Matemática Discreta para Computação

Parte II - Relações e dígrafos:

1. Relações e dígrafos
2. $\boxed{\text{2. Propriedades de relações}}$
3. Representação e manipulação de relações
4. Funções

Propriedades de relações

- Em muitas aplicações da computação aparecem relações sobre um conjunto **A** em vez de relações de **A em B**.

Definição: (Reflexividade)

- Uma relação R sobre um conjunto A é dita *reflexiva* se $(a,a) \in R$ **para todo** $a \in A$, ou seja, se aRa para todo $a \in A$.

- Ou seja: R é ***reflexiva*** se **todo** elemento $a \in A$ está relacionado consigo mesmo

Propriedades de relações (reflexividade)

Exemplos:

a) $\Delta = \{ (a,a) \mid a \in A\}$: a relação de igualdade no conjunto A. Por definição, $(a,a) \in \Delta, \ \forall a \in A$.

b) $R = \{ (a,b) \in A \times A \mid a \neq b\}$
Não é pois $(a,a) \notin R, \ \forall a \in A$.

c) Seja $A = \{1,2,3\}$ e $R = \{(1,1),(1,2)\}$. Então:

R não é reflexiva pois $(2,2) \notin R$ e $(3,3) \notin R$

Propriedades de relações (reflexividade)

Exemplo: Quais das relações a seguir são reflexivas?

$R_1 = \{ (a,b) \mid a \leq b \}$

$R_2 = \{ (a,b) \mid a > b \}$

$R_3 = \{ (a,b) \mid a = b \text{ ou } a = -b \}$

$R_4 = \{ (a,b) \mid a = b \}$

$R_5 = \{ (a,b) \mid a = b+1 \}$

$R_6 = \{ (a,b) \mid a+b \leq 3 \}$

Propriedades de relações (reflexividade)

Caracterização de reflexividade e irreflexividade em termos de matrizes e dígrafos:

1. Matrizes:

– **relação R reflexiva** $\Rightarrow$ a matriz M_R possui todos os elementos da diagonal principal iguais a 1

2. Dígrafos:

– relação R reflexiva $\Rightarrow$ para todos os vértices do dígrafo existem arestas que ligam o vértice a ele mesmo.

- Observe também que se R sobre A é reflexiva, então:
  Dom(R) = Ran(R) = A

Propriedades de relações - simetria

Definição (Simetria): Uma relação R sobre um conjunto A é dita *simétrica* se ***sempre* que** $(a,b) \in R$, então também $(b,a) \in R$. i.e. **Se a R b, então b R a**

Definição (Antissimetria): Uma relação R sobre um conjunto A é dita *antissimétrica* se ***sempre* que** $(a,b) \in R$ e $(b,a) \in R$, então a=b. i.e. **Se a R b e b R a, então a=b**

- equivalentemente, se $a \neq b$, então $(a,b) \notin R$ ou $(b,a) \notin R$
i.e. Se $a \neq b$, $a \not R b$ **ou** $b \not R a$

Propriedades de relações

- **Lembrete**: escrever **(a,b)** $\in$ **R** é equivalente a escrever **a R b**, que significa dizer que **a** está relacionado com **b** por R.

- **Observação**: para verificar se estas propriedades são ***válidas ou não*** para uma certa relação R, deve-se notar que:

1. Uma propriedade *não é válida* em geral se puder ser encontrada **uma** situação onde ela não pode ser verificada.

2. Se **não** houver situação em que a propriedade *falha*, deve-se concluir que á propriedade é sempre **válida**.

Propriedades de relações - exemplos

<u>Exemplo 1</u>: Seja A=Z (o conjunto dos inteiros) e seja R a relação $R=\{(a,b)\in A\times A \mid a \geq b\}$. Determine se R é simétrica ou antissimétrica.

<u>Solução</u>:

- <u>simetria</u>: se $a\geq b$, então não é sempre verdade que $b\geq a$ (exemplo: $2 \geq 1$ mas $1 < 2$) $\Rightarrow$ R é não simétrica.

