*Sistemas de Informação*
*UFPA*

# ***Grafos***

## ***Conceitos Básicos***

7 de outubro de 2020

# *Introdução*

*O que é um grafo ?*

*Def.:* Um grafo é um conjunto finito e não vazio de **vértices** (ou nós) $V$ e um conjunto de **arestas** $A$ que conectam pares de vértices distintos.

$\rightarrow$ As arestas indicam relações entre os elementos de $V$ $\leftarrow$

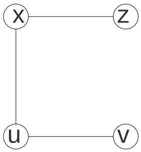
# *Introdução*

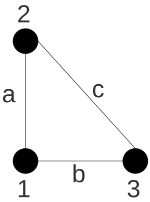
## *O que é um grafo ?*

*Def.:* Um grafo é um conjunto finito e não vazio de **vértices** (ou nós) $V$ e um conjunto de **arestas** $A$ que conectam pares de vértices distintos.

$\rightarrow$ As arestas indicam relações entre os elementos de $V$ $\leftarrow$

## *Exemplos (representação gráfica):*



# *Introdução*

*Notação*

$G = (V, E)$ ou $G = (V, A)$

# *Introdução*

*Notação*

$G = (V, E)$ ou $G = (V, A)$

*Exemplo:*

$G = (V, A)$

$V = \{1, 2, 3, 4\}, \ A = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$

# *Introdução*

*Grafos*

"permitem codificar relacionamentos entre pares de objetos" [Figueiredo2010]

# *Introdução*

## *Grafos*

"permitem codificar relacionamentos entre pares de objetos" [Figueiredo2010]

- Objetos (vértices):
  Computadores, pessoas, cidades, páginas web, átomos ...
- Relacionamentos (arestas):
  Conectividade, namoro, produção, ligações entre átomos, ...

# *Exemplos de Aplicações*

| Grafo | Vértice | Aresta |
|---|---|---|
| Comunicação | computador | fibra ótica |
| Finanças | ações, moedas | transações |
| Internet | rede classe C | conexões |
| Jogos | posição no tabuleiro | movimentos permitidos |
| Redes Sociais | pessoas, atores | amizade |
| Redes de Proteína | proteína | iteração entre proteínas |

## *Exemplos de Aplicações*

### *Transporte*

- Vértices (objetos): Cidades
- Arestas (relacionamento): Rotas aéreas

# *Exemplos de Aplicações*

## ***Transporte***

- Vértices (objetos): Cidades
- Arestas (relacionamento): Rotas aéreas

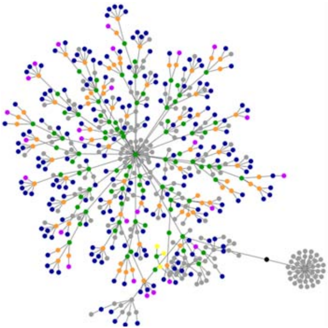
*Malha aérea das rotas operadas por empresas de aviação regional no Brasil*

# *Exemplos de Aplicações*

## ***Websites*** *- Hireráquia de Tags HTML*

- Vértices (objetos): azul(links - A tag), vermelho(TABLE,TH,TD tags), verde(DIV tag), violeta(IMG tag), amarelo(forms), laranja(BR, P e BLOCKQUOTE tags), preto(HTML tag), cinza (todas as outras tags)
- Arestas (relacionamento):

Fonte: http://www.aharef.info/static/htmlgraph/



# *Exemplos de Aplicações*

## ***Moléculas Química***

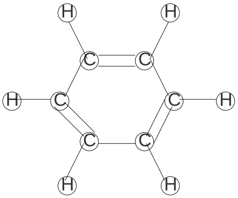
Moléculas de benzeno: contém duas ligações em algumas partes de seus átomos. É possível modelar através de um grafo ?

# Exemplos de Aplicações

## Moléculas Química

Moléculas de benzeno: contém duas ligações em algumas partes de seus átomos. É possível modelar através de um grafo ?

