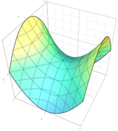


Cálculo computacional II

Unidade 5: Integrais triplas

Cristina Vaz

C2-aula 18/8/25

UFPA

cvaz@ufpa.br

Sumário

Agora, queremos definir a integral de uma função

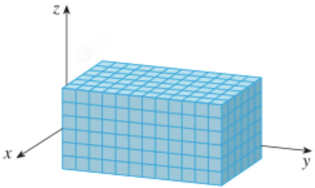
$$f : E \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

Para isto, considere E é um paralelepípedo dado por

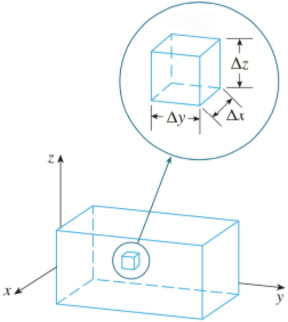
$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; a_1 \leq x \leq b_1, a_2 \leq y \leq b_2, a_3 \leq z \leq b_3\}$$

Agora, vamos subdividir D em vários cubos de tamanho

$$E_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$$



Note que, cada cubo E_{ijk} tem dimensões $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$ e $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$



Assim, o volume de cada E_{ijk} é dado por

$$\Delta V_{ijk} = \Delta x_i \, \Delta y_j \, \Delta z_k$$

Assim, o volume de cada E_{ijk} é dado por

$$\Delta V_{ijk} = \Delta x_i \, \Delta y_j \, \Delta z_k$$

Escolhendo, um ponto $(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk})$ em cada D_{ijk} podemos formas a soma de Riemann:

$$S_{lmn} = \sum_{k=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} f(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk}) \, \Delta V_{ijk}$$

Tomando o limite de S para $l, m, n \to \infty$ obtemos a **integral tripla** de f dada por

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dV = \lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)\,\Delta V_{ijk}$$

com $dV = dx\,dy\,dz$

Definição

Sejam $E \subset \mathbb{R}^3$ o paralelepípedo $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ e $f : E \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Então, se existe o limte

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \lim_{l,m,n \to \infty} \sum_{k=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} f(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk})\, \Delta V_{ijk}$$

é chamado de a **integral tripla** *de f.*

Teorema (Teorema de Fubini)

Sejam $E \subset \mathbb{R}^3$ o paralelepípedo $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ e $f : E \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Então,

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_{a_3}^{b_3} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

Exemplo

Calcule a integral tripla

$$\iiint_E x\, y\, z^2\, dx\, dy\, dz$$

no paralelepípedo

$$E = [0,1] \times [-1,2] \times [0,3]$$

Solução: aplicando o teorema de Fubini temos que

$$\iiint_E x\,y\,z^2\,dx\,dy\,dz = \int_0^3\int_{-1}^2\int_0^1 x\,y\,z^2\,dx\,dy\,dz,$$

então

$$\int_0^3\int_{-1}^2\int_0^1 x\,y\,z^2\,dx\,dy\,dz = \int_0^3\int_{-1}^2\left(\int_0^1 x\,y\,z^2\,dx\right)dy\,dz$$

$$= \int_0^3\int_{-1}^2 y\,z^2\left(\int_0^1 x\,dx\right)dy\,dz$$

$$= \int_0^3\int_{-1}^2 y\,z^2\left(\frac{x^2}{2}\right)_0^1 dy\,dz$$

$$\int_0^3 \int_{-1}^2 \int_0^1 x\,y\,z^2\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{2}\int_0^3 \left(\int_{-1}^2 y\,dy\right) z^2\,dz$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^3 \left(\frac{y^2}{2}\right)_{-1}^2 z^2\,dz = \frac{1}{2}\int_0^3 \left(2 - \frac{1}{2}\right) z^2\,dz$$

$$= \frac{3}{4}\int_0^3 z^2\,dz = \frac{3}{4}\left(\frac{z^3}{3}\right)_0^3 = \frac{3}{4}(9) = \frac{27}{4}$$

Se $f(x, y, z) = 1$ temos que

$$\iiint_E dV = \lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{k=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \Delta V_{ijk} = \text{volume de E}$$

Logo,

$$V(E) = \iiint_E dx\, dy\, dz$$

Exemplo

Calcule o volume do paralelepípedo

$$E = [1,2] \times [3,5] \times [0,1]$$

Solução:

$$V(E) = \iiint_E dx\,dy\,dz = \int_0^1 \int_3^5 \int_1^2 dx\,dy\,dz.$$

Logo,

$$V(D) = \int_0^1 \int_3^5 \Big[x\Big]_1^2 dy\,dz = 2\int_0^1 \int_3^5 dy\,dz = 2\int_0^1 \Big[y\Big]_3^5 dz$$

$$V(D) = 4\int_0^1 dz = 4\Big[z\Big]_0^1 = 4\,u.v$$

pergunta Se E não for um paralelepípedo, como calculamos a integral tripla de f?

pergunta Se E não for um paralelepípedo, como calculamos a integral tripla de f?

