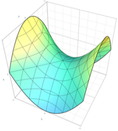


Unidade 5: Integrais múltiplas

Cristina Vaz

C2-aula 04/8/25

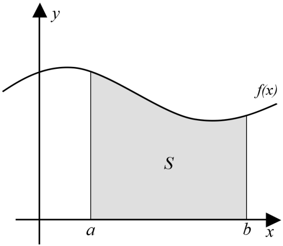
UFPA

cvaz@ufpa.br

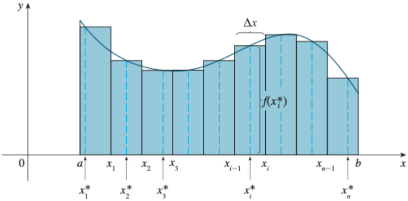
Sumário

Problema do cálculo integral: Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Calcular a área da região limitada pelo gráfico de f e as retas $x = a$ e $x = b$



Método de resolução:



área dos retângulos: base × altura$= (x_i - x_{i-1})\, f(x_i^*)$

somatório das área dos retângulos: $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$

Limite quando $n \to \infty$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$$

Limite quando $n \to \infty$:

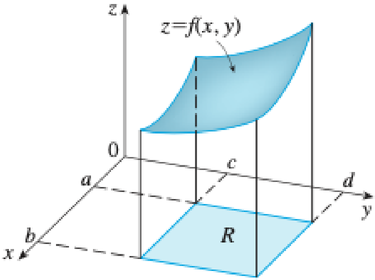
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$$

Como generalizar estas ideias para funções $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$?

- em C1, tem-se um intervalo fechado $[a, b]$.
- em C2, tem-se um retângulo fechado $R = [a, b] \times [c, d]$

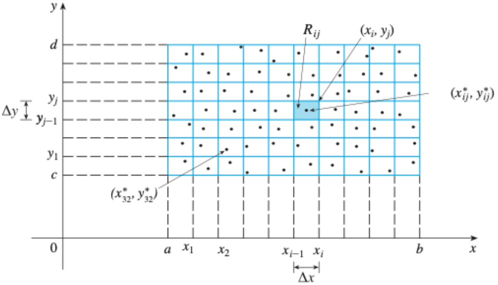
- em C1, tem-se um intervalo fechado $[a, b]$.
- em C2, tem-se um retângulo fechado $R = [a, b] \times [c, d]$
- em C1, o gráfico de f é uma curva.
- em C2, o gráfico de f é uma superfície.
- em C1 a região S limitada entre o gráfico de f e as retas $x = a$ e $x = b$ é uma região no plano.
- em C2 região limitada entre o gráfico de f e o retângulo R é um sólido dado por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$


z
z=f(x, y)
0
a
b
x
c
d
y
R

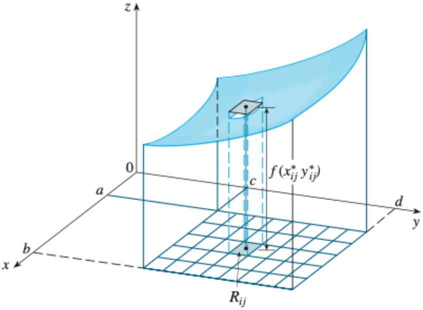
- em C1, o intervalo $[a, b]$ é dividido em n intervalos menores $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, do mesmo tamanho, escolhendo-se pontos igualmente espaçado x_i com $x_0 = a$ e $x_n = b$. E depois foi escolhido um ponto arbitrário x_i^* em cada $I_i = [x_{i-1}, x_i]$.

- em C2, podemos usar o mesmo processo e subdividir cada intervalo do retângulo $R = [a,b] \times [c,d]$ em n intervalos menores, do mesmo tamanho para obter n sub-retângulos $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ menores, do mesmo tamanho, traçando retas paralelas passando por estes pontos. E depois podemos escolher em cada sub-retângulo R_{ij} um ponto arbitrário (x_i^*, y_j^*).


y
d
y_j
Δy
y_{j-1}
y_1
c
0
R_{ij}
(x_i, y_j)
(x_{ij}^*, y_{ij}^*)
(x_{32}^*, y_{32}^*)
a
x_1
x_2
x_{i-1}
x_i
b
x
Δx

- em C1, calcula-se a área do retângulos da partição de $[a, b]$ cuja base é $x_i - x_{i-1}$ e altura é $f(x_i^*)$.
- em C2, vamos calcular o volume do paralelepípedo de base R_{ij} e altura $z = f(x_I^*, y_j^*)$:

$$V_{ij} = f(x_I^*, y_j^*)\,(x_{i-1} - x_i)\,(y_{j-1} - y_j)$$

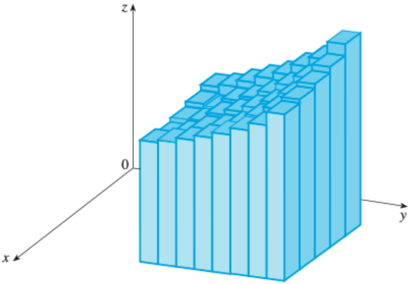

z
0
a
b
x
c
d
y
$f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$
R_{ij}

- em C1, soma-se as áreas do retângulos da partição para obter uma aproximação da área S.

