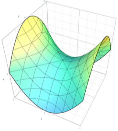


Unidade 5: Integrais múltiplas

Cristina Vaz

C2-aula 06/8/25

UFPA

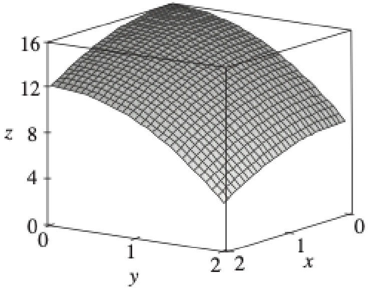
cvaz@ufpa.br

Sumário

Exemplo

Determine o volume do sólido S que é delimitado pelo paraboloide elíptico $x^2 + 2y^2 + z = 16$, pelos planos $x = 2$ e $y = 2$ e pelos três planos coordenados.

Solução: Observemos primeiro que S é o sólido que está abaixo da superfície $z = 16 - x^2 - 2y^2$ e acima do quadrado $R = [0,2] \times [0,2]$


16
12
z
8
4
0
0
1
2
y
2
1
x
0

Aplicando o Teorema de Fubini temos,

$$V = \int_0^2 \int_0^2 16 - x^2 - 2y^2 \, dx \, dy =$$

$$= \int_0^2 \left(\int_0^2 16 - x^2 - 2y^2 \, dx \right) dy$$

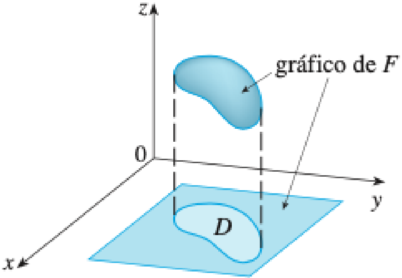
$$= \int_0^2 \left(16x \Big|_0^2 - \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 - 2y^2 x \Big|_0^2 \right) dy$$

$$= \int_0^2 \left(16(2-0) - (\frac{8}{3} - 0) - 2y^2(2-0) \right) dy$$

$$= \int_0^2 \left(32 - \frac{8}{3} - 4y^2 \right) dy = \int_0^2 \frac{88}{3} - 4y^2 \, dy$$

$$
\begin{aligned}
V = \int_0^2 \frac{88}{3} - 4y^2\, dy &= \frac{88}{3} y\Big|_0^2 - \frac{4y^3}{3}\Big|_0^2 \\
&= \frac{176}{3} - \frac{32}{3} \\
&= \frac{144}{3} = 48
\end{aligned}
$$

Problema: Queremos integral uma função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ onde D é uma região qualquer do plano


z
gráfico de F
0
y
x
D

A princípio, não vamos considerar regiões completamente aleatórias e gerais, pois é um problema complicado.

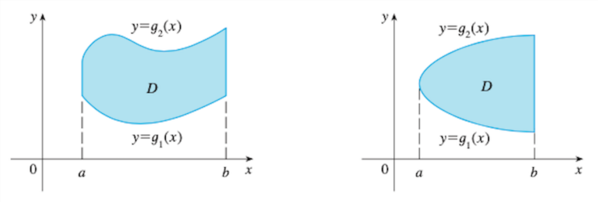
A princípio, não vamos considerar regiões completamente aleatórias e gerais, pois é um problema complicado.

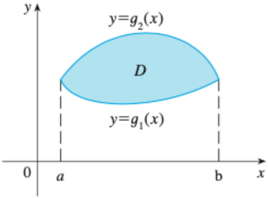
Vamos considerar D uma região, que chamaremos **Tipo I**, da forma:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\, ;\, a \leq x \leq b\, ;\, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

com $g_1(x)$ e $g_2(x)$ funções contínuas.

Integrais duplas em regiões gerais





Teorema (1)

Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função integrável e D uma região do tipo I, ou seja,

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\, a \leq x \leq b\,;\, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}.$$

com $g_1(x)$ e $g_2(x)$ funções contínuas. Então,

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx.$$

Agora, vamos considerar D uma região, que chamaremos **Tipo II**, da forma:

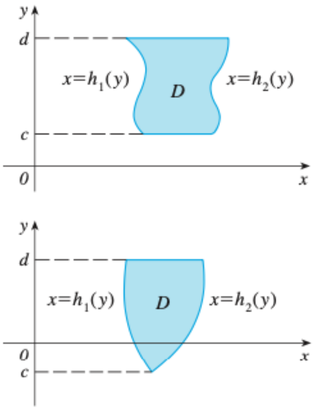
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\, ; c \leq y \leq d\, ; h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

com $h_1(y)$ e $h_2(y)$ funções contínuas.

Integrais interadas

Integrais duplas em regiões mais gerais

Exemplo para D do tipo I



Teorema (2)

Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função integrável e D uma região do tipo II, ou seja,

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, c \leq y \leq d \,;\, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

com $h_1(y)$ e $h_2(y)$ funções contínuas. Então,

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

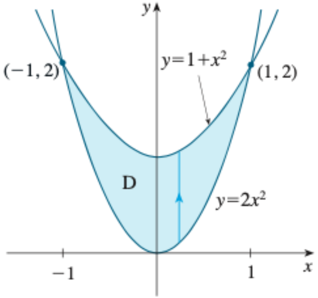
Exemplo

Calcule a integral $\iint_D x + 2y\,dx\,dy$ *com* D *a região limitada pelas parábolas* $y = 2x^2$ *e* $y = 1 + x^2$.

1° **passo**: Desenhar a região plana para escolher uma região D que seja do tipo I ou do tipo II.

Nesta caso, a região limitada pelas parábolas $y = 2x^2$ e $y = 1 + x^2$.

