UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

INSTITUTO DE CI6ENCIAS EXATAS E NATURAIS

FACULDADE DE MATEMÁTICA

NOTAS DE AULA

Disciplina: EN01205 Cálculo computacional II

Professora: Cristina Vaz

Período: 2025.2 - Horário: 14h50 às 16h30 - Sala Mirante: 410

Unidade 1: Elementos de Geometria analítica vetorial

Sumário

Resumo

Nestas notas apresentaremos um resumo dos conteúdos de geometria analítica vetorial necessários para o estudo de derivada e integral de funções de várias variáveis a valores reais. As referências usadas para compor estas notas foram os livros adotados na disciplina: Guidorizzi [3, 2001], Leithold [4, 1994] e Stewart [7, 2010] e algumas notas de aula disponibilizadas na internet, como por exemplo, as notas dos professores Kátia Delgado [1], Reginaldo Santos [5], Severino Souza [6] e Sérgio Melo [8].

1 Pré-requisitos

Faz-se necessário que os estudantes façam uma revisão de tópicos elementares de Geometria analítica e Vetores e Noções básicas de Álgebra Linear em espaços euclidianos. Para esta revisão sugerimos o capítulo 12 do Stewart [7, 2010] e os capítulo 14 e 15 do Leithold [4, 1994].

2 O espaço euclidiano n-dimensional

O espaço euclidiano n-dimensional da álgebra linear (ou da geometria analítica) é um conjunto cujos elementos são **n-uplas** de coordenadas do tipo $(x_1.x_2, x_3, \cdots, x_n)$ com $n \in \mathbb{N}^\star$ e $x_i \in \mathbb{R}$ para $1 \leq i \leq n$. O espaço euclidiano n-dimensional é representado por $\mathbb{R}^n$. Assim,

Definição 2.1 *O espaço euclidiano n-dimensional é definido por*

$$\mathbb{R}^n = \Big\{(x_1.x_2, x_3, \cdots, x_n);\;\; x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\Big\}$$

Os elementos de $\mathbb{R}^n$ são chamados de **vetores** para $n > 1$ e são representados por $\vec{u}$. O **espaço bidimensional** ou o plano é o conjunto dos pares ordenados e é representado por

$$\mathbb{R}^2 = \Big\{(x, y);\;\; x, y \in \mathbb{R}\Big\}$$

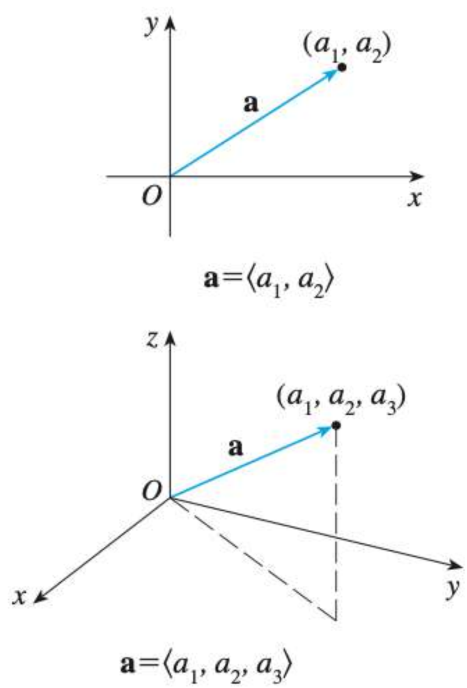
O **espaço tridimensional** ou o espaço é o conjunto dos trios ordenados e é representado por

$$\mathbb{R}^3 = \Big\{(x, y, z);\;\; x, y, z \in \mathbb{R}\Big\}$$

2.1 Representação geométrica

Só podemos representar geometricamente os elementos do plano e do espaço, como mostra a seguinte figura:

Figure 1: Vetores



Fonte: Stewart [7, p. 736]

No caso da geometria analítica, a representação geométrica de objetos matemáticos no $\mathbb{R}^2$ ou no $\mathbb{R}^3$ é feita através das equações algébricas associadas a estes objetos. Para obtermos tais expressões algébricas precisamos conhecer as propriedades algébricas e também as propriedades geométricas dos espaços euclidianos. Na disciplina de

Cálculo 2, estamos interessados nas equações algébricas de retas, planos, superfícies cilíndricas, de revolução, quadráticas, entre outras. Comecemos com as propriedades algébricas:

2.2 Propriedades algébricas dos vetores

A estrutura algébrica do espaço euclidiano n-dimensional é a estrutura de um espaço vetorial, ou seja, em $\mathbb{R}^n$ estão definidas duas operações: soma de vetores e multiplicação de um escalar por um vetor que satisfazem propriedades algébricas. Assim,

Definição 2.2 (operação de adição) *Existe uma operação de* ***adição****, ou seja, dados dois elementos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ do $\mathbb{R}^n$ temos que o vetor soma $\vec{u}+\vec{v}$ pertence ao $\mathbb{R}^n$ (fechamento da adição) e satisfaz as seguintes propriedades:*

Teorema 2.1

A1. *Comutativa:* $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$;

A2. *Associativa:* $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$;

A3. *Elemento neutro aditivo:* $\exists! \boldsymbol{e}$ *tal que* $\vec{u}+\boldsymbol{e}=\boldsymbol{e}+\vec{u}=\vec{u}$. *Representamos* $\boldsymbol{e}$ *por* $\mathbb{O}$.

A4. *Elemento inverso aditivo: Para cada* $\vec{u}\in\mathbb{R}^n$, $\exists!\ \Theta$ *tal que* $\vec{u}+\Theta=\boldsymbol{e}$. *Representamos* Θ *por* $-\vec{u}$.

O elemento neutro $\mathbb{O}$ é dado por $\mathbb{O}=(0,0,0,\cdots,0)$ e o elemento inverso aditivo do vetor $\vec{u}=(u_1,u_2,\cdots,u_n)$ é dado por $-\vec{u}=(-u_1,-u_2,\cdots,-u_n)$.

Definição 2.3 (operação de multiplicação por escalar) *Existe uma operação de* ***multiplicação por escalar****, ou seja, dado o escalar $\alpha\in\mathbb{R}$ e o vetor $\vec{u}\in\mathbb{R}^n$ temos que o vetor $\alpha\,\vec{u}$ pertence ao $\mathbb{R}^n$ (fechamento da multiplicação por escalar) e satisfaz as seguintes propriedades:*

Teorema 2.2

ME1. *Associativa:* $(\alpha\beta)\vec{u} = \alpha(\beta\vec{u})$*;*

ME2. *Distributiva para soma de escalares:* $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$*;*

ME3. *Distributiva para soma de vetores:* $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$*;*

ME4. *Elemento neutro da multiplicação por escalar:* $\exists!\mathbf{1}$ *tal que* $\mathbf{1}.\vec{u} = \vec{u}$

No que segue, introduziremos as propriedades geométricas do espaço euclidiano n-dimensional.

2.3 Propriedades geométricas dos vetores: distância entre vetores

Para obtermos as propriedades geométricas entre vetores temos que definir no espaço euclidiano uma **distância ou métrica**. Como o espaço $\mathbb{R}^n$ é um espaço que tem uma estrutura métrica especial, e por esta razão é chamado de **espaço de Hilbert**, a distância entre dois vetores é definida usando-se a definição de **norma** entre vetores que, por sua vez, é definida através do produto **interno ou escalar** entre vetores. Assim, começaremos com a definição de produto interno.

Definição 2.4 (produto interno) *Sejam* $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n)$ *e* $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n)$ *vetores do* $\mathbb{R}^n$*. O produto* ***interno ou escalar*** *entre* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *é definido por*

$$\vec{u}.\vec{v} = u_1\, v_1 + u_2\, v_2 + \cdots + u_n\, v_n = \sum_{k=1}^{n} u_k\, v_k \tag{2.1}$$

Note que, o resultado do produto interno entre vetores não é um vetor, é um escalar (número). Além disso, num sentido mais geral, podemos entender o produto interno como uma função que associa um par de vetores a um número, ou seja, $(\vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \;\mapsto\; B(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u}.\vec{v} \in \mathbb{R}$.

Teorema 2.3 (propriedades do produto interno) *Sejam* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *e* $\vec{w}$ *são vetores do* $\mathbb{R}^n$ *e* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *O produto* ***interno ou escalar*** *satisfaz as seguintes propriedades:*

PI1. *Positividade:* $B(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u}.\vec{u} \geq 0$ *e* $B(\vec{u}, \vec{u}) = \vec{u}.\vec{u} = 0 \Longleftrightarrow \vec{u} = \mathbb{O}$;

PI2. *Simetria (comutativa):* $B(\vec{u}, \vec{v}) = B(\vec{v}, \vec{u}) \Longrightarrow \vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$;

PI3. *Bilinearidade:* $B(\vec{u} + \vec{v}, \vec{w}) = B(\vec{u}, \vec{w}) + B(\vec{v}, \vec{w}) \Longrightarrow \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w}$;

$$B(\vec{u}, \vec{v} + \vec{w}) = B(\vec{u}, \vec{v}) + B(\vec{u}, \vec{w}) \Longrightarrow \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w};$$

$$B(\alpha u, v) = \alpha B(\vec{u}, \vec{v}) \Longrightarrow (\alpha\vec{u}).\vec{v} = \alpha(\vec{u}.\vec{v})$$

$$B(u, \beta v) = \beta B(\vec{u}, \vec{v}) \Longrightarrow \vec{u}.(\beta\vec{v}) = \beta(\vec{u}.\vec{v})$$

A propriedade **PI1** do produto interno nos permite definir o comprimento de um vetor do $\mathbb{R}^n$, chamado de **norma** do vetor (ou, de modo similar, a sua distância à origem do sistema de coordenadas) do seguinte modo:

Definição 2.5 (norma) *Dado o vetor* $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n)$ *do* $\mathbb{R}^n$, *a sua norma, representada por* $|| \cdot ||$, *é definida por*

$$||\vec{u}|| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}} \tag{2.2}$$

Assim, pela definição de produto interno (dada em 2.1) *temos que* 2.2 *torna-se*

$$||\vec{u}|| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} u_k u_k} = \sqrt{u_1\, v_1 + u_2\, v_2 + \cdots + u_n\, v_n} \tag{2.3}$$

A norma de um vetor satisfaz as seguintes propriedades:

Teorema 2.4 (propriedades da norma entre vetores) *Sejam* $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$. *A norma entre vetores satisfaz as seguintes propriedades:*

N1. $||\vec{u}|| \geq 0$ *e* $||\vec{u}|| = 0 \Longleftrightarrow \vec{u} = \mathbb{O}$;

N2. $||\alpha\vec{u}|| = \alpha||\vec{u}||$;

N3. $||\vec{u}+\vec{v}|| \leq ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||$.

Note que, para o caso dos vetores $\vec{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ e $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ (representados na figura 1) temos que a norma é dada, respectivamente, por

$$||\vec{a}|| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}, \quad ||\vec{a}|| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Usando o teorema de pitágoras podemos concluir que: se $O = (0,0)$ é a origem dos sistema de coordenadas e $P = (a_1, a_2)$ é um ponto do $\mathbb{R}^2$ então

$$d(O,P) = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = ||\vec{a}||$$

Analogamente, se $O = (0,0,0)$ é a origem dos sistema de coordenadas e $P = (a_1, a_2, a_3)$ é um ponto do $\mathbb{R}^3$ então

$$d(O,P) = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = ||\vec{a}||$$

Agora, se considerarmos dois pontos $P = (u_1, u_2)$ e $Q = (v_1, v_2)$ do $\mathbb{R}^2$, distintos da origem, temos que

$$d(P,Q) = \sqrt{(v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2} = ||\vec{u} - \vec{v}||$$

com $\vec{u} = (u_1, u_2)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2)$

Analogamente, se $P = (u_1, u_2, u_3)$ e $Q = (v_1, v_2, v_3)$ são pontos do $\mathbb{R}^3$ então

$$d(P,Q) = \sqrt{(v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 + (v_3 - u_3)^2} = ||\vec{u} - \vec{v}||$$

com $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$

Logo, usando a norma podemos generalizar o conceito de distância euclidiana e definir uma distância entre dois vetores do espaço euclidiano n-dimensional do seguinte modo:

Definição 2.6 (distância euclidiana) *Dados os vetores* $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n)$ *e* $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n)$ *do* $\mathbb{R}^n$*, a distância entre eles, chamada* ***distância euclidiana****, é definida por*

$$d(\vec{u}, \vec{v}) = ||\vec{u} - \vec{v}|| = \sqrt{(v_1 - u_1)^+ (v_2 - u_2)^2 + \cdots + (v_n - v_n)^2} \tag{2.4}$$

Teorema 2.5 (propriedades da distância entre vetores) *Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores do $\mathbb{R}^n$. A distância entre vetores satisfaz as seguintes propriedades:*

D1. *Positividade:* $d(\vec{u},\vec{v}) \geq 0$ *e* $d(\vec{u},\vec{v}) = 0 \Longleftrightarrow \vec{u} = \vec{v}$*;*

D2. *Simetria:* $d(\vec{u},\vec{v}) = d(\vec{v},\vec{u})$*;*

D3. *Desigualdade triangular:* $d(\vec{u},\vec{v}) \leq d(\vec{v},\vec{w}) + d(\vec{w},\vec{v})$*.*

Usando distância euclidiana podemos obter as equações algébricas das cônicas e da esfera, como ilustram os seguintes exemplos.

