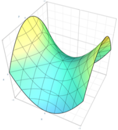


Cálculo computacional II

Unidade 1: Espaços euclidianos

Cristina Vaz

C2-aula 12/5/25

UFPA

cvaz@ufpa.br

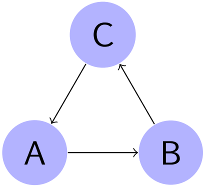
Sumário

Para obtermos as propriedades geométricas entre vetores temos que definir no espaço euclidiano uma **distância ou métrica.**

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl] & \\ A \arrow[rr] & & B \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

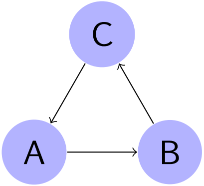
- $d(A,B) > 0;$
- $d(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B;$

Estrutura geométrica: ideias



- $d(A, B) > 0$;
- $d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$;
- $d(A, B) = d(B, A)$

Estrutura geométrica: ideias



- $d(A,B) > 0;$
- $d(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B;$
- $d(A,B) = d(B,A)$
- $d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$

O espaço $\mathbb{R}^n$ é um espaço que tem uma estrutura métrica especial, por esta razão é chamado de **espaço de Hilbert**, a distância entre dois vetores é definida usando-se a definição de **norma** entre vetores que, por sua vez, é definida através do produto **interno ou escalar** entre vetores.

$$\text{produto escalar} \to \text{norma} \to \text{distância}$$

Definição (produto interno)

Sejam $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n)$ *e* $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n)$ *vetores do* $\mathbb{R}^n$. *O produto* ***interno ou escalar*** *entre* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *é definido por*

$$\vec{u}.\vec{v} = u_1\, v_1 + u_2\, v_2 + \cdots + u_n\, v_n = \sum_{k=1}^{n} u_k\, v_k$$

Exemplo (produto interno)

Determine $\vec{u}.\vec{v}$ *para* $\vec{u} = 4\vec{j} - 3\vec{k}$ *e* $\vec{v} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k}$

Exemplo (produto interno)

Determine $\vec{u}.\vec{v}$ *para* $\vec{u} = 4\vec{j} - 3\vec{k}$ *e* $\vec{v} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k}$

Solução: $\vec{u}.\vec{v} = 0.2 + 4.4 + (-3).6 = 16 - 18 = -2$

Note que, o resultado do produto interno entre vetores não é um vetor, é um escalar (número).

Num sentido mais geral, podemos entender o produto interno como uma função que associa um par de vetores a um número, ou seja, $(\vec{u},\vec{v}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto B(\vec{u},\vec{v}) = \vec{u}.\vec{v} \in \mathbb{R}$.

Lembrete: Dizemos que uma aplicação $T : V \to V$ é linear se $T(u+v) = T(u) + T(v)$ e $T(\alpha u) = \alpha T(u)$

Teorema (propriedades do produto escalar)

Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são vetores do $\mathbb{R}^n$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. O produto ***interno ou escalar*** *satisfaz as seguintes propriedades:*

Positividade: $B(\vec{u},\vec{u}) = \vec{u}.\vec{u} \geq 0$ *e*
$B(\vec{u},\vec{u}) = \vec{u}.\vec{u} = 0 \Longleftrightarrow \vec{u} = \mathbb{O}$;

Simetria: $B(\vec{u},\vec{v}) = B(\vec{v},\vec{u}) \Longrightarrow \vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$;

Bilinearidade:
$B(\vec{u}+\vec{v},\vec{w}) = B(\vec{u},\vec{w}) + B(\vec{v},\vec{w}) \Longleftrightarrow (\vec{u}+\vec{v}).\vec{w} = \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w}$;
$B(\vec{u},\vec{v}+\vec{w}) = B(\vec{u},\vec{v}) + B(\vec{u},\vec{w}) \Longleftrightarrow \vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$;
$B(\alpha u, v) = \alpha B(\vec{u},\vec{v}) \Longleftrightarrow (\alpha\vec{u}).\vec{v} = \alpha(\vec{u}.\vec{v})$
$B(u, \beta v) = \beta B(\vec{u},\vec{v}) \Longleftrightarrow \vec{u}.(\beta\vec{v}) = \beta(\vec{u}.\vec{v})$

Devido a propriedade de **positividade** do produto escalar podemos definir uma maneira de "medir"o comprimento de um vetor do $\mathbb{R}^n$ usando o produto interno.

