

# Cálculo computacional II

## Unidade 2: Funções de várias variáveis a valores reais

Cristina Vaz

C2-aula 28/5/25

UFPA

| [cvaz@ufpa.br](mailto:cvaz@ufpa.br)

## Funções de várias variáveis a valores reais

Definição

Gráfico

Exemplos

Curvas de nível

## Funções de três variáveis a valores reais

Definição

Gráfico

Superfícies de nível

Superfícies de nível

Exemplos

## Funções de variáveis a valores reais

Definição

Exemplos

### 1 Funções de várias variáveis a valores reais

- Definição
- Gráfico
- Exemplos
- Curvas de nível

### 2 Funções de três variáveis a valores reais

- Definição
- Gráfico
- Superfícies de nível
- Superfícies de nível
- Exemplos

### 3 Funções de variáveis a valores reais

- Definição
- Exemplos



## Funções de várias variáveis a valores reais

Definição

Gráfico

Exemplos

Curvas de nível

## Funções de três variáveis a valores reais

Definição

Gráfico

Superfícies de nível

Superfícies de nível

Exemplos

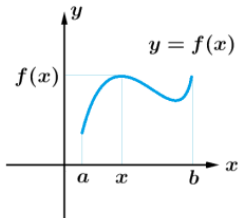
## Funções de variáveis a valores reais

Definição

Exemplos

**Cálculo I:** Estuda-se funções de uma variável a valores reais:

$$\begin{aligned} f : [a, b] \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = y \end{aligned}$$



## Funções de várias variáveis a valores reais

Definição

Gráfico

Exemplos

Curvas de nível

## Funções de três variáveis a valores reais

Definição

Gráfico

Superfícies de nível

Superfícies de nível

Exemplos

## Funções de várias variáveis a valores reais

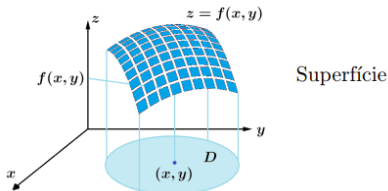
Definição

Exemplos

**Cálculo II:** Estuda-se funções várias variáveis valores reais:

Funções de duas variáveis:

$$\begin{aligned} f : D \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto f(x, y) = z \end{aligned}$$



## Funções de várias variáveis a valores reais

Definição

Gráfico

Exemplos

Curvas de nível

## Funções de três variáveis a valores reais

Definição

Gráfico

Superfícies de nível

Superfícies de nível

Exemplos

## Funções de várias variáveis a valores reais

Definição

Exemplos

Funções de três variáveis:

$$\begin{aligned} f : D \subset \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto f(x, y, z) = w \end{aligned}$$

Funções de  $n$  variáveis:

$$\begin{aligned} f : D \subset \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) &\mapsto f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = w \end{aligned}$$



Funções de  
várias variáveis  
a valores reais

Definição

Gráfico

Exemplos

Curvas de nível

Funções de três  
variáveis a  
valores reais

Definição

Gráfico

Superfícies de nível

Superfícies de nível

Exemplos

Funções de  
variáveis a  
valores reais

Definição

Exemplos

## Definição (Função de duas variáveis)

*Uma função de duas variáveis é uma correspondência  $f$  que associa a cada par ordenado  $(x, y) \in D_f \subset \mathbb{R}^2$  um, e somente um, número real  $z$  dado por  $z = f(x, y)$ . O conjunto  $D_f$  é chamado **domínio** de  $f$  e o conjunto  $Im_f = \{z = f(x, y); (x, y) \in D\}$  é chamado **imagem** de  $f$ .*

Note que a definição acima é bem geral!

**Notação:**

$$\begin{aligned} f : D_f \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto z = f(x, y) \end{aligned}$$



## Funções de várias variáveis a valores reais

Definição

Gráfico

Exemplos

Curvas de nível

## Funções de três variáveis a valores reais

Definição

Gráfico

Superfícies de nível

Superfícies de nível

Exemplos

## Funções de variáveis a valores reais

Definição

Exemplos

Se uma função é dada por uma fórmula e seu domínio não é especificado, fica subentendido que o domínio de  $f$  é o conjunto de todos os pares  $(x, y)$  para os quais a expressão dada está bem definida.