Exemplo 2.1 (equação da circunferência) *Encontre a equação da circunferência $\mathcal{C}$ de raio $r > 0$ e centro $C = (h,k)$.*

Solução: Por definição (geometria euclidiana), a circunferência $\mathcal{C}$ é o lugar geométrico dos pontos $P = (x,y)$ do plano cuja distância ao ponto $C = (h,k)$ é r, ou seja, $P \in \mathcal{C}$ se e somente se $d(P,C) = r$. Logo,

$$d(P,C) = r \Longrightarrow \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r \Longrightarrow (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Portanto, equação da circunferência $\mathcal{C}$ de raio $r > 0$ e centro $C = (h,k)$ é dada por

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \tag{2.5}$$

■

Exemplo 2.2 (equação da esfera) *Encontre a equação da esfera $\mathcal{S}$ de raio $r > 0$ e centro $C = (h,k,l)$.*

Solução: Por definição (geometria euclidiana), a esfera $\mathcal{S}$ é o lugar geométrico dos pontos $P = (x,y,z)$ do espaço cuja distância ao ponto $C = (h,k,l)$ é r (veja figura 2.6), ou seja, $P \in \mathcal{S}$ se e somente se $d(P,C) = r$. Logo,

$$d(P,C) = r \Longrightarrow \sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2+(z-l)^2} = r \Longrightarrow (x-h)^2+(y-k)^2+(z-l)^2 = r^2$$

Portanto, equação da esfera $\mathcal{S}$ de raio $r > 0$ e centro $C = (h, k, l)$ é dada por

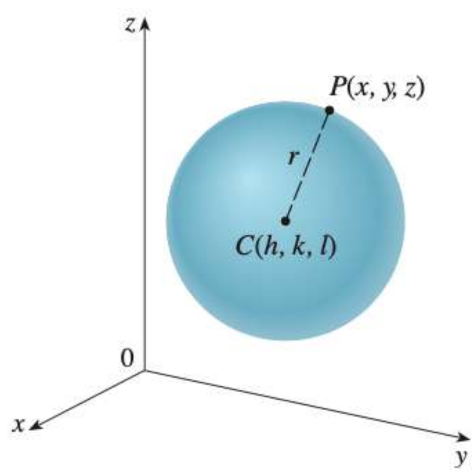
$$(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2 = r^2 \tag{2.6}$$

■

No caso especial que o centro é a origem do sistema de coordenadas temos que as equações 2.5 e 2.6 tornam-se $x^2 + y^2 = r^2$ e $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, respectivamente.

Observe que, circunferência é a fronteira do disco de centro $C = (h, k)$ e raio $r > 0$ e a esfera é a fronteira da bola sólida de centro $C = (h, k, l)$ e raio $r > 0$. No caso do espaço, a esfera é chamada de **superfície**.

Figure 2: Bola sólida e esfera



Fonte: Stewart [7, p. 731]

2.4 Vetores ortogonais

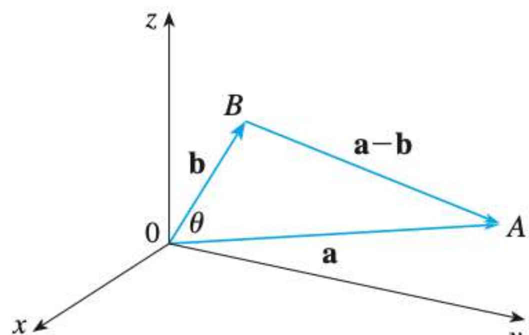
Com a definição de norma entre vetores podemos generalizar a lei dos cosseno (veja figura 3) e, consequentemente, generalizar o conceito de vetores ortogonais. Assim,

Teorema 2.6 *Se θ é o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ do $\mathbb{R}^n$ então*

$$\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}|| \, ||\vec{v}|| \cos\theta \tag{2.7}$$

Prova: Stewart [7, p. 743]

Figure 3: Cosseno entre vetores



Fonte: Stewart [7, p. 736]

Para o caso de vetores são ortogonais temos que $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, o que implica $\cos\theta = 0$ e 2.8 torna-se $\vec{u}.\vec{v} = 0$. Portanto,

Definição 2.7 (vetores ortogonais) *Dizemos que dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ do $\mathbb{R}^n$ são* ***ortogonais*** *se, e somente se $\vec{u}.\vec{v} = 0$.*

Uma consequência da ortogonalidade entre vetores é a generalização do teorema de Pitágoras:

Teorema 2.7 (Teorema de Pitágoras) *Seja $\mathbb{R}^n$ com o produto interno euclidiano e a norma dada pelo produto interno. Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores ortogonais do $\mathbb{R}^n$, então*

$$||\vec{u}+\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 \tag{2.8}$$

2.5 Exercícios

1. Encontre os comprimentos dos lados do triângulo PQR. Ele é um triângulo retângulo? É isósceles?

   a) $P = (3, -2, -3)$, $Q = (7, 0, 1)$, $R = (1, 2, 1)$;

   b) $P = (2, -1, 0)$, $Q = (4, 1, 1)$, $R = (4, -5, 4)$

2. Determine uma equação da esfera com centro em $C = (0, 1, -1)$ e raio 4.

3. Mostre que a equação dada representa uma esfera e determine seu centro e raio.

   a) $x^2 + y^2 + z^2 = 4x - 2y$;

   b) $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - x + 16y = 1$;

4. Descreva com suas próprias em palavras a região do $\mathbb{R}^3$ representada pelas equações ou inequações dadas .

   a) O conjunto dos pontos de $\mathbb{R}^3$ tais que $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $z \geq 0$;

   b) O conjunto dos pontos de $\mathbb{R}^3$ tais que $x^2 + y^2 + z^2 > 2z$;

5. Considere os pontos $P = (x, y, z)$ do $\mathbb{R}^3$ tais que a distância de P a $A = (-1, 5, 3)$ seja o dobro da distância de P a $B = (6, 2, -2)$. Mostre que o conjunto desses pontos é uma esfera e determine seu raio e centro.

6. Se $\vec{r} = (x, y, z)$ e $\vec{r_0} = (x_0, y_0, z_0)$, descreva o conjunto dos pontos (x, y, z) tal que $||\vec{r} - \vec{r_0}|| = 1$

7. Determine se os vetores do $\mathbb{R}^3$ dados são ortogonais, paralelos ou nenhum dos dois.

a) $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ e $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$;

b) $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ e $\vec{v} = -b\vec{i} + a\vec{j}$

8. Para que valores de b os vetores $\vec{u} = (-6, b, 2)$ e $\vec{v} = (b, b^2, b)$ são ortogonais?

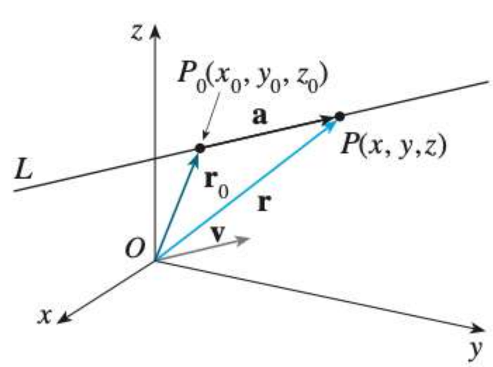
9. Mostre que se $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$ forem ortogonais, então os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ devem ter o mesmo comprimento.

3 Retas e planos no $\mathbb{R}^3$

3.1 Equações da reta

Uma reta L no espaço bidimensional $\mathbb{R}^2$ é determinada quando conhecemos um ponto $P = (x_0, y_0)$ de L e inclinação ou coeficiente angular da reta de L (uma direção). Do mesmo modo, uma reta L no espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$ é determinada quando conhecemos um ponto $P = (x_0, y_0, z_0)$ em L e a direção de L. Em três dimensões, a direção de uma reta é descrita de forma muito conveniente por um vetor. Logo, sejam $\vec{v}$ um vetor paralelo a L e $P = (x, y, z)$ um ponto arbitrário em L. Então, $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OP_0}$ e $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ são os vetores posição de P_0 e P, respectivamente (veja figura 4).

Figure 4: Equação da reta



Fonte: Stewart [7, p. 756]

Assim, fazendo $\vec{a} = \overrightarrow{P_0P}$, pela soma de vetores, obtemos:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a} \tag{3.1}$$

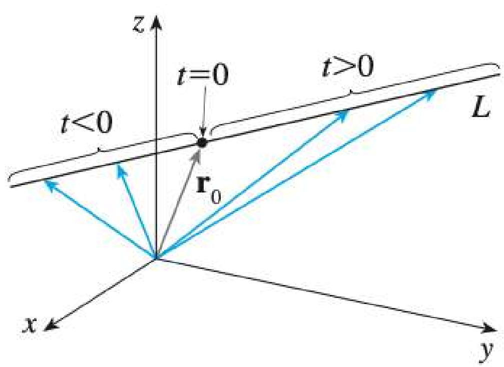
Por outro lado, como $\vec{v}$ e $\vec{a}$ são vetores paralelos temos que existe um parâmetro $t \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{a} = t\,\vec{v}$ e 3.1 torna-se

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v} \tag{3.2}$$

que é chamada **equação vetorial** da reta L. O vetor $\vec{v}$ é chamado de **vetor diretor** de L.

A equação 3.2 tem o seguinte significado geométrico bastante interessante: à medida que t varia, a reta é traçada (desenhada) pela ponta do vetor $\vec{r}$, como mostra a seguinte figura:

Figure 5: Equação da reta



Fonte: Stewart [7, p. 756]

Podemos escrever a equação vetorial 3.2 em termos das componentes dos vetores, do seguinte modo: se $\vec{v} = (a, b, c)$, $t\vec{v} = (ta, tb, tc)$, $\vec{r} = (x, y, z)$ e $\vec{r}_0 = (x_0, y_0.z_0)$ então 3.2 torna-se

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + (ta, tb, tc) \tag{3.3}$$

Mas, dois vetores são iguais se, e somente se, suas componentes são iguais e, logo, 3.3 torna-se

$$
\begin{aligned}
x &= x_0 + t\,a, \\
y &= y_0 + t\,b, \\
z &= z_0 + t\,c.
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

que são chamadas de **equações paramétricas** da reta L.

Observe que, como a reta L é um conjunto de pontos do $\mathbb{R}^3$ unidimensional basta um parâmetro $t \in \mathbb{R}$ para descrever a reta L.

Outra maneira de descrever a equação da reta L é eliminar o parâmetro t das equações 3.4, ou seja, para $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $c \neq 0$, podemos isolar o parâmetro t nas equações 3.4 e obter

$$
\begin{aligned}
t &= \frac{x - x_0}{a}, \\
t &= \frac{y - y_0}{b} \\
t &= \frac{z - z_0}{c}
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

Logo, por 3.5 obtermos as seguintes equações:

$$
\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \tag{3.6}
$$

chamadas **equações simétricas** de L.

Exemplo 3.1 *Determine a equação vetorial, as equações paramétricas e as equações simétricas da reta L que passa pelos pontos $A = (2, 4, -3)$ e $B = (3, -1, 1)$.*

Solução: Note que a reta L é paralela ao vetor $\overrightarrow{AB}$. Assim, tem-se que o vetor diretor é dado por: $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (3, -1, 1) - (2, 4, -3) = (1, -5, 4)$. Na forma vetorial temos que $\vec{v} = \vec{i} - 5\vec{j} + 4\vec{k}$. Agora, escolhendo $P_0 = A$, obtemos $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OP_0} = \overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}$. Assim, $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}$ torna-se $\vec{r} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k} + t(\vec{i} - 5\vec{j} + 4\vec{k})$ e, logo, a **equação vetorial** é dada por

$$
\vec{r} = (2 + t)\vec{i} + (4 - 5t)\vec{j} + (-3 + 4t)\vec{k}.
$$

As **equações paramétricas** são dadas por:

$$\begin{aligned} x &= 2+t \\ y &= 4-5t \\ z &= -3+4t \end{aligned}$$

E as **equações simétricas** são dadas por: $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-4}{-5} = \dfrac{z+3}{4}$ ■

3.2 Equação do plano

Existem três modos distintos e equivalentes de definir a equação de um plano no espaço $\mathbb{R}^3$:

1. Usando três pontos de $\mathbb{R}^3$;

2. Usando um ponto de $\mathbb{R}^3$ e dois vetores não nulos;

3. Usando um ponto de $\mathbb{R}^3$ e um vetor perpendicular ao plano.

Nestas notas, vamos considerar o caso 3, ou seja, um plano π no espaço fica determinado se conhecermos um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ do plano e um vetor $\vec{n}$ que é ortogonal ao plano. Esse vetor $\vec{n}$ ortogonal ao plano é chamado **vetor normal**.

