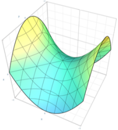


Unidade 4: Máximos e Mínimos

Cristina Vaz

C2-aula 08/7/25

UFPA

cvaz@ufpa.br

Sumário

O seguinte resultado dá uma condição necessária para que um ponto seja um extremos de f.

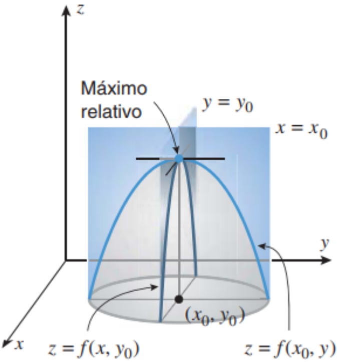
Teorema (condição necessária)

Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e (x_0, y_0) um ponto interior de D_f. Se as derivadas parciais $f_x(x_0, y_0)$ e $f_y(x_0, y_0)$ existem e (x_0, y_0) é um extremo local de f, então,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

Ou seja,

$$\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$$



z
Máximo relativo
y = y0
x = x0
y
(x0, y0)
x
z = f(x, y0)
z = f(x0, y)

pergunta: Todo ponto crítico é um extremo de f?

pergunta: Todo ponto crítico é um extremo de f?

resp.: Não. Considere o seguinte exemplo:

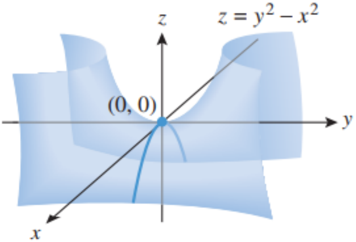
Exemplo

Analise os pontos críticos da função $f(x,y) = y^2 - x^2$.

Solução: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -2x$; $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y \Rightarrow$

$$\nabla f(0,0) = (f_x(0,0), f_y(0,0)) = (0,0)$$

então $P = (0,0)$ é o único ponto crítico de f.



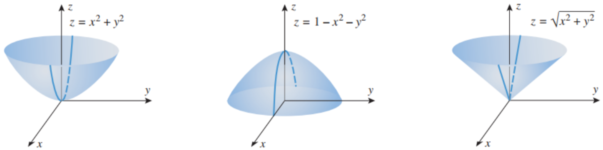
$P = (0,0)$ é ponto de sela!! Logo, a função f não tem máximo nem mínimo relativo em $(0,0)$.

Condição necessária para extremos

Condição necessária para extremos

Condição suficiente para extremos

Problemas de otimização



$f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$
mín relativo e absoluto em $(0, 0)$

(a)

$f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$
máx relativo e absoluto em $(0, 0)$

(b)

$f_x(0, 0)$ and $f_y(0, 0)$ não existem
mín relativo e absoluto em $(0, 0)$

(c)

Teorema (condição suficiente)

Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *e* (x_0, y_0) *um ponto interior de* D_f *tais que as derivadas primeiras e segundas parciais continuas numa vizinhança aberta de* (x_0, y_0). *Considere o seguinte determinante, chamado Hessiano,*

$$H(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{vmatrix}$$

Note que:

$$H(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{vmatrix}$$

$$= f_{xx}(x_0, y_0)\, f_{yy}(x_0, y_0) - \left(f_{xy}(x_0, y_0) \right)^2$$

Teorema (condição suficiente)

Se $\nabla f(x_0, y_0) = (0,0)$. *Então*

(a) *f tem um mínimo relativo em* (x_0, y_0) *quando* $H(x_0, y_0) > 0$ *e* $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ *(ou* $f_{yy}(x_0, y_0) > 0$*);*

(b) *f tem um máximo relativo em* (x_0, y_0) *quando* $H(x_0, y_0) > 0$ *e* $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ *(ou* $f_{yy}(x_0, y_0) < 0$*);*

(c) *f não tem extremo em* (x_0, y_0) *quando* $H(x_0, y_0) < 0$*;*

(d) *Não podemos tirar nenhuma conclusão quando* $H(x_0, y_0) = 0$.

No caso $(\mathbf{c})$, quando $H(x_0, y_0) < 0$, o ponto (x_0, y_0) é chamado **ponto de sela** e o gráfico de f cruza" o plano tangente em (x_0, y_0)

No caso $(\mathbf{d})$, quando $H(x_0, y_0) = 0$, o teste é inconclusivo e pode acontecer do ponto (x_0, y_0) se um extremo ou ser um ponto de sela.

Exemplo

Analise os pontos críticos da função $f(x,y) = y^4 - x^4 - 4xy + 1$.

Usar o seguinte algoritmo:

Passo 1: calcular os pontos críticos: $\nabla f(x_0, y_0) = (0,0)$;

Passo 2: calcular o hessiano: $H(x,y) = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2$

Passo 3: analisar o sinal do hessiano e das derivadas segundas nos pontos encontrados no passo 1.

Solução: Passo 1: $f_x = 4x^3 - 4y$ e $f_y = 4y^3 - 4x$.

$\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0) \Rightarrow$

$$\begin{cases} 4x^3 - 4y & = & 0 \\ 4y^3 - 4x & = & 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema encontramos os pontos $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (1, 1)$, e $P_1 = (-1, -1)$,

Condição necessária para extremos
Condição suficiente para extremos
Problemas de otimização

Solução: Passo 2: $f_{xx} = 12x^2$; $f_{yy} = 12y^2$ e $f_{xy} = -4$

$H(x,y) = f_{xx}\, f_{yy} - (f_{xy})^2 = 144\, x^2\, y^2 - 16$

Passo 3:

$H(0,0) = -16$ implica que $P_1 = (0,0)$ é ponto de sela;

$H(1,1) = 128 > 0$ e $f_{xx}(1,1) = 12 > 0$ implica que $P_2 = (1,1)$ ponto de mínimo relativo de f.

