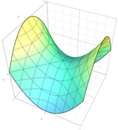


Unidade 2: Continuidade

Cristina Vaz

C2-aula 04/6/25

UFPA

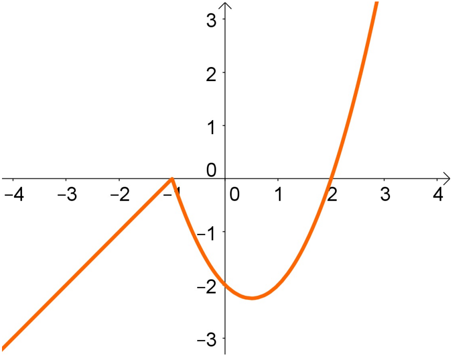
cvaz@ufpa.br

Sumário

Ideias:

- Continuidade é um limite especial onde estamos também interessados/as no valor de f em (a, b);
- é uma propriedade que não permite que o gráfico de f tenha saltos ou buracos, mas tema "cantos".

Cálculo 1:



Definição (1)

Dizemos que a função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *é contínua em* $(a,b) \in D_f$ *se*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

Pela definição 1, f é contínua em (a,b) se:

1. $f(x,y)$ está definida em (a,b);
2. o limite $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ existe;
3. $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$

O significado intuitivo de continuidade é que, se o ponto (x, y) varia de uma pequena quantidade, o valor de $f(x, y)$ variará de uma pequena quantidade.

Isso quer dizer que a superfície que corresponde ao gráfico de uma função contínua não tem buracos ou rupturas

Teorema (1)

Se as funções $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *e* $g : D_g \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *são contínuas em* (a,b) *com* $(a,b) \in D_f \cap D_g$*. Então,*

Soma: $f+g$ *é contínua em* (a,b) *e*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} (f+g)(x,y) = f(a,b)+g(a,b)$$

Produto: $f.g$ *é contínua em* (a,b) *e*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} (f.g)(x,y) = f(a,b).g(a,b)$$

Quociente: f/g *é contínua em* (a,b) *e*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} (f/g)(x,y) = \frac{f(a,b)}{g(a,b)}$$

para $g(x,y) \neq 0$ *e* $g(a,b) \neq 0$

Note que, para f contínua em (a, b) e a $g(x, y) = c$ (função constante) temos

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} cf(x, y) = cf(a, b)$$

O limite da constante é a constante do limite

Exemplo (1)

A função $f(x,y) = c\,xy$ é contínua para qualquer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

Solução: Note que $f(x,y) = g(x,y).h(x,y)$ com $g(x,y) = c$ e $h(x,y) = xy$ e as as funções g e h são contínua para qualquer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
Assim, pela continuidade do produto tem-se

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} (g.h)(x,y) = g(a,b).h(a,b) \Rightarrow$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} c\,xy = c \lim_{(x,y)\to(a,b)} xy = cab = f(a,b)$$

Exemplo (2)

A função $f(x,y) = c_5 x^2 y^3$ é contínua para qualquer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

Solução: Note que $f(x,y) = g(x,y).h(x,y)$ com $g(x,y) = c_5 xy$ e $h(x,y) = xy^2 = (xy)y$ e as as funções g e h são contínua para qualquer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
Assim, pela continuidade do produto tem-se

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} (g.h)(x,y) = g(a,b).h(a,b) \Rightarrow$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} c_5 x^2 y^3 = c_5 \lim_{(x,y)\to(a,b)} (xy)(xy)y = ca^2 b^3 = f(a,b)$$

Exemplo (3)

A função $f(x,y) = c_5x^2y^3 + c_4xy + c_3$ é contínua para qualquer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

Solução: Note que $f(x,y) = g(x,y) + h(x,y) + w(x,y)$ com $g(x,y) = c_5x^2y^3$, $h(x,y) = c_4xy$ e $w(x,y) = c_3$ e as as funções g, h e w são contínua para qualquer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Assim, pela continuidade da soma e do produto tem-se

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) + \lim_{(x,y)\to(a,b)} h(x,y) + \lim_{(x,y)\to(a,b)} w(x,y) = g(a,b) + h(a,b) + w(a,b) \Rightarrow$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} c_5x^2y^3 + c_4xy + c_3 = c_5a^2b^3 + c_4ab + c_3$$

Exemplo (4)