Portanto, sejam $P = (x, y, z)$ um ponto qualquer do plano π e $\vec{r}_0$ e $\vec{r}$ os vetores posição de P_0 e P. Logo, o vetor $\overrightarrow{P_0P}$ é dado por $\vec{r} - \vec{r}_0$ (veja figura 6):

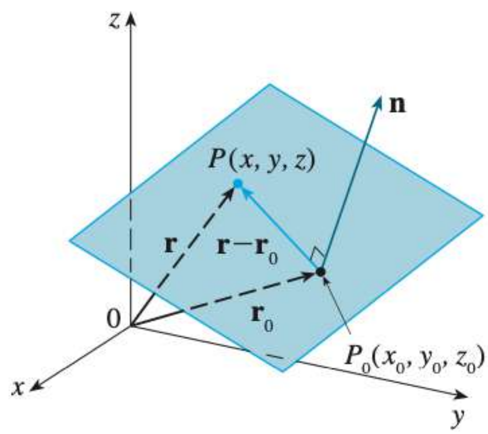
O vetor normal $\vec{n}$ é ortogonal a todo vetor do plano, logo, em particular $\vec{n}$ é ortogonal a $\vec{r} - \vec{r}_0$, o que significa que o produto interno (escalar) entre eles é zero, ou seja,

$$\vec{n}.(\vec{r} - \vec{r}_0) = 0 \Leftrightarrow \vec{n}.\vec{r}_0 = \vec{n}.\vec{r} \tag{3.7}$$

A equação 3.7 é chamada **equação normal** do plano π. Em termos das componentes dos vetores, se $\vec{n} = (a, b, c)$, $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $\vec{r} = (x, y, z)$ então 3.7 torna-se

$$(a, b, c).(x - x_0, y - y_0.z - z_0) = 0,$$

Figure 6: Equação do plano



Fonte: Stewart [7, p. 759]

ou seja,

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \tag{3.8}$$

chamada **equação escalar** do plano que passa pelo ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ com vetor normal $\vec{n} = (a, b, c)$.

Agrupando os termos da equação 3.8 podemos escrever

$$ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0 \Rightarrow ax + by + cz + d = 0 \tag{3.9}$$

com $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$. A equação 3.9 é chamada **equação linear** em x, y e z.

Note que, se a, b e c não são todos simultaneamente nulos então uma equação do tipo $ax + by + cz + d = 0$ representa a equação de um plano com vetor normal dado por $\vec{n} = (a, b, c)$. De fato, suponha $a \neq 0$ então podemos escrever

$$a\left(x + \frac{d}{a}\right) + b(y - 0) + c(z - 0) = 0$$

que é a equação do plano que passa pelo ponto $P_0 = (d/a, 0, 0)$ com vetor normal $\vec{n} = (a, b, c)$. Logo, a equação linear do tipo $ax + by + cz + d = 0$ representa um plano no espaço.

Exemplo 3.2 *Determine a equação do plano π que passa pelos pontos $P = (1, 3, 2)$, $Q = (3, -1, 6)$ e $R = (5, 2, 0)$*

Solução: Note que os vetores $\vec{v}_1 = \overrightarrow{PQ} = Q - P = (2, -4, 4)$ e $\vec{v}_2 = \overrightarrow{PR} = R - P = (4, -1, -2)$ pertencem ao plano π. Como o produto vetorial $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ é ortogonal a π, podemos tomar $\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$. Assim,

$$\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -4 & 4 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 12\vec{i} + 20\vec{j} + 14\vec{k}$$

Logo, para $P_0 = P = (1, 3, 2)$, pela equação 3.8 obtemos:

$$12(x - 1) + 20(y - 3) + 14(z - 2) = 0,$$

Ou seja, $6x + 10y + 7z = 50$ é a equação do plano π que passa pelos pontos P, Q e R dados. ■

No que segue, vamos obter a equação vetorial do plano. Para isto, seja o ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dados no plano π. Se $P = (x, y, z)$ um ponto qualquer de π tal que os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{r} = \overrightarrow{P_0P}$ são linearmente dependentes, ou seja, existem escalares $t, k \in \mathbb{R}$ tais que

$$\vec{r} = t\,\vec{u} + k\,\vec{v} \tag{3.10}$$

Então, a equação 3.11 é chamada **equação vetorial** do plano π. Em termos das componentes, se $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ então podemos escrever 3.11 do seguinte modo:

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = (tu_1 + kv_1, tu_2 + kv_2, tu_3 + kv_3)$$

Logo, obtemos as equações

$$\begin{aligned} x - x_0 &= tu_1 + kv_1 \\ y - y_0 &= tu_2 + kv_2 \\ z - z_0 &= tu_3 + kv_3 \end{aligned} \tag{3.11}$$

chamadas **equações paramétricas** do plano.

3.3 Exercícios

1. Determine as equações da reta, nos seguintes casos:

   a) a reta que passa pelo ponto $P = (1, 0, -3)$, e é paralela ao vetor $\vec{v} = (3, 1, -8)$;

   b) a reta que passa pela origem e pelo ponto $P = (1, 2, 3)$;

   c) a reta que é a intersecção dos planos $x + y + z = 1$ e $x + z = 0$

2. Determine a equação normal e as equações paramétricas do plano π, nos seguintes casos:

   a) O ponto $P = (4, 0, -3)$ pertence a π e $\vec{j} + 2\vec{k}$ é o vetor normal a π;

   b) Os pontos $P = (2, 1, 5)$, $Q = (-1, 3, 4)$, $R = (3, 0, 6)$ pertencem a π;

   c) O ponto $P = (1, 2, 3)$ pertence a π e π contém a reta $x = 3t$, $y = 1 + t$, $z = 2 - t$.

3. Determine uma equação para o conjunto de pontos equidistantes dos pontos $A = (-1, 5, 3)$ e $B = (6, 2, -2)$. Descreva o conjunto.

4. Descreva com suas próprias em palavras a região do $\mathbb{R}^3$ representada pelas equações ou inequações dadas.

   a) O conjunto dos pontos de $\mathbb{R}^3$ tais que $z = 5$;

   b) O conjunto dos pontos de $\mathbb{R}^3$ tais que $y = x$;

5. Encontre um vetor não nulo ortogonal ao plano que passa pelos seguintes pontos:

   a) $P = (2, 1, 5)$, $Q = (-1, 3, 4)$, $R = (3, 0, 6)$;

   b) $P = (0, -2, 0)$, $Q = (4, 1, -2)$, $R = (5, 3, 1)$

6. Determine se os planos são paralelos, perpendiculares ou nenhum dos dois, nos seguintes casos:

a) $2x - 3y + 4z = 5$ e $x + 6y + 4z = 3$;

b) $x = 4y - 2z$ e $8y = 1 + 2x + 4z$;

c) $x + 2y + 2z = 1$ e $2x - y + 2z = 1$.

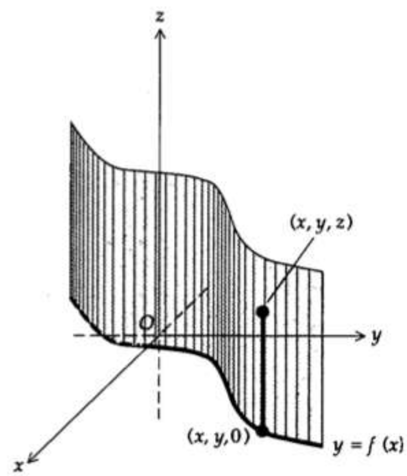
4 Cilindros

Definição 4.1 (superfície cilíndrica) *O lugar geométrico dos pontos do espaço tridimensional* $\mathbb{R}^3$ *gerado por uma reta L que se movem ao longo de uma curva* $\mathcal{C}$ *dada de tal modo que a reta L se mantém paralela a uma reta fixa que não pertence ao plano que contém a curva* $\mathcal{C}$ *é chamado de* ***cilindro*** *ou de* ***superfície cilíndrica*** (veja figura 7). *A reta L é chamada de* ***geratriz*** *e a curva* $\mathcal{C}$ ***diretriz*** *do cilindro.*

Aqui, chamaremos as posições da reta L ao longo de $\mathcal{C}$ também de geratriz. Portanto, podemos pensar no cilindro como um conjunto de geratrizes.

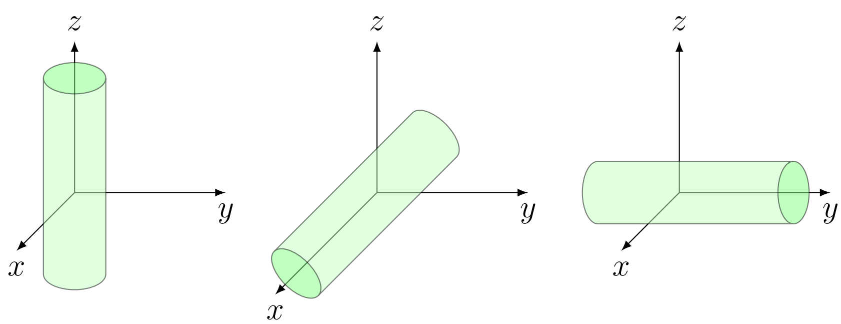
Definição 4.2 (cilindro circular reto) *Um **cilindro circular reto** é o cilindro cuja diretriz é uma circunferência contida num plano perpendicular ao plano do cilindro* (veja figura 8).

Figure 7: Cilindro



Fonte: Leithold [4, p. 885]

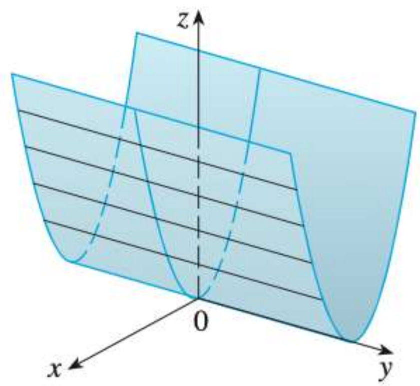
Figure 8: Cilindro circular reto



Fonte: `https://tex.stackexchange.com/questions/86535/generate-simple-cylindrical-shape-with-text-in-latex-tikz`

Exemplo 4.1 *A figura 9 mostra um cilindro cuja diretriz é a parábola $z = x^2$ no plano zx e com geratriz paralela ao eixo Oy. Este cilindro é chamado **cilindro parabólico**.*

Figure 9: Cilindro parabólico

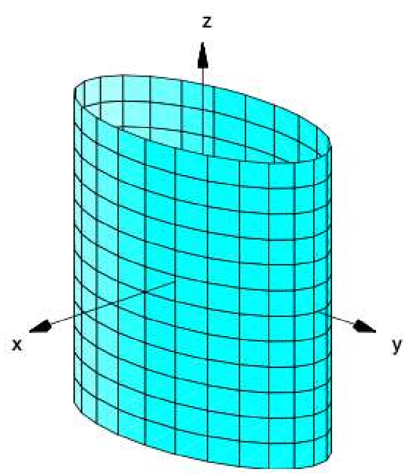


Fonte: Stewart [7, p. 766]

Observe que, a variável y não aparece na equação do cilindro do Exemplo 4.1. Esse fato é comum às superfícies cujas geratrizes são paralelas a um dos eixos coordenados.

Exemplo 4.2 *A figura* 10 *mostra um cilindro cuja diretriz é a elipse* $9x^2+16y^2 = 144$ *no plano xy e com geratriz paralela ao eixo Oz. Este cilindro é chamado* ***cilindro elíptico***.

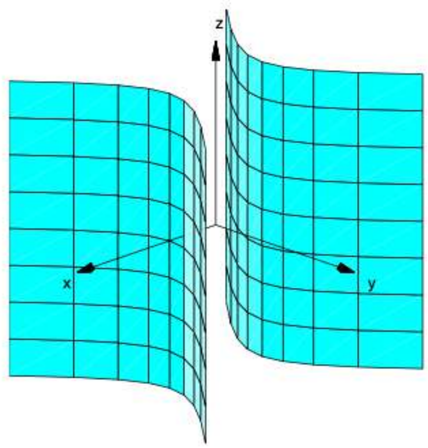
Figure 10: Cilindro elíptico



Fonte: Reinaldo Santos [5]

Exemplo 4.3 *A figura* 11 *mostra um cilindro cuja diretriz é a hipérbole* $25x^2 - 4y^2 = 100$ *no plano xy e com geratriz paralela ao eixo Oz. Este cilindro é chamado* ***cilindro hiperbólico***.

Figure 11: Cilindro hiperbólico



Fonte: Reinaldo Santos [5]

4.1 Equação do cilindro

Teorema 4.1 (Equação do cilindro) *No espaço tridimensional, a equação do cilindro é uma equação descrita por duas das três variáveis x, y e z. A diretriz do cilindro é a curva no plano associado as variáveis presentes na equação e a geratriz é paralela ao eixo da variável ausente.*

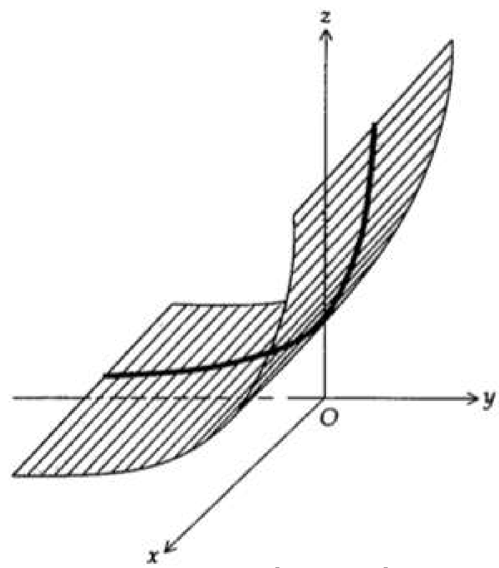
Prova: Leithold [4, p. 885]

Exemplo 4.4 *Pelo teorema* 4.1, *a equação dos cilindros* ***parabólico***, ***elíptico*** *e* ***hiperbólico*** *dos exemplos* 4.1, 4.2 e 4.3 *são, respectivamente,* $z = x^2$, $9x^2+16y^2 = 144$ *e* $25x^2 - 4y^2 = 100$.

