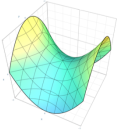


Unidade 1: Superficies quadráticas

Cristina Vaz

C2-aula 21/5/25

UFPA

cvaz@ufpa.br

Sumário

Definição (Elipsoide)

Sejam $C = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ *e* $a, b, c \in \mathbb{R}^*$. *O lugar geométrico dos pontos* $P = (x, y, z)$ *em* $\mathbb{R}^3$ *que satisfaz a equação:*

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$$

é chamado de ***Elipsóide*** *com centro em* $C = (x_0, y_0, z_0)$.

Exemplo

Esboce a representação geométrica do elipsoide de centro $C = (0, 0, 0)$.

Para esboçar uma representação geométrica de qualquer superfícies no espaço $\mathbb{R}^3$ é útil determinar e desenhar a intersecção da superfície com planos paralelos aos planos coordenados. Essas curvas intersecções são denominadas **secções transversais (ou cortes)** da superfície.

A ideia de usar as secções transversais para desenhar a superfície é empregada em programas de computadores que fazem gráficos tridimensionais.

Na maioria desses programas, as secções transversais nos planos verticais $x = k$ e $y = k$ são desenhadas para valores de k igualmente espaçados e partes da superfícies são eliminadas utilizando-se a técnica de remover linhas escondidas

Solução:

passo 1: Escrever a equação do Elipsoide

resp: Para $C = (0, 0, 0)$ temos que a equação é dada por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

passo 2: Reconhecer e esboçar as seções transversais do elipsoide.

passo 2.1: Reconhecer e esboçar as seções transversais do elipsoide com os planos $z = k$ (intersecção da superfície com planos paralelos ao plano xy).

(i) Fazendo k=0, ou seja, $z = 0$ na equação do elipsoide, obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Assim, a seção transversal do elipsoide com plano xy (ou $z = 0$) é uma elipse

(ii) Fazendo $z = k$ na equação do elipsoide, obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2}$$

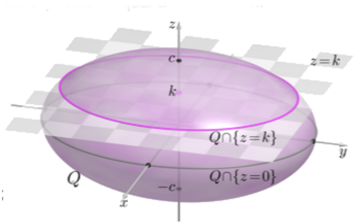
Assim, precisamos analisar os seguintes casos:

i) $\dfrac{k^2}{c^2} < 1 \Rightarrow |k| < c$;

ii) $\dfrac{k^2}{c^2} = 1 \Rightarrow |k| = c$;

iii) $\dfrac{k^2}{c^2} > 1 \Rightarrow |k| > c$.

$$\mathbf{i)}\ \frac{k^2}{c^2} < 1 \Rightarrow |k| < c \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2} > 0 \Rightarrow \text{são elipses}$$



ii) $\dfrac{k^2}{c^2} = 1 \Rightarrow |k| = c \Rightarrow \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0 \Rightarrow$ o ponto $(0, 0, 0)$

iii) $\dfrac{k^2}{c^2} > 1 \Rightarrow |k| > c \Rightarrow \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 - \dfrac{k^2}{c^2} < 0 \Rightarrow$ vazio

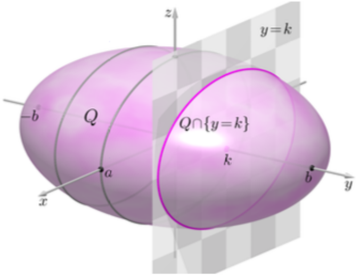
passo 2.2: Reconhecer e esboçar as seções transversais do elipsoide com os planos $y = k$ (intersecção da superfície com planos paralelos ao plano xz).

passo 2.2: Reconhecer e esboçar as seções transversais do elipsoide com os planos $y = k$ (intersecção da superfície com planos paralelos ao plano xz).

resp: A discussão é análoga ao passo 2.1. De fato, equação do elipsoide torna-se

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{b^2}$$

$$\textbf{i)}\ \frac{k^2}{b^2} < 1 \Rightarrow |k| < b \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{b^2} > 0 \Rightarrow \text{são elipses}$$



