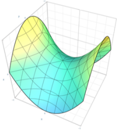


Cálculo computacional II

Unidade 2: Limite

Cristina Vaz

C2-aula 02/6/25

UFPA

cvaz@ufpa.br

Sumário

1 Operações com funções

2 Limite

Dadas as funções $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $g : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tem-se:

Adição: $h(x, y) = f(x, y) + g(x, y)$;

Multiplicação: $h(x, y) = f(x, y).g(x, y)$;

Quociente: $h(x, y) = \dfrac{f(x, y)}{g(x, y)}$ para $g(x, y) \neq 0$

Dadas as funções $g : D_g \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ com $Im_f \subset D_g$.

Então, a função composta $g \circ f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é dada por

$$(g \circ f)(x, y) = g(f(x, y))$$

Exemplo (1)

Para $g(t) = \ln(t)$ *e* $f(x, y) = x^2 + y$, *determine* $h = g \circ f$ *e* D_h

Exemplo (1)

Para $g(t) = \ln(t)$ *e* $f(x,y) = x^2 + y$, *determine* $h = g \circ f$ *e* D_h

Solução:

$h(x,y) = (g \circ f)(x,y) = g(f(x,y)) \Rightarrow$

$h(x,y) = g(x^2 + y) = \ln(x^2 + y)$. Logo,

Logo, $D_h = \{(x,y);\, x^2 + y > 0\}$

Podemos estender a definição de composta para o caso de funções de n variáveis. De fato,

Dadas as funções $g : D_g \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f : D_f \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ com $Im_f \subset D_g$.

Então, a função composta $g \circ f : D_f \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é dada por

$$(g \circ f)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(f(x_1, x_2, \ldots, x_n))$$

Definição

A função $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ polinomial é dada por

$$\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a_{m,n} x^m y^n$$

com grau $m+n$ e o expoente de maior grau diferente de zero.

Exemplo: $f(x,y) = 6x^3y^2 - 3xy^3 + 7x^2y - 2x^2 + y - 4$ é uma função polinomial de grau 5

Operações com funções

Limite

Cálculo 1 (Animação)

Operações com funções

Limite

Conceito de limite é a ideia fundamental do Cálculo!!!

Operações com funções

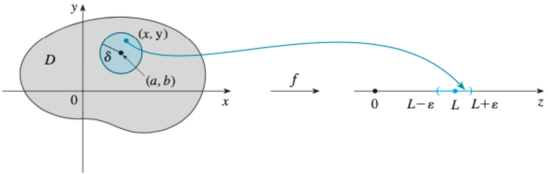
Limite

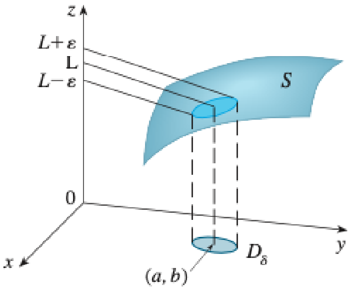
Ideias: Dada uma função $f(x,y)$, um ponto (a,b) e um número L.

Queremos determinar se $f(x,y)$ aproxima-se de L para para pontos (x,y) próximos de (x_0,y_0) (vizinhança de (a,b))

Pergunta 1: O que significa "uma vizinhança de (a,b) para $(x,y) \subset D_f \subset \mathbb{R}^2$?

Pergunta 2: O que significa "$f(x,y)$ aproxima-se de L" para$f(x,y), L \in \mathbb{R}$?


y
(x, y)
D
δ
(a, b)
0
x
f
0
L−ε
L
L+ε
z


z
L+ε
L
L−ε
S
0
x
y
D_δ
(a, b)

Resposta da Pergunta 1:

Para $\delta > 0$, $P_0 = (a, b)$ e $P = (x, y)$ tem-se

$$d(P, P_0) \leq \delta$$

Ou seja,

$$\|P - P_0\| \leq \delta \Rightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \leq \delta$$

Resposta da Pergunta 2:

Para $\epsilon > 0$, $z = f(x, y)$ e L tem-se

$$d(z, L) \leq \epsilon$$

Ou seja,

$$|z - L| \leq \epsilon \Rightarrow |f(x, y) - L| \leq \epsilon$$

Assim,

$f(x, y)$ aproxima-se de L significa que:

dado $\epsilon > 0$ temos que $|f(x, y) - L| \leq \epsilon$

para pontos (x, y) próximos de (a, b) (vizinhança de (a, b)) significa que:

dado $\delta > 0$ temos que $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \leq \delta$

Definição

Dados $L \in \mathbb{R}$, (a,b) *e uma função* $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* D_f *contém todos os pontos* $(x,y) \in D_f$ *próximos de* (a,b).