- em C2, soma-se os volumes do paralelepípedos da partição para obter uma aproximação do volume do sólido S:

$$\text{vol } S \approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} V_{ij} = f(x_l^*, y_j^*)(x_{i-1} - x_i)(y_{j-1} - y_j)$$

Problema do cálculo integral



Problema do cálculo integral

Agora, para calcularmos o volume exato do sólido S calculamos o limite quando $n, m \to \infty$, ou seja,

$$V = \iint_R f(x, y)\, dx\, dy =$$

$$\lim_{n,m\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_I^*, y_j^*)(x_{i-1} - x_i)(y_{j-1} - y_j)$$

Note que, no processo acima consideramos $f(x, y) \leq 0$ (uma função positiva) e, por esta razão, podemos interpretar o número dado pela integral como um **volume**, mas nada impede de aplicamos o mesmo processo para qualquer função $f(x, y)$. Assim, temos a seguinte definição de integral dupla:

Definição

Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $A \subset R$. A integral dupla de f sobre o retângulo R é definida por

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{n,m\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_l^*, y_j^*)(x_{i-1} - x_i)(y_{j-1} - y_j)$$

quando este limite existe.

Definição

Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *e* $A \subset R$. *A soma*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(x_l^*, y_j^*)(x_{i-1} - x_i)(y_{j-1} - y_j)$$

é chamada **Soma de Riemann** *e é usada para obter aproximações da integral dupla de* f.

Definição

Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *e* $A \subset R$. *Se* $f(x,y) \geq 0$ *então o volume do sólido limitado pelo gráfico de* f *e o retângulo* R *é dado por*

$$V = \iint_R f(x,y)\, dx\, dy.$$

Definição (Propriedades da integral dupla)

Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $A \subset R$. A integral dupla de f tem as seguintes propriedades:

(i) *Integral da soma é a soma das integrais, ou seja,*

$$\iint_R f(x,y)+g(x,y)\,dx\,dy = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy + \iint_R g(x,y)\,dx\,dy.$$

(ii) *Integral de uma constante vezes uma função é a constante vezes a integral da função, ou seja,*

$$\iint_R \alpha\, f(x,y)\,dx\,dy = \alpha \iint_R f(x,y)\,dx\,dy.$$

pergunta: Como calcular uma integral dupla?

pergunta: Como calcular uma integral dupla?

resposta parcial: É muito complicado efetuar o cálculo da integral dupla usando a definição por que calcular o limite da soma de Riemann é complicado até no C1.

pergunta: Como calcular uma integral dupla?

resposta parcial: É muito complicado efetuar o cálculo da integral dupla usando a definição por que calcular o limite da soma de Riemann é complicado até no C1.

pergunta: O que fazer?

pergunta: Como calcular uma integral dupla?

resposta parcial: É muito complicado efetuar o cálculo da integral dupla usando a definição por que calcular o limite da soma de Riemann é complicado até no C1.

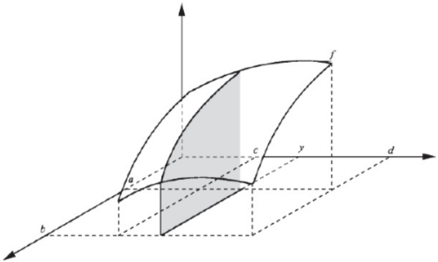
pergunta: O que fazer?

resposta parcial: Aplicar o Teorema de Fubini

Se f é integrável no retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$ então podemos fixar $y \in [c, d]$ e considerar $z = f(x, y)$ como um função de x e calcular a integral

$$\alpha(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$$

$\alpha(y)$ é a área da seguinte região:


f
a
b
c
y
d

Então, $\alpha(y)$ é integrável e temos que

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \alpha(y)\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$

Analogamente, se fixarmos $x \in [a,b]$ e calculamos

$$\beta(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy.$$

Assim, temos o seguinte teorema:

Teorema (Teorema de Fubini)

Sejam $R = [a,b] \times [c,d]$ *e* $f : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *uma função integrável em* R*. Se aa integral* $\alpha(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$ *existe para todo* $y \in [c,d]$ *e a integral* $\beta(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$ *existe para todo* $x \in [a,b]$ *então*

$$\begin{aligned}\iint_R f(x,y)\,dx\,dy &= \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx \\ &= \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy\end{aligned}$$

Exemplo

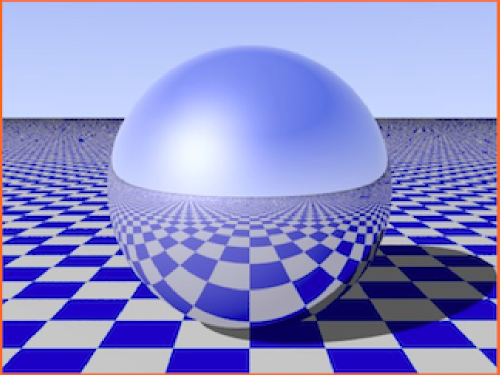
Calcule a integral $\int_1^2 \int_0^2 (x - 3y^2)\, dx\, dy$

Solução: para $y \in [1, 2]$ fixo

$$\begin{aligned}
\int_0^2 (x - 3y^2)\,dx &= \int_0^2 x\,dx - \int_0^2 3y^2\,dx \\
&= \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2 - \left.3y^2 x\right|_0^2 \\
&= (2-0) - 3y^2(2-0) \\
&= 2 - 6y^2
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \int_0^2 (x - 3y^2)\, dx\, dy &= \int_1^2 \left(\int_0^2 (x - 3y^2)\, dx \right) dy \\
&= \int_1^2 \left(2 - 6y^2 \right) dy \\
&= 2 \int_1^2 dy - 6 \int_1^2 y^2\, dy \\
&= 2y \Big|_1^2 - 6 \frac{y^3}{3} \Big|_1^2 \\
&= (4 - 2) - 2(8 - 1) \\
&= 2 - 14 = -12
\end{aligned}$$



OBRIGADA