Superfícies Quadráticas
Elipsoide
Paraboloide
Hiperbolóide
Cone elíptico

ii) $\dfrac{k^2}{b^2} = 1 \Rightarrow |k| = b \Rightarrow \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 0 \Rightarrow$ o ponto $(0, 0, 0)$

iii) $\dfrac{k^2}{b^2} > 1 \Rightarrow |k| > b \Rightarrow \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 - \dfrac{k^2}{b^2} < 0 \Rightarrow$ vazio

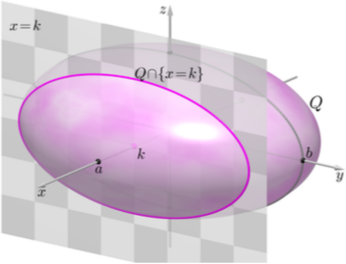
passo 2.3: Reconhecer e esboçar as seções transversais do elipsoide com os planos $x = k$ (intersecção da superfície com planos paralelos ao plano yz).

passo 2.3: Reconhecer e esboçar as seções transversais do elipsoide com os planos $x = k$ (intersecção da superfície com planos paralelos ao plano yz).

resp: A discussão é análoga ao passo 2.1. De fato, equação do elipsoide torna-se

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{a^2}$$

$$\textbf{i)}\ \frac{k^2}{a^2} < 1 \Rightarrow |k| < a \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{a^2} > 0 \Rightarrow \text{são elipses}$$

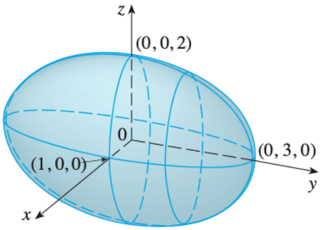


Elipsoide

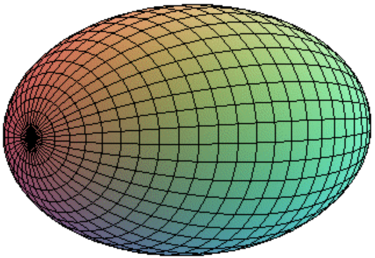
$$\textbf{ii)}\ \frac{k^2}{a^2} = 1 \Rightarrow |k| = a \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \Rightarrow \text{o ponto } (0,0,0)$$

$$\textbf{iii)}\ \frac{k^2}{a^2} > 1 \Rightarrow |k| > a \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{a^2} < 0 \Rightarrow \text{vazio}$$

Elipsoide



Elipsoide



Definição (Parabolóide elíptico)

Sejam $C = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ *e* $a, b, c \in \mathbb{R}^*$*. O lugar geométrico dos pontos* $P = (x, y, z)$ *em* $\mathbb{R}^3$ *que satisfaz uma das equações:*

$$\begin{aligned} \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} &= b(y-y_0) \\ \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} &= a(x-x_0) \\ \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} &= c(z-z_0) \end{aligned}$$

é chamado de ***Parabolóide elíptico*** *com centro em* $C = (x_0, y_0, z_0)$*.*

Para $C = (x_0, y_0, z_0) = (0,0,0)$ as equações do Paraboloide são dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} &= by \\ \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= ax \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= cz \end{aligned}$$

e são chamadas "formas canônicas do parabolóide elíptico".

Exemplo

Esboce a representação geométrica do paraboloide elíptico

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz$$

com $c > 0$.

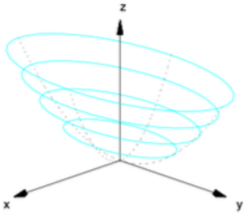
passo 2: Reconhecer e esboçar as seções transversais do paraboloide elíptico.

passo 2.1: Reconhecer e esboçar as seções transversais do paraboloide elíptico com os planos $z = k$ (intersecção da superfície com planos paralelos ao plano xy).

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = c\,k.$$

Assim,

- se $k > 0$ são elipses de centro $(0, 0, k)$;
- se $k = 0$ é o ponto $(0, 0, 0)$;
- se $k < 0$ é o conjunto vazio.

