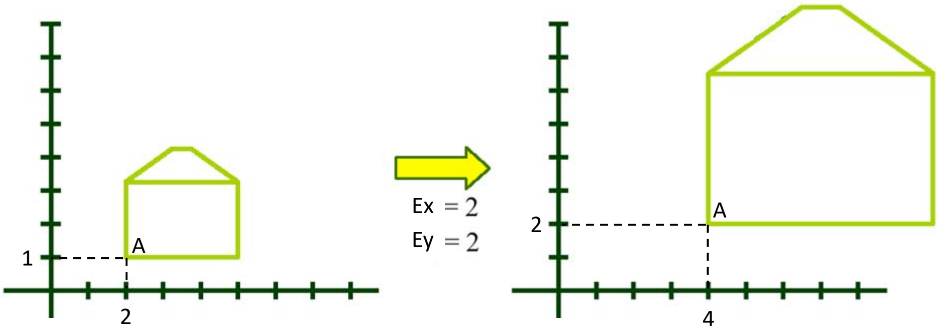
Translação



Escala

- Quando se aplica uma transformação de escala a um objeto, o resultado é um novo objeto semelhante ao original, mas "esticado" ou "encolhido".
- Redimensiona o objeto;
- Os valores das coordenadas de cada ponto são modificados a partir da multiplicação por fatores de escala;
- Se o objeto não estiver definido em relação à origem ocorrerá também uma translação.

Transformação de Escala



Transformação de Escala

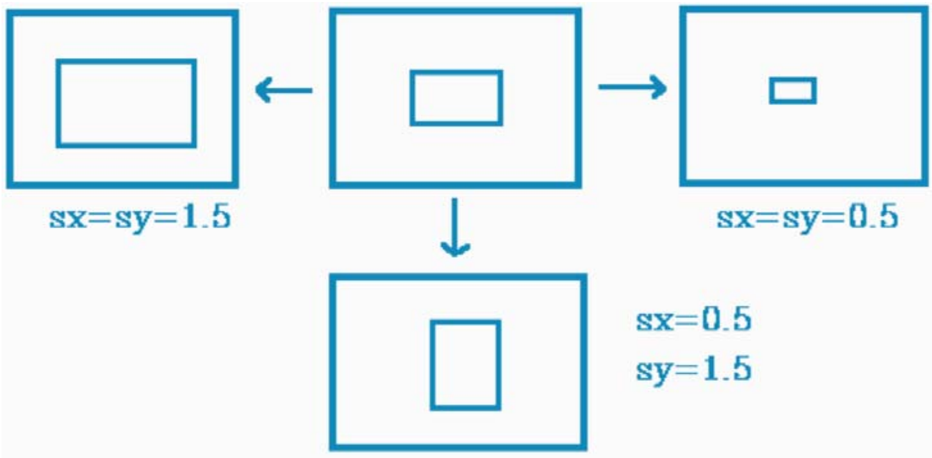
- *Variar o tamanho* de um objeto é multiplicar cada componente de cada um dos seus pontos (x, y) por um escalar.

$$\begin{cases} x' = Ex \cdot x \\ y' = Ey \cdot y \end{cases} \Longrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ex & 0 \\ 0 & Ey \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\text{obs}: \begin{cases} E > 1 \Rightarrow \text{Ampliação da imagem} \\ 0 < E < 1 \Rightarrow \text{redução da imagem} \\ E < 0 \Rightarrow \text{Espelhamento} \end{cases}$$

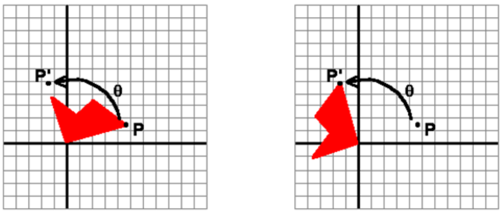
Transformação de Escala

Exemplos de fatores de escala:

