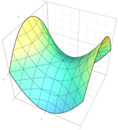


Cálculo computacional II

Unidade 1: Espaços euclidianos

Cristina Vaz

C2-aula 7/5/25

UFPA

cvaz@ufpa.br

Sumário

O espaço euclidiano n-dimensional da álgebra linear (ou da geometria analítica) é um conjunto cujos elementos são **n-uplas** de coordenadas do tipo $(x_1.x_2, x_3, \cdots, x_n)$ com $n \in \mathbb{N}^*$ e $x_i \in \mathbb{R}$ para $1 \leq i \leq n$.

O espaço euclidiano n-dimensional é representado por $\mathbb{R}^n$.

Definição

O espaço euclidiano n-dimensional é definido por

$$\mathbb{R}^n = \left\{ (x_1.x_2, x_3, \cdots, x_n);\ x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n \right\}$$

Os elementos de $\mathbb{R}^n$ são chamados de **vetores** para $n > 1$ e são representados por $\vec{u}$.

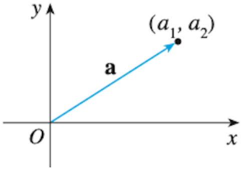
O **espaço bidimensional** ou o plano é o conjunto dos pares ordenados e é representado por

$$\mathbb{R}^2 = \left\{(x, y);\ x, y \in \mathbb{R}\right\}$$

O **espaço tridimensional** ou o espaço é o conjunto dos trios ordenados e é representado por

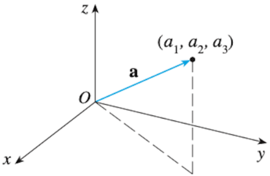
$$\mathbb{R}^3 = \left\{(x, y, z);\ x, y, z \in \mathbb{R}\right\}$$

Adotamos o sistema de coordenadas cartesiano, mas só é possível representar geometricamente os elementos do plano e do espaço:



base canônica do $\mathbb{R}^2$: $\vec{i} = (1, 0)$ e $\vec{j} = (0, 1)$

$$\vec{u} = (a_1, a_2) \Rightarrow a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$$



base canônica do $\mathbb{R}^3$: $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$ e $\vec{k} = (0,0,1)$

$$\vec{u} = (a_1, a_2, a_3) \Rightarrow a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

Np caso do $\mathbb{R}^n$ para $n \geq 4$ não temos representação geométrica.

Base canônica do $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
\vec{e}_1 &= (1,0,0,0,\cdots,0),\\
\vec{e}_2 &= (0,1,0,0\cdots,0),\\
\vec{e}_3 &= (0,0,1,0,\cdots,0),\\
&\vdots\\
\vec{e}_n &= (0,0,0,0,\cdots,1)
\end{aligned}$$

$$\vec{u} = (a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n) \Rightarrow a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 + \cdots a_n\vec{e}_n$$

No caso da geometria analítica, a representação geométrica de objetos matemáticos no $\mathbb{R}^2$ ou no $\mathbb{R}^3$ é feita através das equações algébricas associadas a estes objetos.

No caso da geometria analítica, a representação geométrica de objetos matemáticos no $\mathbb{R}^2$ ou no $\mathbb{R}^3$ é feita através das equações algébricas associadas a estes objetos.

Para obtermos tais expressões algébricas precisamos conhecer as propriedades algébricas e também as propriedades geométricas dos espaços euclidianos.

No caso da geometria analítica, a representação geométrica de objetos matemáticos no $\mathbb{R}^2$ ou no $\mathbb{R}^3$ é feita através das equações algébricas associadas a estes objetos.

Para obtermos tais expressões algébricas precisamos conhecer as propriedades algébricas e também as propriedades geométricas dos espaços euclidianos.

Na disciplina de Cálculo 2, estamos interessados nas equações algébricas de retas, planos, superfícies cilíndricas, de revolução, quadráticas, entre outras. Comecemos com as propriedades algébricas:

A estrutura algébrica do espaço euclidiano n-dimensional é a estrutura de um espaço vetorial, ou seja, no $\mathbb{R}^n$ estão definidas duas operações:

(i) **adição** de vetores;

(ii) **multiplicação de um escalar** por um vetor

que satisfazem propriedades algébricas.

Definição (operação de adição)

Dados dois elementos $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n)$ *e* $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n)$ *do* $\mathbb{R}^n$ *temos que o vetor soma* $\vec{u} + \vec{v}$ *pertence ao* $\mathbb{R}^n$ *(fechamento da adição), é definido por* $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3, \cdots, u_n + v_n)$ *e satisfaz as seguintes propriedades:*

Teorema

Comutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$;

Associativa: $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$;

Elemento neutro aditivo: $\exists! \mathbf{e}$ *tal que* $\vec{u} + \mathbf{e} = \mathbf{e} + \vec{u} = \vec{u}$. *Representamos* $\mathbf{e}$ *por* $\mathbb{O}$.

Elemento inverso aditivo: *Para cada* $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$, $\exists!\, \Theta$ *tal que* $\vec{u} + \Theta = \mathbf{e}$. *Representamos* Θ *por* $-\vec{u}$.

O elemento neutro $\mathbb{O}$ é dado por $\mathbb{O} = (0, 0, 0, \cdots, 0)$

O elemento inverso aditivo do vetor $\vec{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$ é dado por $-\vec{u} = (-u_1, -u_2, \cdots, -u_n)$.

O elemento neutro $\mathbb{O}$ é dado por $\mathbb{O} = (0, 0, 0, \cdots, 0)$

O elemento inverso aditivo do vetor $\vec{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$ é dado por $-\vec{u} = (-u_1, -u_2, \cdots, -u_n)$.

Definição (operação de multiplicação por escalar)

Dado o escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ e o vetor $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n)$ do $\mathbb{R}^n$ temos que o vetor multiplicação por escalar $\alpha\,\vec{u}$ pertence ao $\mathbb{R}^n$ (fechamento da multiplicação por escalar), é definido por $\alpha\,\vec{u} = (\alpha\,u_1, \alpha\,u_2, \alpha\,u_3, \cdots, \alpha\,u_n)$ e satisfaz as seguintes propriedades:

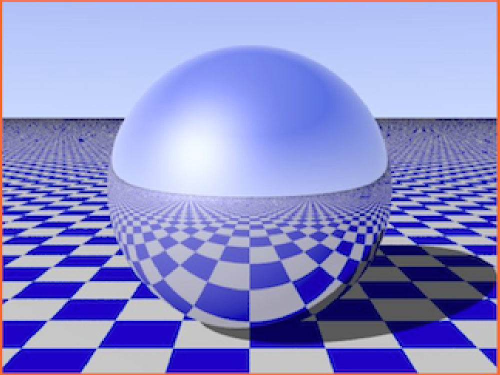
Teorema

Associativa: $(\alpha\beta)\vec{u} = \alpha(\beta\vec{u})$;

Distributiva para soma de escalares: $(\alpha+\beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$;

Distributiva para soma de vetores: $\alpha(\vec{u}+\vec{v}) = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$;

Elemento neutro da multiplicação por escalar: $\exists!\mathbf{1}$ *tal que* $\mathbf{1}.\vec{u} = \vec{u}$



OBRIGADA