Suponha que E seja uma região limitada do $\mathbb{R}^3$, ou seja, que E está contida em algum paralelepípedo B e que f é zero foram de B.

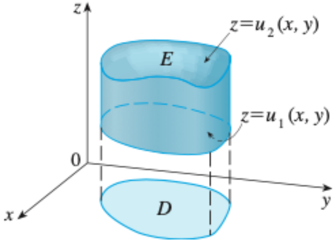
pergunta Se E não for um paralelepípedo, como calculamos a integral tripla de f?

Suponha que E seja uma região limitada do $\mathbb{R}^3$, ou seja, que E está contida em algum paralelepípedo B e que f é zero foram de B.

Vamos considerar a região E, que chamaremos região do **tipo I**, dada por

$$E = \{(x, y, z) ; (x, y) \in D, \; u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

com D a projeção de E no plano xy.


z
$z=u_2(x, y)$
E
$z=u_1(x, y)$
0
D
x
y

Teorema (Teorema de Fubini)

Sejam $E \subset \mathbb{R}^3$ uma região do **tipo I** *e $f : E \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Então,*

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_D \left(\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy$$

$$D = \{(x, y); a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

tipo II

$$D = \{(x, y); h_1(y) \leq x \leq h_2(y),\ c \leq y \leq d\}$$

Nestes casos, a região E torna-se

D tipo I

$$E = \{(x,y,z);\, a \leq x \leq b,\, g_1(x) \leq y \leq g_2(x),\, u_1(x,y) \leq z \leq u_2(x,y)\}$$

D tipo II

$$E = \{(x,y,z);\, h_1(y) \leq x \leq h_2(y),\, c \leq y \leq d,\, u_1(x,y) \leq z \leq u_2(x,y)\}$$

E o teorema de Fubini torna-se

Teorema (Teorema de Fubini)

Sejam $f : E \to \mathbb{R}$ uma função integrável e $E \subset \mathbb{R}^3$ uma região dada por

$$E = \{(x, y, z);\, a \leq x \leq b,\, g_1(x) \leq y \leq g_2(x),\, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

Então,

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

Teorema (Teorema de Fubini)

Sejam $f : E \to \mathbb{R}$ uma função integrável e $E \subset \mathbb{R}^3$ uma região dada por

$$E = \{(x,y,z); h_1(y) \leq x \leq h_2(y), c \leq y \leq d, u_1(x,y) \leq z \leq u_2(x,y)\}$$

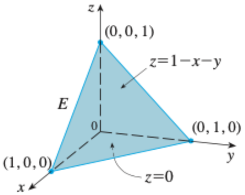
Então,

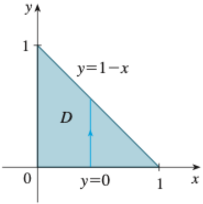
$$\iiint_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy$$

Exemplo

Calcule a integral tripla $\iiint_E z\,dx\,dy\,dz$ *com* E *o tetraedro sólido limitado pelos plano* $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ *e* $x + y + z = 1$

Solução: Desenhar a região de integração E no espaço e a região plana D





Note que, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1 - x$ e $0 \leq z \leq 1 - x - y$

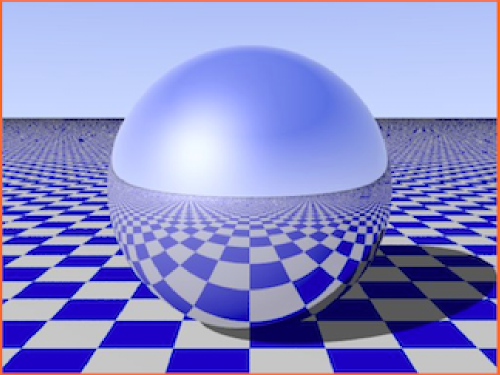
Pelo teorema de Fubini:

$$\iiint_E z\, dx\, dy\, dz = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} z\, dz\, dy\, dx$$

Pelo teorema de Fubini:

$$\iiint_E z \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} z \, dz \, dy \, dx$$

Farei os cálculos na próxima aula!



OBRIGADA