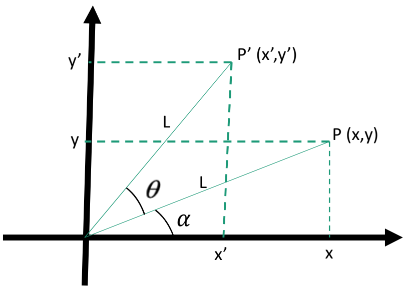


Rotação

- Dá-se ao nome de rotação ao ato de girar um objeto de um ângulo, num sistema de referência.
- Gira o objeto em torno da origem, a partir de um ângulo
- Se o objeto não estiver definido na origem, ocorrerá também uma translação.
- Entrada
  - Coordenada do objeto
  - Ângulo de rotação



Rotação



$$L = \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{L}};$$

$$\mathrm{sen}\,\alpha = \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{L}};$$

$$L = \sqrt{x'^2 + y'^2} \quad \text{e} \quad \cos(\theta + \alpha) = \frac{\mathrm{x}'}{\mathrm{L}} \; ; \quad \mathrm{sen}\,(\theta + \alpha) = \frac{\mathrm{y}'}{\mathrm{L}}$$

Rotação em torno da origem

L é a distância de $(x',\; y')$ à origem também, temos

$$L = \sqrt{x'^2 + y'^2} \quad \text{e} \quad \cos(\theta + \alpha) = \frac{\mathrm{x}'}{\mathrm{L}} \; ; \quad \mathrm{sen}\,(\theta + \alpha) = \frac{\mathrm{y}'}{\mathrm{L}}$$

$$L = \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{L}};$$

$$\mathrm{sen}\,\alpha = \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{L}};$$

Como: $$\begin{cases} \cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \mathrm{sen}\,a \cdot \mathrm{sen}\,b \\ \mathrm{sen}(a+b) = \mathrm{sen}\,a \cdot \cos b + \mathrm{sen}\,b \cdot \cos a \end{cases}$$

Temos: $$\begin{cases} \dfrac{x'}{L} = \cos\theta \cdot \cos\alpha - \mathrm{sen}\,\theta \cdot \mathrm{sen}\,\alpha \\ \dfrac{y'}{L} = \mathrm{sen}\,\theta \cdot \cos\alpha + \mathrm{sen}\,\alpha \cdot \cos\theta \end{cases}$$

Daí: $$\begin{aligned} x' &= L \cdot \cos\theta \cdot \cos\alpha - L \cdot \mathrm{sen}\,\theta \cdot \mathrm{sen}\,\alpha \\ y' &= L \cdot \mathrm{sen}\,\theta \cdot \cos\alpha + L \cdot \mathrm{sen}\,\alpha \cdot \cos\theta \end{aligned}$$

Rotação em torno da origem

$$x' = L \cdot \cos\theta \cdot \cos\alpha - L \cdot sen\theta \cdot sen\alpha$$
$$y' = L \cdot sen\theta \cdot \cos\alpha + L \cdot sen\alpha \cdot \cos\theta$$

$L = \sqrt{x^2 + y^2}$;

$\cos\alpha = \frac{x}{L}$;

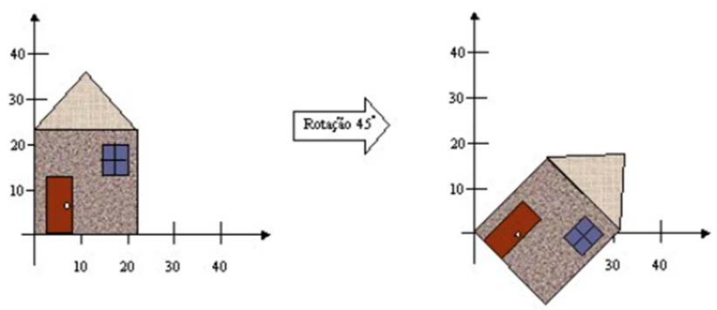
$sen\ \alpha = \frac{y}{L}$;

- Substituindo L.cos(α) e L.sen(α) por x e y nas equações anteriores tem-se:
  - $x' = x.\cos\theta - y.sen\ \theta$
  - $y' = x.sen\ \theta + y.\cos\theta$

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\ \theta \\ sen\ \theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