Funções de  
várias variáveis  
a valores reais

Definição

Gráfico

Exemplos

Curvas de nível

Funções de três  
variáveis a  
valores reais

Definição

Gráfico

Superfícies de nível

Superfícies de nível

Exemplos

Funções de  
variáveis a  
valores reais

Definição

Exemplos

## Definição (Gráfico)

Seja a função  $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . O gráfico de  $f$  é o conjunto do  $\mathbb{R}^3$  dado por

$$G_f = \{(x, y, f(x, y)); (x, y) \in D_f\}$$





## Funções de várias variáveis a valores reais

Definição

Gráfico

Exemplos

Curvas de nível

## Funções de três variáveis a valores reais

Definição

Gráfico

Superfícies de nível

Superfícies de nível

Exemplos

## Funções de variáveis a valores reais

Definição

Exemplos

### Exemplo (1)

*Em 1928, Charles Cobb e Paul Douglas publicaram um estudo no qual modelavam o crescimento da economia norte-americana durante o período de 1899 a 1922. Apesar de existirem muitos fatores que afetam o desempenho da economia, eles assumiram que a produção  $P$  depende apenas da quantidade de trabalho  $L$  e a quantidade de capital investido  $K$ . Especificamente, eles apresentaram a seguinte função*

$$P(L, K) = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$$

*com  $b$  e  $\alpha$  são parâmetros fixos.*



## Funções de várias variáveis a valores reais

Definição

Gráfico

Exemplos

Curvas de nível

## Funções de três variáveis a valores reais

Definição

Gráfico

Superfícies de nível

Superfícies de nível

Exemplos

## Funções de variáveis a valores reais

Definição

Exemplos

### Exemplo (2)

*Determine o domínio e esboce o gráfico da função  $z = f(x, y) = 5$*



## Funções de várias variáveis a valores reais

Definição

Gráfico

Exemplos

Curvas de nível

## Funções de três variáveis a valores reais

Definição

Gráfico

Superfícies de nível

Superfícies de nível

Exemplos

## Funções de variáveis a valores reais

Definição

Exemplos

### Exemplo (2)

*Determine o domínio e esboce o gráfico da função  $z = f(x, y) = 5$*

**Solução:** Para funções dadas por fórmulas, verificar se é alguma superfície da geometria analítica vetorial.



## Funções de várias variáveis a valores reais

Definição

Gráfico

Exemplos

Curvas de nível

## Funções de três variáveis a valores reais

Definição

Gráfico

Superfícies de nível

Superfícies de nível

Exemplos

## Funções de variáveis a valores reais

Definição

Exemplos

### Exemplo (2)

*Determine o domínio e esboce o gráfico da função  $z = f(x, y) = 5$*

**Solução:** Para funções dadas por fórmulas, verificar se é alguma superfície da geometria analítica vetorial.

Assim,  $z = 5$  é a equação linear de um plano paralelo ao plano  $xy$ , passando por 5. Logo,  $D_f = \mathbb{R}$



## Funções de várias variáveis a valores reais

Definição

Gráfico

**Exemplos**

Curvas de nível

## Funções de três variáveis a valores reais

Definição

Gráfico

Superfícies de nível

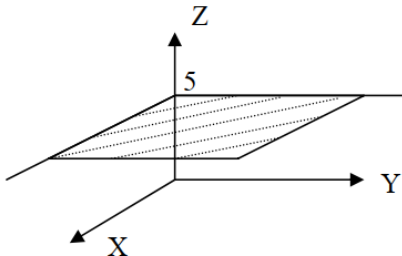
Superfícies de nível

Exemplos

## Funções de variáveis a valores reais

Definição

Exemplos



## Funções de várias variáveis a valores reais

Definição

Gráfico

Exemplos

Curvas de nível

## Funções de três variáveis a valores reais

Definição

Gráfico

Superfícies de nível

Superfícies de nível

Exemplos

## Funções de variáveis a valores reais

Definição

Exemplos

### Exemplo (3)

*Determine o domínio, a imagem e esboce o gráfico da função*

$$f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$



Funções de  
várias variáveis  
a valores reais

Definição

Gráfico

Exemplos

Curvas de nível

Funções de três  
variáveis a  
valores reais

Definição

Gráfico

Superfícies de nível

Superfícies de nível

Exemplos

Funções de  
variáveis a  
valores reais

Definição

Exemplos

## Exemplo (3)

Determine o domínio, a imagem e esboce o gráfico da função

$$f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

**Solução:** Vamos identificar se a fórmula que expressa  $f$  é alguma superfície da geometria analítica:

$$f(x, y) = z = \sqrt{9 - x^2 - y^2} \Rightarrow z^2 = 9 - x^2 - y^2 \Rightarrow z^2 + x^2 + y^2 = 9.$$