Exemplo 4.5 *Faça um esboço da representação geométrica da superfície* $y = \ln z$.

Solução: *Pelo teorema 4.1, a equação* $y = \ln z$ *representa um cilindro cuja diretriz é a curva dada pela equação* $y = \ln z$ *no plano* yz *e as geratrizes são paralelas ao eixo* Ox. *Um esboço deste cilindro é dado na seguinte figura:*

Figure 12: Cilindro



Fonte: Leithold [4, p. 886]

No que segue, analisaremos os cilindros especiais descritos por elipses e hipérboles, respectivamente.

4.2 Cilindro elíptico

Definição 4.3 (cilindro elíptico) *Sejam* $C = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ *e* $a, b, c \in \mathbb{R}^*$. *O lugar geométrico dos pontos* $P = (x, y, z)$ *em* $\mathbb{R}^3$ *que satisfaz uma das equações:*

$$\begin{aligned}\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} &= 1 \\ \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} &= 1 \\ \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} &= 1\end{aligned} \tag{4.1}$$

é chamado de ***Cilindro elíptico*** *com centro em* $C = (x_0, y_0, z_0)$.

Para $C = (x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$ as equações 5.12 tornam-se

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 1 \\ \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 1 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \end{aligned} \tag{4.2}$$

e são chamadas "formas canônicas do cilindro elíptico".

Para esboçar uma representação geométrica de qualquer superfícies no espaço $\mathbb{R}^3$ é útil determinar e desenhar a intersecção da superfície com planos paralelos aos planos coordenados. Essas curvas intersecções são denominadas secções transversais (ou cortes) da superfície. A ideia de usar as secções transversais para desenhar a superfície é empregada em programas de computadores que fazem gráficos tridimensionais. Na maioria desses programas, as secções transversais nos planos verticais $x = k$ e $y = k$ são desenhadas para valores de k igualmente espaçados e partes da superfícies são eliminadas utilizando-se a técnica de remover linhas escondidas

Exemplo 4.6 *Esboce uma representação geométrica do cilindro elíptico*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

.

Solução: *Observe que, as intersecções (seções transversais) do cilindro elíptico com os planos* $z = k$ (veja figuras 13) *são elipses de centro* $(0, 00, k)$ *e dadas por:*

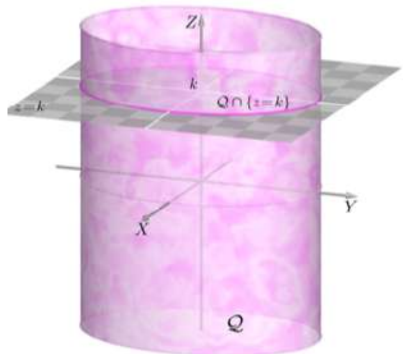
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Por outro lado, as intersecções (seções transversais) do cilindro elíptico com os planos $y = k$ (veja figura 14) *são dadas por*

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{k^2}{b^2} = \frac{b^2 - k^2}{b^2}$$

E temos que analisar os seguintes casos: $|k| < b$, $|k| = b$ *e* $|k| > b$.

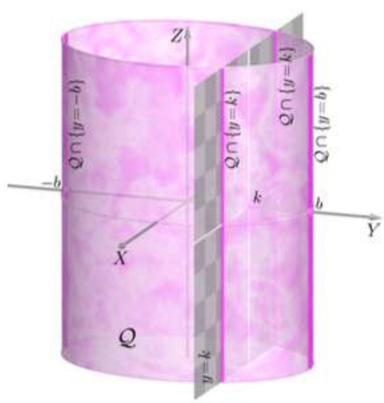
Figure 13: Intersecções do cilindro elíptico com z=k



Fonte: Aula 10 de Kátia Delgado [1]

- $|k| < b \Rightarrow -b < k < b$. *Neste caso, as intersecções são retas paralelas ao eixo Oz dadas por* $x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - k^2}$*;*
- $|k| = b \Rightarrow k = -b$ *ou* $k = b$*. Para* $k = -b$*, temos* $x = 0$ *e* $y = k = -b$ *e, portanto, a intersecção é uma reta paralela ao eixo Oz. Para Para* $k = b$*, temos* $x = 0$ *e* $y = k = b$ *e, portanto, a intersecção é uma reta paralela ao eixo Oz;*
- $|k| > b$*. Neste caso, a intersecção é vazia.*

Figure 14: Intersecções do cilindro elíptico com y=k



Fonte: Aula 10 de Kátia Delgado [1]

Além disso, as intersecções (seções transversais) do cilindro elíptico com os planos $x = k$ (veja figura 14) *são dadas por*

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{a^2} = \frac{a^2 - k^2}{a^2}$$

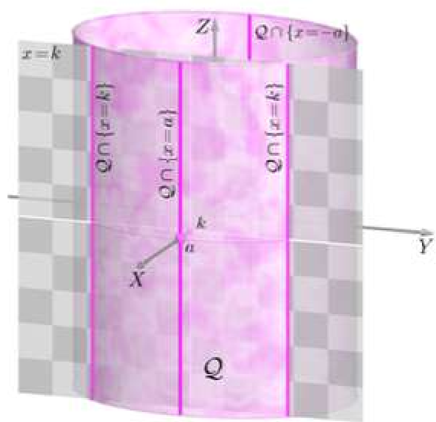
E temos que analisar os seguintes casos: $|k| < a$, $|k| = a$ *e* $|k| > a$.

• $|k| < a \Rightarrow -a < k < a$. *Neste caso, as intersecções são retas paralelas ao eixo* Oz *dadas por* $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - k^2}$;

• $|k| = a \Rightarrow k = -a$ *ou* $k = a$. *Para* $k = -a$, *temos* $y = 0$ *e* $x = k = -a$ *e, portanto, a intersecção é uma reta paralela ao eixo* Oz. *Para Para* $k = a$, *temos* $y = 0$ *e* $x = k = a$ *e, portanto, a intersecção é uma reta paralela ao eixo* Oz;

• $|k| > a$. *Neste caso, a intersecção é vazia.*

Figure 15: Intersecções do cilindro elíptico com x=k



Fonte: Aula 10 de Kátia Delgado [1]

4.3 Cilindro hiperbólico

Definição 4.4 (cilindro hiperbólico) *Sejam* $C = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ *e* $a, b, c \in \mathbb{R}^*$. *O lugar geométrico dos pontos* $P = (x, y, z)$ *em* $\mathbb{R}^3$ *que satisfaz uma das equações:*

$$
\begin{aligned}
\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1 \quad &ou \quad -\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1 \\
\frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1 \quad &ou \quad -\frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1 \\
\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \quad &ou \quad -\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

é chamado de ***cilindro hiperbólico*** *com centro em* $C = (x_0, y_0, z_0)$.

Para $C = (x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$ as equações 4.3 tornam-se

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad &\text{ou} \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad &\text{ou} \quad -\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad &\text{ou} \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{aligned} \tag{4.4}$$

e são chamadas "formas canônicas do cilindro hiperbólico".

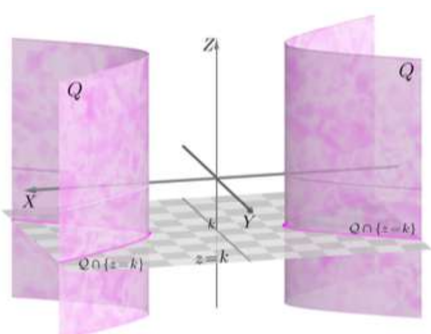
Exemplo 4.7 *Esboce a representação geométrica do cilindro hiperbólico dado por*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

.

***Solução**: Observe que, as intersecções (seções transversais) do cilindro hiperbólico com os planos* $z = k$ (veja figura 16) *são hipérboles de centro* $(0, 0, k)$ *no eixo Oz, reta focal paralela ao eixo Ox e dadas por* $y = \pm\frac{bz}{a}$.

Figure 16: Intersecções do cilindro hiperbólico com z=k



Fonte: Aula 10 de Kátia Delgado [1]

Por outro lado, as intersecções (seções transversais) do cilindro hiperbólico com os planos $x = k$ (veja figura 17) *são dadas por*

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{a^2} - 1 = \frac{k^2 - a^2}{a^2}$$

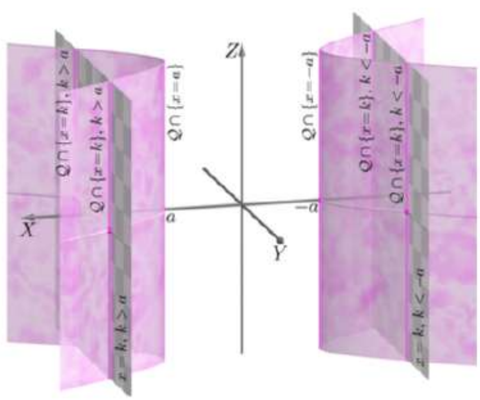
E temos que analisar os seguintes casos: $|k| < a$, $|k| = a$ *e* $|k| > a$.

- $|k| > a$. *Neste caso, as intersecções são retas paralelas ao eixo Oz dadas por* $y = \pm\dfrac{b}{a}\sqrt{k^2 - a^2}$;

- $|k| = a \Rightarrow k = -a$ *ou* $k = a$. *Para* $k = -a$, *temos* $y = 0$ *e* $x = k = -a$ *e, portanto, a intersecção é uma reta paralela ao eixo Oz. Para Para* $k = a$, *temos* $y = 0$ *e* $x = k = a$ *e, portanto, a intersecção é uma reta paralela ao eixo Oz;*

- $|k| < a \Rightarrow -a < k < a$. *Neste caso, a intersecção é vazia, pois* $\dfrac{k^2}{a^2} - 1 < 0$.

Figure 17: Intersecções do cilindro hiperbólico com x=k

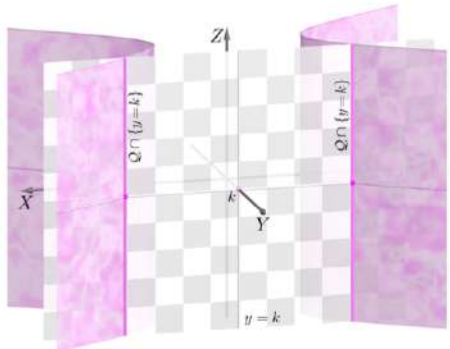


Fonte: Aula 10 de Kátia Delgado [1]

Além disso, as intersecções (seções transversais) do cilindro hiperbólico com os planos $y = k$ (veja figura 18) *são as retas paralelas ao eixo Oz dadas por*

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{k^2}{b^2} \Rightarrow x = \pm\frac{a}{b}\sqrt{k^2 + b^2}, \ \ \forall k \in \mathbb{R}.$$

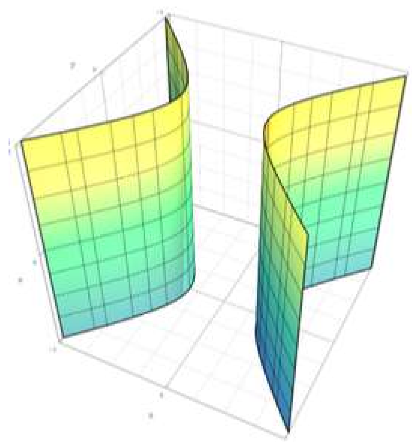
Figure 18: Intersecções do cilindro hiperbólico com y=k



Fonte: Aula 10 de Kátia Delgado [1]

Um esboço do cilindro hiperbólico é dado na seguinte figura:

Figure 19: Esboço do cilindro hiperbólico



Fonte: `https://www.ime.usp.br/mat/2458/textos/quadricas.pdf`

5 Superfícies quadráticas

Definição 5.1 *Sejam $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ e J constantes. O lugar geométrico dos pontos $P = (x, y, z)$ no espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$ que satisfazem a seguinte equação do segundo grau em três variáveis:*

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0 \tag{5.1}$$

é chamado de ***superfície quádrica*** $\mathcal{Q}$ *ou simplesmente de* ***quádrica*** $\mathcal{Q}$ *.*

A equação 5.1 pode ser simplificada através de rotações e translações de modo que podemos escrevê-la por uma das seguintes formas (chamadas formas canônicas):

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + J = 0 \text{ ou } Ax^2 + By^2 + Iz = 0 \tag{5.2}$$

Observação 5.1 *Note que, pelo menos um dos coeficientes A, B, C, D, E ou F deve ser não nulo, caso contrário a equação 5.1 torna-se uma equação linear e logo representaria um plano no $\mathbb{R}^3$.*

Exemplo 5.1 *Exemplos de superfícies quádricas e suas equações:*

Esfera: *Temos que a equação da esfera de centro (a, b, c) e raio r é dada por*

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = r^2 \Longrightarrow x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+a^2+b^2+c^2-r^2 = 0.$$

Assim, $A = B = C = 1$, $D = E = F = 0$, $G = 2a$, $H = 2b$, $I = 2c$ e $J = a^2 + b^2 + c^2 - r^2$. ■