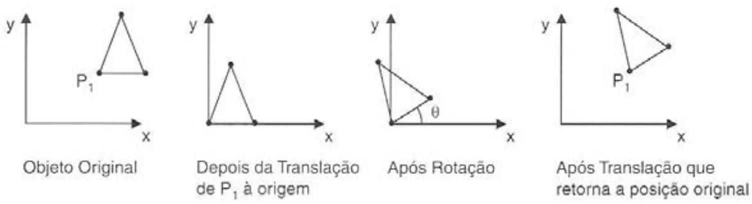
Matriz de rotação do plano xy por um ângulo θ

Rotação em torno da origem

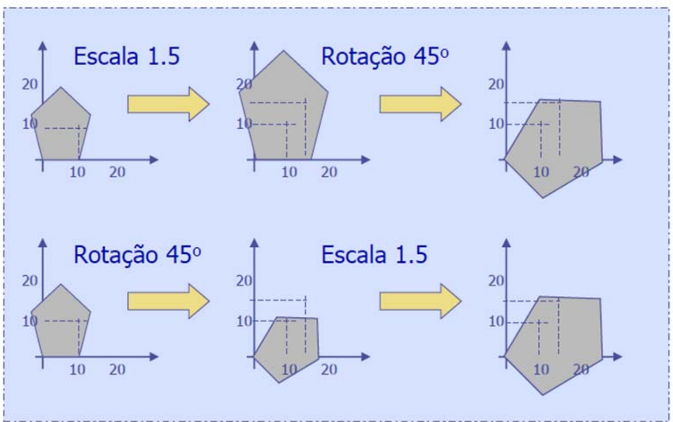


Rotação com ponto qualquer

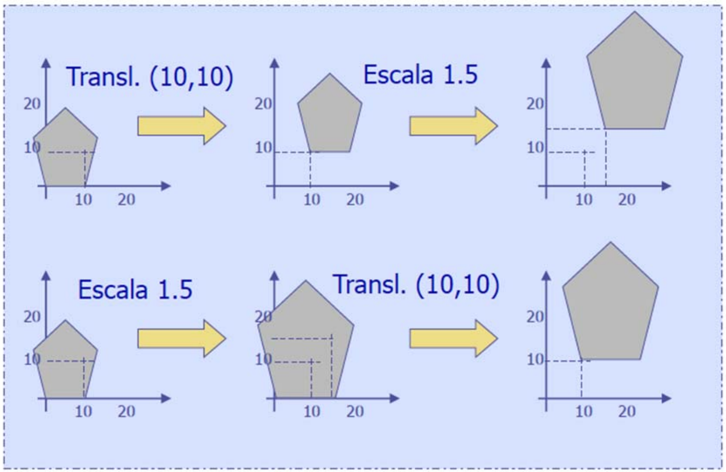
- É importante lembrar de que, se o objeto não estiver definido em relação a origem, essa operação de multiplicação de suas coordenadas por um matriz também fará com que o objeto translade.



A ordem das transformações



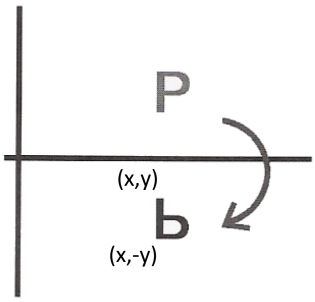
A ordem das transformações



Reflexão com relação ao eixo X

- As coordenadas X permanecem iguais, mas as coordenadas Y trocam de sinal
- Matriz de Transformação:

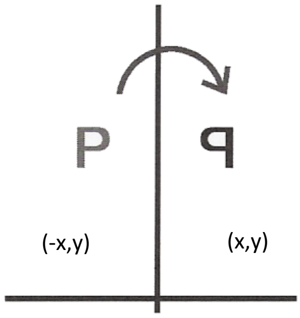
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$



Reflexão com relação ao eixo Y

- As coordenadas Y permanecem iguais, mas as coordenadas X trocam de sinal.
- Matriz de transformação:

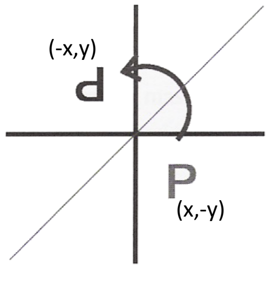
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Reflexão com relação à origem

- As coordenadas X e Y trocam de sinal.
- Matriz de transformação:

