# Unidade 2: Derivadas Parciais

**Cristina Vaz**

C2-aula 11/6/25

UFPA

cvaz@ufpa.br

# Sumário

A interpretação geométrica das derivadas parciais estão relacionadas com retas tangentes do seguinte modo:

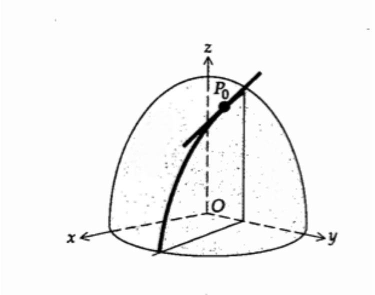
Sabemos que o gráfico da função $z = f(x, y)$ é uma superfície.

Se $y$ é constante (digamos $y = b$) então a intersecção da superfície $z = f(x, y)$ e o plano $y = b$ é uma curva $\mathcal{C}_1$ cujo traço é $z = f(x, b)$. Assim,

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ é o coeficiente angular da reta tangente a curva $\mathcal{C}_1$ no ponto $(a, b, f(a, b))$, como mostra a seguinte figura:

# Interpretação geométrica derivadas parciais



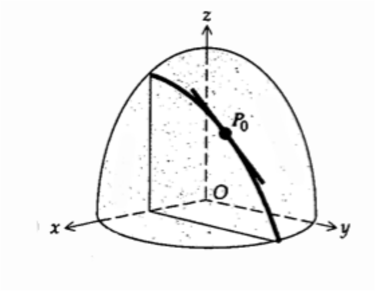


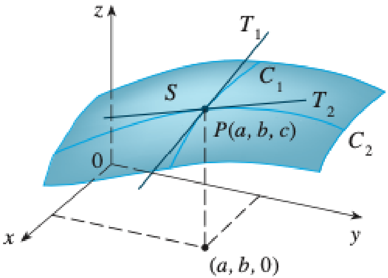
Analogamente, se $x$ é constante (digamos $x = a$) então a intersecção da superfície $z = f(x, y)$ e o plano $x = a$ é uma curva $\mathcal{C}_2$ cujo traço é $z = f(a, y)$. Assim,

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ é o coeficiente angular da reta tangente a curva $\mathcal{C}_2$ no ponto $(a, b, f(a, b))$, como mostra a seguinte figura:

# Interpretação geométrica derivadas parciais






z
$T_1$
$C_1$
S
$T_2$
$P(a, b, c)$
$C_2$
0
x
y
$(a, b, 0)$

**Exemplo (2)**

*Calcule a inclinação m da reta tangente à curva que é a intersecção da superfície* $f(x,y)=\sqrt{24-x^2-y^2}$ *com o plano* $y=2$ *no ponto* $(2,2,4)$

**Solução**: A inclinação $m$ é $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ no $(2,2,4)$. Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2}(24 - x^2 - y^2)^{1/2-1}(-2x) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-x}{\sqrt{24 - x^2 - y^2}} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,2) = \frac{-2}{\sqrt{24-8}} = \frac{-2}{\sqrt{16}} = \frac{-2}{4} \therefore m = -\frac{1}{2}$$

Podemos definir as derivadas parciais para funções do $\mathbb{R}^n$. Por exemplo, se $w = f(x, y, z)$ temos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y, z) - f(x, y, z)}{h}$$

que e pode ser encontrada fixando-se y e z (ou seja, constantes) e derivando-se $f(x, y, z)$ com relação a x.

## Exemplo (3)

*Calcule* $f_x$, $f_y$ *e* $f_z$ *para* $f(x, y, z) = e^{xy}\ln(z)$

**Solução:** $f_x = \ln(z)(e^{xy})' = \ln(z)[e^{xy}(xy)'] = \ln(z)[e^{xy}(y)] \Rightarrow$

$$f_x = ye^{xy}\ln(z)$$

**Solução:** $f_x = \ln(z)(e^{xy})' = \ln(z)[e^{xy}(xy)'] = \ln(z)[e^{xy}(y)] \Rightarrow$

$$f_x = ye^{xy}\ln(z)$$

$f_y = \ln(z)(e^{xy})' = \ln(z)[e^{xy}(xy)'] = \ln(z)[e^{xy}(x)] \Rightarrow$

$$f_y = xe^{xy}\ln(z)$$

**Solução:** $f_x = \ln(z)(e^{xy})' = \ln(z)[e^{xy}(xy)'] = \ln(z)[e^{xy}(y)] \Rightarrow$

$$f_x = ye^{xy}\ln(z)$$

$$f_y = \ln(z)(e^{xy})' = \ln(z)[e^{xy}(xy)'] = \ln(z)[e^{xy}(x)] \Rightarrow$$

$$f_y = xe^{xy}\ln(z)$$

$$f_z = e^{xy}(\ln(z))' = e^{xy}(1/z) \Rightarrow$$

$$f_z = \frac{e^{xy}}{z}$$

Podemos derivar parcialmente novamente a função $f(x, y)$, ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

**Exemplo (4)**

*Calcule* $f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}\ f_{xx}$ *para* $f(x,y) = sen\left(x^2y\right)$

**Solução:** $f_x = \cos(x^2y)(x^2y)' = \cos(x^2y)(2xy) \Rightarrow$

$$f_x = 2xy\cos(x^2y)$$

$$f_{xx} = (2xy)'\cos(x^2y) + 2xy(\cos(x^2y))' \Rightarrow$$

$$f_{xx} = 2y\cos(x^2y) + 2xy[-\operatorname{sen}(x^2y)(x^2y)'] \Rightarrow$$

$$f_{xx} = 2y\cos(x^2y) + 2xy[-\operatorname{sen}(x^2y)(2xy) \Rightarrow$$

$$f_{xx} = 2y\cos(x^2y) - 4x^2y^2\operatorname{sen}(x^2y)$$

**Cálculo 1**: Toda função derivável em $x_0$ é contínua em $x_0$, ou seja, a existência da derivada implica na continuidade.