- Vértices (objetos): Átomos
- Arestas (relacionamento): ligações entre átomos



## *Exemplos de Aplicações*

### ***Atividade-Cronograma***

Muitos projetos requerem que algumas atividades não sejam iniciadas antes que outras sejam completadas. É possível modelar isto através de um grafo ?

# *Exemplos de Aplicações*

## ***Atividade-Cronograma***

Muitos projetos requerem que algumas atividades não sejam iniciadas antes que outras sejam completadas. É possível modelar isto através de um grafo ?

- Vértices (objetos): Atividades
- Arestas (relacionamento): Aresta do vértice $u$ para o vértice $v$ $\rightarrow$ A atividade $v$ não pode iniciar antes de $v$ ser completada.

# *Introdução*

***Abstração***

Problemas $\rightarrow$ Modelo(grafo) $\rightarrow$ <u>Algoritmo</u> $\rightarrow$ Solução

# *Introdução*

## *Alguns Problemas de Processamento de Grafos*

Existe uma rota(caminho) conectando todos os pares de cidades(vértices) ?

# Introdução

## *Alguns Problemas de Processamento de Grafos*

Qual a menor rota(caminho) entre duas cidades ?

# *Introdução*

## *Alguns Problemas de Processamento de Grafos*

Que conjuntos de vértices podem ser alcançados seguindo arestas direcionadas(arcos) a partir de cada vértice ?

# *Introdução*

## *Alguns Problemas de Processamento de Grafos*

Que conjuntos de vértices podem ser alcançados seguindo arestas direcionadas(arcos) a partir de cada vértice ?

Qual é o maior subconjunto de arestas com a propriedade que duas arestas não estão conectadas a um mesmo vértice ?

# *Introdução*

*Alguns Problemas de Processamento de Grafos*

Que conjuntos de vértices podem ser alcançados seguindo arestas direcionadas(arcos) a partir de cada vértice ?

Qual é o maior subconjunto de arestas com a propriedade que duas arestas não estão conectadas a um mesmo vértice ?

*Ex.: Emparelhar $n$ estudantes a $n$ vagas disponíveis em instituições de ensino.*

- Vértices: Estudantes e Instituições
- Arestas: Conectam um vértice de um tipo(Estudantes) a um de outro tipo(Instituições)

# *Introdução*

*Alguns Problemas de intratáveis em Processamento de Grafos*

- O grafo contém um ciclo hamiltoniano, ou seja, existe um ciclo que contém todos vértices sem repetí-los ?

# *Introdução*

*Alguns Problemas de intratáveis em Processamento de Grafos*

- O grafo contém um ciclo hamiltoniano, ou seja, existe um ciclo que contém todos vértices sem repetí-los ?
- Qual o tamanho do maior CLIQUE em um dado grafo ?

## *Tipos de Grafos*

*Orientado ou direcionado (Dígrafo):* É um grafo em que cada uma de suas arestas (arco) tem uma orientação.

Par ordenado, ou seja, $(a, b) \neq (b, a)$

## *Tipos de Grafos*

*Orientado ou direcionado (Dígrafo):* É um grafo em que cada uma de suas arestas (arco) tem uma orientação.

Par ordenado, ou seja, $(a, b) \neq (b, a)$

*Não orientado (não direcionado)*

Par não ordenado, ou seja, $(a, b) = (b, a)$

## *Vértices Adjacentes*

*Def.:* Seja $G = (V, A)$ e dois vértice $a$ e $b$. $a$ é adjacente a $b$ se existe uma aresta $(a, b)$ no conjunto A.

# *Vértices Adjacentes*

*Def.:* Seja $G = (V, A)$ e dois vértice $a$ e $b$. $a$ é adjacente a $b$ se existe uma aresta $(a, b)$ no conjunto A.