Ou seja, podemos definir uma função, chamada de **norma**, que mede a distância do vetor à origem do sistema de coordenadas) do seguinte modo:

Definição (norma)

Dado o vetor $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n)$ *do* $\mathbb{R}^n$*, a sua norma, representada por* $\|\cdot\|$*, é definida por*

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$$

Definição (norma)

Dado o vetor $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n)$ do $\mathbb{R}^n$, a sua norma, representada por $\|\cdot\|$, é definida por

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$$

Assim, pela definição de produto interno temos que a norma é dada por:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} u_k u_k} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$$

Teorema (propriedades da norma entre vetores)

Sejam $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. A norma entre vetores satisfaz as seguintes propriedades:

$\|\vec{u}\| \geq 0$ *e* $\|\vec{u}\| = 0 \iff \vec{u} = \mathbb{O}$;

$\|\alpha\vec{u}\| = \alpha\|\vec{u}\|$;

$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

Exemplo (norma)

Determine $\|\vec{u}\|$ *para* $\vec{u} = 4\vec{j} - 3\vec{k}$.

Exemplo (norma)

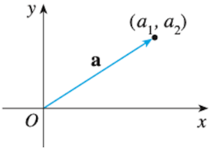
Determine $\|\vec{u}\|$ *para* $\vec{u} = 4\vec{j} - 3\vec{k}$.

Solução: $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}} = \sqrt{0.0 + 4.4 + (-3).(-3)}$

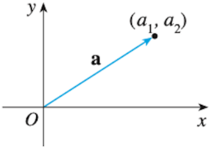
$$\|\vec{u}\| = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

(i) Por que a norma mede a distância do vetor à origem do sistema de coordenada?

(ii) Por que chamamos $\mathbb{R}^n$ de espaços euclidianos?



$\vec{a} = (a_1, a_2)$ e $\vec{O} = (0,0)$



$\vec{a} = (a_1, a_2)$ e $\vec{O} = (0,0)$

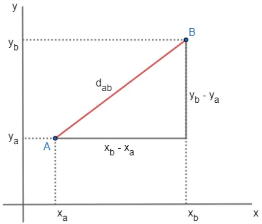
Teorema de pitágoras:

$$d^2(P,O) = a_1^2 + a_2^2 \Leftrightarrow d(P,O) = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{\vec{a}.\vec{a}} = \|\vec{a}\|$$

Note que:

$$d(P,O) = \|\vec{a} - \vec{O}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{(a_1 - 0)^2 + (a_2 - 0)^2}$$

Se temos dois vetores quaisquer $A = (x_a, x_b)$ e $B = (y_a, y_b)$



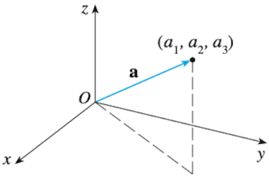
A distância entre eles é dada por

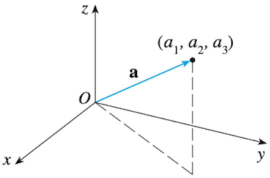
$$d(A, B) = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$$

Mas $\vec{C} = \vec{B} - \vec{A} = (x_a - x_b, y_a - y_b) \Leftrightarrow$

$$\|\vec{C}\| = \|\vec{B} - \vec{A}\| = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2} \Leftrightarrow$$

$$\|\vec{B} - \vec{A}\| = d(A, B)$$


z
(a_1, a_2, a_3)
a
O
x
y



$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ e $\vec{O} = (0,0,0)$

Teorema de pitágoras:

$d^2(P,O) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \Leftrightarrow d(P,O) = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{\vec{a}.\vec{a}} = \|\vec{a}\|$

Note que: $d(P,O) = \|\vec{a} - \vec{O}\| = \sqrt{(a_1 - 0)^2 + (a_2 - 0)^2 + (a_3 - 0)^2}$

Se temos dois vetores quaisquer

$$A = (x_1, y_1, z_1) \quad \text{e} \quad B = (x_2, y_2, z_2)$$

então a distância entre eles é dada por

$$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

e

$$d(A,B) = \|B - A\|$$

No caso do $\mathbb{R}^n$ para $n \geq 4$ não temos representação geométrica, mas podemos generalizar a ideia:

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n)$ e $\vec{O} = (0, 0, 0, \cdots, 0)$

$$d^2(P,O) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2 \Leftrightarrow$$

$$d(P,O) = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2} \Leftrightarrow$$

$$d(P,O) = \sqrt{\vec{a}.\vec{a}} = \|\vec{a}\|$$

Distância: ideias

No caso do $\mathbb{R}^n$ para $n \geq 4$ não temos representação geométrica, mas podemos generalizar a ideia:

