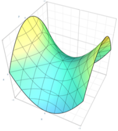


Unidade 2: Plano tangente e regra da cadeia

Cristina Vaz

C2-aula 16/6/25

UFPA

cvaz@ufpa.br

Sumário

1 Funções diferenciáveis
- Consequências

2 Plano tangente

3 Regra da cadeia

Funções diferenciáveis
Consequências
Plano tangente
Regra da cadeia

Definição

Sejam (x_0, y_0) e $f : D_f\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Dizemos que a função f é diferenciável em $(x_0 y_0)$ se, e somente se, existem os números reais a e b tais que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - ah - bk}{\|(h,k)\|} = 0$$

Note que:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - L(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$$

Funções diferenciáveis
Consequências
Plano tangente
Regra da cadeia

Consequências da diferenciabilidade:

Teorema (1)

Sejam (x_0, y_0) *e* $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. *Se* f *é diferenciável em* (x_0, y_0) *então* f *é contínua em* (x_0, y_0)

Funções diferenciáveis
Consequências
Plano tangente
Regra da cadeia

Consequências da diferenciabilidade:

Teorema (1)

Sejam (x_0, y_0) e $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Se f é diferenciável em (x_0, y_0) então f é contínua em (x_0, y_0)

Portanto, se f não é contínua em (x_0, y_0) então f não é diferenciável em (x_0, y_0)

Funções diferenciáveis
Consequências
Plano tangente
Regra da cadeia

Exemplo

A função

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy^2}{x^4+y^4} & se \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & se \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

é diferenciável em $(0,0)$*?*

Funções diferenciáveis
Consequências
Plano tangente
Regra da cadeia

Exemplo

A função

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy^2}{x^4+y^4} & se \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & se \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

é diferenciável em $(0,0)$*?*

Solução: A função f não é contínua em $(0,0)$ (verifique!), logo não é diferenciável em $(0,0)$.

Funções diferenciáveis
Consequências
Plano tangente
Regra da cadeia

Teorema (2)

Sejam (x_0, y_0) *e* $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. *Se* f *é diferenciável em* (x_0, y_0) *então* f *tem derivadas parciais em* (x_0, y_0) *e*

$$a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \text{ e } b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

ou

$$L(h, k) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k$$

Funções diferenciáveis
Consequências
Plano tangente
Regra da cadeia

Teorema (2)

Sejam (x_0, y_0) *e* $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. *Se* f *é diferenciável em* (x_0, y_0) *então* f *tem derivadas parciais em* (x_0, y_0) *e*

$$a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \text{ e } b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

ou

$$L(h, k) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k$$

Portanto, se as derivadas parciais de f não existem em (x_0, y_0), então f não é diferenciável em (x_0, y_0)

Teorema (3)

Sejam (x_0, y_0) *e* $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. *Se* f *tem derivadas parciais em* (x_0, y_0) *e* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ *e* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ *são contínuas em* (x_0, y_0) *então* f *é diferenciável em* (x_0, y_0)

Funções diferenciáveis
Consequências
Plano tangente
Regra da cadeia

Exemplo

A função $f(x, y) = xe^{xy}$ *é diferenciável em* $(1, 0)$*?*

Funções diferenciáveis
Consequências
Plano tangente
Regra da cadeia

Solução: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{xy} + xye^{xy} \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ contínua em $(1,0)$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 e^{xy} \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ contínua em $(1,0)$.

Logo, f é é diferenciável em $(1,0)$

Funções diferenciáveis
Consequências
Plano tangente
Regra da cadeia

Definição

Seja f é diferenciável em (x_0, y_0). Chamamos de ***plano tangente*** *ao gráfico de f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ o plano dado pela seguinte equação:*

$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Funções diferenciáveis
Consequências
Plano tangente
Regra da cadeia

Observe que:

- só definimos plano tangente em $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ quando f é diferenciável em (x_0, y_0).
- Se f não for diferenciável em (x_0, y_0), mas tem derivadas parciais neste ponto, então existirá um plano, mas não será o plano tangente.
- f é diferenciável em (x_0, y_0), o plano conterá todas as retas tangentes ao gráfico de f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Funções diferenciáveis
Consequências
Plano tangente
Regra da cadeia

Exemplo

Determine o plano tangente ao paraboloide elíptico $z = 2x^2 + y^2$ *no ponto* $(1,1,3)$.

