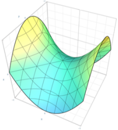


Cálculo computacional II

# Unidade 1: Cilindro e superfícies quadráticas

Cristina Vaz

C2-aula 19/5/25

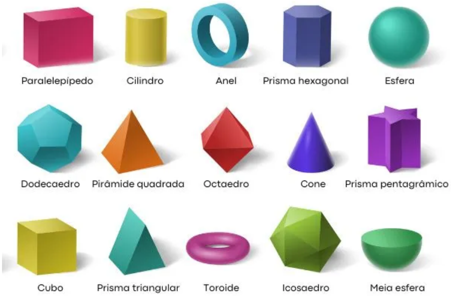
UFPA

cvaz@ufpa.br

# Sumário

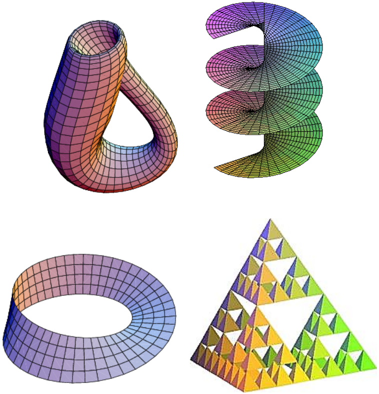
# Superfícies no espaço





# Superfícies no espaço





Quais superfícies estudamos no Cálculo 2?

Quais superfícies estudamos no Cálculo 2?

**resp:** As mais simples:

Esfera, Cilindros, Superfícies quádricas e algumas superfícies de revolução

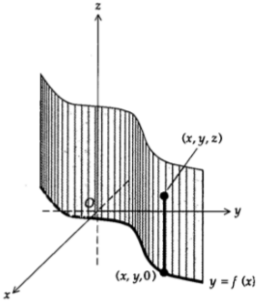
### Definição (superfície cilíndrica)

*O lugar geométrico dos pontos do $\mathbb{R}^3$ gerado por uma reta $L$ que se movem ao longo de uma curva $\mathcal{C}$ dada de tal modo que a reta $L$ se mantém paralela a uma reta fixa que não pertence ao plano que contém a curva $\mathcal{C}$ é chamado de* ***cilindro*** *ou de* ***superfície cilíndrica****. A reta $L$ é chamada de* ***geratriz*** *e a curva $\mathcal{C}$* ***diretriz*** *do cilindro.*

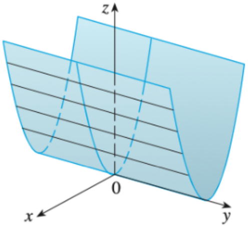
Aqui, chamaremos as posições da reta $L$ ao longo de $\mathcal{C}$ também de geratriz. Portanto, podemos pensar no cilindro como um conjunto de geratrizes.

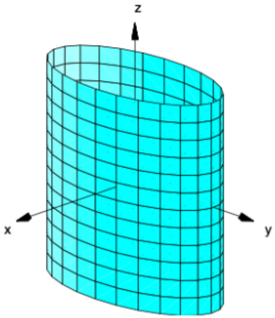
# Cilindro



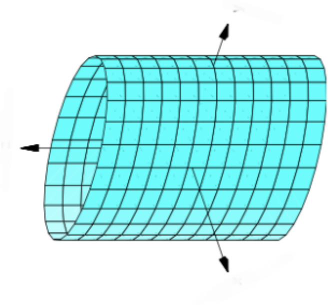


# Cilindro




z
x
y

# Cilindro



**Objetivo:** Obter a equação do cilindro (ou superfícies cilíndricas)

### Teorema (Equação do cilindro)

*No espaço tridimensional, a equação do cilindro é uma equação descrita por duas das três variáveis $x$, $y$ e $z$.*
*A diretriz do cilindro é a curva no plano associado as variáveis presentes na equação e a geratriz (reta $L$) é paralela ao eixo da variável ausente.*

Ideias: No $\mathbb{R}^3$, a equação do cilindro só tem suas variáveis. Quais? As variáveis da curva geratriz.

