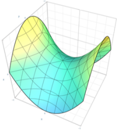


Unidade 5: Integrais múltiplas

Cristina Vaz

C2-aula 11/8/25

UFPA

cvaz@ufpa.br

Sumário

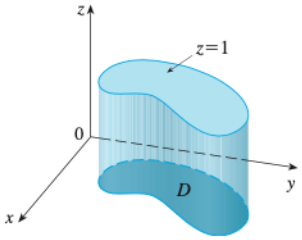
Podemos calcular área de uma região plana usando a integral dupla do seguinte modo:

Podemos calcular área de uma região plana usando a integral dupla do seguinte modo:

Considere o cilindro sólido $z = 1$ então seu volume é

$$V = \text{área da base} \times altura = A(D) \times 1 = A(D)$$

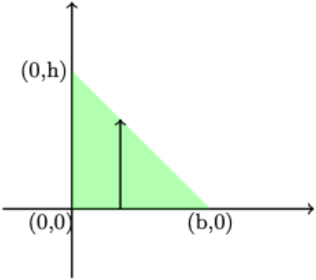
com $A(D)$ a área da base do cilindro que é a região plana D



$$A(D) = \iint_D 1\,dx\,dy = \iint_D dx\,dy$$

Exemplo

Calcule a área do triângulo de vértices $(0,0)$, $(b,0)$ *e* $(0,h)$


(0,h)
(0,0)
(b,0)

Note que a equação da reta que passa pelos ponto $(b, 0)$ e $(0, h)$ é

$$y = -\frac{h}{b}x + h.$$

Assim, devemos calcular a seguinte integral:

$$A(T) = \int_0^b \int_0^{-\frac{h}{b}x + h} dy\, dx.$$

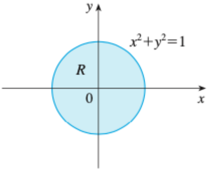
$$A(T) = \int_0^b \int_0^{-\frac{h}{b}x+h} dy\,dx =$$

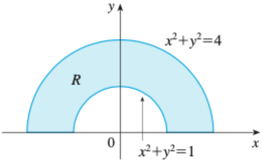
$$= \int_0^b \left(\int_0^{-\frac{h}{b}x+h} dy \right) dx = \int_0^b \left(y\Big|_0^{-\frac{h}{b}x+h} \right) dx$$

$$= -\int_0^b \left(\frac{h}{b}x + h \right) dx = -\frac{h}{b}\frac{x^2}{2} + h\,x\Big|_0^b$$

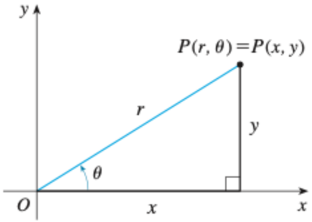
$$= -\frac{h}{b}\frac{b^2}{2} + h\,b = -\frac{hb}{2} + h\,b = \frac{1}{2}b\,h$$

Para calcularmos integrais em regiões circulares é mais interessante fazermos uma mudança de coordenadas.

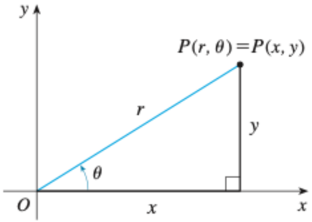




Coordenadas Polares



Coordenadas Polares



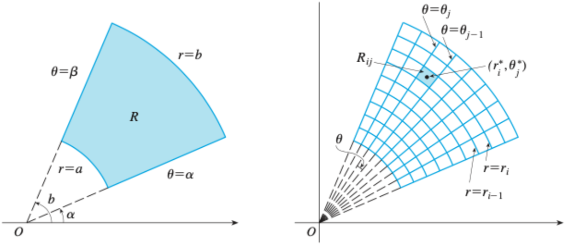
$$r^2 = x^2 + y^2, x = r\cos(\theta) \text{ e } y = r\,\text{sen}\,(\theta)$$

Queremos transformar a integral $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ dada em coordenadas retangulares em coordenadas polares. Para isto, lembremos a definição da integral dupla:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{n,m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_i^*, y_j^*) A(R_{ij})$$

com $A(R_{ij}) = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$ a área dos retângulos da partição de D.

No plano polar, vamos preencher a região de integração com vários **retângulos polares**:



Note que, $a \leq r \leq b$ e $\alpha \leq \theta \leq \beta$

Como a área do setor circular é de raio r e ângulo θ é $C = \dfrac{1}{2}r^2\theta$ temos que

$$A(R_{ij}) = A(C_i) - A(C_{i-1}) = \frac{1}{2}r_i^2\,\Delta\theta - \frac{1}{2}r_{i-1}^2\,\Delta\theta$$

com $\Delta\theta = \theta_i - \theta_{i-1}$. Assim,

$$A(R_{ij}) = \frac{1}{2}\left(r_i^2 - r_{i-1}^2\right)\Delta\theta = \frac{1}{2}(r_i + r_{i-1})(r_i - r_{i-1})\Delta\theta$$

