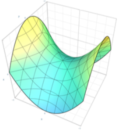


Unidade 1: Retas e planos no $\mathbb{R}^3$

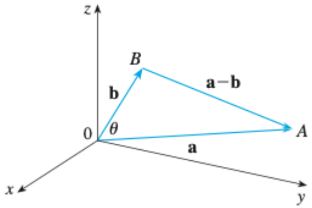
Cristina Vaz

C2-aula 14/5/25

UFPA

cvaz@ufpa.br

Sumário



Lei dos cossenos:

$$\|\overrightarrow{AB}\|^2 = \|\overrightarrow{OA}\|^2 + \|\overrightarrow{OB}\|^2 - 2\|\overrightarrow{OA}\|\,\|\overrightarrow{OB}\|\cos\theta$$

$$\|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cos\theta$$

Usando as propriedades do produto interno, obtemos:

$$\|\vec{a}-\vec{b}\|^2 = (\vec{a}-\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b}) = \|\vec{a}\|^2 - 2\,\vec{a}.\vec{b} + \|\vec{b}\|^2$$

Logo, a lei do cosseno torna-se

Usando as propriedades do produto interno, obtemos:

$$||\vec{a}-\vec{b}||^2 = (\vec{a}-\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b}) = ||\vec{a}||^2 - 2\,\vec{a}.\vec{b} + ||\vec{b}||^2$$

Logo, a lei do cosseno torna-se

$$||\vec{a}-\vec{b}||^2 = ||\vec{a}||^2 + ||\vec{b}||^2 - 2||\vec{a}||\,||\vec{b}||\cos\theta \Rightarrow$$

$$||\vec{a}||^2 - 2\,\vec{a}.\vec{b} + ||\vec{b}||^2 = ||\vec{a}||^2 + ||\vec{b}||^2 - 2||\vec{a}||\,||\vec{b}||\cos\theta \Rightarrow$$

$$||\vec{a}||^2 - 2\,\vec{a}.\vec{b} + ||\vec{b}||^2 = ||\vec{a}||^2 + ||\vec{b}||^2 - 2||\vec{a}||\,||\vec{b}||\cos\theta \Rightarrow$$

$$\vec{a}.\vec{b} = ||\vec{a}||\,||\vec{b}||\cos\theta$$

Teorema

Se θ é o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ do $\mathbb{R}^n$ então

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$$

Observe que, para o caso de vetores são ortogonais no $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, tem-se $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, o que implica $\cos\theta = 0$ e pelo teorema acima temos que

$$\vec{u}.\vec{v} = 0$$

Assim, podemos generalizar a propriedade de ortogonalidade do seguinte modo:

Definição (vetores ortogonais)

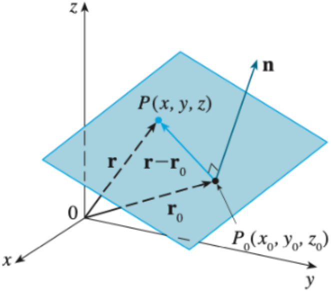
Dizemos que dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ do $\mathbb{R}^n$ são ***ortogonais*** *se, e somente se $\vec{u}.\vec{v} = 0$*

Existem três modos distintos e equivalentes de definir a equação de um plano π do espaço $\mathbb{R}^3$:

1. Usando três pontos de π ;
2. Usando um ponto de π e dois vetores não nulos dados;
3. Usando um ponto de π e um vetor perpendicular ao plano π dado.

Vamos usar o método descrito em 3, ou seja, o plano π no espaço fica determinado se conhecermos um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ do plano π e um vetor $\vec{n}$ que é ortogonal ao plano π .

Planos no $\mathbb{R}^3$
Vetores ortgonais
Equação do plano
Equação normal do plano
Equação escalar do plano
Equação linear do plano
Equação vetorial do plano
Cilindro



O vetor $\vec{n}$ é chamado vetor normal ao plano π

Como vetor normal $\vec{n}$ é ortogonal a todo vetor do plano π, logo, em particular $\vec{n}$ é ortogonal a $\vec{r} - \vec{r}_0$, o que significa que o produto interno (escalar) entre eles é zero. Logo,

$$\vec{n}.(\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$$

é chamada **equação normal** do plano π

Em termos das componentes dos vetores temos que: se $\vec{n} = (a, b, c)$, $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $\vec{r} = (x, y, z)$ então a equação normal torna-se

$$\vec{n}.(\vec{r} - \vec{r}_0) = 0 \Rightarrow (a, b, c).(x - x_0, y - y_0.z - z_0) = 0.$$

Ou seja,

$$\boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0}$$

chamada **equação escalar** do plano π que passa pelo ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ com vetor normal $\vec{n} = (a, b, c)$.

Efetuando as operações e agrupando os termos na equação escalar do plano podemos escrever

$ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0$. E logo,

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0}$$

com $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$. Esta equação é chamada **equação linear** em x, y e z.

Note que, se a, b e c não são todos simultaneamente nulos então uma equação do tipo

$$ax + by + cz + d = 0$$

representa a equação de um plano com vetor normal dado por $\vec{n} = (a, b, c)$.

De fato, suponha $a \neq 0$ então podemos escrever a equação na forma

$$a\left(x + \frac{d}{a}\right) + b(y - 0) + c(z - 0) = 0$$

que é a equação do plano que passa pelo ponto $P_0 = (d/a, 0, 0)$ com vetor normal $\vec{n} = (a, b, c)$.