- <u>antissimetria</u>: R é antissimétrica pois se $a \neq b$, $a\not\geq b$ OU $b\not\geq a$

  $a=2$ e $b=3$, $b\geq a$ mas $a\not\geq b$

Propriedades de relações - exemplos

<u>Exemplo 2</u>: Seja $A=\{1,2,3,4\}$ e seja a relação:

$R=\{(1,2),(2,2),(3,4),(4,1)\}$

Determine se R é simétrica ou antissimétrica.

- <u>antissimetria</u>: R é antissimétrica pois se $a \neq b$, então ou $(a,b) \notin R$ ou $(b,a) \notin R$.

Propriedades de relações - exemplos

Exemplo 3: Seja A= Z^+ (inteiros positivos) e seja

$R = \{ (a,b) \in A \times A \mid a|b\}$ (a divide b).

Determine se R é simétrica ou antissimétrica.

Caracterização de simetria, assimetria e antissimetria através da matriz de relação

- **Simetria**: A matriz $M_R=[m_{ij}]$ de uma relação simétrica satisfaz à propriedade:

$$m_{ij}=1 \Rightarrow m_{ji}=1$$

$$m_{ij}=0 \Rightarrow m_{ji}=0$$

  Portanto, neste caso tem-se que $m_{ij}=m_{ji}$, o que significa que R é simétrica se e somente se $M_R=(M_R)^t$.

- **Antissimetria**: A matriz $M_R=[m_{ij}]$ de uma relação antissimétrica satisfaz:

$$\textbf{se } i \neq j \textbf{ então } m_{ij}=0 \textbf{ ou } m_{ji}=0$$

Propriedades de relações com matrizes

- **Exemplo1**:

$$M_{R1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad M_{R2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad M_{R3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{R4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_{R5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M_{R6} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Propriedades de relações com matrizes

- **<u>Exemplo1 (cont.)</u>**:
  - R1 e R2 são simétricas, pois M_{R1} e M_{R2} são matrizes simétricas.
  - R3 é antissimétrica, pois não existe nenhuma simetria fora da diagonal.
  - R4 não é simétrica e nem antissimétrica pois:

    1. M_{R4} não é simétrica;

    2. A presença do nro. 1 no elemento m_{41} viola tanto a propriedade da antissimetria.
  - R5 é antissimétrica.
  - R6 é antissimétrica.

Propriedades de relações com grafos

- **Simétrica**

  Para dois vértices diferentes i e j, se existir uma aresta de i para j, deve existir uma aresta de j para i

  Ao invés de 2 arestas com direção, escreve-se uma sem direção para denotar a ligação → grafo da relação simétrica

- **Antisimetria**

  Se uma relação R é **antisimétrica**, então para vértices diferentes i e j, não pode existir uma aresta de i para j e uma de j para i.

  Se i=j, no entanto, não existe restrição.

Propriedades de relações - transitividade

- Definição: Uma relação R sobre um conjunto A é dita ***transitiva*** se, sempre que **a R b** e **b R c**, então **a R c**.

- Por outro lado, R sobre A é uma relação ***não-transitiva*** se existir a, b e c em A tais que a R b e b R c, mas a $\not R$ c.

$\rightarrow$ se tais a, b e c não existirem, então R é ***transitiva***.

Propriedades de relações - transitividade

- Exemplo 1: Seja $A=Z^+$ e $R=\{ (a,b) \in A\times A \mid a|b \}$ ("a divide b"). A relação R é transitiva?

- Exemplo 2: A relação $R=\{(1,2),(1,3),(4,2)\}$ sobre $A=\{1,2,3,4\}$ é transitiva?