*Ex.:*
$G = (V, A)$
$V = \{3, 7, 11, 13\}$
$A = \{(3, 7), (3, 11), (7, 11), (11, 13)\}$

Os vértices 13 e 3 são adjacentes ?
Os vértices 3 e 7 são adjacentes ?

## *Laços e Arestas Paralelas*

*Laço(selflop):* É uma aresta com extremidades em um mesmo vértice.
Ex.: Seja um vértice $a$, o laço neste vértice é $(a, a)$.

# *Laços e Arestas Paralelas*

*Laço(selflop):* É uma aresta com extremidades em um mesmo vértice.
Ex.: Seja um vértice $a$, o laço neste vértice é $(a, a)$.

*Arestas paralelas (multiplas arestas):* É uma coleção de duas ou mais arestas tendo os mesmos vértices como extremidade.

# *Grafo Simples, Pseudografo e Multigrafo*

*Grafo Simples* Seja $G = (V, A)$ um grafo, $G$ não possui laços ou arestas paralelas.

# *Grafo Simples, Pseudografo e Multigrafo*

*Grafo Simples* Seja $G = (V, A)$ um grafo, $G$ não possui laços ou arestas paralelas.

*Pseudografo* Seja $G = (V, A)$ um grafo, $G$ é um pseudografo se ele possuir no mínimo um laço.

## *Grafo Simples, Pseudografo e Multigrafo*

*Grafo Simples* Seja $G = (V, A)$ um grafo, $G$ não possui laços ou arestas paralelas.

*Pseudografo* Seja $G = (V, A)$ um grafo, $G$ é um pseudografo se ele possuir no mínimo um laço.

*Multigrafo* Seja $G = (V, A)$ um grafo não direcionado que possui no mínimo duas arestas paralelas, $G$ é um multigrafo.

## *Grafo Simples, Pseudografo e Multigrafo*

*Grafo Simples* Seja $G = (V, A)$ um grafo, $G$ não possui laços ou arestas paralelas.

*Pseudografo* Seja $G = (V, A)$ um grafo, $G$ é um pseudografo se ele possuir no mínimo um laço.

*Multigrafo* Seja $G = (V, A)$ um grafo não direcionado que possui no mínimo duas arestas paralelas, $G$ é um multigrafo.

*Multigrafo direcionado* Seja $G = (V, A)$ um grafo direcionado que possui dois ou mais arcos na mesma direção e ligando os mesmos vértices, $G$ é um multigrafo direcionado.

## *Grafo Reflexivo, Vazio e Nulo*

*Grafo Reflexivo* Seja $G = (V, A)$ um pseudografo, $G$ é um grafo reflexivo se todos os vértices possuírem um laço associado.

## *Grafo Reflexivo, Vazio e Nulo*

*Grafo Reflexivo* Seja $G = (V, A)$ um pseudografo, $G$ é um grafo reflexivo se todos os vértices possuírem um laço associado.

*Grafo Vazio* Seja $G = (V, A)$ um grafo, $G$ é vazio se contém somente vértices.

# *Grafo Reflexivo, Vazio e Nulo*

*Grafo Reflexivo* Seja $G = (V, A)$ um pseudografo, $G$ é um grafo reflexivo se todos os vértices possuírem um laço associado.

*Grafo Vazio* Seja $G = (V, A)$ um grafo, $G$ é vazio se contém somente vértices.

*Grafo Nulo* Seja $G = (V, A)$ um grafo, $G$ é nulo se não possui vértices.

## Grafo Reflexivo, Vazio e Nulo

*Grafo Reflexivo* Seja $G = (V, A)$ um pseudografo, $G$ é um grafo reflexivo se todos os vértices possuírem um laço associado.

*Grafo Vazio* Seja $G = (V, A)$ um grafo, $G$ é vazio se contém somente vértices.

*Grafo Nulo* Seja $G = (V, A)$ um grafo, $G$ é nulo se não possui vértices.

*Grafo Trivial* Seja $G = (V, A)$ um grafo, $G$ é trivial se possuir somente um vértice.

