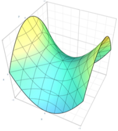


Unidade 2: Derivadas Parciais

Cristina Vaz

C2-aula 09/6/25

UFPA

cvaz@ufpa.br

Sumário

Ideias:

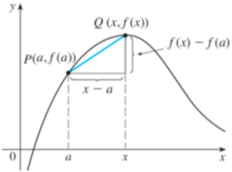
Cálculo 1: Limite de uma taxa de variação:

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

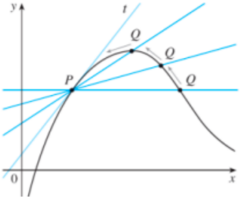
ou

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

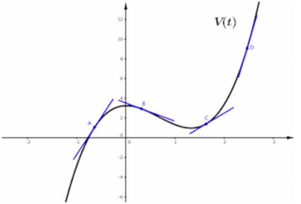
para $h = x - a$

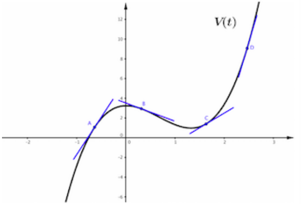

y
Q (x, f (x))
f (x) − f (a)
P(a, f (a))
x − a
0
a
x
x

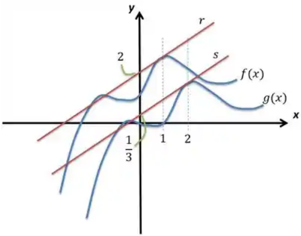
Interpretação geométrica: coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função no ponto $(p, f(a))$

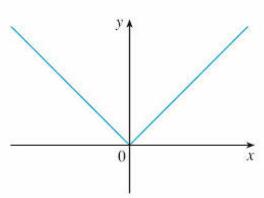


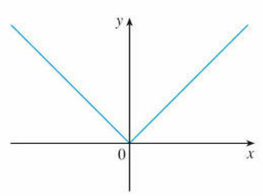
Note que a derivada é um conceito local


V(t)
A
B
C
D

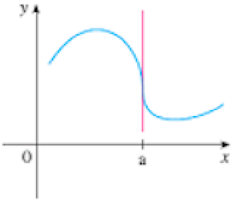

V(t)

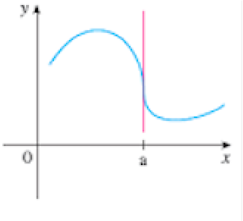

y
x
r
s
f(x)
g(x)
2
1
2
1/3


y
0
x

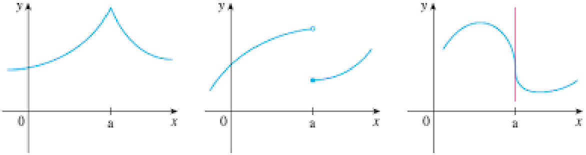


$$\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\neq\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$


y
0
a
x



$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \infty$$



(a) Uma quina (b) Uma descontinuidade (c) Uma tangente vertical

Diferenciabilidade
Derivadas Parciais

Problema: Como estender estas ideias para uma função $f(x, y)$ de duas variáveis?

Problema: Como estender estas ideias para uma função $f(x,y)$ de duas variáveis?

Note que a taxa de variação

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x-a)-f(a)}{x-a}$$

não faz sentido no $\mathbb{R}^2$. Por que?

Diferenciabilidade
Derivadas Parciais

resp. $x, a \in \mathbb{R}^2$ implica que x e a são vetores, ou seja, $\vec{x} = (x, y)$ e $\vec{a} = (a, b)$.

Como as únicas operações definidas no $\mathbb{R}^2$ são soma de vetores e multiplicação de um vetor por um escalar temos que a operação de divisão entre vetores não está definida em $\mathbb{R}^2$

E agora???

Diferenciabilidade
Derivadas Parciais

1^a solução: Propor uma definição "relacionada" com do Cálculo 1.

Como seria?

1^a solução: Propor uma definição "relacionada" com do Cálculo 1.

Como seria?

resp. Propor a variação de $f(x,y)$ como função de uma variável.

Como seria?

resp 1. Fixamos, por exemplo, a variável y no valor b e analisamos a variação da variável x.