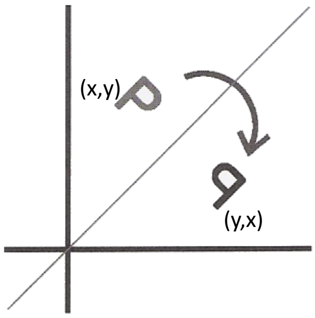
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$



Reflexão com relação à reta Y=X

- As coordenadas X e Y são invertidas.
- Matriz de transformação:

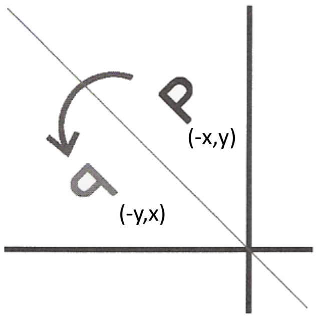
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$



Reflexão com relação à reta Y=-X

- As coordenadas X e Y são invertidas e trocam de sinal.
- Matriz de transformação:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$



Cisalhamento

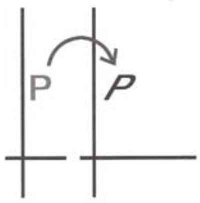
- Cisalhamento (Shearing ou Skew) é uma transformação que distorce o formato do objeto;
- Deforma o objeto linearmente, ao longo do eixo X, do eixo Y ou de ambos.

$$\mathbf{x' = x + S_x y}$$
$$\mathbf{y' = y + S_y x}$$

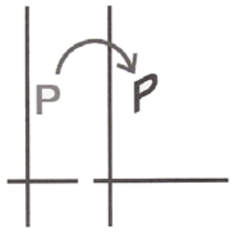
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & Sy \\ Sx & 1 \end{bmatrix}$$

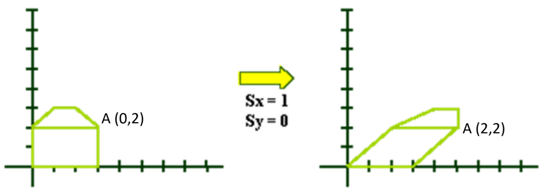
Shears na direção X

$$\begin{bmatrix} 1 & Sx \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Sy & 1 \end{bmatrix}$$





x' = x + Sx.y
y' = y + Sy.x

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & Sy \\ Sx & 1 \end{bmatrix}$$

Transformações Compostas

Coordenadas Homogêneas

- Coordenadas Homogêneas são uma representação dos pontos, vetores e matrizes para facilitar a generalização das operações entre esses tipos de objetos.
- A representação de um ponto P(x,y) em um sistema de coordenadas homogêneo é:
  - P(W.x , W.y , W) = P(X, Y, W)
  - para qualquer W <> 0
  - W é chamado de fator de escala e x = X/W e y = Y/W.
  - Utilizaremos W = 1 e a divisão acima é desnecessária.

Introdução Coordenada Homogêneas

- Ao expressarmos posições em coordenadas homogêneas, as equações de transformações geométricas ficam reduzidas a multiplicação de matrizes 3x3 elementos.

Translação

P´=T(tx,ty).P

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & tx \\ 0 & 1 & ty \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotação

P´=R(θ).P

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta & 0 \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Escala

P´=S(Sx,Sy).P

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Sx & 0 & 0 \\ 0 & Sy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

- As transformações inversas são dadas por T(-tx,-ty), R(-θ) e S(1/Sx,1/Sy), respectivamente.
- Outras transformações especiais (reflexão ou mudança de sistema de referência) podem ser facilmente formalizadas em coordenadas homogêneas.

Transformações compostas em coordenadas homogêneas

- Chamamos as composições de transformações de "concatenações", por serem feitas de forma seqüencial.
- Podem ser agrupadas em uma única matriz de transformação, obtida pelo produto das transformações que a compõem.