Assim,



**Funções de  
várias variáveis  
a valores reais**

Definição

Gráfico

**Exemplos**

Curvas de nível

**Funções de três  
variáveis a  
valores reais**

Definição

Gráfico

Superfícies de nível

Superfícies de nível

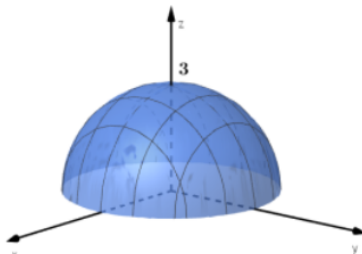
Exemplos

**Funções de  
variáveis a  
valores reais**

Definição

Exemplos

$z^2 + x^2 + y^2 = 9$  é a equação de uma esfera de centro  $(0,0,0)$  e raio  $r = 3$ . Como  $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$  está definida com o sinal positivo na frente da raiz quadrada temos que o gráfico de  $f$  é a calota esférica superior:





## Funções de várias variáveis a valores reais

Definição

Gráfico

Exemplos

Curvas de nível

## Funções de três variáveis a valores reais

Definição

Gráfico

Superfícies de nível

Superfícies de nível

Exemplos

## Funções de variáveis a valores reais

Definição

Exemplos

Como  $f$  é dada por uma fórmula, para calcularmos o domínio que  $f$  devemos obter o conjunto dos pares  $(x, y)$  para os quais a fórmula é vale.

Notemos que  $f$  esta definida por uma raiz quadrada e uma raiz quadrada só vale para números positivos ou nulos, o que implica

$$9 - x^2 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 9.$$

Mas  $x^2 + y^2 = 9$  é a equação de um círculo no plano  $xy$  de centro  $(0,0)$  e raio  $r = 3$ . Portanto, o domínio de  $f$  é o conjunto de pontos do plano  $xy$  “dentro” deste círculo.



## Funções de várias variáveis a valores reais

Definição

Gráfico

Exemplos

Curvas de nível

## Funções de três variáveis a valores reais

Definição

Gráfico

Superfícies de nível

Superfícies de nível

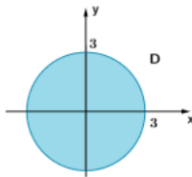
Exemplos

## Funções de variáveis a valores reais

Definição

Exemplos

$$D_f = \{(x, y); x^2 + y^2 = 9\}$$



### Funções de várias variáveis a valores reais

Definição

Gráfico

Exemplos

Curvas de nível

### Funções de três variáveis a valores reais

Definição

Gráfico

Superfícies de nível

Superfícies de nível

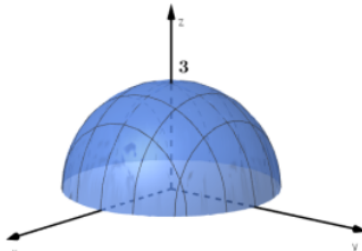
Exemplos

### Funções de variáveis a valores reais

Definição

Exemplos

Voltando ao gráfico de  $f$ , observe para todo  $(x, y)$  no domínio (região circular de raio 3) temos que os valores de  $z = f(x, y)$  são números entre 0 e 3. Logo, o conjunto imagem de  $f$  é dado por  $Im_f = [0, 3]$



## Funções de várias variáveis a valores reais

Definição

Gráfico

Exemplos

Curvas de nível

## Funções de três variáveis a valores reais

Definição

Gráfico

Superfícies de nível

Superfícies de nível

Exemplos

## Funções de variáveis a valores reais

Definição

Exemplos

### Exemplo (4)

*Determine o domínio da função*

$$f(x, y) = x \ln(y^2 - x)$$



## Funções de várias variáveis a valores reais

Definição

Gráfico

Exemplos

Curvas de nível

## Funções de três variáveis a valores reais

Definição

Gráfico

Superfícies de nível

Superfícies de nível

Exemplos

## Funções de variáveis a valores reais

Definição

Exemplos

### Exemplo (4)

*Determine o domínio da função*

$$f(x, y) = x \ln(y^2 - x)$$

**Solução:** Não identificamos a expressão dada com as equações da geometria analítica. Porém, sabemos que só existem logaritmos de números positivos.