Exemplo para D do tipo I



Escolhendo $-1 \leq x \leq 1$, $g_1(x) = 2x^2$ e $g_2(x) = 1 + x^2$ e $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$ temos a seguinte região do tipo I:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, -1 \leq x \leq 1 \,;\, 2x^2 \leq y \leq 1 + x^2\}$$

2° **passo:** Calcular $\displaystyle\iint_D (x+2y)\,dx\,dy$ usando o Teorema (1)

$$\iint_D (x+2y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{1}\left(\int_{2x^2}^{1+x^2}(x+2y)\,dy\right)dx$$

$$= \int_{-1}^{1}\left[x\,y + \frac{2y^2}{2}\right]_{2x^2}^{1+x^2} dx = \int_{-1}^{1}\left[x\,y+y^2\right]_{2x^2}^{1+x^2} dx$$

$$= \int_{-1}^{1} x\left(1+x^2-2x^2\right)+\left((1+x^2)^2-(2x^2)^2\right)dx$$

$$= \int_{-1}^{1} x\left(1-x^2\right)+\left((1+2x^2+x^4)-4x^4\right)dx$$

Exemplo para D do tipo I

$$\iint_D (x+2y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} \left(x - x^3\right) + \left((1+2x^2+x^4) - 4x^4\right) dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(x - x^3\right) + \left(1+2x^2-3x^4\right) dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(1 + x + 2x^2 - x^3 - 3x^4\right) dx$$

$$= x\Big|_{-1}^{1} + \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1} + \frac{2x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} - \frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{1} - \frac{3x^5}{5}\Big|_{-1}^{1}$$

$$= \left(1-(-1)\right) + \frac{1^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2} - 2\left(\frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3}\right)$$

$$-\left(\frac{1^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4}\right) - 3\left(\frac{1^5}{5} - \frac{(-1)^5}{5}\right)$$

$$\iint_D (x+2y)\,dx\,dy = \left(1-(-1)\right) + \frac{1^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2} - 2\left(\frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3}\right)$$

$$-\left(\frac{1^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4}\right) - 3\left(\frac{1^5}{5} - \frac{(-1)^5}{5}\right)$$

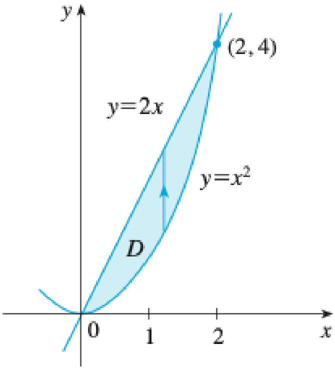
$$= 2 + 0 + \frac{4}{3} + 0 - \frac{6}{5} = \frac{30+20-18}{15} = \frac{32}{15}$$

Exemplo

Determine o volume do sólido limitado pelo paraboloide $z = x^2 + y^2$ e pela região D do plano xy limitada pela reta $y = 2x$ e pela parábola $y = x^2$.

1° **passo**: Desenhar a região plana para escolher uma região D que seja do tipo I ou do tipo II.

Nesta caso, a região limitada pela reta $y = 2x$ e pela parábola $y = x^2$


y
(2, 4)
y=2x
y=x²
D
0
1
2
x

pergunta: Qual é a região D?

pergunta: Qual é a região D?

resp: $0 \leq x \leq 2$, $g_1(x) = x^2$ e $g_2(x) = 2x$ e $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$

D é uma região do tipo I:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\, 0 \leq x \leq 2\,;\, x^2 \leq y \leq 2x\}$$

pergunta: Como calculamos o volume?

pergunta: Como calculamos o volume?

resp:

$$V = \iint_D (x^2 + y^2)\, dx\, dy = \int_0^2 \left(\int_{x^2}^{2x} (x^2 + y^2)\, dy \right) dx$$

$$V = \int_0^2 \left(\int_{x^2}^{2x} (x^2 + y^2)\, dy \right) dx$$

$$= \int_0^2 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{x^2}^{2x} dx$$

$$= \int_0^2 x^2 \left(2x - x^2 \right) + \left(\frac{(2x)^3}{3} - \frac{(x^2)^3}{3} \right) dx$$

$$= \int_0^2 \left(2x^3 - x^4 \right) + \frac{1}{3} \left(8x^3 - x^6 \right) dx$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{14x^3}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3} \right) dx$$

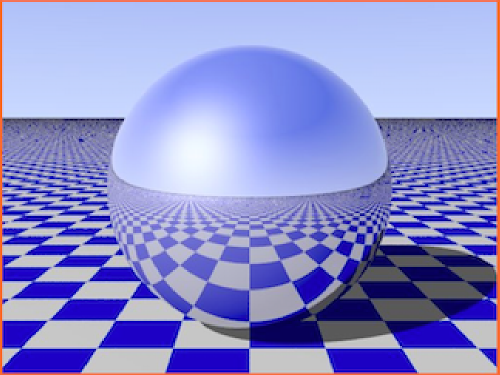
$$V == \int_0^2 \left(\frac{14x^3}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3}\right) dx$$

$$= \frac{14}{3}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 - \frac{x^5}{5}\Big]_0^2 - \frac{1}{3}\left[\frac{x^7}{7}\right]_0^2$$

$$= \frac{7}{6}\left(\frac{2^4}{2} - 0\right) - \frac{1}{5}(2^5 - 0) - \frac{1}{21}(2^7 - 0)$$

$$= 2^3\frac{7}{3} - \frac{2^5}{5} - \frac{2^7}{21} = 8\left(\frac{7}{3} - \frac{4}{5} - \frac{16}{21}\right)$$

$$= 8\left(\frac{735 - 252 - 240}{315}\right) = 8\left(\frac{243}{315}\right) = 8\left(\frac{27}{35}\right) = \frac{216}{35}$$



OBRIGADA