Fazendo $\Delta r = r_i - r_{i-1}$ e $r_i^* = \dfrac{1}{2}(r_i + r_{i-1})$ obtemos

$$A(R_{ij}) = r_i^* \Delta r \, \Delta\theta$$

Assim, a soma de Riemann torna-se

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_i^*, y_j^*) A(R_{ij}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(r_i^* \cos(\theta_i^*), r_j^* \text{sen}\,(\theta_j^*)) r_i^* \Delta r \, \Delta\theta$$

Logo,

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \lim_{n,m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(r_i^* \cos(\theta_i^*), r_j^* \operatorname{sen}(\theta_j^*)) r_i^* \Delta r\, \Delta\theta$$

$$= \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos(\theta), r\operatorname{sen}(\theta))\, r\, dr\, d\theta$$

Teorema (Mudança para coordenadas polares)

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função integrável em D contida no retângulo polar $0 \leq a \leq r \leq b$ e $\alpha \leq \theta \leq \beta$ com $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$ então

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}\,(\theta))\, r\,dr\,d\theta.$$

Também pode acontecer que termos uma região mais geral do que um retângulo polar, como por exemplos

$$D = \left\{(r,\theta); g_1(\theta) \leq r \leq g_2(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta\right\}$$

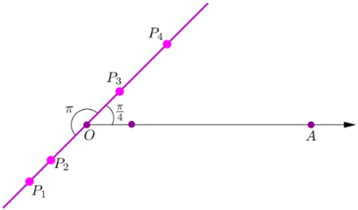
Neste caso, temos

Teorema (Mudança para coordenadas polares)

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *uma função integrável em* D *com* $D = \left\{(r,\theta); g_1(\theta) \leq r \leq g_2(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta\right\}$ *então*

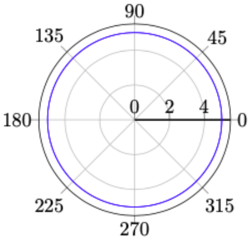
$$\iint_D f(x,y)\, dx\, dy = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}\,(\theta))\, r\, dr\, d\theta.$$

- equação da reta que passa pela origem: $\theta = \alpha$

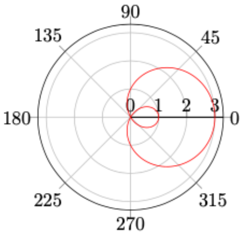


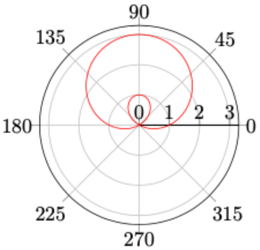
- círculo de centro $(0,0)$ e raio a:

$$r^2 = x^2 + y^2 = a^2 \Longrightarrow r = a$$

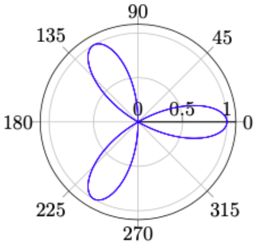


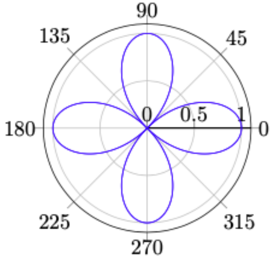
- Cardióide: $r = a + b\cos(\theta)$ ou $r = a + b\,\mathrm{sen}\,(\theta)$





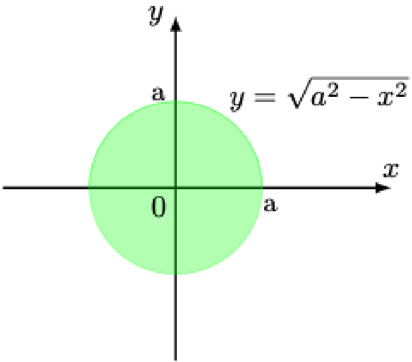
- Rosácea: $r = a\cos(b\,\theta)$





Exemplo

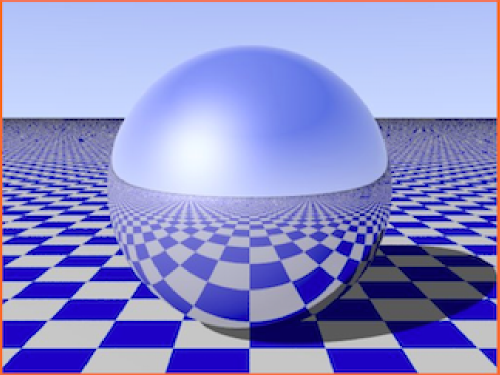
Calcule a área do círculo de centro $(0,0)$ *e raio* $a > 0$.


y
a
$y = \sqrt{a^2 - x^2}$
x
0
a

$$A(C) = \iint_C dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^{a} r\,dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^a d\theta = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= 2\pi\frac{a^2}{2} = \pi\, a^2$$



OBRIGADA