Dizemos que L *é o limite de* f *quando* (x,y) *aproxima-se de* (a,b) *se para todo* $\epsilon > 0$, *existe um correspondente* $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ *tal que:*

$$\text{se } \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \leq \delta \text{ então } |f(x,y) - L| \leq \epsilon$$

Operações com funções

Limite

Notações:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

$$f(x,y) \to L \quad \text{quando} \quad (x,y) \to (a,b)$$

Operações com funções

Limite

Observação 1: A definição não exige que f esteja definida em (a, b), pois só refere-se apenas aos pontos próximo de (a, b). Ou seja, é uma definição local.

Observação 2: A definição refere-se somente à distância entre (x, y) e (a, b) e não se refere à direção de aproximação. Portanto, se o limite existe, $f(x, y)$ deve se aproximar de L, independentemente do modo como (x, y) se aproxima de (a, b).

Operações com funções

Limite

Pela **Observação 2** temos que se acharmos dois caminhos diferentes de aproximação ao longo dos quais $f(x, y)$ tenha limites diferentes isso implica que

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$$

não existe

Operações com funções

Limite

Teorema (1)

Se $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L_1$ *ao longo do caminho* $\mathcal{C}_1$ *e* $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L_2$ *ao longo do caminho* $\mathcal{C}_2$ *com* $\mathcal{C}_1 \neq \mathcal{C}_2$ *então* $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ *não existe.*

Operações com funções

Limite

Exemplo (2)

Mostre que o limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ *não existe.*

Solução: Como trata-se da vizinhança da origem vamos considerar o caminho $\mathcal{C}_1$ dado pelo eixo x, ou seja, $y = 0$. Então,

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{x^2}{x^2} = 1$$

E $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = 1.$

Agora, vamos considerar o caminho $\mathcal{C}_2$ dado pelo eixo y, ou seja, $x = 0$. Então,

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{-y^2}{y^2} = -1$$

E $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = -1.$

Assim pelo teorema 1

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

não existe.

Operações com funções

Limite

Exemplo (3)

O limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ *existe?*

Operações com funções

Limite

Solução: Vamos considerar os caminhos $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ do exemplo anterior. Assim, para $y = 0$ temos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{0}{x^2} = 0.$$

E para para $x = 0$ temos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{0}{y^2} = 0.$$

Pelo teorema 1, nada podemos afirmar!

Agora, considere o caminho $\mathcal{C}_3$ dado pela reta $y = x$. Assim,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

Portanto, obtemos dois caminhos $\mathcal{C}_1$ ou $\mathcal{C}_2$ e $\mathcal{C}_3$ para os quais os limites são diferentes. Logo, pelo teorema 1

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

não existe.

Operações com funções

Limite

Exemplo (4)

O limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ *existe?*

Operações com funções

Limite

Solução: Vamos considera a família de retas verticais $\mathcal{C}_1$ dadas por $y = mx$ (em vez de testar uma a uma). Assim,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{m^2x^3}{x^2+m^4x^4} \Rightarrow$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{m^2x}{1+m^4x^2} = \frac{0}{1} = 0$$

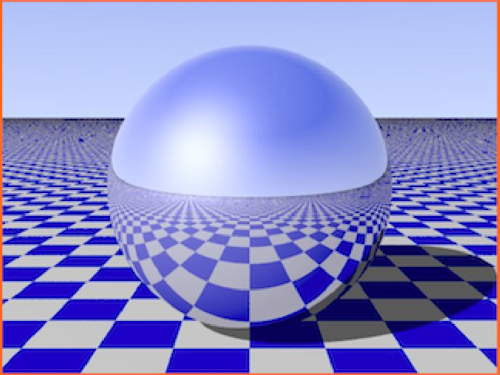
Agora, considere o caminho $\mathcal{C}_2$ dado pela parábola $y = x^2$. Assim,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^4}{2y^4} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Logo, pelo teorema 1

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

não existe.



OBRIGADA