# *Hipergrafo*

*Hipergrafo*

Um hipergrafo $H$ é um par $H = (V, \epsilon)$, onde $V$ representa o conjunto de vértice de $H$ e $\epsilon$ é uma família das partes de $V$.

Ou seja, "um grafo que possui uma ou mais arestas que correspondam a relações que envolvam mais de dois vértices"

# *Hipergrafo*

*Hipergrafo*

Um hipergrafo $H$ é um par $H = (V, \epsilon)$, onde $V$ representa o conjunto de vértice de $H$ e $\epsilon$ é uma família das partes de $V$.

Ou seja, "um grafo que possui uma ou mais arestas que correspondam a relações que envolvam mais de dois vértices"

*Exemplo*

Seja $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $\epsilon = \{(1, 2, 3); (3, 4); (4, 5, 6)\}$

## *Grau*

### *Grau de um vértice*

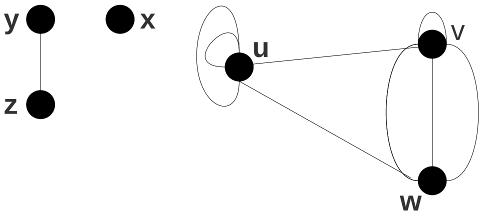
Seja $G = (V, A)$ um grafo e $v$ um vértice, o grau de $v$, $grau(v)$, é o número de arestas incidentes em $v$.

## *Grau*

*Grau de um vértice*

Seja $G = (V, A)$ um grafo e $v$ um vértice, o grau de $v$, $grau(v)$, é o número de arestas incidentes em $v$.

*Ex.:*

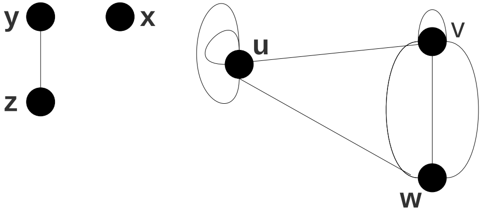


# Grau

*Grau de um vértice*

Seja $G = (V, A)$ um grafo e $v$ um vértice, o grau de $v$, $grau(v)$, é o número de arestas incidentes em $v$.

*Ex.:*




Obs.: No caso de grafos direcionados, é necessário considerar o grau de entrada (ou interno) e o grau de saída (ou externo).

## *Grau*

*Seja* $G = (V, A)$ *e* $n = |V|$*:*

- Qual o grau mínimo de um vértice ?
- Qual o grau máximo de um vértice em um grafo simples ?

## *Número de Arestas*

*Seja um grafo $G = (V, A)$:*

$n = |V|$ é o número de Vértices de $G$.
$m = |A|$ é o número de Arestas de $G$.

Qual o número máximo de arestas em um grafo simples ?

## *Número de Arestas*

*Seja um grafo $G = (V, A)$:*

$n = |V|$ é o número de Vértices de $G$.
$m = |A|$ é o número de Arestas de $G$.

Qual o número máximo de arestas em um grafo simples ?

*Propriedade*

Um grafo simples $G$ com $n$ vértices possui no máximo $n(n-1)/2$ arestas.

## *Número de Arestas*

*Seja um grafo $G = (V, A)$:*

$n = |V|$ é o número de Vértices de $G$.
$m = |A|$ é o número de Arestas de $G$.

Qual o número máximo de arestas em um grafo simples ?

*Propriedade*

Um grafo simples $G$ com $n$ vértices possui no máximo $n(n-1)/2$ arestas.

*Prova*: $n^2$ pares de vértices incluindo $n$ laços e duas vezes o número arestas entre vértices distintos. Assim: $(n^2 - n)/2 = n(n-1)/2$

# Soma dos Graus dos Vértices

*Teorema do Aperto de mãos*

Seja $G = (V, A)$ um grafo não orientado com um número de arestas $a$, então:

$$2a = \sum_{v \in V} grau(v)$$

Prova: Ler pg.599, Teorema 1, do livro "Matemática Discreta e suas Aplicações", Rosen.