Cilindro circular reto: *Sabemos que a equação do cilindro circular reto com geratriz paralela ao eixo Oz é dada por $x^2 + y^2 = 1$. Assim, $A = B = 1$, $C = D = E = F = G = H = I = 0$ e $J = -1$.* ■

Cilindro elíptico: *Considere o cilindro elíptico com geratriz paralela ao eixo Oz e equação dada por $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Então, $A = b^2$, $B = a^2$, $C = D = E = F = G = H = I = 0$ e $J = -a^2b^2$.* ■

Cilindro hiperbólico: *Considere o cilindro hiperbólico com geratriz paralela ao eixo Oz e equação dada por* $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$*. Então,* $A = b^2$*,* $B = -a^2$*,* $C = D = E = F = G = H = I = 0$ *e* $J = -a^2b^2$*.* ∎

5.1 Elipsóide

Definição 5.2 (Elipsóide) *Sejam* $C = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ *e* $a, b, c \in \mathbb{R}^*$*. O lugar geométrico dos pontos* $P = (x, y, z)$ *em* $\mathbb{R}^3$ *que satisfaz a equação:*

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1 \tag{5.3}$$

é chamado de ***Elipsóide*** *com centro em* $C = (x_0, y_0, z_0)$*.*

Exemplo 5.2 *Esboce a representação geométrica do elipsóide de centro* $C = (0, 0, 0)$*.*

Solução*: Para* $C = (0, 0, 0)$ *temos que a equação* 5.3 *torna-se*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{5.4}$$

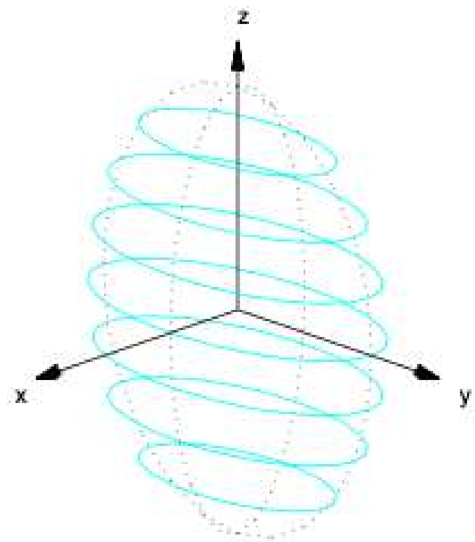
Além disso, observe que, fazendo $z = 0$ *na equação* 5.4 *obtemos a seção transversal do elipsóide no plano xy (intersecção da superfície com o plano xy), dada pela elipse*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Deste modo, as seções transversais do elipsóide com os planos $z = k$ (veja figuras 20 e 21) *são dadas pelas equações :*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2}. \tag{5.5}$$

Figure 20: Interseção do elipsóide com os planos z=k



Fonte: Reinaldo Santos [5]

Então, precisamos analisar os seguintes casos:

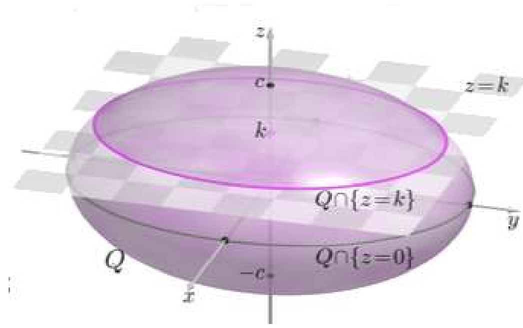
i) $\dfrac{k^2}{c^2} < 1 \Rightarrow |k| < c$*: neste caso temos que* 5.5 *são elipses cujos semi-eixos decrescem para zero quando* $|k|$ *aproxima-se para* c*(a intersecção são elipses) ;*

ii) $\dfrac{k^2}{c^2} = 1 \Rightarrow |k| = c$*: neste caso temos que* 5.5 *é satisfeita apenas pelo ponto* $(0,0,k)$ *(a intersecção é um único ponto);*

iii) $\dfrac{k^2}{c^2} > 1 \Rightarrow |k| > c$*: neste caso temos que não existem pontos que satisfazem* 5.5 *(não há intersecção).*

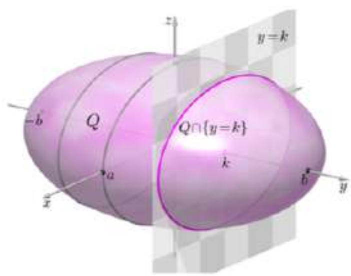
A discussão é análoga se considerarmos as seções transversais do elipsóide com os planos $y = k$ *ou* $x = k$*, como mostram as figuras* 22 (a) e (b), *respectivamente.*

Figure 21: Interseção do elipsóide com os planos z=k

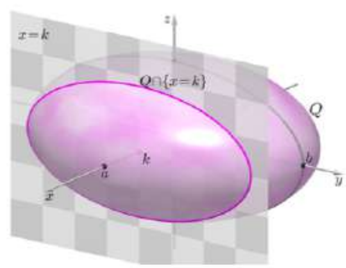


Fonte: Aula 10 de Kátia Delgado [1]

Figure 22: Interseções do elipsóide



(a) Interseção do elipsoide com y=k

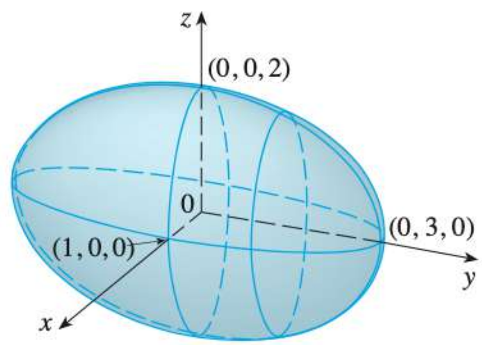


(b) Interseção do elipsoide com x=k

Fonte: Aula 10 de Kátia Delgado [1]

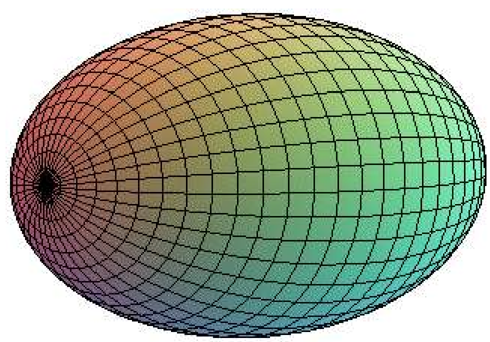
Esboços do elipsóide são dados nas seguintes figuras:

Figure 23: Esboço do elipsóide



Fonte: Stewart [7, p. 767]

Figure 24: Esboço do elipsóide



Fonte: Aula 10 de Kátia Delgado [1]

5.2 Parabolóide

Definição 5.3 (Parabolóide elíptico) *Sejam $C = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ e $a, b, c \in \mathbb{R}^*$. O lugar geométrico dos pontos $P = (x, y, z)$ em $\mathbb{R}^3$ que satisfaz uma das equações:*

$$\begin{aligned} \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} &= b(y-y_0) \\ \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} &= a(x-x_0) \\ \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} &= c(z-z_0) \end{aligned} \tag{5.6}$$

*é chamado de **Parabolóide elíptico** com centro em $C = (x_0, y_0, z_0)$.*

Para $C = (x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$ as equações 5.12 tornam-se

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} &= by \\ \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= ax \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= cz \end{aligned} \tag{5.7}$$

e são chamadas "formas canônicas do parabolóide elíptico".

Exemplo 5.3 *Esboce a representação geométrica do parabolóide elíptico*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz$$

com $c > 0$.

Solução*: Observe que, as intersecções (seções transversais) do parabolóide elíptico com os planos* $z = k$ (veja figuras 25a e 25b) *são dadas por:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = c\,k.$$

Assim,

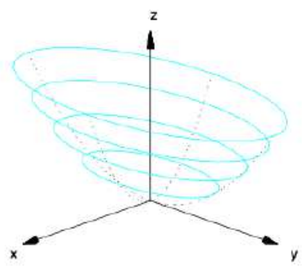
- *se* $k > 0$ *são elipses de centro* $(0, 0, k)$*;*
- *se* $k = 0$ *é o ponto* $(0, 0, 0)$*;*
- *se* $k < 0$ *é o conjunto vazio.*

Por outro lado,, as intersecções (seções transversais) do parabolóide elíptico com os planos $y = k$ *são dadas por*

$$\frac{x^2}{a^2} = c\,z - \frac{k^2}{b^2} \Longrightarrow x^2 = a^2 c\left(z - \frac{k^2}{cb^2}\right),$$

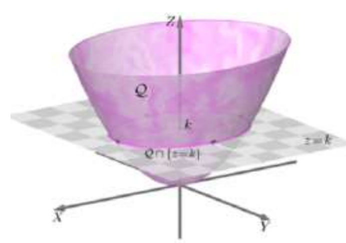
que são parabólicas com vértices $V_k = \left(0, k, \dfrac{k^2}{cb^2}\right)$ *e retas-focais paralelas ao eixo Oz, com concavidade para cima* (veja figura 26a).

Figure 25: Intersecções do parabolóide com z=k



(a)

Fonte: Reginaldo Santos [5]



(b)

Fonte: Aula 10 de Kátia Delgado [1]

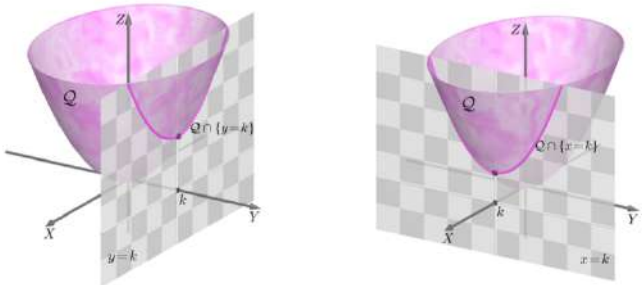
Além disso, as intersecções (seções transversais) do parabolóide elíptico com os planos $x = k$ são dadas por

$$\frac{y^2}{b^2} = c\,z - \frac{k^2}{a^2} \Longrightarrow y^2 = b^2 c\left(z - \frac{k^2}{ca^2}\right),$$

que são parabólicas com vértices $V_k = \left(k, 0, \dfrac{k^2}{ca^2}\right)$ *e retas-focais paralelas ao eixo Oz, com concavidade para cima* (veja figura 26b).

Esboços do parabolóide elíptico são dados nas seguintes figuras:

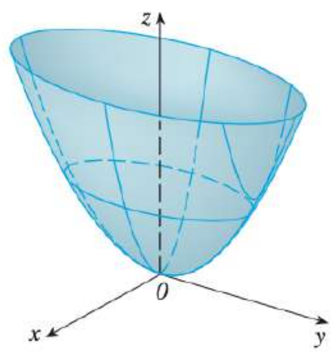
Figure 26: Intersecções do parabolóide



(a) Planos y=k (b) Planos x=k

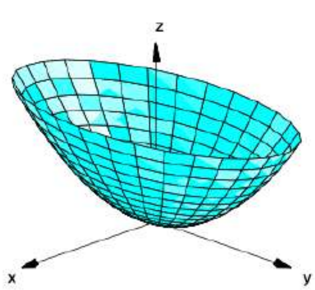
Fonte: Aula 10 de Kátia Delgado [1]

Figure 27: Esboço do parabolóide elíptico



Fonte: Stewart [7, p. 767]

Figure 28: Esboço do parabolóide elíptico



Fonte: Reginaldo Santos [5]

5.3 Parabolóide hiperbólico

Definição 5.4 (Parabolóide hiperbólico) *Sejam $C = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ e $a, b, c \in \mathbb{R}^*$. O lugar geométrico dos pontos $P = (x, y, z)$ em $\mathbb{R}^3$ que satisfaz uma das equações:*

$$\begin{aligned}
\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(z-z_0)^2}{c^2} &= b(y-y_0) \\
\frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(z-z_0)^2}{c^2} &= a(x-x_0) \\
\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} &= c(z-z_0)
\end{aligned} \tag{5.8}$$

é chamado de ***Parabolóide hiperbólico*** *com centro em $C = (x_0, y_0, z_0)$.*

Para $C = (x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$ as equações 5.8 tornam-se

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} &= by \\
\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} &= ax \\
\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= cz
\end{aligned} \tag{5.9}$$

e são chamadas "formas canônicas do parabolóide hiperbólico".

Exemplo 5.4 *Esboce a representação geométrica do parabolóide hiperbólico*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz \tag{5.10}$$

com $c < 0$.

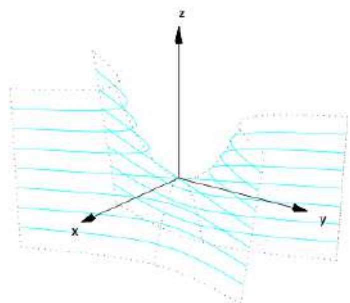
Solução*: Observe que, as intersecções (seções transversais) do parabolóide hiperbólico com os planos $z = k$ são dadas por:*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = c\,k$$

Assim, temos que analisar os seguintes casos: $k > 0$, $k = 0$ e $k < 0$.