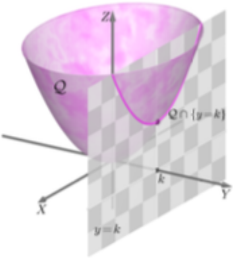

z
x
y

passo 2.2: Reconhecer e esboçar as seções transversais do paraboloide elíptico com os planos $y = k$ (intersecção da superfície com planos paralelos ao plano xz).

passo 2.2: Reconhecer e esboçar as seções transversais do paraboloide elíptico com os planos $y = k$ (intersecção da superfície com planos paralelos ao plano xz).

$$\frac{x^2}{a^2} = c\,z - \frac{k^2}{b^2} \Longrightarrow x^2 = a^2 c\left(z - \frac{k^2}{cb^2}\right),$$

que são parábolas com vértices $V_k = \left(0, k, \dfrac{k^2}{cb^2}\right)$ e retas-focais paralelas ao eixo Oz, com concavidade para cima.



Z
Q
Q ∩ {y = k}
k
X
Y
y = k

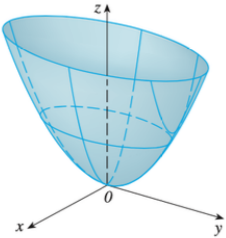
passo 2.3: Reconhecer e esboçar as seções transversais do paraboloide elíptico com os planos $x = k$ (intersecção da superfície com planos paralelos ao plano yz).

passo 2.3: Reconhecer e esboçar as seções transversais do paraboloide elíptico com os planos $x = k$ (intersecção da superfície com planos paralelos ao plano yz).

$$\frac{y^2}{b^2} = c\,z - \frac{k^2}{a^2} \Longrightarrow y^2 = b^2 c\left(z - \frac{k^2}{ca^2}\right),$$

que são parábolas com vértices $V_k = \left(0, k, \dfrac{k^2}{ca^2}\right)$ e retas-focais paralelas ao eixo Oz, com concavidade para cima.

Paraboloide



Definição (Parabolóide hiperbólico)

Sejam $C = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ e $a, b, c \in \mathbb{R}^*$. O lugar geométrico dos pontos $P = (x, y, z)$ em $\mathbb{R}^3$ que satisfaz uma das equações:

$$
\begin{aligned}
\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(z-z_0)^2}{c^2} &= b(y-y_0) \\
\frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(z-z_0)^2}{c^2} &= a(x-x_0) \\
\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} &= c(z-z_0)
\end{aligned}
$$

é chamado de ***Parabolóide hiperbólico*** *com centro em $C = (x_0, y_0, z_0)$.*

Para $C = (x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$ as equações do parabolóide hiperbólico tornam-se

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} &= by \\ \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} &= ax \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= cz \end{aligned}$$

e são chamadas "formas canônicas do parabolóide hiperbólico".

Exemplo

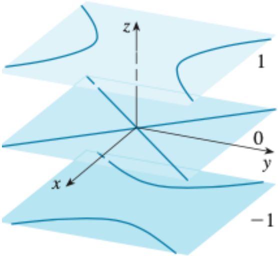
Esboce a representação geométrica do paraboloide hiperbólico

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz$$

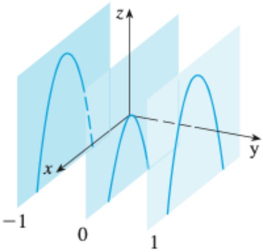
com com a e b positivos.

Solução: Exemplo 5.4 página 39-40 das Notas de aula

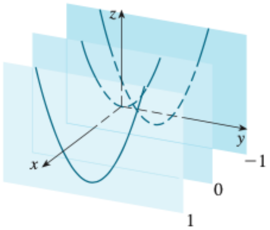
Seções transversais com os planos $z = k$: são hipérboles para $k \neq 0$ e uma par de retas para $k = 0$