Calcule o limite de $f(x,y) = 2x^4y^2 + 5x^2y - 3xy + 8$ *em* $(1,1)$

Solução: Como f é contínua em $(1,1)$ pois é a soma e o produto de funções contínuas temos que $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y) = f(1,1)$. Assim, $f(1,1) = 2+5-3+8 = 12$ e

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} 2x^4y^2 + 5x^2y - 3xy + 8 = 12$$

Continuidade

Propriedades do Limite

Teorema (2)

A função polinomial

$$f(x,y) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} c_{m,n} x^m y^n$$

é contínua para qualquer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

Prova: De fato, $f(a,b) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} c_{m,n} a^m b^n$ e pelo limite da soma e do produto temos que

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} c_{m,n} x^m y^n \Rightarrow$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \lim_{(x,y)\to(a,b)} c_{m,n} x^m y^n \Rightarrow$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} c_{m,n} \lim_{(x,y)\to(a,b)} x^m y^n \Rightarrow$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} c_{m,n} a^m b^n = f(a,b)$$

Exemplo (5)

Calcule $\lim_{(x,y)\to(1,2)} x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y$

Solução: Como $f(x,y) = x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y$ é uma função polinomial temos, pelo teorema 4, que

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y = f(1,2).$$

Assim,

$f(1,2) = 1.8 - 1.4 + 3.1 + 2.2 = 8 - 4 + 3 + 4 = 11$, e logo,

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y = 11$$

Definição (2)

A função é chamada de ***racional*** *se é o quociente entre dois polinômios, ou seja,*

$$f(x,y) = \frac{p(x,y)}{q(x,y)}$$

com $g(x,y) \neq 0$

Teorema (3)

*A função **racional***

$$f(x,y) = \frac{p(x,y)}{q(x,y)}$$

é contínua em todos os pontos do seu domínio.

Prova: De fato, como uma função racional é o quociente de polinômios e polinômios são funções contínuas temos pelo teorerma do quociente de funções contínuas que a função racional f é contínua em todos os pontos $(a,b) \in D_f$

Exemplo (6)

Para quais pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *a função racional*

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

é contínua?

Solução: Como a função f é uma função racional temos pelo teorema 3 que f é contínua em D_f

Note que f não está definida para (x, y) tal que $x^2 + y^2 = 0$, ou seja em $(0, 0)$. Logo,

$$D_f = \{(x, y)\,;\, x^2 + y^2 \neq 0\}$$

Assim, f não é contínua em $(0, 0)$ (pela definição) e é contínua em D_f (pelo teorema 3)

Teorema (4)

Se $Im_f \subset D_g$, *a função* $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *é contínua em* (a, b) *e a função* $g : D_g \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é contínua em* $t_0 = f(a, b)$ *e a então a função composta* $h : D_h \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dada por* $h(x, y) = (g \circ f)(x, y) = g(f(x, y))$ *é contínua em* (a, b)

Exemplo (7)

Para quais pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ a função

$$f(x, y) = sen\,(y/x)$$

é contínua?

Solução: Note que f é a composta $h(x, y) = g(f(x, y))$ com $g(t) = \text{sen}\,(t)$ e $f(x, y) = y/x$

A função $g(t) = \text{sen}\,(t)$ é contínua em $\mathbb{R}$ (cálculo1)

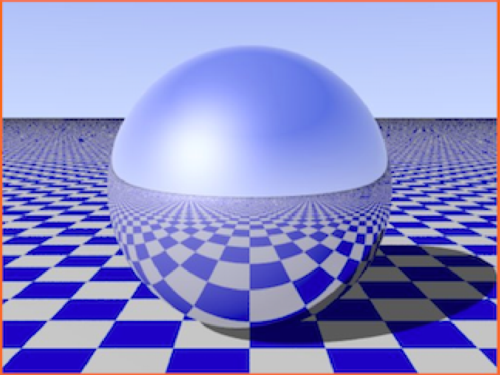
E a função $f(x,y) = y/x$ é uma função racional. Logo, f é contínua em D_f, ou seja, em $D_f = \{(x,y)\,;\, x \neq 0\}$.

Logo, $h(x,y) = g(f(x,y)) = \text{sen}\,(y/x)$ é contínua em

$$D_f = \{(x,y)\,;\, x \neq 0\}$$

Próximo tópico:

Derivada



OBRIGADA