## Exemplo

*Obter a equação e esboçar os seguintes cilindros:*

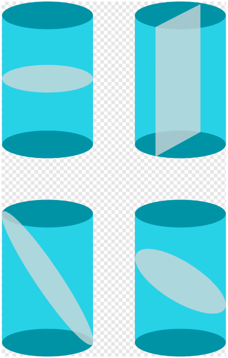
***Cilindro parabólico:*** *curva diretriz é a parábola* $z = x^2$ *no plano* $zx$ *e com geratriz paralela ao eixo* $Oy$*.*

***Cilindro elíptico:*** *curva diretriz é a elipse* $9x^2+16y^2 = 144$ *no plano* $xy$ *e com geratriz paralela ao eixo* $Oz$*.*

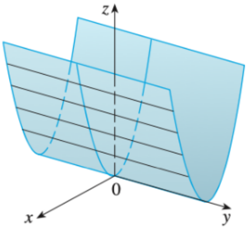
***Cilindro hiperbólico:*** *curva diretriz é a hipérbole* $25x^2 - 4y^2 = 100$ *no plano* $xy$ *e com geratriz paralela ao eixo* $Oz$*.*

# Cilindro

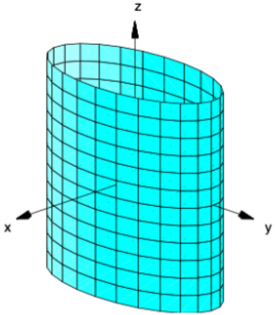




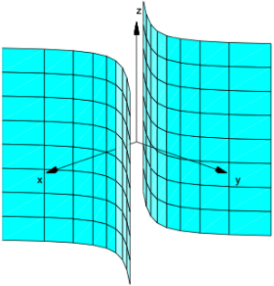
**Solução:** Cilindro parabólico: $z = x^2$



**Solução:** Cilindro elíptico: $9x^2 + 16y^2 = 144$



**Solução**: Cilindro hiperbólico: $25x^2 - 4y^2 = 100$



Superfícies no espaço
Cilindros
Superfícies Quadráticas

**Exemplo**

*Faça um esboço da representação geométrica da superfície* $y = \ln z$.

**Solução:**

**passo 1**: reconhecer qual é a superfície.

**Solução:**

**passo 1**: reconhecer qual é a superfície.

**resp**: É um cilindro com diretriz dada por pela curva logarítmica $y = \ln z$ (no plano yz) e geratriz paralela ao eixo x.

**Solução:**

**passo 1**: reconhecer qual é a superfície.

**resp**: É um cilindro com diretriz dada por pela curva logarítmica $y = \ln z$ (no plano yz) e geratriz paralela ao eixo x.

**passo 2**: No caso do cilindro, esboçar (desenhar) a curva diretriz $y = \ln z$ (curva logarítmica) no plano yz.

Superfícies no espaço
Cilindros
Superfícies Quadráticas

**Solução:**

**passo 1**: reconhecer qual é a superfície.

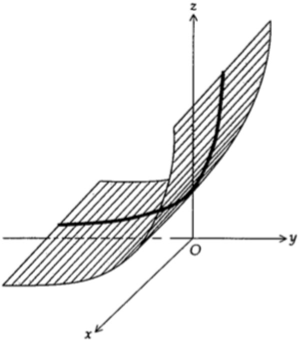
**resp**: É um cilindro com diretriz dada por pela curva logarítmica $y = \ln z$ (no plano yz) e geratriz paralela ao eixo x.

**passo 2**: No caso do cilindro, esboçar (desenhar) a curva diretriz $y = \ln z$ (curva logarítmica) no plano yz.

**passo 3**: No caso do cilindro, esboçar (desenhar) as retas geratrizes, a partir da curva logarítmica, paralelas ao eixo Ox.

