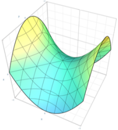


Unidade 4: Gradiente e Derivada direcional

Cristina Vaz

C2-aula 25/6/25

UFPA

cvaz@ufpa.br

Sumário

Derivada direcional

Projeto 1: Formação das duplas e orientações

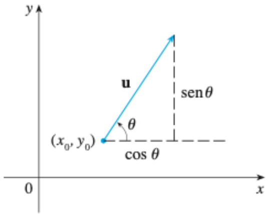
Ideia: Generalizar o conceito de derivada parcial para poder calcular a taxa de variação de uma função em qualquer direção e sentido. Ou seja,

Dado um ponto $P = (x_0, y_0)$ e um vetor $\vec{u}$ unitário, como calcular $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}$?

Derivada direcional

Projeto 1: Formação das duplas e orientações

Lembrete: $\vec{u}$ unitário $\Leftrightarrow \|\vec{u}\| = 1$



$$\vec{u} = \cos\theta\ \mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\ \mathbf{j} \Leftrightarrow \|\vec{u}\| = \sqrt{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta} = 1$$

Definição

Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e o vetor unitário $\vec{u} = \cos\theta\ \mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\ \mathbf{j}$. A derivada direcional de f no ponto (x_0, y_0) e na direção de $\vec{u}$ é definida por

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h\cos\theta, y_0 + h\operatorname{sen}\theta) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Derivada direcional

Projeto 1: Formação das duplas e orientações

Se $\vec{u} = (a, b)$ tal que $\|\vec{u}\| = 1$, podemos escrever a definição anterior do seguinte modo:

Definição

Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e o vetor unitário $\vec{u} = (a, b)$. A derivada direcional de f no ponto (x_0, y_0) e na direção de $\vec{u}$ é definida por

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Note que:

$x_0 + ha$ (ou $x_0 + h\cos\theta$) é variação da componente x_0 na direção da componente a (ou $\cos\theta$) do vetor $\vec{u}$

$y_0 + hb$ (ou $x_0 + h\operatorname{sen}\theta$) é variação da componente y_0 na direção da componente b (ou $\operatorname{sen}\theta$) do vetor $\vec{u}$

Note que:

- se $\vec{u} = \mathbf{i} = (1,0)$ (ou $\cos\theta = 1$ e $\operatorname{sen}\theta = 0$), temos que

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{i}} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

- se $\vec{u} = \mathbf{j} = (0,1)$ (ou $\cos\theta = 0$ e $\operatorname{sen}\theta = 1$), temos que

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{j}} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Conclusão: As derivadas parciais são casos particulares de derivadas direcionais.

$\dfrac{\partial f}{\partial x}$: derivada direcional na direção do vetor unitário **i** (eixo x).

$\dfrac{\partial f}{\partial y}$: derivada direcional na direção do vetor unitário **j** (eixo y).

Sabemos que não é trivial calcular limites para funções do $\mathbb{R}^2$. Por esta razão, vamos calcular derivadas direcionais aplicando o seguinte teorema:

Teorema (1)

Se $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é diferenciável em D_f então f tem derivada direcional na direção de qualquer vetor unitário $\vec{u} = \cos\theta\ \boldsymbol{i} + \mathrm{sen}\,\theta\ \boldsymbol{j}$ e a derivada direcional é dada por

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Se $\vec{u} = (a, b)$ tal que $\|\vec{u}\| = 1$, podemos escrever o Teorema (1) do seguinte modo:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = \frac{\partial f}{\partial x} a + \frac{\partial f}{\partial y} b$$

Exemplo

Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}$ *para* $f(x,y) = x^3 - 3xy + 4y^2$ *e* $\vec{u} = \cos\theta\ \boldsymbol{i} + sen\,\theta\ \boldsymbol{j}$ *com* $\theta = \pi/6$

Exemplo

Calcule $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}$ *para* $f(x,y) = x^3 - 3xy + 4y^2$ *e* $\vec{u} = \cos\theta\ \boldsymbol{i} + \text{sen}\,\theta\ \boldsymbol{j}$ *com* $\theta = \pi/6$

Solução: $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\text{sen}\,\theta$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos(\pi/6) + \frac{\partial f}{\partial y}\text{sen}\,(\pi/6)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -3x + 8y$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = (3x^2 - 3y)\frac{\sqrt{3}}{2} + (-3x + 8y)\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2 - \frac{3x}{2} + 4y - \frac{3\sqrt{3}}{2}y$$

Note que podemos re-escreve a expressão da derivada direcional usando o produto escalar do seguinte modo:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = (f_x, f_y).(a, b) = (f_x, f_y).\vec{u}$$

O vetor (f_x, f_y) é chamado **vetor gradiente** e é representado por **grad** f ou ∇f (letra grega nabla). Assim

Definição

Seja $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em D_f. O gradiente de f é o vetor dado por

$$\nabla f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y)) = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}$$

Exemplo

Calcule o vetor gradiente da função $f(x, y) = sen\,(x) + e^{xy}$.

Derivada direcional

Projeto 1: Formação das duplas e orientações

Exemplo

Calcule o vetor gradiente da função $f(x,y) = sen\,(x) + e^{xy}$.

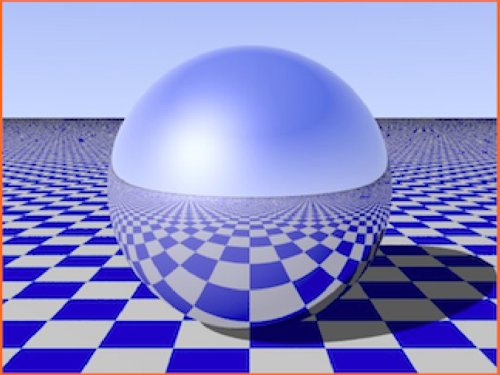
Solução: $\nabla f(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(x) + ye^{xy}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy}$$

$$\nabla f(x,y) = (cos\,(x) + ye^{xy})\mathbf{i} + xe^{xy}\mathbf{j}$$

Projeto 1: Formação das duplas e orientações



OBRIGADA