Caracterização de relações transitivas por matrizes

- Se $M_R=[m_{ij}]$ é a matriz de uma relação transitiva R, então M_R satisfaz à propriedade:

  se $m_{ij}=1$ e $m_{jk}=1$, então $m_{ik}=1$

  ou seja, a transitividade de R significa que se $(M_R)^2$ tem um 1 em qualquer posição, então M_R deve ter um 1 na mesma posição (o converso pode ser falso), ou seja:

$$(M_R)^2 = M_R$$

Caracterização de relações transitivas por matrizes

- Exemplo: Mostre que a relação R sobre A={1,2,3} dada abaixo é transitiva:

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Caracterização de relações transitivas por grafos

- Considerando dois vértices **a** e **c**, a condição **a R b** e **b R c** significa que existe um caminho de tamanho 2 em R de **a** para **c**, ou seja, **a** $\mathbf{R^2}$ **c**
- Refazendo a definição de transitividade, se **a** $\mathbf{R^2}$ **c**, então **a R c**
- Ou seja, se **a** e **c** estão conectados por um caminho de tamanho 2 em R, então eles devem estar conectados por um caminho de tamanho 1.

Teorema: Uma relação R é transitiva se e somente se ela satisfaz a seguinte propriedade:

Se existe um caminho de tamanho maior que 1 do vértice **a** para o vértice **b**, existe um caminho de tamanho 1 de **a** para **b**

Propriedades de relações - Exercícios

- Exercício 1: Determine se as relações abaixo são reflexivas, simétricas, antissimétricas e/ou transitivas.

  Onde A = {1,2,3,4}

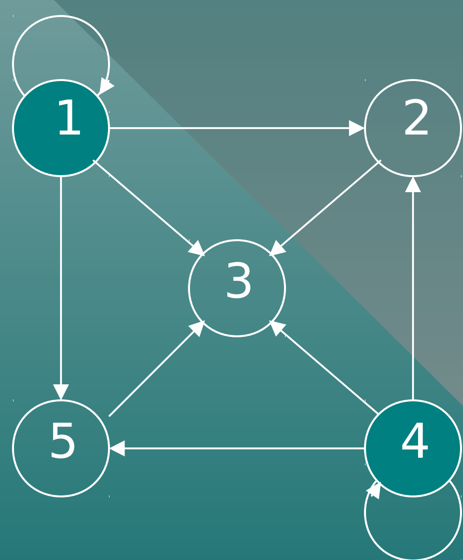
  a) R={(1,3),(1,1),(3,1),(1,2),(3,3),(4,4)}

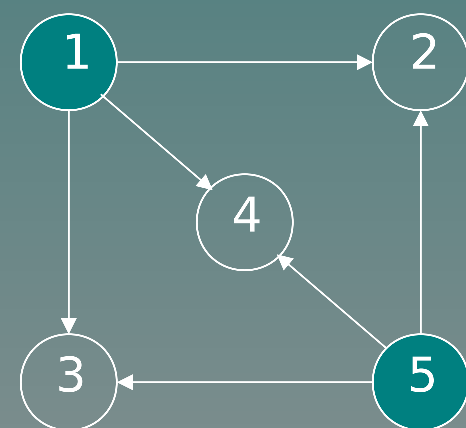
  b) R={(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4)}

  c) R={(1,2),(1,3),(3,1),(1,1),(3,3),(3,2),(1,4),(4,2),(3,4)}

Propriedades de relações - Exercícios

- Exercício2: Seja A={1,2,3,4,5}. Determine se as relações definidas pelos dígrafos abaixo são reflexivas, irreflexivas, simétricas, assimétricas, antissimétricas ou transitivas.





Resp. (a):

Resp. (b): ?

Propriedades de relações - Exercícios

- Exercício 3: Classifique as seguintes relações sobre o conjunto S={1,2,3,4}

  a) R1={(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,4),(4,1),(4,4)}

  b) R2={(1,1),(1,2),(2,1)}

  c) R3={(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(3,3),(4,1),(4,4)}

  d) R4={(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3)}

  e) R5={(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4), (4,4)}

  e) R6={(3,4)}