Concatenação de Translações

- Se duas translações sucessivas são aplicadas a uma posição P, a posição final P´=T(tx1,ty1).{T(tx2,ty2).P}={T(tx1,ty1).T(tx2.ty2)}.P
- Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & tx2 \\ 0 & 1 & ty2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & tx1 \\ 0 & 1 & ty1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & tx2+tx1 \\ 0 & 1 & ty2+ty1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Concatenação de Rotações

- Se duas rotações sucessivas aplicadas a uma posição P, a posição final P´ é dada por P´=R(θ_1).{R(θ_2).P}= {R(θ_1).R(θ_2).}P
- Intuitivamente, rotações consecutivas também devem se comportar de forma aditiva. Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\text{sen}\,\theta_1 & 0 \\ \text{sen}\,\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\text{sen}\,\theta_2 & 0 \\ \text{sen}\,\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1.\cos\theta_2 + \text{sen}\,\theta_1.-\text{sen}\,\theta_2 & \cos\theta_1.-\text{sen}\,\theta_2 + -\text{sen}\,\theta_1.\cos\theta_2 & 0 \\ \text{sen}\,\theta_1.\cos\theta_2 + \cos\theta_1.\text{sen}\,\theta_2 & \text{sen}\,\theta_1.-\text{sen}\,\theta_2 + \cos\theta_1.\cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\text{sen}\,(\theta 1+\theta 2) & 0 \\ \text{sen}\,(\theta 1+\theta 2) & \cos\,(\theta 1+\theta 2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Mas lembrando que:
$\cos(\theta+\alpha) = \cos\theta.\cos\alpha - \text{sen}\theta.\text{sen}\,\alpha$
$\text{sen}\,(\theta+\alpha) = \text{sen}\,\theta.\cos\alpha + \text{sen}\,\alpha.\cos\theta$

Concatenação de Escalas

- Se duas transformações de escalas sucessivas são aplicadas a uma posição P, a posição final P´ é dada por

  P´=S(sx2,sy2).{S(sx1,sy1).P}= {S(sx2,sy2).S(sx1,sy1)}.P

$$\begin{bmatrix} Sx2 & 0 & 0 \\ 0 & Sy2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Sx1 & 0 & 0 \\ 0 & Sy1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Sx1.Sx2 & 0 & 0 \\ 0 & Sy1.Sx2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Concatenação de Transformações Geométricas

- Uma transformação bidimensional genérica representando uma combinação de translação, rotação e escala pode ser expressa.

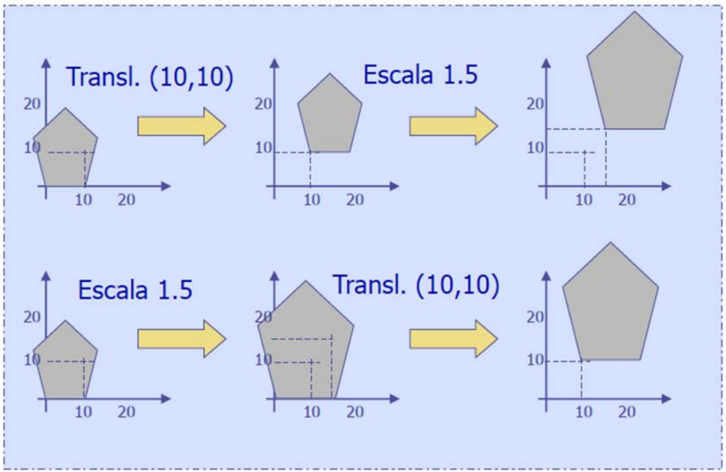
$$\begin{bmatrix} x´ \\ y´ \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & Tx \\ 0 & 0 & Ty \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} Cos\ b & -Sen\ b & 0 \\ Sen\ b & Cos\ b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} Sx & 0 & 0 \\ 0 & Sy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 0 & -Tx \\ 0 & 0 & -Ty \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

A ordem das transformações

- A questão deve ser considerada na composição de matrizes;
- A ordem da multiplicação das matrizes, assim como da aplicação das transformações geométricas, altera a matriz resultante.

rotação . escala = escala . rotação
translação . escala ≠ escala . translação
translação . rotação ≠ rotação . translação