## Soma dos Graus dos Vértices

*Teorema*

Um grafo não orientado tem um número par de vértices de grau ímpar

Prova: Ler pg.599, Teorema 2, do livro "Matemática Discreta e suas Aplicações", Rosen.

## *Grafo Completo*

*Seja um grafo simples $G = (V, A)$:*

$G$ é completo se *todo* par de vértices está ligado por uma aresta.

*Notação*

Denota-se $K_n$ um grafo completo contendo $n$ vértices.

# *Grafo Completo*

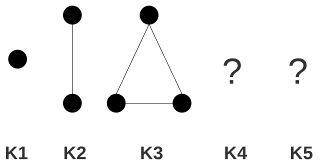
*Seja um grafo simples $G = (V, A)$:*

$G$ é completo se *todo* par de vértices está ligado por uma aresta.

*Notação*

Denota-se $K_n$ um grafo completo contendo $n$ vértices.

*Ex.:*



## *Grafo Bipartido*

*Seja um grafo* $G = (V, A)$*:*

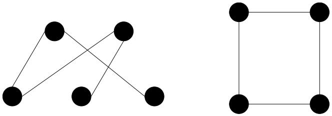
$G$ é um *grafo bipartido* se seu conjunto de vértices $V$ pode ser particionado em dois subconjuntos $U$ e $W$, tal que cada aresta de $G$ está ligada a um vértice em $U$ e um vértice em $W$.

# *Grafo Bipartido*

*Seja um grafo* $G = (V, A)$*:*

$G$ é um *grafo bipartido* se seu conjunto de vértices $V$ pode ser particionado em dois subconjuntos $U$ e $W$, tal que cada aresta de $G$ está ligada a um vértice em $U$ e um vértice em $W$.

*Ex.:*

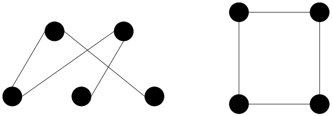


# *Grafo Bipartido*

*Seja um grafo $G = (V, A)$:*

$G$ é um *grafo bipartido* se seu conjunto de vértices $V$ pode ser particionado em dois subconjuntos $U$ e $W$, tal que cada aresta de $G$ está ligada a um vértice em $U$ e um vértice em $W$.

*Ex.:*



*Proposição*

Seguindo a definição, um grafo bipartido não pode ter qualquer laço.

## Grafo Bipartido Completo

*Seja um grafo simples $G = (V, A)$:*

$G$ é um *grafo bipartido completo* se todo vértice em um subconjunto bipartido está ligado a todo vértice no outro conjunto bipartido.

*Notação*

Denota-se $K_{m,n}$ um grafo completo bipartido contendo $m$ vértices em um subconjunto bipartido e $n$ vértices no outro subconjunto.

# *Grafo Bipartido Completo*

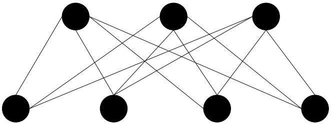
*Seja um grafo simples $G = (V, A)$:*

$G$ é um *grafo bipartido completo* se todo vértice em um subconjunto bipartido está ligado a todo vértice no outro conjunto bipartido.

*Notação*

Denota-se $K_{m,n}$ um grafo completo bipartido contendo $m$ vértices em um subconjunto bipartido e $n$ vértices no outro subconjunto.

*Ex.:*



**K3,4**

## *Grafo Regular*

*Seja um grafo $G = (V, A)$:*

$G$ é um *grafo regular* se todos os vértices possuirem o mesmo grau.

*Notação*

Denota-se **k-regular** um grafo de grau $k$ comum a todos os vértices.

# *Grafo Regular*

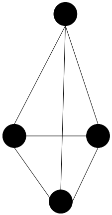
*Seja um grafo $G = (V, A)$:*

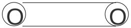
$G$ é um *grafo regular* se todos os vértices possuirem o mesmo grau.