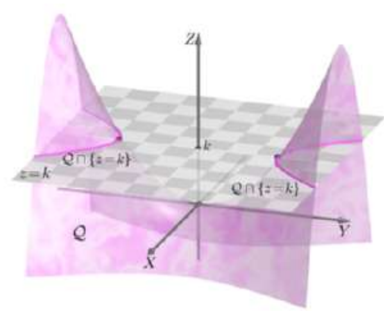
- $k > 0$. *Neste caso, as equações* 5.10 *são hipérboles* (veja figuras 29a e 29b) *centro $(0, 0, k)$, reta focal paralela ao eixo Oy e assíntotas $x = \pm\dfrac{ay}{b}$, pois $ck < 0$.*
- $k = 0$. *Neste caso, as equações* 5.10 *são duas retas $y = \pm\dfrac{bx}{a}$* (veja figura 30).

Figure 29: Intersecções do parabolóide hiperbólico com z=k



(a)

Fonte: Reginaldo Santos [5]

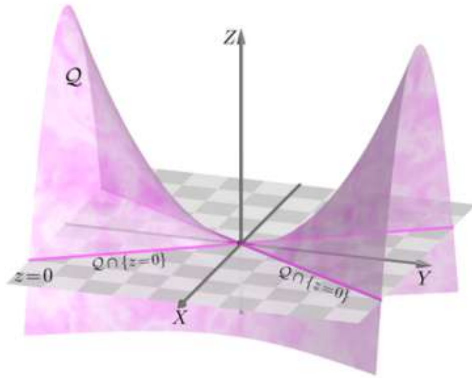


(b)

Fonte: Aula 10 de Kátia Delgado [1]

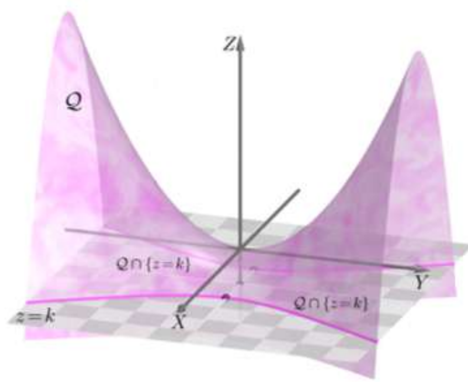
- $k < 0$. *Neste caso, as equações* 5.10 *são hipérboles* (veja figuras 31) *centro* $(0, 0, k)$, *reta focal paralela ao eixo* Oz *e assíntotas* $y = \pm\dfrac{bx}{a}$, *pois* $ck > 0$.

Figure 30: Intersecções do parabolóide hiperbólico com z=0



Fonte: Aula 10 de Kátia Delgado [1]

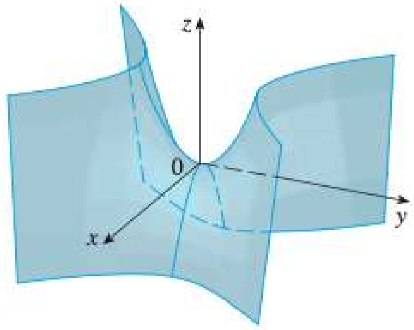
Figure 31: Intersecções do parabolóide hiperbólico com z=k



Fonte: Aula 10 de Kátia Delgado [1]

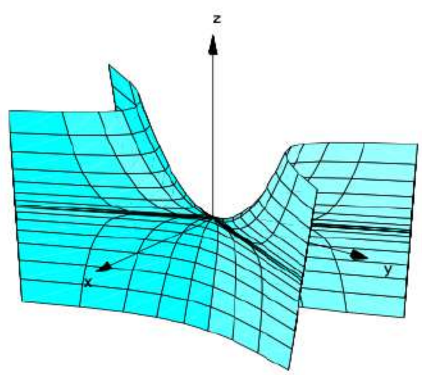
Esboços do parabolóide hiperbólico são dados nas seguintes figuras:

Figure 32: Esboço do parabolóide hiperbólico



Fonte: Stewart [7, p. 768]

Figure 33: Esboço do parabolóide hiperbólico



Fonte: Reginaldo Santos [5]

5.4 Hiperbolóide de uma Folha

Definição 5.5 (Hiperbolóide de uma Folha) *Sejam $C = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ e $a, b, c \in \mathbb{R}^*$. O lugar geométrico dos pontos $P = (x, y, z)$ em $\mathbb{R}^3$ que satisfaz uma das equações:*

$$\begin{aligned} -\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} &= 1 \\ \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} &= 1 \\ \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(z-z_0)^2}{c^2} &= 1 \end{aligned} \tag{5.11}$$

*é chamado de **Hiperbolóide de uma folha** com centro em $C = (x_0, y_0, z_0)$.*

Para $C = (x_0, y_0, z_0) = (0,0,0)$ as equações 5.11 tornam-se

$$\begin{aligned} -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 1 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 1 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} &= 1 \end{aligned} \tag{5.12}$$

e são chamadas "formas canônicas do hiperbolóide de uma folha".

Exemplo 5.5 *Esboce a representação geométrica do hiperbolóide de uma folha*

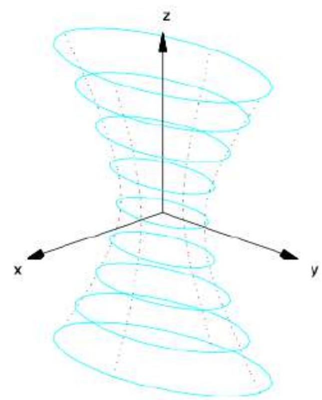
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Solução: *Observe que, as intersecções (seções transversais) do hiperbolóide de uma folha com os planos $z = k$* (veja figuras 34a e 34b) *são dadas por:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2}$$

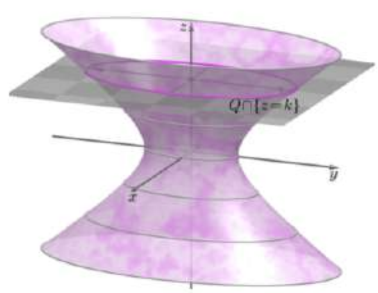
e são elipses de centro $(0,0,k)$.

Figure 34: Intersecções do hiperbolóide de uma folha com z=k



(a)

Fonte: Reginaldo Santos [5]



(b)

Fonte: Aula 10 de Kátia Delgado [1]

Por outro lado, as intersecções (seções transversais) do hiperbolóide de uma folha com os planos $x = k$ são dadas por:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{a^2} = \frac{a^2 - k^2}{a^2}. \tag{5.13}$$

Aqui, temos que analisar os seguintes casos:

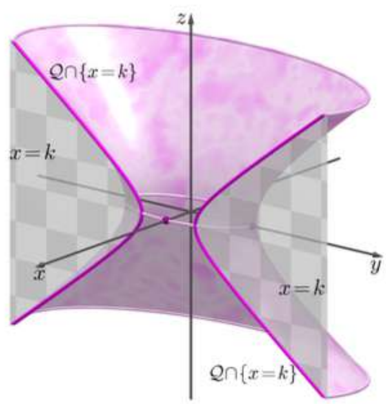
- $|k| < a \Leftrightarrow -a < k < a$;
- $|k| = a \Leftrightarrow k = -a$ *ou* $k = a$;
- $|k| > a$

• $|k| < a \Leftrightarrow -a < k < a$: *Neste caso, as equações* 5.13 *são hipérboles dadas por:* (veja figura 35)

$$\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{z^2}{\beta^2} = 1$$

com $\alpha = b^2\left(\frac{a^2-k^2}{a^2}\right)$, $\beta = c^2\left(\frac{a^2-k^2}{a^2}\right)$, *centro* $(k,0,0)$, *reta focal paralela ao eixo* Oy *e assíntotas* $z = \pm\frac{cy}{b}$, *pois* $\left(\frac{a^2-k^2}{a^2}\right) > 0$.

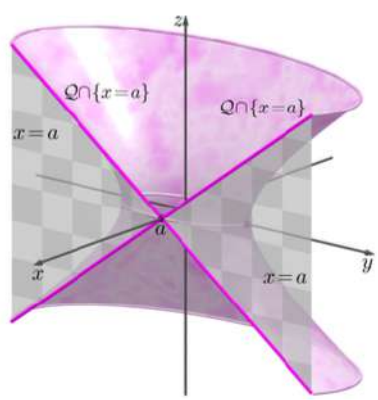
Figure 35: Intersecções do hiperbolóide de uma folha com x=k e $|k| < a$



Fonte: Aula 10 de Kátia Delgado [1]

• $|k| = a \Rightarrow k = a$. *Neste caso, as equações* 5.13 *são duas retas* $y = \pm\frac{bz}{c}$ *concorrentes que se intersectam no ponto* $(a,0,0)$ (veja figura 36).

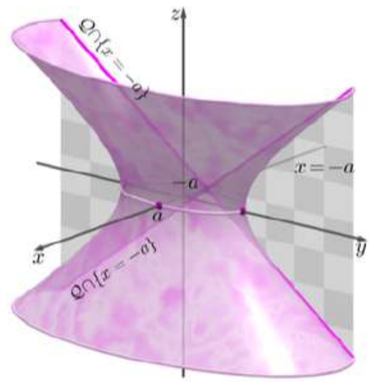
Figure 36: Intersecções do hiperbolóide de uma folha com $x = a$



Fonte: Aula 10 de Kátia Delgado [1]

- $|k| = a \Rightarrow k = -a$. *Neste caso, as equações* 5.13 *são duas retas* $y = \pm\dfrac{bz}{c}$ *concorrentes que se intersectam no ponto* $(-a, 0, 0)$ (veja figura 37).

Figure 37: Intersecções do hiperbolóide de uma folha com $x = -a$



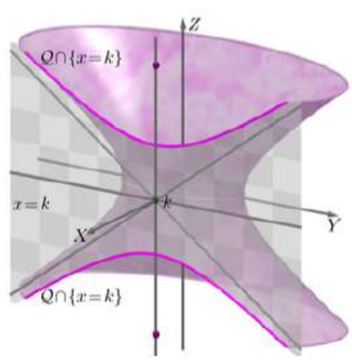
Fonte: Aula 10 de Kátia Delgado [1]

- $|k| > a$. *Neste caso, Neste caso, as equações* 5.13 *são hipérboles* (veja figura 38) *dadas por:*

$$\frac{z^2}{\alpha_1^2} - \frac{y^2}{\beta_1^2} = 1$$

com $\alpha_1 = c^2\left(\dfrac{k^2 - a^2}{a^2}\right)$, $\beta_1 = b^2\left(\dfrac{k^2 - a^2}{a^2}\right)$, *centro* $(k, 0, 0)$, *reta focal paralela ao eixo Oz e assíntotas* $y = \pm\dfrac{bz}{c}$, *pois* $\left(\dfrac{k^2 - a^2}{a^2}\right) > 0$.

Figure 38: Intersecções do hiperbolóide de uma folha com x=k e $|k| > a$



Fonte: Aula 10 de Kátia Delgado [1]

Finalmente, as intersecções (seções transversais) do hiperbolóide de uma folha com *os planos* $y = k$ *são dadas por:*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{b^2} = \frac{b^2 - k^2}{b^2}. \tag{5.14}$$

E temos que analisar os seguintes casos:

- $|k| < b \Leftrightarrow -b < k < b$;
- $|k| = b \Leftrightarrow k = -b$ *ou* $k = b$;
- $|k| > b$.

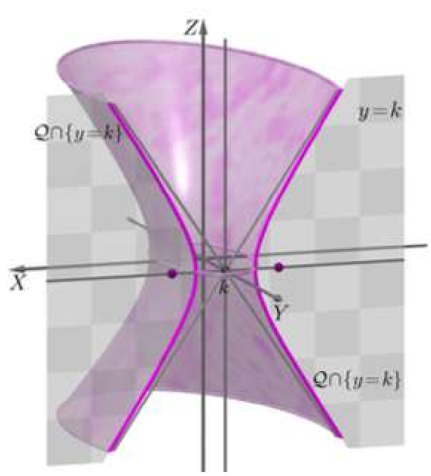
Assim,

- $|k| < b \Leftrightarrow -b < k < b$: *Neste caso, as equações* 5.14 *são as hipérboles dadas por:* (veja figura 39)

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{z^2}{\beta^2} = 1$$

com $\alpha = a^2\left(\frac{b^2 - k^2}{b^2}\right)$, $\beta = c^2\left(\frac{b^2 - k^2}{b^2}\right)$, *centro* $(0, k, 0)$, *reta focal paralela ao eixo Ox e assíntotas* $z = \pm\frac{cx}{a}$, *pois* $\left(\frac{b^2 - k^2}{b^2}\right) > 0$.

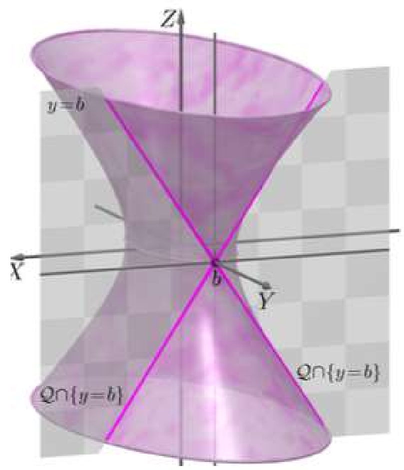
Figure 39: Intersecções do hiperbolóide de uma folha com y=k e $|k| < b$



Fonte: Aula 10 de Kátia Delgado [1]

- $|k| = b \Rightarrow k = b$. *Neste caso, as equações* 5.14 *são duas retas* $z = \pm\frac{cx}{a}$ *concorrentes que se intersectam no ponto* $(0, b, 0)$ (veja figura 40).