A ordem das transformações



Transformações Geométricas 3D

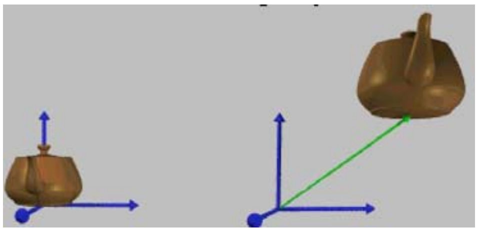
Transformações Geométricas 3D

- Em 3D, um ponto é representado por (x,y,z)
- Representação matricial:
  - (W.x, W.y, W.z, W)
- Transformações 3D são uma extensão dos métodos 2D, incluindo-se a coordenada Z
- Transformações:
  - rotação
  - escala
  - translação
  - espelhamento

Translação

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ T_x & T_y & T_z & 1 \end{bmatrix}$$

$$[x' y' z' w] = [xyzw].T$$



Ou, pode ser:
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Translação

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -t_x \\ 0 & 1 & 0 & -t_y \\ 0 & 0 & 1 & -t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Escala

- Quando se aplica uma transformação de escala a um objeto, o resultado é um novo objeto semelhante ao original, mas “esticado” ou “encolhido”.
- A transformação de escala também deve ser aplicada ao calcular os pontos de um objeto.

Escala

- Escala = $\begin{bmatrix} Ex & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Ey & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Ez & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

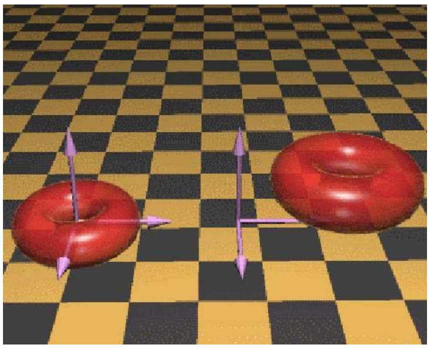
$$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} Ex & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Ey & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Ez & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Escala

- Se, no entanto, optarmos por representar o vetor por vetor coluna, teremos:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Escala

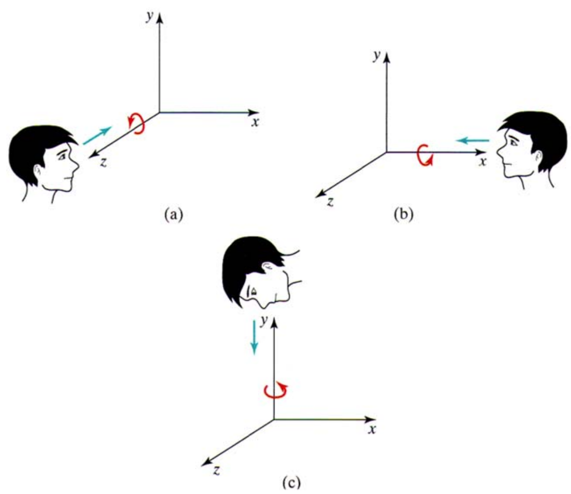


Observação: há alteração da distância do objeto à origem, novamente!!!!

Escala

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotação



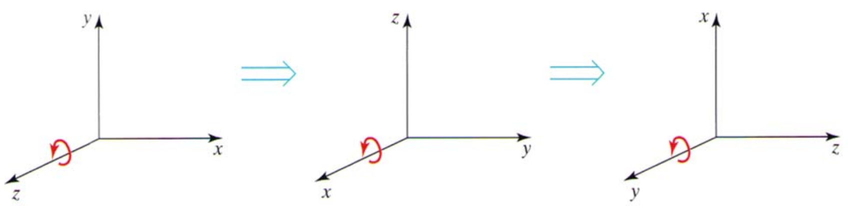
Rotação eixo Z

- Uma rotação 2D é facilmente estendida para uma rotação 3D
  - x' = x cos θ – y sen θ
  - y' = x sen θ + y cos θ
  - z' = z ao redor do eixo z
- Na forma matricial usando coordenadas homogêneas $P' = R_z(\theta) \cdot P$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotação

- As transformação de rotação para os outros eixos de coordenadas podem ser obtidas por meio de uma permutação cíclica das coordenadas x, y e z
- x → y → z → x



Rotação eixo X

- Considerando essa permutação e substituindo na equação da rotação 3D, compomos a rotação em torno do eixo-x
  - y' = y .cos θ – z sen θ
  - z' = y .sen θ + z. cos θ
  - x' = x