Solução: $(x_0, y_0) = (1,1)$; $f(1,1) = 3$;

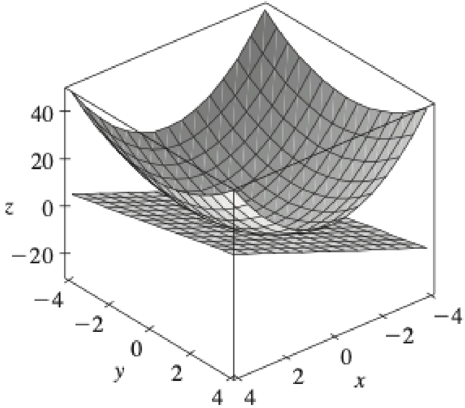
$f_x = 4x \Rightarrow f_x(1,1) = 4$;

$f_y = 2y \Rightarrow f_y(1,1) = 2$

$z - f(1,1) = f_x(1,1)(x-1) + f_y(1,1)(y-1) \Rightarrow$

$z - 3 = 4(x-1) + 2(y-1) \Rightarrow 4x + 2y - 3 = 0$

Funções diferenciáveis
Consequências
Plano tangente
Regra da cadeia



Cálculo 1: $y = f(x)$ e $x = g(t) \Rightarrow y = f(g(t))$

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx}\frac{dg}{dt}$$

ou

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

Funções diferenciáveis
Consequências
Plano tangente
Regra da cadeia

Cálculo 2: $z = f(x,y)$, $x = g(t)$ e $y = h(t) \Rightarrow z = f(g(t), h(t))$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dg}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dh}{dt}$$

ou

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Funções diferenciáveis
Consequências
Plano tangente
Regra da cadeia

Teorema (Caso 1)

Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma diferenciável em D_f e as funções $g : D_g \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $h : D_h \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são deriváveis em $\mathbb{R}$ tal que $(g(t), h(t)) \in D_f$. Então $z(t) = f(g(t), h(t))$ é uma função derivável em $\mathbb{R}$ e

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Funções diferenciáveis
Consequências
Plano tangente
Regra da cadeia

Exemplo

Calcule $\dfrac{dz}{dt}$ para $z = x^2y + 3y^4$, $x = sen(2t)$ e $y = cos(t)$

Funções diferenciáveis
Consequências
Plano tangente
Regra da cadeia

Exemplo

Calcule $\dfrac{dz}{dt}$ *para* $z = x^2y + 3y^4$, $x = sen(2t)$ *e* $y = cos(t)$

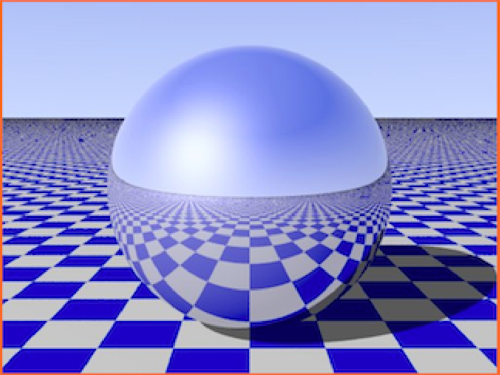
Solução: Aplicar a regra da cadeia.

$f_x = 2xy$ e $f_y = x^2 + 12y^3$

$x' = 2\cos(2t)$ e $y' = -\text{sen}\,(t)$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = (2xy)(2\cos(2t)) + (x^2 + 12y^3)(-\text{sen}\,(t)) \Rightarrow$$

$$\frac{dz}{dt} = 4xy\cos(2t) - (x^2 + 12y^3)\text{sen}\,(t)$$



OBRIGADA