**Pergunta**: É verdadeiro que se $f(x, y)$ tem derivadas parciais em $(a, b)$ então $f$ é contínua em $(a, b)$, ou seja, a existência das derivadas parciais implica na continuidade.

Em outras palavras, derivadas parciais é uma boa generalização do conceito de derivada do Cálculo 1?

## Exemplo (5)

*Considere a função*

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & se \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & se \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

**Solução**: Já calculamos $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$

Além disso, para as curvas $\alpha(x) = (x, 0)$ e $\beta(x) = (x, x)$ temos que

$$\lim_{x\to 0} f(\alpha(x)) = \lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^3} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} f(\beta(x)) = \lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}.$$

Logo,

$f(x, y)$ não é contínua em $(0, 0)$, mas tem derivadas parciais em $(0, 0)$!!!

Portanto, a existência das derivadas parciais não garante a continuidade da função e portanto não é uma boa generalização do conceito de derivada de uma função de uma variável.

E agora?

Será de fomos pouco cuidadosos?

Portanto, a existência das derivadas parciais não garante a continuidade da função e portanto não é uma boa generalização do conceito de derivada de uma função de uma variável.

E agora?

Será de fomos pouco cuidadosos?

Vamos olhar com mais cuidado a definição de derivada do Cálculo 1

Se $f(x)$ tem derivada no ponto $p$ então $a = f'(p)$ e

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(p+h)-f(p)}{h} = a.$$

Assim,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(p+h)-f(p)}{h} = a \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{h\to 0} \frac{f(p+h)-f(p)}{h} - a = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(p+h)-f(p)-ah}{h} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{h\to 0} \frac{f(p+h)-f(p)-ah}{|h|} = 0$$

Assim, $f(x)$ tem derivada no ponto $p$ se, e somente se, existe um número $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p) - ah}{|h|} = 0$$

Note que, a função $L(h) = a\,h$ é linear. De fato,

$L(\alpha h) = a(\alpha h) = \alpha(a\,h) = \alpha L(h)$ e

$L(h_1 + h_2) = a(h_1 + h_2) = a\,h_1 + ah_2 = L(h_1) + L(h_2)$

**Pergunta:** Podemos generalizar o limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(p+h)-f(p)-ah}{|h|} = 0$$

para uma função $f(x,y)$?

**Pergunta:** Podemos generalizar o limite

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(p+h)-f(p)-ah}{|h|}=0$$

para uma função $f(x,y)$?

**resp:** $\vec{p}=(x_0,y_0)$; $\vec{h}=(h,k)\Rightarrow \vec{w}=\vec{p}+\vec{h}=(x_0+h,y_0+k)\Rightarrow$

$f(\vec{w})-f(\vec{p})=f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)\in\mathbb{R}$

Qual é a generalização de $|h|$?

**Pergunta:** Podemos generalizar o limite

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(p+h)-f(p)-ah}{|h|}=0$$

para uma função $f(x,y)$?

**resp:** $\vec{p}=(x_0,y_0)$; $\vec{h}=(h,k)\Rightarrow \vec{w}=\vec{p}+\vec{h}=(x_0+h,y_0+k)\Rightarrow$

$f(\vec{w})-f(\vec{p})=f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)\in\mathbb{R}$

Qual é a generalização de $|h|$?

$$|h|\leftrightarrow\|\vec{h}\|\in\mathbb{R}$$

Qual é a generalização de L(h)=ah?

Ou seja, qual é a transformação linear do $\mathbb{R}^2$?

Qual é a generalização de L(h)=ah?

Ou seja, qual é a transformação linear do $\mathbb{R}^2$?

**resp**: A transformação linear do $\mathbb{R}^2$ é a função

$$L(h, k) = ah + bk$$

para a, b números reais

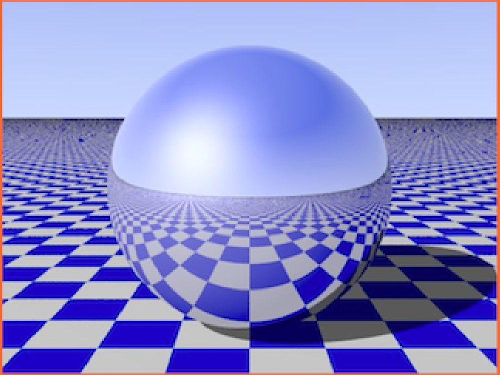
## Definição

*Sejam* $(x_0, y_0)$ *e* $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. *Dizemos que a função* $f$ *é diferenciável em* $(x_0 y_0)$ *se, e somente se, existem os números reais* $a$ *e* $b$ *tais que*

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - ah - bk}{\|(h,k)\|} = 0$$

Note que:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - L(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$$



# OBRIGADA