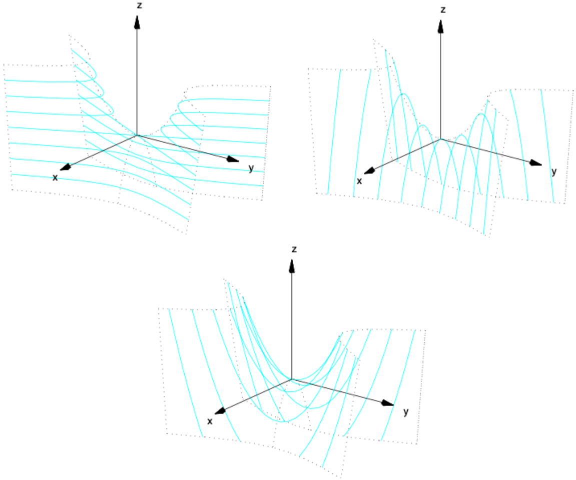
Seções transversais com os planos $y = k$: são parábolas com concavidade para cima se $c > 0$ e concavidade para baixo se $c < 0$



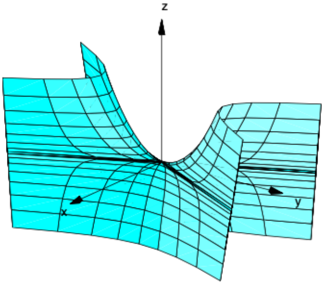
Seções transversais com os planos $x = k$: são parábolas com concavidade para cima se $c > 0$ e concavidade para baixo se $c < 0$



Paraboloide



Esboço do paraboloide hiperbólico para $c < 0$



Definição (Hiperbolóide de uma Folha)

Sejam $C = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ e $a, b, c \in \mathbb{R}^*$. O lugar geométrico dos pontos $P = (x, y, z)$ em $\mathbb{R}^3$ que satisfaz uma das equações:

$$
\begin{aligned}
-\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} &= 1 \\
\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} &= 1 \\
\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(z-z_0)^2}{c^2} &= 1
\end{aligned}
$$

é chamado de ***Hiperbolóide de uma folha*** *com centro em $C = (x_0, y_0, z_0)$.*

Para $C = (x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$ as equações do Hiperbolóide de uma folha tornam-se

$$\begin{aligned} -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 1 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 1 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} &= 1 \end{aligned}$$

e são chamadas “formas canônicas do hiperbolóide de uma folha”.

Exemplo

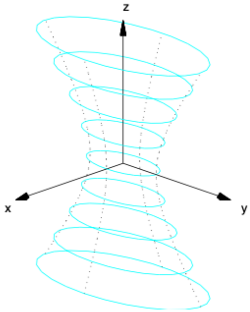
Esboce a representação geométrica do hiperbolóide de uma folha

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

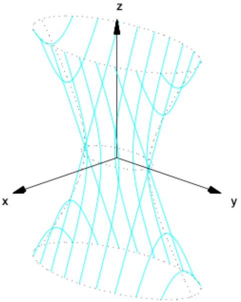
Solução: Exemplo 5.5 página 43-44 das Notas de aula

Hiperbolóide de uma Folha

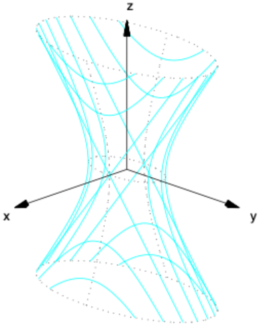
Seções transversais com os planos $z = k$: são elipses que aumentam a medida que a $|k|$ cresce



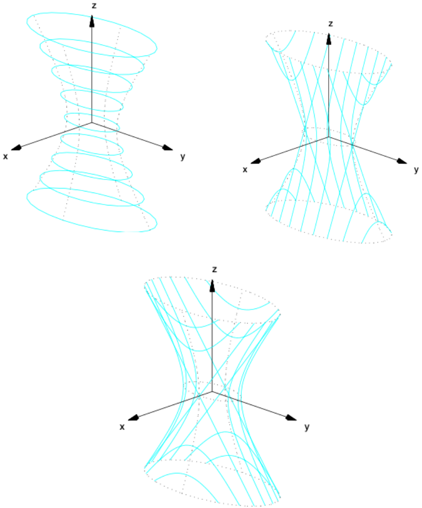
Seções transversais com os planos $y = k$: são hipérboles se $|k| \neq |b|$ e retas concorrentes se $|k| = |b|$



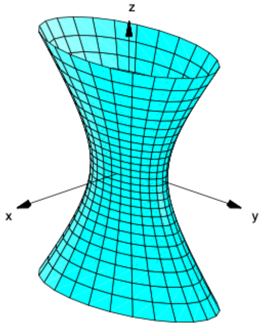
Seções transversais com os planos $x = k$: são hipérboles se $|k| \neq |a|$ e retas concorrentes se $|k| = |a|$