Em resumo, a equação linear do tipo

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0}$$

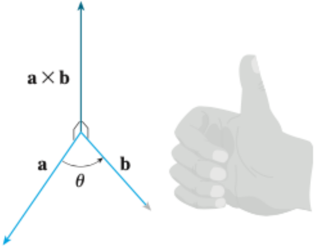
representa um plano no espaço com vetor normal $\vec{n} = (a, b, c)$

Exemplo (equação da reta)

Determine a equação do plano π que passa pelos pontos $P = (1, 3, 2)$, $Q = (3, -1, 6)$ e $R = (5, 2, 0)$

Solução: Para obtermos o vetor normal $\vec{n}$ ao plano π vamos usar o fato que o produto vetorial entre dois vetores v_1 e v_2 do $\mathbb{R}^3$, que pertencem ao plano π, gera um vetor $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ do $\mathbb{R}^3$ que é ortogonal a π. Assim,

$$\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$$


$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$
$\mathbf{a}$
θ
$\mathbf{b}$

Note que os vetores:

$$\vec{v}_1 = \overrightarrow{PQ} = Q - P = (2, -4, 4)$$

$$\vec{v}_2 = \overrightarrow{PR} = R - P = (4, -1, -2)$$

pertencem ao plano π. Assim,

$$\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -4 & 4 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 12\vec{i} + 20\vec{j} + 14\vec{k}$$

Logo, para $P_0 = P = (1,3,2)$ e $\vec{n} = 12\vec{i}+20\vec{j}+14\vec{k}$, a equação do plano

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

torna-se $12(x-1)+20(y-3)+14(z-2)=0$. Ou seja,

$$6x+10y+7z=50$$

é a equação do plano π que passa pelos pontos P, Q e R dados. ∎

Para obter a **equação vetorial** do plano π, considere dados um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ em π.

Se $P = (x, y, z)$ um ponto qualquer de π tal que os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{r} = \overrightarrow{P_0P}$ são linearmente dependentes, ou seja, existem escalares $t, k \in \mathbb{R}$ tais que

$$\boxed{\vec{r} = t\,\vec{u} + k\,\vec{v}}$$

Então, a equação acima é chamada **equação vetorial** do plano π.

Em termos das componentes: $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ a equação vetorial torna-se

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = (tu_1 + kv_1, tu_2 + kv_2, tu_3 + kv_3).$$

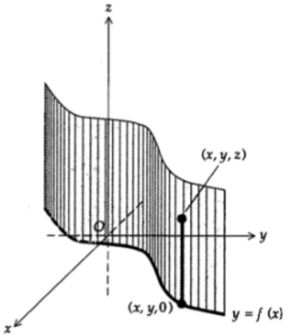
Ou seja,

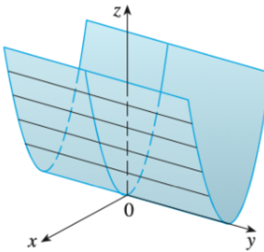
$$\begin{aligned} x - x_0 &= tu_1 + kv_1 \\ y - y_0 &= tu_2 + kv_2 \\ z - z_0 &= tu_3 + kv_3 \end{aligned}$$

chamadas **equações paramétricas** do plano.

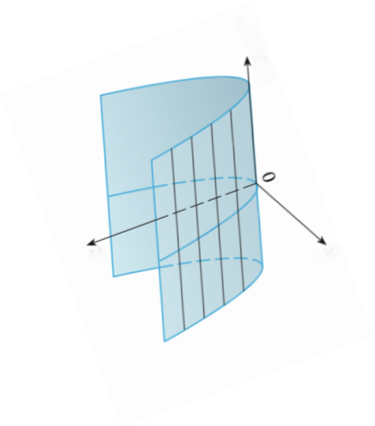
Definição (superfície cilíndrica)

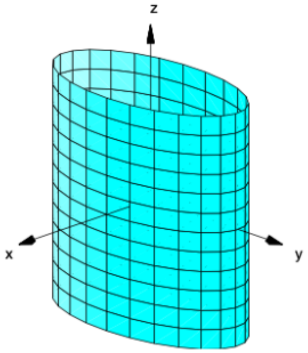
*O lugar geométrico dos pontos do espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$ gerado por uma reta L que se movem ao longo de uma curva $\mathcal{C}$ dada de tal modo que a reta L se mantém paralela a uma reta fixa que não pertence ao plano que contém a curva $\mathcal{C}$ é chamado de **cilindro** ou de **superfície cilíndrica**. A reta L é chamada de **geratriz** e a curva $\mathcal{C}$ **diretriz** do cilindro.*

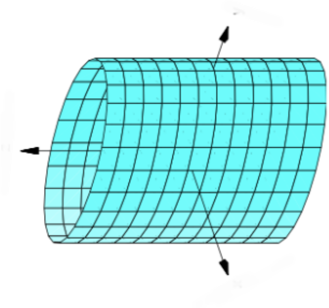

z
(x, y, z)
O
y
(x, y, 0)
y = f (x)
x


z
0
x
y

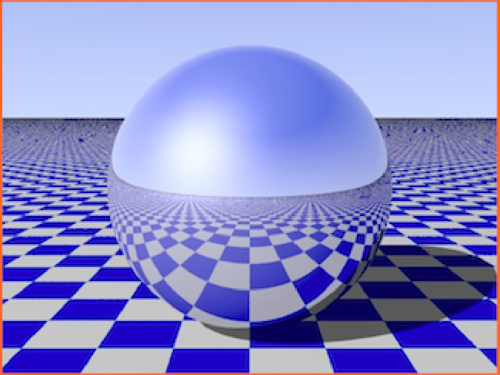
Cilindro




z
x
y



Objetivo: Obter a equação do cilindro (ou superfícies cilíndricas)



OBRIGADA