$H(-1,-1) = 128 > 0$ e $f_{xx}(-1,-1) = 12 > 0$ implica que $P_3 = (-1,-1)$ ponto de mínimo relativo de f.

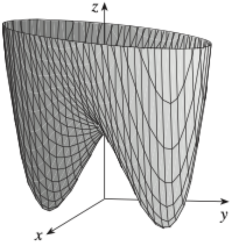
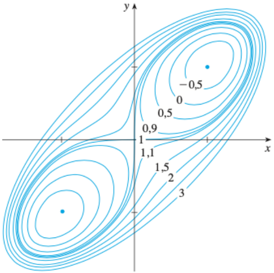


FIGURA 4
$z = x^4 + y^4 - 4xy + 1$


y
x
−0,5
0
0,5
0,9
1
1,1
1,5
2
3

Exemplo

Uma caixa retangular sem tampa deve ser feita com $12m^2$ de papelão. Determine o volume máximo de tal caixa.

Solução: É necessário descobrir qualquer a função que descreve o volume da caixa, Como a caixa é retangular o seu volume é dado por $V = \text{área da base} \times \text{altura} = xyz$

Vamos expressar V apenas como função das variáveis x e y usando o fato de que a área dos quatro lados e do fundo da caixa é dada por

$$xy + 2xz + 2yz = 12$$

Assim,

$$2z(x+y) + xy = 12 \Rightarrow z = \frac{12 - xy}{2(x+y)}$$

Substituindo em V tem-se

$$V(x,y) = \frac{12xy - x^2y^2}{2(x+y)}$$

Agora, vamos calcular o valor máximo de V.

Passo 1:

$$V_x = \frac{(12xy - x^2y^2)'(2x+2y) - (12xy - x^2y^2)(2x+2y)'}{(2x+2y)^2}$$

$$V_x = \frac{(12y - 2xy^2)(2x+2y) - (12xy - x^2y^2)(2)}{(2x+2y)^2}$$

$$V_x = \frac{y^2(12 - 2xy - x^2)}{2(x+y)^2}$$

Passo 1:

$$V_y = \frac{(12xy - x^2y^2)'(2x+2y) - (12xy - x^2y^2)(2x+2y)'}{(2x+2y)^2}$$

$$V_y = \frac{(12x - 2x^2y)(2x+2y) - (12xy - x^2y^2)(2)}{(2x+2y)^2}$$

$$V_y = \frac{x^2(12 - 2xy - y^2)}{2(x+y)^2}$$

Passo 1: $\nabla f(x_0, y_0) = (0,0) \Rightarrow$

$$\begin{cases} V_x = \dfrac{y^2(12-2xy-x^2)}{2(x+y)^2} & = & 0 \\ V_y = \dfrac{x^2(12-2xy-y^2)}{2(x+y)^2} & = & 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema encontramos os pontos $P_1 = (0,0)$ e $P_2 = (2,2)$.

Passo 1: Para $P_1 = (0,0)$ temos que $V(0,0) = 0$ não nos interessa por que queremos o volume máximo.

Passo 2: Calculando as segundas derivadas obtemos:

$$V_{xx} = \frac{(x+y)(-y^3 - xy^2) - (12y^2 - 2xy^3 - x^2y^2)}{(x+y)^3}$$

$$V_{yy} = \frac{(x+y)(-x^3 - x^2y) - (12x^2 - 2x^3y - x^2y^2)}{(x+y)^3}$$

$$V_{xy} = \frac{(x+y)(12y - 3xy^2 - x^2y) - (12y^2 - 2xy^3 - x^2y^2)}{(x+y)^3}$$

Passo 2: Calculando o hessiano no ponto $P_2 = (2,2)$.

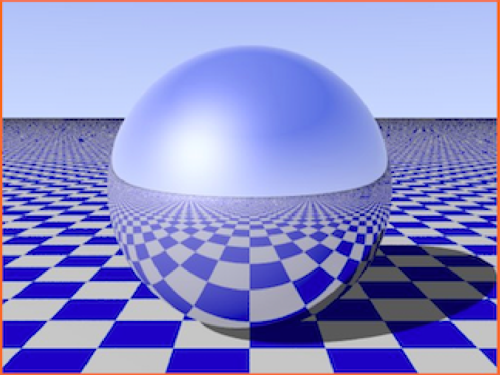
$$V_{xx}(2,2) = -\frac{5}{2};\; V_{yy}(2,2) = -\frac{5}{2};\; V_{xy}(2,2) = -\frac{1}{2}$$

$$H(2,2) = V_{xx}\,V_{yy} - (V_{xy})^2 = \left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{23}{4} > 0.$$

Assim, $H(2,2) > 0$ e $V_{xx}(2,2) < 0$ implica que $P_2 = (2,2)$ é um ponto que máximo e o volume máximo da caixa é dada por

$$z = \frac{12 - xy}{2(x+y)} \Rightarrow z = \frac{8}{8} = 1$$

e $V(x,y,z) = xyz \Rightarrow V(2,2,1) = 4$



OBRIGADA