Funções de  
várias variáveis  
a valores reais

Definição

Gráfico

Exemplos

Curvas de nível

Funções de três  
variáveis a  
valores reais

Definição

Gráfico

Superfícies de nível

Superfícies de nível

Exemplos

Funções de  
variáveis a  
valores reais

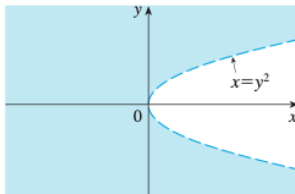
Definição

Exemplos

Assim,  $y^2 - x > 0$  e, logo,

$$D_f = \{(x, y); y^2 > x\}$$

Observe que,  $y^2 = x$  é uma parábola com foco no eixo  $x$  e  $y^2 > x$  implica que o domínio de  $f$  é a região exterior a essa parábola:



## Funções de várias variáveis a valores reais

Definição

Gráfico

Exemplos

Curvas de nível

## Funções de três variáveis a valores reais

Definição

Gráfico

Superfícies de nível

Superfícies de nível

Exemplos

## Funções de variáveis a valores reais

Definição

Exemplos

Nem sempre é simples visualizar o gráfico de uma função de duas variáveis. Um método muito usado para isso, que é bastante usado pelos cartógrafos, é traçarmos um “mapa de contorno”, em que os pontos com elevações constantes são ligados para formar curvas de contorno ou **curvas de nível**.



## Funções de várias variáveis a valores reais

Definição

Gráfico

Exemplos

Curvas de nível

## Funções de três variáveis a valores reais

Definição

Gráfico

Superfícies de nível

Superfícies de nível

Exemplos

## Funções de variáveis a valores reais

Definição

Exemplos

### Definição

*Seja a função  $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . As curvas de nível de  $f$  são as curvas dadas pelas equação  $f(x, y) = k$  com  $k \in \text{Im}_f$ .*

Note que, se pensarmos no gráfico de  $f$ , as curvas de nível  $f(x, y) = k$  são as secções transversais (cortes) do gráfico de  $f$  nos planos  $z = k$ , projetados no plano  $xy$





## Funções de várias variáveis a valores reais

Definição

Gráfico

Exemplos

Curvas de nível

## Funções de três variáveis a valores reais

Definição

Gráfico

Superfícies de nível

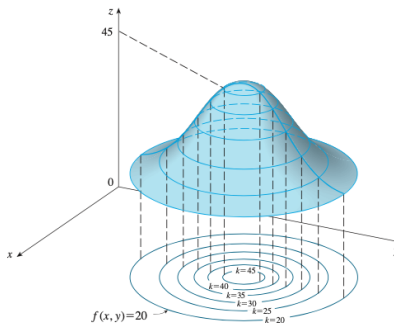
Superfícies de nível

Exemplos

## Funções de várias variáveis a valores reais

Definição

Exemplos



## Funções de várias variáveis a valores reais

Definição

Gráfico

Exemplos

Curvas de nível

## Funções de três variáveis a valores reais

Definição

Gráfico

Superfícies de nível

Superfícies de nível

Exemplos

## Funções de variáveis a valores reais

Definição

Exemplos

### Exemplo (5)

*Esboce as curvas de nível da função  $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$  para  $k = 0, 1, 2, 3$*



## Funções de várias variáveis a valores reais

Definição

Gráfico

Exemplos

Curvas de nível

## Funções de três variáveis a valores reais

Definição

Gráfico

Superfícies de nível

Superfícies de nível

Exemplos

## Funções de várias variáveis a valores reais

Definição

Exemplos

### Exemplo (5)

Esboce as curvas de nível da função  $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$  para  $k = 0, 1, 2, 3$

**Solução:**  $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2} = k \Rightarrow x^2 + y^2 = 9 - k^2$ .  
As curvas de nível são círculos de centro  $(0,0)$  e raio  $r = \sqrt{9 - k^2}$ .

$k = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow$  centro  $(0,0)$  e raio  $r = 3$ .

$k = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 8 \Rightarrow$  centro  $(0,0)$  e raio  $r = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ .



## Funções de várias variáveis a valores reais

Definição

Gráfico

Exemplos

Curvas de nível

## Funções de três variáveis a valores reais

Definição

Gráfico

Superfícies de nível

Superfícies de nível

Exemplos

## Funções de variáveis a valores reais

Definição

Exemplos

$$k = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 5 \Rightarrow \text{centro } (0,0) \text{ e raio } r = \sqrt{5}..$$

$$k = 3 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow \text{ponto } (0,0)$$



## Funções de várias variáveis a valores reais

Definição

Gráfico

Exemplos

Curvas de nível

## Funções de três variáveis a valores reais

Definição

Gráfico

Superfícies de nível

Superfícies de nível

Exemplos

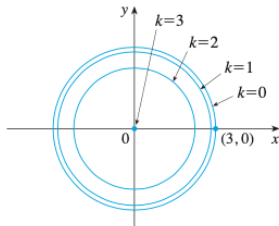
## Funções de variáveis a valores reais

Definição

Exemplos

$$k = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 5 \Rightarrow \text{centro } (0,0) \text{ e raio } r = \sqrt{5}..$$

$$k = 3 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow \text{ponto } (0,0)$$



Compare com o gráfico da função dado no exemplo 3



Funções de  
várias variáveis  
a valores reais

Definição

Gráfico

Exemplos

Curvas de nível

Funções de três  
variáveis a  
valores reais

Definição

Gráfico

Superfícies de nível

Superfícies de nível

Exemplos

Funções de  
variáveis a  
valores reais

Definição

Exemplos

## Definição (Função de três variáveis)

*Uma função de três variáveis é uma correspondência  $f$  que associa a cada trio ordenado  $(x, y, z) \in D_f \subset \mathbb{R}^3$  um, e somente um, número real  $w$  dado por  $w = f(x, y, z)$ . O conjunto  $D_f$  é chamado **domínio** de  $f$  e o conjunto  $\text{Im}_f = \{w = f(x, y, z); (x, y, z) \in D\}$  é chamado **imagem** de  $f$ .*

**Notação:**

$$\begin{aligned} f : D_f \subset \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto w = f(x, y, z) \end{aligned}$$



## Funções de várias variáveis a valores reais

Definição

Gráfico

Exemplos

Curvas de nível

## Funções de três variáveis a valores reais

Definição

Gráfico

Superfícies de nível

Superfícies de nível

Exemplos

## Funções de várias variáveis a valores reais

Definição

Exemplos

### Definição (Gráfico)

Seja a função  $f : D_f \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ . O gráfico de  $f$  é o conjunto do  $\mathbb{R}^4$  dado por

$$G_f = \{(x, y, z, f(x, y)); (x, y, z) \in D_f\}$$



## Funções de várias variáveis a valores reais

Definição

Gráfico

Exemplos

Curvas de nível

## Funções de três variáveis a valores reais

Definição

Gráfico

Superfícies de nível

Superfícies de nível

Exemplos

## Funções de variáveis a valores reais

Definição

Exemplos

É muito difícil visualizar uma função  $f$  de três variáveis por seu gráfico, uma vez que o mesmo se encontra em um espaço de quatro dimensões. Entretanto, podemos ter uma ideia de  $f$  desenhando suas **superfícies de nível**.





## Funções de várias variáveis a valores reais

Definição

Gráfico

Exemplos

Curvas de nível

## Funções de três variáveis a valores reais

Definição

Gráfico

Superfícies de nível

**Superfícies de nível**

Exemplos

## Funções de variáveis a valores reais

Definição

Exemplos

### Definição

*Seja a função  $f : D_f \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ . As superfícies de nível de  $f$  são as superfícies dadas pelas equação  $f(x, y, z) = k$  com  $k \in \text{Im}_f$ .*



## Funções de várias variáveis a valores reais

Definição

Gráfico

Exemplos

Curvas de nível

## Funções de três variáveis a valores reais

Definição

Gráfico

Superfícies de nível

Superfícies de nível

Exemplos

## Funções de variáveis a valores reais

Definição

Exemplos

### Exemplo (6)

*Determine o domínio da função*

$$f(x, y, z) = \ln(z - y) + x y \sin(z)$$



Funções de  
várias variáveis  
a valores reais

Definição

Gráfico

Exemplos

Curvas de nível

Funções de três  
variáveis a  
valores reais

Definição

Gráfico

Superfícies de nível

Superfícies de nível

Exemplos

Funções de  
variáveis a  
valores reais

Definição

Exemplos

## Exemplo (6)

*Determine o domínio da função*

$$f(x, y, z) = \ln(z - y) + x \operatorname{sen}(z)$$

**Solução:** Sabemos que o seno está definido para todos os números reais e que só existem logaritmos de números positivos. Logo,

$$z - y > 0$$



## Funções de várias variáveis a valores reais

Definição

Gráfico

Exemplos

Curvas de nível

## Funções de três variáveis a valores reais

Definição

Gráfico

Superfícies de nível

Superfícies de nível

Exemplos

## Funções de variáveis a valores reais

Definição

Exemplos

Assim,

$$D_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z > y\}$$

Note que  $z = y$  é um plano, e logo,  $D_f$  é o semiespaço formado pelos pontos acima do plano  $z = y$ .