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n)$ e $\vec{O} = (0, 0, 0, \cdots, 0)$

$$d^2(P, O) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2 \Leftrightarrow$$

$$d(P, O) = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2} \Leftrightarrow$$

$$d(P, O) = \sqrt{\vec{a}.\vec{a}} = \|\vec{a}\|$$

Note que:

$$d(P, O) = \|\vec{a} - \vec{O}\| \Leftrightarrow$$

$$\|\vec{a} - \vec{O}\| = \sqrt{(a_1 - 0)^2 + (a_2 - 0)^2 + (a_3 - 0)^2 + \cdots (a_n - 0)^2}$$

Se temos dois vetores quaisquer

$$A = (u_1, u_2, \cdots, u_n) \quad \text{e} \quad B = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$$

então a distância entre eles é dada por

$$d(A,B) = \sqrt{(v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 + (v_3 - u_3)^2 + \cdots + (v_n - u_n)^2}$$

e

$$d(A,B) = \|B - A\|$$

Distância euclidiana

Definição (distância euclidiana)

Dados os vetores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n)$ do $\mathbb{R}^n$, a distância entre eles, chamada ***distância euclidiana****, é definida por*

$$d(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{(v_1 - u_1)^{+}(v_2 - u_2)^2 + \cdots + (v_n - v_n)^2}$$

Teorema (propriedades da distância entre vetores)

Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores do $\mathbb{R}^n$. A distância entre vetores satisfaz as seguintes propriedades:

Positividade: $d(\vec{u},\vec{v}) \geq 0$ e $d(\vec{u},\vec{v}) = 0 \iff \vec{u} = \vec{v}$;

Simetria: $d(\vec{u},\vec{v}) = d(\vec{v},\vec{u})$;

Desigualdade triangular: $d(\vec{u},\vec{v}) \leq d(\vec{u},\vec{w}) + d(\vec{w},\vec{v})$.

A distância no plano, $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$,

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_2)^2}$$

ou a distância no espaço, $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$,

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

é chamada **distância euclidiana** em homenagem a Euclides, pois aplica-se o Teorema de Pitágoras (da geometria euclidiana)

Por esta razão, para $A = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ e $B = (y_1, y_2, y_2, \cdots, y_n)$, a generalização da distância euclidiana

$$d(A,B) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2}$$

também é chamada **distância euclidiana.**

Por esta razão, para $A = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ e $B = (y_1, y_2, y_2, \cdots, y_n)$, a generalização da distância euclidiana

$$d(A, B) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2}$$

também é chamada **distância euclidiana.**

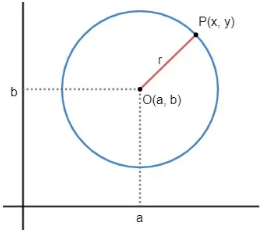
O espaço $\mathbb{R}^n$ munido da distância euclidiana é chamado **espaço euclidiano**

Usando distância euclidiana podemos representar geometricamente objetos no $\mathbb{R}^2$ e no $\mathbb{R}^3$.

Além disso, podemos obter as equações algébricas de vários e importantes objetos da Geometria analítica, como por exemplo, a circunferência e a esfera, como ilustram os seguintes exemplos.

Exemplo (equação da circunferência)

Encontre a equação da circunferência $\mathcal{C}$ de raio $r > 0$ e centro $C = (a, b)$.



Solução: Por definição (geometria euclidiana), a circunferência $\mathcal{C}$ é o lugar geométrico dos pontos $P = (x, y)$ do plano cuja distância ao ponto $C = (a, b)$ é r, ou seja, $P \in \mathcal{C}$ se e somente se $d(P, C) = r$. Logo,

Solução: Por definição (geometria euclidiana), a circunferência $\mathcal{C}$ é o lugar geométrico dos pontos $P = (x, y)$ do plano cuja distância ao ponto $C = (a, b)$ é r, ou seja, $P \in \mathcal{C}$ se e somente se $d(P, C) = r$. Logo,

$d(P, C) = r \Rightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r \Rightarrow$

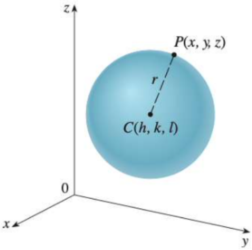
$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

Portanto, equação da circunferência $\mathcal{C}$ de raio $r > 0$ e centro $C = (a, b)$ é dada por

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Exemplo (equação da esfera)

Encontre a equação da esfera $\mathcal{S}$ de raio $r > 0$ e centro $C = (h, k, l)$.