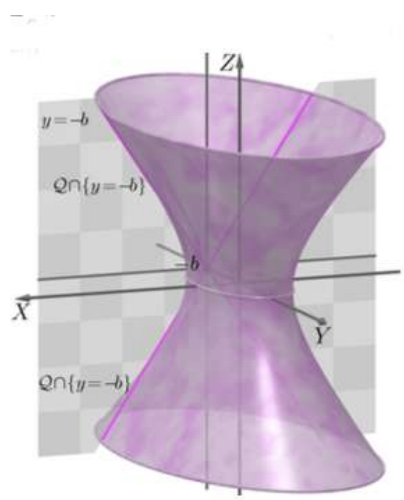
Figure 40: Intersecções do hiperbolóide de uma folha com $y = b$



Fonte: Aula 10 de Kátia Delgado [1]

• $|k| = b \Rightarrow k = -b$. *Neste caso, as equações* 5.14 *são duas retas* $z = \pm\dfrac{cx}{a}$ *concorrentes que se intersectam no ponto* $(0, -b, 0)$ (veja figura 41).

Figure 41: Intersecções do hiperbolóide de uma folha com $y = -b$



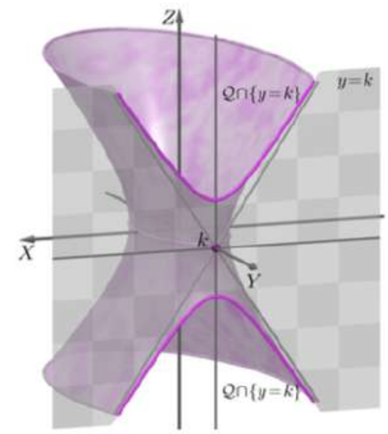
Fonte: Aula 10 de Kátia Delgado [1]

• $|k| > b$. *Neste caso, Neste caso, as equações* 5.14 *são hipérboles* (veja figura 42) *dadas por:*

$$\frac{x^2}{\alpha_1^2} - \frac{z^2}{\beta_1^2} = 1$$

com $\alpha_1 = a^2\left(\dfrac{k^2 - b^2}{b^2}\right)$, $\beta_1 = c^2\left(\dfrac{k^2 - b^2}{b^2}\right)$, *centro* $(0, k, 0)$, *reta focal paralela ao* *eixo Oz e assíntotas* $x = \pm \frac{az}{c}$, *pois* $\left(\frac{b^2 - k^2}{b^2} \right) < 0.$

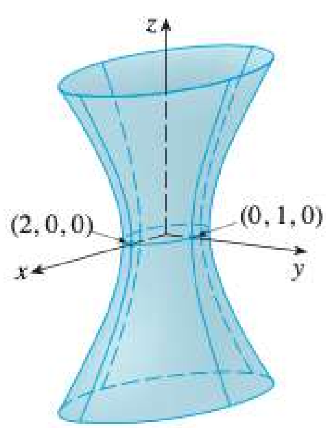
Figure 42: Intersecções do hiperbolóide de uma folha com x=k e $|k| > b$



Fonte: Aula 10 de Kátia Delgado [1]

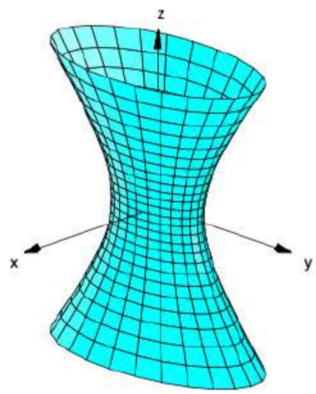
Esboços do hiperbolóide de uma folha são dados nas seguintes figuras:

Figure 43: Esboço do hiperbolóide de uma folha



Fonte: Stewart [7, p. 769]

Figure 44: Esboço do hiperbolóide de uma folha



Fonte: Reginaldo Santos [5]

5.5 Hiperbolóide de duas folhas

Definição 5.6 (Hiperbolóide de duas folhas) *Sejam $C = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ e $a, b, c \in \mathbb{R}^*$. O lugar geométrico dos pontos $P = (x, y, z)$ em $\mathbb{R}^3$ que satisfaz uma das equações:*

$$\begin{aligned} \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(z-z_0)^2}{c^2} &= 1 \\ -\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(z-z_0)^2}{c^2} &= 1 \\ -\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} &= 1 \end{aligned} \tag{5.15}$$

é chamado de ***Hiperbolóide de duas folhas*** *com centro em $C = (x_0, y_0, z_0)$.*

Para $C = (x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$ as equações 5.15 tornam-se

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} &= 1 \\ -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} &= 1 \\ -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 1 \end{aligned} \tag{5.16}$$

e são chamadas “formas canônicas do hiperbolóide de duas folhas”.

Exemplo 5.6 *Esboce a representação geométrica do hiperbolóide de duas folhas*

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Solução*: Observe que, as intersecções (seções transversais) do hiperbolóide de duas folhas com os planos* $z = k$ (veja figuras 45a e 45b) *são dadas por:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{c^2} - 1 = \frac{k^2 - c^2}{c^2} \tag{5.17}$$

E temos que analisar os seguintes casos:

- $|k| < c \Leftrightarrow -c < k < c;$

- $|k| = c \Leftrightarrow k = -c$ *ou* $k = c;$

- $|k| > c.$

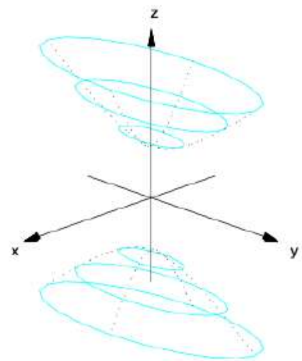
Assim,

- $|k| < c \Leftrightarrow -c < k < c.$ *Neste caso, temos que a intersecção é vazia.*
- $|k| = c.$ *Neste caso, temos que a intersecção é o ponto* $(0, 0, c)$.
- $|k| = -c.$ *Neste caso, temos que a intersecção é o ponto* $(0, 0, -c)$.
- $|k| > c.$ *Neste caso, a equação* 5.17 *são elipses* (veja figuras 45a e 45b) *dadas por:*

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

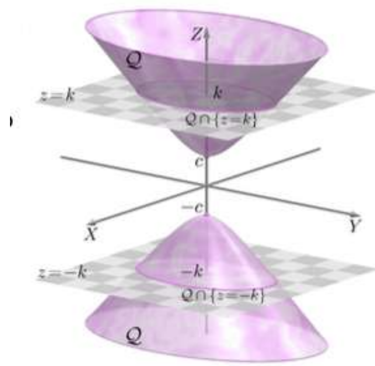
com $\alpha = a^2 \left(\frac{k^2 - c^2}{c^2}\right)$, $\beta = b^2 \left(\frac{k^2 - c^2}{c^2}\right)$ *e centro* $(0, 0, k)$.

Figure 45: Intersecções do hiperbolóide de duas folhas com z=k



(a)

Fonte: Reginaldo Santos [5]



(b)

Fonte: Aula 10 de Kátia Delgado [1]

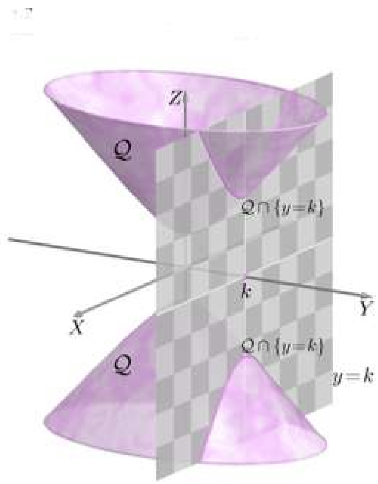
Por outro lado, as intersecções (seções transversais) do hiperbolóide de duas folhas com os planos $y = k$ são hipérboles (veja figura 46) *dadas por:*

$$\frac{z^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$$

com $\alpha = c^2\left(1 + \frac{k^2}{b^2}\right)$, $\beta = a^2\left(1 + \frac{k^2}{b^2}\right)$, *centro* $(0, k, 0)$, *reta focal paralela ao eixo Oz e assíntotas* $x = \pm\frac{az}{c}$, *pois* $1 + \frac{k^2}{b^2} > 0$, $\forall k \in \mathbb{R}$.

Além disso, as intersecções (seções transversais) do hiperbolóide de duas folhas

Figure 46: Intersecções do hiperbolóide de duas folhas com y=k



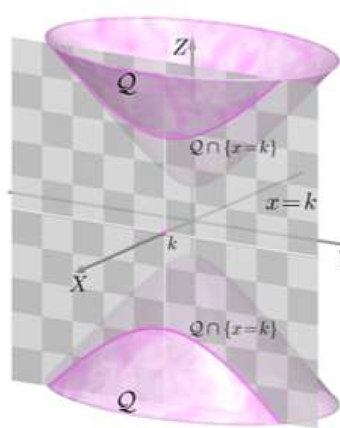
Fonte: Aula 10 de Kátia Delgado [1]

com os planos $x = k$ *são hipérboles* (veja figura 47) *são dadas por:*

$$\frac{z^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

com $\alpha = c^2\left(1 + \frac{k^2}{a^2}\right)$, $\beta = b^2\left(1 + \frac{k^2}{a^2}\right)$, *centro* $(k, 0, 0)$, *reta focal paralela ao eixo* Oz *e assíntotas* $y = \pm\frac{bz}{a}$, *pois* $1 + \frac{k^2}{a^2} > 0$, $\forall k \in \mathbb{R}$.

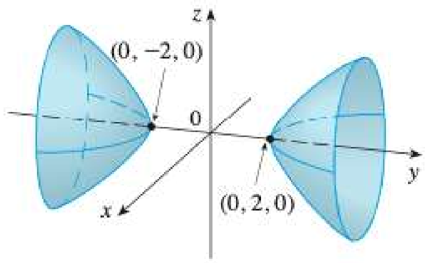
Figure 47: Intersecções do hiperbolóide de duas folhas com x=k



Fonte: Aula 10 de Kátia Delgado [1]

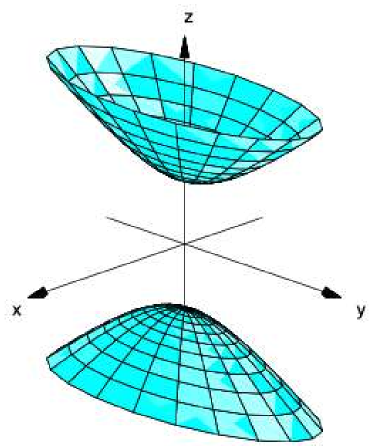
Esboços do hiperbolóide de duas folhas são dados nas seguintes figuras:

Figure 48: Esboço do hiperbolóide de duas folhas



Fonte: Stewart [7, p. 770]

Figure 49: Esboço do hiperbolóide de duas folhas



Fonte: Reginaldo Santos [5]

5.6 Cone elíptico

Definição 5.7 (Cone elíptico) *Sejam $C = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ e $a, b, c \in \mathbb{R}^*$. O lugar geométrico dos pontos $P = (x, y, z)$ em $\mathbb{R}^3$ que satisfaz uma das equações:*

$$\begin{aligned}
-\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} &= 0 \\
\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} &= 0 \\
\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(z-z_0)^2}{c^2} &= 0
\end{aligned} \tag{5.18}$$

*é chamado de **Cone elíptico** com centro em $C = (x_0, y_0, z_0)$.*

Para $C = (x_0, y_0, z_0) = (0,0,0)$ as equações 5.18 tornam-se

$$\begin{aligned} -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 0 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} &= 0 \end{aligned} \tag{5.19}$$

e são chamadas "formas canônicas do cone elíptico".

Exemplo 5.7 *Esboce a representação geométrica do cone elíptico*

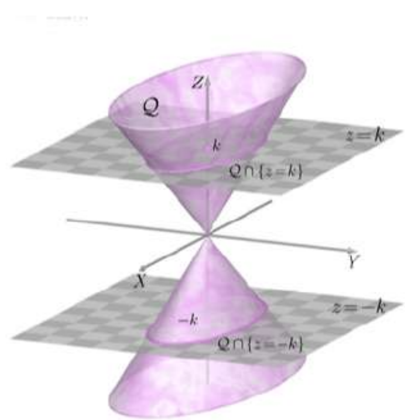
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Solução*: Observe que, as intersecções (seções transversais) do cone elíptico com os planos* $z = k$ (veja figura 50) *são dadas por:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{c^2} \tag{5.20}$$

Assim, para $k \neq 1$*, pelas equações* 5.20*, temos que a intersecção são elipses de centro* $(0,0,k)$ *e para* $k = 0$ *é o ponto* $(0,0,0)$.