## Funções de várias variáveis a valores reais

Definição

Gráfico

Exemplos

Curvas de nível

## Funções de três variáveis a valores reais

Definição

Gráfico

Superfícies de nível

Superfícies de nível

Exemplos

## Funções de variáveis a valores reais

Definição

Exemplos

### Exemplo (7)

*Determine as superfícies de nível da função*

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$



## Funções de várias variáveis a valores reais

Definição

Gráfico

Exemplos

Curvas de nível

## Funções de três variáveis a valores reais

Definição

Gráfico

Superfícies de nível

Superfícies de nível

Exemplos

## Funções de variáveis a valores reais

Definição

Exemplos

### Exemplo (7)

*Determine as superfícies de nível da função*

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

**Solução:** As superfícies de nível são dadas por

$$x^2 + y^2 + z^2 = k$$

com  $k \geq 0$ . Elas formam uma família de esferas concêntricas com centro  $(0, 0, 0)$  e raio  $r = \sqrt{k}$ .



## Funções de várias variáveis a valores reais

Definição

Gráfico

Exemplos

Curvas de nível

## Funções de três variáveis a valores reais

Definição

Gráfico

Superfícies de nível

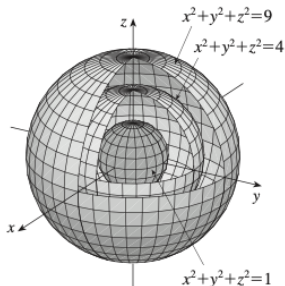
Superfícies de nível

Exemplos

## Funções de variáveis a valores reais

Definição

Exemplos



## Funções de várias variáveis a valores reais

Definição

Gráfico

Exemplos

Curvas de nível

## Funções de três variáveis a valores reais

Definição

Gráfico

Superfícies de nível

Superfícies de nível

Exemplos

## Funções de variáveis a valores reais

Definição

Exemplos

## Definição (Função de várias variáveis)

*Uma função de várias variáveis é uma correspondência  $f$  que associa a cada  $n$ -úpla ordenada  $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in D_f \subset \mathbb{R}^n$  um, e somente um, número real  $w$  dado por  $w = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ . O conjunto  $D_f$  é chamado **domínio** de  $f$  e o conjunto  $Im_f = \{w = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n); (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in D\}$  é chamado **imagem** de  $f$ .*

**Notação:**

$$\begin{aligned} f : D_f \subset \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) &\mapsto w = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \end{aligned}$$





## Funções de várias variáveis a valores reais

Definição

Gráfico

Exemplos

Curvas de nível

## Funções de três variáveis a valores reais

Definição

Gráfico

Superfícies de nível

Superfícies de nível

Exemplos

## Funções de variáveis a valores reais

Definição

Exemplos

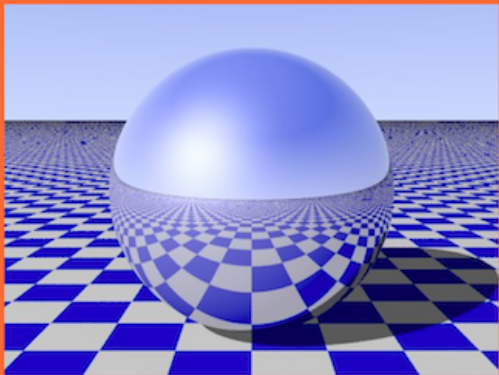
### Exemplo (8)

*Uma fábrica de alimentos usa  $n$  ingredientes diferentes para manufaturar um determinado alimento com  $c_i$  o custo por unidade do  $i$ -ésimo ingrediente. Se são necessárias  $x_i$  unidades então o custo total  $C$  dos ingredientes é uma função de  $n$  dada por*

$$C = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots c_n x_n$$

**Notação vetorial:**  $C = f(\vec{x}) = \vec{c} \cdot \vec{x}$  com  $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3, \dots, c_n)$  e  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$





**OBRIGADA**