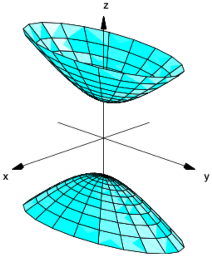
Hiperbolóide de uma Folha



Esboço do Hiperbolóide de uma Folha



Esboçar do Hiperbolóide de duas Folhas



$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Definição (Cone elíptico)

Sejam $C = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ e $a, b, c \in \mathbb{R}^*$. O lugar geométrico dos pontos $P = (x, y, z)$ em $\mathbb{R}^3$ que satisfaz uma das equações:

$$
\begin{aligned}
-\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} &= 0 \\
\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} &= 0 \\
\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(z-z_0)^2}{c^2} &= 0
\end{aligned}
$$

*é chamado de **Cone elíptico** com centro em $C = (x_0, y_0, z_0)$.*

Para $C = (x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$ as equações do cone elíptico tornam-se

$$\begin{aligned} -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 0 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} &= 0 \end{aligned}$$

e são chamadas "formas canônicas do cone elíptico".

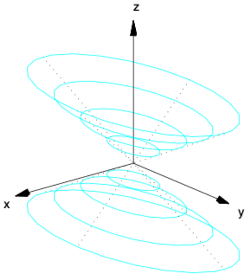
Exemplo

Esboce a representação geométrica do cone elíptico

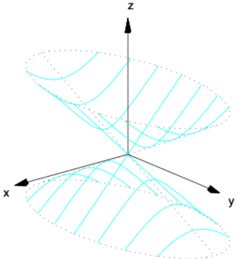
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Solução: Exemplo 5.7 página 55-58 das Notas de aula

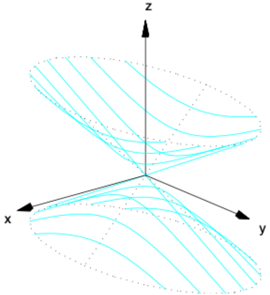
Seções transversais com os planos $z = k$: são elipses para $k \neq 0$ e retas se $y = 0$ ou $x = 0$



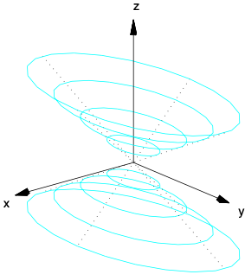
Seções transversais com os planos $y = k$: são hipérboles se para $k \neq 0$

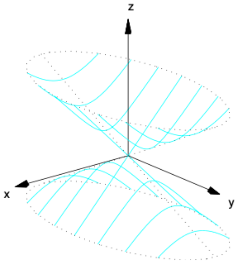


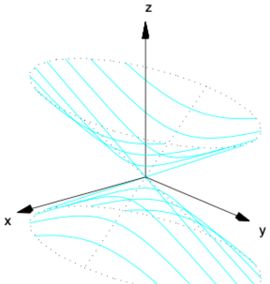
Seções transversais com os planos $x = k$: são hipérboles se para $k \neq 0$



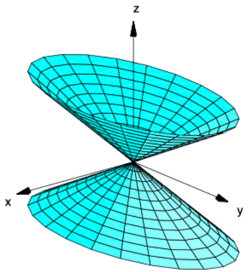
Cone elíptico

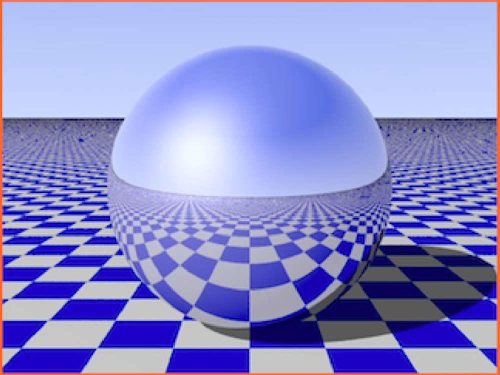






Esboço do Cone elíptico





OBRIGADA