*Notação*

Denota-se **k-regular** um grafo de grau $k$ comum a todos os vértices.

*Ex.:*

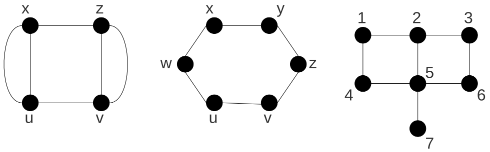




## *Exercício*

*1)*

Determine se os seguintes grafos são bipartidos. Indique os subconjuntos de bipartição ou explique o motivo do grafo não ser bipartido.




*2)*

Seja um grafo $G = (V, A)$ r-regular, qual o número de arestas de $G$ ? Justifique sua resposta.

## *Subgrafos*

Sejam dois grafo $G = (V_1, A_1)$ e $H = (V_2, A_2)$:

*Subgrafo:*

$H$ é subgrafo de $G$ é quando os vértices e arestas de $H$ estão em $G$, ou seja, $V_2 \subseteq V_1$ e $A_2 \subseteq A_1$, e uma aresta $(i, j) \in A_2$ se $i, j \in V_2$.

# *Subgrafos*

Sejam dois grafo $G = (V_1, A_1)$ e $H = (V_2, A_2)$:

*Subgrafo:*

$H$ é <u>subgrafo</u> de $G$ é quando os vértices e arestas de $H$ estão em $G$, ou seja, $V_2 \subseteq V_1$ e $A_2 \subseteq A_1$, e uma aresta $(i, j) \in A_2$ se $i, j \in V_2$.

*Subgrafo Próprio:*

$H$ é <u>subgrafo próprio</u> de $G$ se $V_2 \subseteq V_1$ e $A_2 \subset A_1$ <u>OU</u> $V_2 \subset V_1$ e $A_2 \subseteq A_1$; e uma aresta $(i, j) \in A_2$ se $i, j \in V_2$.

## *Subgrafos*

Sejam dois grafo $G = (V_1, A_1)$ e $H = (V_2, A_2)$:

*Subgrafo:*

$H$ é subgrafo de $G$ é quando os vértices e arestas de $H$ estão em $G$, ou seja, $V_2 \subseteq V_1$ e $A_2 \subseteq A_1$, e uma aresta $(i, j) \in A_2$ se $i, j \in V_2$.

*Subgrafo Próprio:*

$H$ é subgrafo próprio de $G$ se $V_2 \subseteq V_1$ e $A_2 \subset A_1$ OU $V_2 \subset V_1$ e $A_2 \subseteq A_1$; e uma aresta $(i, j) \in A_2$ se $i, j \in V_2$.

*Subgrafo Parcial:*

$H$ é subgrafo parcial de $G$ se $V_2 = V_1$ e $A_2 \subseteq A_1$, e uma aresta $(i, j) \in A_2$ se $i, j \in V_2$.

Obs.: [Goldbarg] Um grafo é um subgrafo parcial dele mesmo.

## Subgrafos

*Subgrafo Induzido (critério alternativo)*

Seja $H = (V_2, A_2)$ um subgrafo de $G = (V_1, A_1)$. $H$ é um *subgrafo induzido* de $G$ se uma aresta entre dois vértices de $V_2$ existe, se e somente se, essa aresta também existir entre dois vértices de $V_1$.

# *Subgrafos*

*Subgrafo Induzido (critério alternativo)*

Seja $H = (V_2, A_2)$ um subgrafo de $G = (V_1, A_1)$. $H$ é um *subgrafo induzido* de $G$ se uma aresta entre dois vértices de $V_2$ existe, se e somente se, essa aresta também existir entre dois vértices de $V_1$.