Assim, $f(x,b) = g(x)$ e

$$g'(a) = \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x,b) - f(a,b)}{x - a}$$

Analogamente,

$$g'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$$

resp 2. Fixamos, por exemplo, a variável x no valor a e analisamos a variação da variável y.

Assim, $f(a,y) = h(y)$ e

$$h'(b) = \lim_{y \to a} \frac{h(y) - h(b)}{y - b} = \lim_{y \to b} \frac{f(a,y) - f(a,b)}{y - b}$$

Analogamente,

$$h'(b) = \lim_{k \to 0} \frac{h(b+k) - h(b)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{f(a,k+b) - f(a,b)}{k}$$

Quando as derivadas $g'(a)$ e $h'(b)$ existem dizemos que f tem derivadas parciais no ponto (a,b) e representamos por

$$\begin{aligned} g'(a) &= \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \\ h'(b) &= \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \end{aligned}$$

Definição

Seja $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *e* $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. *Dizemos que* f *tem derivadas parciais em* (a,b) *se os seguintes limites existem e são finitos:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) &= \lim_{k\to 0} \frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k} \end{aligned}$$

Notações:

$$D_x f(a,b), \quad D_y(a,b)$$

ou

$$f_x(a,b), \quad f_y(a,b)$$

ou

$$D_1 f(a,b), \quad D_2(a,b)$$

Quando as derivadas parciais existem para todos os pontos do domínio D_f ou para todos os pontos de $A \subset D_f$ podemos definir a função derivada parcial de 1^a ordem de f do seguinte modo:

Definição

Seja $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. *Suponha que as derivadas parciais de* f *existem em* D_f *(ou* $A \subset D_f$*). Então, definimos a derivada parcial de* 1^a *ordem de* f *em* D_f *(ou* $A \subset D_f$*) por*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,b)-f(x,y)}{h} \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \lim_{k\to 0} \frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}
\end{aligned}$$

Método geral para determinar as derivadas parciais de $z = f(x, y)$:

1. Saber derivar função de uma variável (cálculo1);
2. Considerar y constante (em geral, arbitrariamente) e calcular a derivada de $f(x, y)$ com relação a x;
3. Considerar x constante (em geral, arbitrariamente) e calcular a derivada de $f(x, y)$ com relação a y.

Exemplo (1)

Seja $f(x,y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$. *Calcule* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(2,1)$ *e* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2,1)$

Solução:

1. Manter y arbitrariamente fixo e derivar com relação a x:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + 2xy^3$$

2. Substituir o ponto $(2,1)$ no resultado do item 1:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = 3.4 + 2.2.1 = 12 + 4 = 16$$

Solução:

2. Manter x arbitrariamente fixo e derivar com relação a y:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2x^2 - 4y$$

3. Substituir o ponto $(2,1)$ no resultado do item 2:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = 3.1.4 - 4.1 = 12 - 4 = 8$$

Exemplo (2)

Seja

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & se \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & se \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ *e* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0)$.

Solução: Usar a definição por causa da função dada.

Para $y=0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$$

Para $y\neq 0$

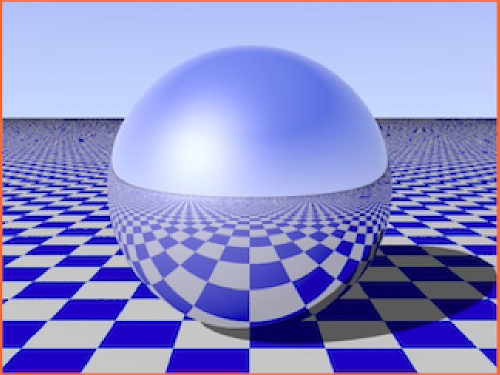
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,y)-f(0,y)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{hy(h^2-y^2)}{h^2+y^2}-\frac{0}{y^2}}{h}\Rightarrow$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)=\lim_{h\to 0}\frac{y(h^2-y^2)}{h^2+y^2}=\lim_{h\to 0}-\frac{y^3}{y^2}=-y$$

Logo,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y, \quad \forall y$$

Exercício: Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0)$.



OBRIGADA