Solução: Por definição (geometria euclidiana), a esfera $\mathcal{S}$ é o lugar geométrico dos pontos $P = (x, y, z)$ do espaço cuja distância ao ponto $C = (h, k, l)$ é r, ou seja, $P \in \mathcal{S}$ se e somente se $d(P, C) = r$. Logo,

Solução: Por definição (geometria euclidiana), a esfera $\mathcal{S}$ é o lugar geométrico dos pontos $P = (x, y, z)$ do espaço cuja distância ao ponto $C = (h, k, l)$ é r, ou seja, $P \in \mathcal{S}$ se e somente se $d(P, C) = r$. Logo,

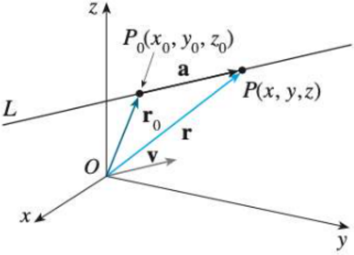
$d(P, C) = r \Rightarrow \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2} = r \Rightarrow$
$(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2 = r^2$

Portanto, equação da esfera $\mathcal{S}$ de raio $r > 0$ e centro $C = (h, k, l)$ é dada por

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2 = r^2$$

Para determinarmos a equação de uma reta L no $\mathbb{R}^2$ devemos conhecer um ponto da reta e sua inclinação (uma direção). No $\mathbb{R}^3$ é análogo.

Para determinarmos a equação de uma reta L no $\mathbb{R}^2$ devemos conhecer um ponto da reta e sua inclinação (uma direção). No $\mathbb{R}^3$ é análogo.



$\vec{a} = \overrightarrow{P_0P}$, $\quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}$, $\quad \vec{v} \,//\, \vec{a} \Rightarrow \exists t \in \mathbb{R}$; $\quad \vec{a} = t\vec{v}$

Assim, a **equação vetorial** da reta L é dada por

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}$$

Em componentes, $\vec{v} = (a, b, c)$, $t\vec{v} = (ta, tb, tc)$, $\vec{r} = (x, y, z)$ e $\vec{r}_0 = (x_0, y_0.z_0)$ obtemos:

$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v} \Rightarrow (x, y, z) = (x_0, y_0.z_0) + (ta, tb, tc)$

$\Rightarrow (x, y, z) = (x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc)$

Equações paramétricas da reta L:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + ta \\ y &= y_0 + tb \\ z &= z_0 + tc \end{aligned}$$

Equações paramétricas da reta L:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + ta \\ y &= y_0 + tb \\ z &= z_0 + tc \end{aligned}$$

Eliminado o parâmetro t obtemos as **equações simétricas** de L:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

para $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$

Exemplo (equação da reta)

Determine a equação vetorial, as equações paramétricas e as equações simétricas da reta L que passa pelos pontos $A = (2, 4, -3)$ e $B = (3, -1, 1)$.

Solução: Equação vetorial: $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}$; $\vec{v}//L$ e $\vec{r}_0$ vetor que pertence a L.

$$r_0 = \overrightarrow{OA} = (2, 4, -3) = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (3, -1, 1) - (2, 4, -3) = (1, -5, 4) = \vec{i} - 5\vec{j} + 4\vec{k}$$

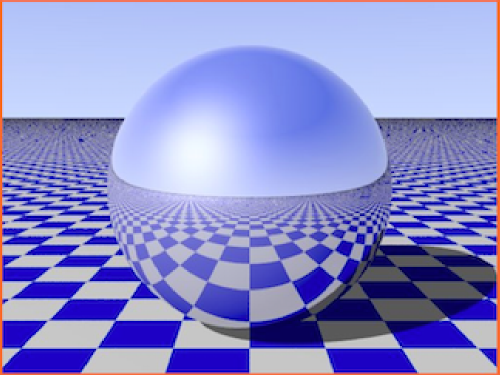
Equação da reta

$$r_0 = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}$$

$$\vec{v} = \vec{i} - 5\vec{j} + 4\vec{k}$$

Equação vetorial: $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v} \Longrightarrow$

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= 2\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k} + t(\vec{i} - 5\vec{j} + 4\vec{k}) \\
\vec{r} &= 2\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k} + t(\vec{i} - 5\vec{j} + 4\vec{k}) \\
\vec{r} &= (2 + t)\vec{i} + (4 - 5t)\vec{j} + (-3 + 4t)\vec{k}
\end{aligned}$$



OBRIGADA