Superfícies no espaço
Cilindros
Superfícies Quadráticas

Solução:



## Definição

*Sejam $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ e $J$ constantes. O lugar geométrico dos pontos $P = (x, y, z)$ no espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$ que satisfazem a seguinte equação do segundo grau em três variáveis:*

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

*é chamado de **superfície quádrica** $\mathcal{Q}$ ou simplesmente de **quádrica** $\mathcal{Q}$ .*

Note que, pelo menos um dos coeficientes A, B, C, D, E ou F deve ser não nulo, caso contrário a equação torna-se uma equação linear e logo representaria um plano no $\mathbb{R}^3$.

A equação das superfícies quadráticas pode ser simplificada através de rotações e translações de modo que podemos escrevê-la por uma das seguintes formas (chamadas formas canônicas):

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + J = 0$$

ou

$$Ax^2 + By^2 + Iz = 0$$

## Exemplo

*Exemplos de superfícies quádricas e suas equações:*

**Esfera:** Temos que a equação da esfera de centro $(a, b, c)$ e raio $r$ é dada por :

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2 \Longrightarrow$:

$x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+a^2+b^2+c^2-r^2=0.$

Assim, $A=B=C=1, D=E=F=0, G=2a, H=2b, I=2c$ e $J=a^2+b^2+c^2-r^2$.

**Cilindro circular reto:** Sabemos que a equação do cilindro circular reto com geratriz paralela ao eixo Oz é dada por

$$x^2 + y^2 = 1$$

Assim,

$A = B = 1$, $C = D = E = F = G = H = I = 0$ e $J = -1$.

**Cilindro elíptico:** Considere o cilindro elíptico com geratriz paralela ao eixo Oz e equação dada por $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Assim,

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

Então,

$A = b^2$, $B = a^2$, $C = D = E = F = G = H = I = 0$ e $J = -a^2b^2$.

**Cilindro hiperbólico:** Considere o cilindro hiperbólico com geratriz paralela ao eixo Oz e equação dada por $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Assim,

$$b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

Então,

$A = b^2$, $B = -a^2$, $C = D = E = F = G = H = I = 0$ e $J = -a^2b^2$.

## Definição (Elipsoide)

*Sejam* $C = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ *e* $a, b, c \in \mathbb{R}^*$*. O lugar geométrico dos pontos* $P = (x, y, z)$ *em* $\mathbb{R}^3$ *que satisfaz a equação:*

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$$

*é chamado de* ***Elipsóide*** *com centro em* $C = (x_0, y_0, z_0)$*.*

**Exemplo**

*Esboce a representação geométrica do elipsoide de centro* $C = (0, 0, 0)$.

Para esboçar uma representação geométrica de qualquer superfícies no espaço $\mathbb{R}^3$ é útil determinar e desenhar a intersecção da superfície com planos paralelos aos planos coordenados. Essas curvas intersecções são denominadas **secções transversais (ou cortes)** da superfície.

A ideia de usar as secções transversais para desenhar a superfície é empregada em programas de computadores que fazem gráficos tridimensionais.

Na maioria desses programas, as secções transversais nos planos verticais $x = k$ e $y = k$ são desenhadas para valores de k igualmente espaçados e partes da superfícies são eliminadas utilizando-se a técnica de remover linhas escondidas

**Solução:**

**passo 1**: Escrever a equação do Elipsoide

**resp**: Para $C = (0,0,0)$ temos que a equação é dada por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

**passo 2**: Reconhecer e esboçar as seções transversais do elipsoide.

**passo 2.1**: Reconhecer e esboçar as seções transversais do elipsoide com os planos $z = k$ (intersecção da superfície com planos paralelos ao plano xy).