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotação eixo Y

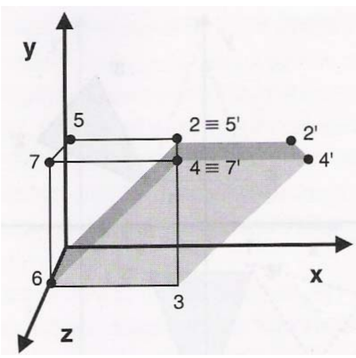
- O mesmo ocorrendo para se obter as equações para rotação em torno do eixo-y
  - z' = z.cos θ – x.sen θ
  - x' = z.sen θ + x.cos θ
  - y' = y

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Transformação de Cisalhamento

- Cisalhamento (Shearing ou Skew) é uma transformação que distorce o formato de um objeto.
- Nela aplica-se um deslocamento aos valores das coordenadas x,y ou z do objeto, proporcional ao valor das outras coordenadas de cada ponto transformado.

Transformação de Cisalhamento



$$\begin{bmatrix} 1 & S & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$x' = x + S.y$
$y' = y$
$z' = z$

Para S=1

Concatenação de Transformações em três dimensões

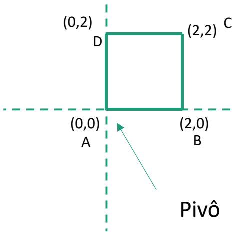
- O uso de coordenadas homogêneas na forma de matrizes facilita as aplicações sucessivas de transformações, através do produto das matrizes de cada transformação independente.
- Atenção com as translações indesejadas
- A ordem das matrizes altera o resultado final

Exemplos Práticos de Transformações

Prof. Dr. Bianchi Serique Meiguins

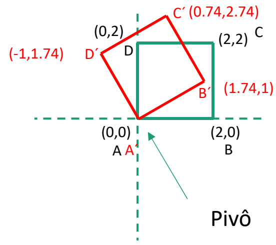
Prof. Dr. Carlos Gustavo Resque dos Santos

Quadrado de Aresta=2, pivô na origem



Pontos

$$\begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



Rotação de 30º

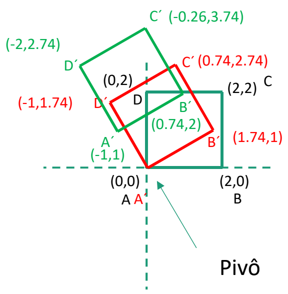
cos 30º = 0,87 sen 30º = 0,5

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta & 0 \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0,87 & -0,5 & 0 \\ 0,5 & 0,87 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Pontos'} = \begin{bmatrix} 0,87 & -0,5 & 0 \\ 0,5 & 0,87 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Pontos'} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A' & B' & C' & D' \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1,74 & 0,74 & -1 \\ 0 & 1 & 2,74 & 1.74 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Quadrado de Aresta=2, pivô na origem



Translação

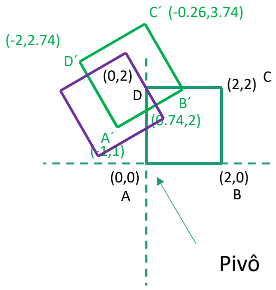
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & Tx \\ 0 & 1 & Ty \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-1,1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transladar (-1,1) depois rotacionar 30º

$$\text{Pontos'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,87 & -0,5 & 0 \\ 0,5 & 0,87 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\text{Pontos'} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A' & B' & C' & D' \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0,74 & -0,26 & -2 \\ 1 & 2 & 3,74 & 2.74 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Quadrado de Aresta=2, pivô na origem



Translação

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & Tx \\ 0 & 1 & Ty \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-1,1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotacionar 30º depois Transladar (-1,1)

$$\text{Pontos'} = \begin{bmatrix} 0,87 & -0,5 & 0 \\ 0,5 & 0,87 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\text{Pontos'} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A' & B' & C' & D' \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1,37 & 0,37 & -0,63 & -2.37 \\ 0,37 & 1,37 & 3,1 & 2.11 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

https://codepen.io/Brunelli/pen/JjRveqw?editors=0110