Figure 50: Intersecções do cone elíptico com z=k



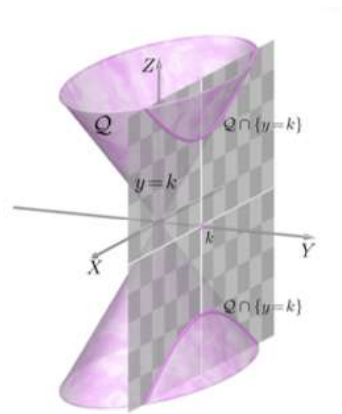
Fonte: Aula 10 de Kátia Delgado [1]

Por outro lado, as intersecções (seções transversais) do cone elíptico com os planos $y = k$ *para* $k \neq 0$ *são hipérboles* (veja figura 51) *dadas por:*

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{k^2}{b^2}$$

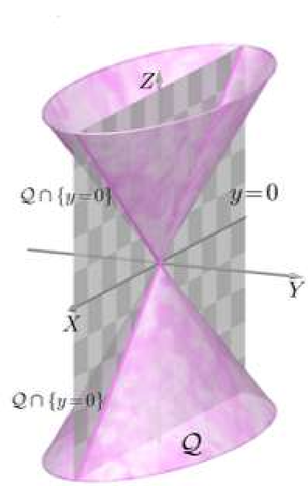
com centro $(0, k, 0)$*, reta focal paralela ao eixo* Oz *e assíntotas* $x = \pm\dfrac{cz}{a}$*. Para* $k = 0$ *temos que as intersecções são duas retas concorrentes com ponto comum* $(0, 0, 0)$ *e dadas por* $x = \pm\dfrac{cz}{a}$ (veja figura 52).

Figure 51: Intersecções do cone elíptico com y=k



Fonte: Aula 10 de Kátia Delgado [1]

Figure 52: Intersecções do cone elíptico com y=0



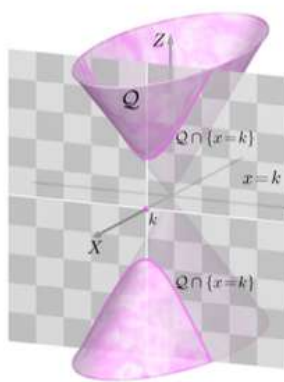
Fonte: Aula 10 de Kátia Delgado [1]

Além disso, as intersecções (seções transversais) do cone elíptico com os planos $x = k$ *para* $k \neq 0$ *são hipérboles* (veja figura 53) *dadas por:*

$$-\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{k^2}{a^2}$$

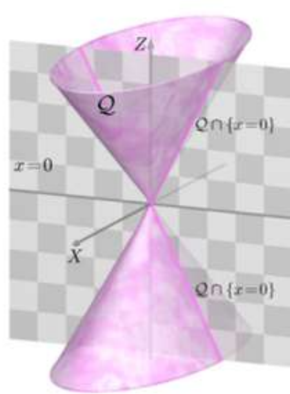
com centro $(k, 0, 0)$*, reta focal paralela ao eixo Oz e assíntotas* $y = \pm\frac{cz}{b}$*. Para* $k = 0$ *temos que as intersecções são duas retas concorrentes com ponto comum* $(0, 0, 0)$ *e dadas por* $y = \pm\frac{cz}{b}$ (veja figura 54).

Figure 53: Intersecções do cone elíptico com x=k



Fonte: Aula 10 de Kátia Delgado [1]

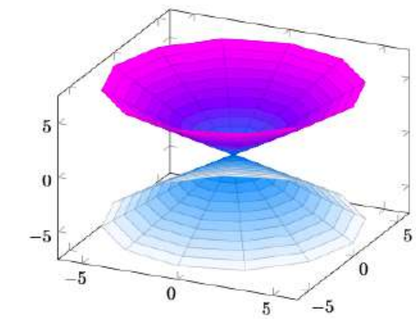
Figure 54: Intersecções do cone elíptico com x=0



Fonte: Aula 10 de Kátia Delgado [1]

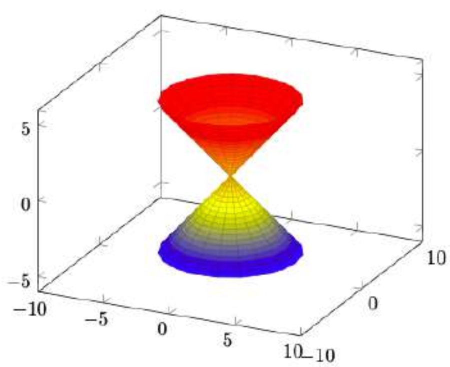
Esboços do cone elíptico são dados nas seguintes figuras:

Figure 55: Esboço do cone elíptico



Fonte: `https://zclab.github.io/tikz/`

Figure 56: Esboço do cone elíptico



Fonte: `https://gkorpal.github.io/posts/2020/11/graphs-and-diagrams-latex/`

6 Superfícies de revolução

Definição 6.1 (superfície de revolução) *Uma superfície de revolução é uma superfície que pode ser obtida pela rotação de uma curva plana, chamada* ***geratriz****, em torno de uma reta fixa, chamada* ***eixo de revolução****, no plano da referida curva. Cada ponto em cima da geratriz descreve uma circunferência em torno do eixo. Esta circunferência é chamada paralelo da* ***superfície*** *e cada posição da curva geratriz é chamada* ***seção meridiana****.*

6.1 Equação de superfícies de revolução

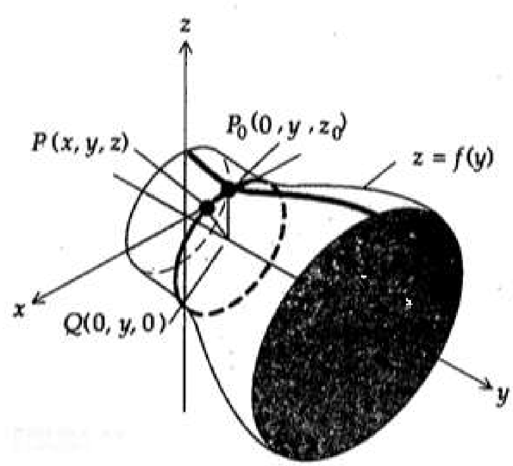
Vamos obter a equação da superfície $\mathcal{S}$ gerada pela rotação, em torno do eixo Oy, pela curva dada pela equação

$$z = f(y) \quad \text{ou} \quad f(y,z) = z - f(y)0. \tag{6.1}$$

Sejam $P \in \mathcal{S}$ e π um plano perpendicular ao eixo Oy passando por P. Seja $Q = (0, y, 0)$ o ponto de intersecção de π com o eixo Oy (veja figura 57). Seja $P_0 = (0, y, z_0)$ o ponto de intersecção de π com $z_0 = f(y)$. Como a seção transversal com π que passa por P é uma circunferência temos que $P \in \mathcal{S}$ se, e somente se

$$||\overrightarrow{QP}||^2 = ||\overrightarrow{QP_0}||^2. \tag{6.2}$$

Figure 57: Superfície de revolução



Fonte: Leithold [4, p.887]

Mas $||\overrightarrow{QP}||^2 = x^2 + z^2$ e $|\overrightarrow{QP_0}|| = z_0$. Assim, 6.2 implica que

$$x^2 + z^2 = z_0^2 \Rightarrow x^2 + z^2 = \Big(f(y)\Big)^2 \Rightarrow f(y) = \pm\sqrt{x^2 + z^2} \tag{6.3}$$

que é a equação da superfície $\mathcal{S}$.

Como as equações 6.3 e 6.1 são equivalentes, um outro modo de obtermos a equação de $\mathcal{S}$ é substituindo z por $\pm\sqrt{x^2 + z^2}$ na equação 6.1, ou seja,

$$\pm\sqrt{x^2 + z^2} = f(y).$$

Analogamente, podemos mostrar que $\mathcal{S}$ gerada pela rotação de uma curva contida em um dos planos coordenados em torno de um dos eixos contido neste plano tem uma das seguintes equações:

$x^2 + z^2 = \Big(f(y)\Big)^2$ em torno do eixo Oy;

$y^2 + z^2 = \Big(f(x)\Big)^2$ em torno do eixo Ox;

$x^2 + y^2 = \Big(f(z)\Big)^2$ em torno do eixo Oz

Em cada caso, as seções transversais com plano perpendiculares ao eixo de rotação são circunferências com centros no eixo. Em resumo,

Proposição 6.1 *Considere a superfície de revolução $\mathcal{S}$.*

(a) *Se $\mathcal{S}$ é obtida pela rotação, em torno do eixo Oy, de uma curva contida em um dos planos coordenados xz ou xy cuja equação é dada por $z = f(y)$ ou $x = f(y)$ então a equação de $\mathcal{S}$ é dada por $x^2 + z^2 = \Big(f(y)\Big)^2$.*

(b) *Se $\mathcal{S}$ é obtida pela rotação, em torno do eixo Ox, de uma curva contida em um dos planos coordenados yz ou yx cuja equação é dada por $z = f(x)$ ou $y = f(x)$ então a equação de $\mathcal{S}$ é dada por $y^2 + z^2 = \Big(f(x)\Big)^2$.*

(c) *Se $\mathcal{S}$ é obtida pela rotação, em torno do eixo Oz, de uma curva contida em um dos planos coordenados zx ou zy cuja equação é dada por $x = f(z)$ ou $y = f(z)$ então a equação de $\mathcal{S}$ é dada por $x^2 + y^2 = \Big(f(z)\Big)^2$.*

Exemplo 6.1 *Acha a equação da superfície de revolução $\mathcal{S}$ gerada pela rotação da parábola $y^2 = 4x$, em torno do eixo Ox, contida no plano xy.*

***Solução**: Pela proposição* 6.1(b) *obtemos*

$$y^2 + z^2 = \Big(f(x)\Big)^2 \Rightarrow y^2 + z^2 = (\pm\sqrt{4x})^2 \Rightarrow y^2 + z^2 = 4x,$$

que é a equação de um parabolóide com eixo em Ox.

A superfície do exemplo 6.1 é chamada de **parabolóide de revolução**. Se uma elipse ou uma hipérbole for girada em torno de um dos eixos, a superfície obtida é chamada de **elipsóide de revolução** ou chamada de **hiperbolóide de revolução**, respectivamente.

Exemplo 6.2 *Qual é a superfície de revolução $\mathcal{S}$ gerada pela rotação da elipse* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ *em torno do eixo Ox?*

Solução: ***Solução***: *Pela proposição* 6.1(b) *obtemos*

$$y^2 + z^2 = \Big(f(x)\Big)^2 = \left(\pm c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right)^2 \Rightarrow y^2 + z^2 = c^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Assim, tem-se $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{c^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, *que é a equação de um elipsóide e, logo,* $\mathcal{S}$ *é um elipsóide de revolução.* ■

7 Exercícios

1. Encontre a equação das seguintes superfícies:

   a) $\mathcal{S}$ é a esfera com centro $(-1, 2, 1)$ e passa pelo ponto $(6, -2, 3)$;

   b) $\mathcal{S}$ é gerada pela rotação da parábola $y = x^2$ em torno do eixo Oy;

   c) $\mathcal{S}$ é gerada pela rotação da elipse $4x^2 + y^2 = 16$ em torno do eixo Ox.

2. Diga o nome das seguintes superfícies:

   a) $3y^2 + 7z^2 = 6x$;

   b) $4y^2 - 25x^2 = 100$;

   c) $25x^2 = 4y^2 + z^2 + 100$.

3. Descreva e esboce as seguintes superfícies:

   a) $x - y^2 = 0$;

b) $z = \cos(x)$;

c) $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{z^2}{c25} = 9y$;

d) $x^2 = y^2 - z^2$.

4. Encontre e identifique as seções transversais da superfície quádrica $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$ e explique por que o gráfico parece com o gráfico do hiperbolóide de duas folhas.

5. Com auxílio de um programa de computador que gere superfícies tridimensionais, faça experimentos com diversos pontos de vista e plote um bom esboço das seguintes superfícies:

a) $-4x^2 - y^2 + z^2 = 1$;

b) $-4x^2 - y^2 + z^2 = 0$;

c) $x^2 - y^2 - z^2 = 0$;

d) $x^2 - 6x + 4y^2 - z = 0$.

References

[1] DELGADO, Kátia. **Geometria analítica**. Notas de aula. UFF, 2010. Disponíveis em https://www.professores.uff.br/katiafrensel/2017/08/30/disciplina-geometria-analitica/ Acesso em 19 abr. 2025.

[2] LIMA, Elon. **Álgebra linear**, Coleção Matemática Universitário. IMPA, 2014.

[3] GUIDORIZZI, Hamilton, **Um curso de Cálculo**. 6a edição. Editora LTC. Rio de janeiro, 2007

[4] LEITHOLD, Louis. **O cálculo com geometria analítica**. Vol 2, 3a edição. Tradução Cyro Carvalho Paarra. Editora Harbra. São Paulo, 1994..

[5] SANTOS, Reginaldo. **Superfícies e Curvas no Espaço**. Notas de aula. UFMG, 2001. Disponível https://regijs.github.io/gaalt/quadricas.pdf Acesso em 17 abr. 2025.

[6] SOUZA, Sérgio **Vetores e geometria analítica: espaço tridimensional**. Notas de aula. Disponível em https://mat.ufpb.br/sergio/provas/vetorial/livros/VET-ebook.pdf Acesso em 11 abr. 2025

[7] STEWART, James, **Cálculo: volume 2**. 6a edição. Tradução Antônio Moretti e Antônio Martins. Cengage Leraning. São Paulo, 2010.

[8] MELO, Severino. **Espaço euclidiano n-dimensional**. Notas de aula. IME-USP. 2017. Disponível em https://www.ime.usp.br/~toscano/disc/AntonRorresCap4.pdf Acesso em 14 abr. 2025.