(i) Fazendo k=0, ou seja, $z = 0$ na equação do elipsoide, obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Assim, a seção transversal do elipsoide com plano xy (ou $z = 0$) é uma elipse

Superfícies no espaço
Cilindros
Superfícies Quadráticas

(ii) Fazendo $z = k$ na equação do elipsoide, obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2}$$

Assim, precisamos analisar os seguintes casos:

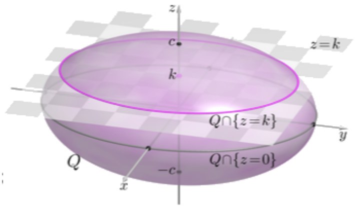
**i)** $\dfrac{k^2}{c^2} < 1 \Rightarrow |k| < c$;

**ii)** $\dfrac{k^2}{c^2} = 1 \Rightarrow |k| = c$;

**iii)** $\dfrac{k^2}{c^2} > 1 \Rightarrow |k| > c$.

# Elipsoide





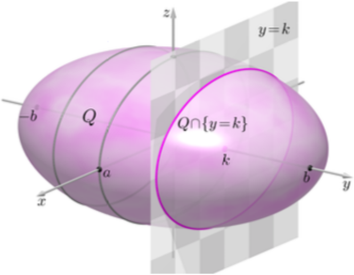
**passo 2.2**: Reconhecer e esboçar as seções transversais do elipsoide com os planos $y = k$ (intersecção da superfície com planos paralelos ao plano xz).

**passo 2.2**: Reconhecer e esboçar as seções transversais do elipsoide com os planos $y = k$ (intersecção da superfície com planos paralelos ao plano xz).

**resp**: A discussão é análoga ao passo 2.1. De fato, equação do elipsoide torna-se

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{b^2}$$

# Elipsoide



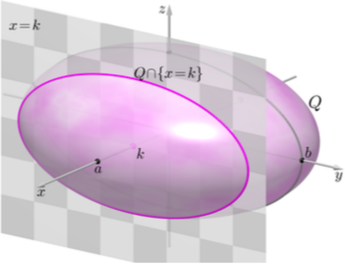
**passo 2.3**: Reconhecer e esboçar as seções transversais do elipsoide com os planos $x = k$ (intersecção da superfície com planos paralelos ao plano yz).

**passo 2.3**: Reconhecer e esboçar as seções transversais do elipsoide com os planos $x = k$ (intersecção da superfície com planos paralelos ao plano yz).

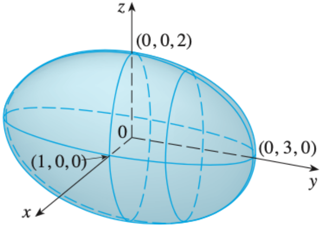
**resp**: A discussão é análoga ao passo 2.1. De fato, equação do elipsoide torna-se

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{a^2}$$

# Elipsoide

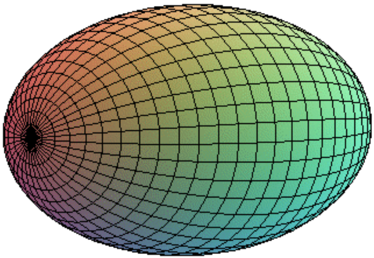


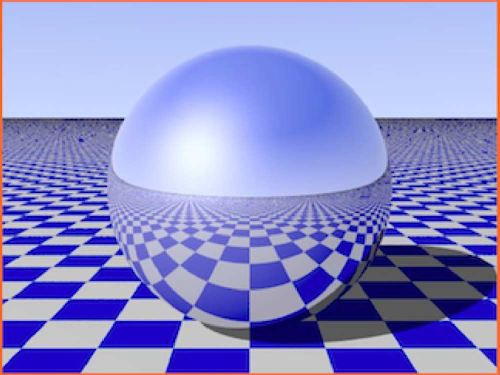
Superfícies no espaço
Cilindros
Superfícies Quadráticas



# Elipsoide







# OBRIGADA