*Subgrafo Abrangente (Gerador)*

Seja $H = (V_2, A_2)$ um subgrafo de $G = (V_1, A_1)$. $H$ é um subgrafo abrangente de $G$ se $V_1 = V_2$. Ou seja, $A_2 \subseteq A_1$

## *Subgrafos*

*Subgrafo Induzido (critério alternativo)*

Seja $H = (V_2, A_2)$ um subgrafo de $G = (V_1, A_1)$. $H$ é um *subgrafo induzido* de $G$ se uma aresta entre dois vértices de $V_2$ existe, se e somente se, essa aresta também existir entre dois vértices de $V_1$.

*Subgrafo Abrangente (Gerador)*

Seja $H = (V_2, A_2)$ um subgrafo de $G = (V_1, A_1)$. $H$ é um subgrafo abrangente de $G$ se $V_1 = V_2$. Ou seja, $A_2 \subseteq A_1$

Um subgrafo gerador = um subgrafo parcial de $G$

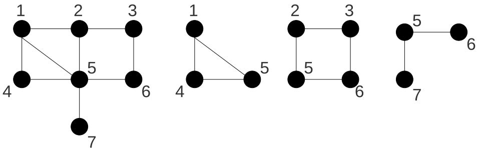
## *Clique*

Seja um grafo $G = (V, A)$, denota-se *clique* um subgrafo induzido de $G$ que também é completo.

# *Clique*

Seja um grafo $G = (V, A)$, denota-se *clique* um subgrafo induzido de $G$ que também é completo.

*Quais dos seguintes subgrafos é um clique do grafo a esquerda ?*



# *Clique*

*Clique Maximal*

Uma clique é maximal se ela não for um subgrafo próprio de nenhuma outra.

*Clique Máximo*

Uma clique é máxima se não houver outra com cardinalidade maior.

## *Grafo Ponderado (ou valorado)*

*Def.:*

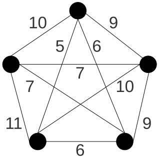
Um grafo ponderado é um grafo onde cada aresta (ou vértice) é atribuído um valor numérico, ou seja, o peso da aresta (ou do vértice).

# *Grafo Ponderado (ou valorado)*

*Def.:*

Um grafo ponderado é um grafo onde cada aresta (ou vértice) é atribuído um valor numérico, ou seja, o peso da aresta (ou do vértice).

*Ex.:*

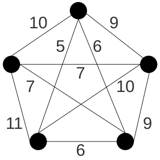


## *Grafo Ponderado (ou valorado)*

*Def.:*

Um grafo ponderado é um grafo onde cada aresta (ou vértice) é atribuído um valor numérico, ou seja, o peso da aresta (ou do vértice).

*Ex.:*




*Exemplos de valores(peso):*

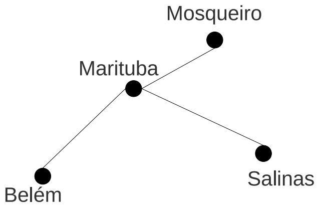
(arestas) Custo de transporte, tempo de viagem, distância, limites em um fluxo - (vértices) Custo de produção.

# *Grafo Rotulado*

*Def.:*

Seja um grafo $G = (V, A)$, $G$ é um grafo rotulado se cada vértice (ou aresta) possui uma identificação (ou rótulo).

*Ex.:*



# *Bibliografia*


- LEISERSON , Charles E.; STEIN, C.; RIVEST, Ronald L., CORMEN, Thomas H. **Algoritmos: Teoria e Prática**, 1ª edição, Campus, 2002 (caps. 22 à 26);
- GROSS, Jonthan L., YELLEN, Jay. **Graph Theory and Its Applications**, Second Edition, Chapman and Hall/CRC, 2005.
- SEDGEWICK, Robert. **Algorithms in Java, Part 5: Graph Algorithms**, 3rd Edition, Addison-Wesley Professional, 2003;
- Goldbarg M.; Goldbarg E.; **Grafos: Conceitos, algoritmos e aplicações**, 1ª edição, Campus, 2012;