SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE ESTATÍSTICA

DISCIPLINA:

PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA

Esta apostila contém uma compilação de textos de diversos autores, sendo elaborada com o objetivo exclusivo de ser um apoio didático para o aluno em sala de aula ministrada para cursos da Universidade Federal do Pará e não substitui a consulta a livros textos. O objetivo é evitar que os alunos copiem as aulas e assim se concentrarem em entender o conteúdo da disciplina.

Organização e elaboração:
Profa. Marina Y. Toma
FAEST/ICEN/UFPA

Belém - PA

2024

1. INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DAS PROBABILIDADES

1.1 MODELO MATEMÁTICO

No estudo dos fenômenos observáveis é necessário a construção de um modelo matemático, que deve ser simples e ignore os pormenores irrelevantes. Para verificar a validade do modelo construído, realiza-se um experimento. O experimento consiste na obtenção de dados sobre o fenômeno observado, que serão comparados com os resultados previstos pelo modelo, que pode ser determinístico ou aleatório.

No experimento determinístico os dados obtidos são invariáveis se as condições de realização do experimento são mantidas sem alterações. Neste caso, as condições sob as quais o experimento é realizado determinam o resultado do mesmo. Por exemplo, as leis da física (I = E/R, isto é, a Lei de Ohm). O modelo determina o valor de I tão logo os valores de E e R sejam fornecidos.

Nos experimentos aleatórios os resultados não são determinados unicamente pelas condições em que eles são realizados, e variam de uma realização para outra, mesmo que as condições de realização permaneçam as mesmas. Estes experimentos requerem um modelo matemático diferente de um modelo determinístico para descrevê-los, sendo estes chamados de modelos probabilísticos. Portanto, precisaremos construir um modelo matemático para representar experimentos aleatórios. Isto será feito em duas etapas: inicialmente descreveremos para cada experimento aleatório o conjunto de seus resultados possíveis, e em seguida procuraremos atribuir pesos a cada resultado, que reflitam a sua maior ou menor chance de ocorrer quando o experimento é realizado.

Construção de um modelo probabilístico:

As características gerais de um experimento aleatório são:

a) Cada experimento poderá ser repetido indefinidamente sob condições essencialmente inalteradas;

b) Embora não seja possível afirmar qual resultado particular vai ocorrer, é possível descrever todos os possíveis resultados do experimento;

c) Quando o experimento for repetido diversas vezes, os resultados individuais parecerão ocorrer aleatoriamente, mas quando o experimento for repetido um grande número de vezes, uma configuração definida ou regularidade surgirá. É essa regularidade que permite a construção de um modelo probabilístico.

1.2 INTRODUÇÃO AOS CONJUNTOS

Um conjunto é uma coleção de objetos, representado por letra maiúscula. Há três maneiras de descrever que objetos estão contidos no conjunto A:

a) Podemos fazer uma lista dos elementos de A. Por exemplo, $A = \{1, 2, 3, 4\}$ descreve o conjunto formado pelos inteiros positivos 1, 2, 3, 4.

b) Por meio de palavras: A é formado de todos os números reais entre 0 e 1, inclusive.

c) Podemos escrever também: $A = \{x/\ 0 \leq x \leq 1\}$ isto é, A é o conjunto de todos os valores de x, onde x é um número real entre 0 e 1, inclusive.

Os objetos que individualmente formam a coleção ou conjunto A são denominados membros ou elementos de A. Quando "a" for um elemento de A, escrevemos $a \in A$, e quando "a" não for um elemento de A escrevemos $a \notin A$.

Definimos o conjunto vazio ou nulo como o conjunto que não contenha qualquer elemento.

Considerando o conjunto fundamental (universo) U e dois conjuntos A e B, temos:

a) Ser elemento de A implique ser elemento de B, diremos que A é um subconjunto de B, e escrevemos $A \subset B$. Analogamente, $B \subset A$.

b) Dois conjuntos constituem o mesmo conjunto (A=B), se, e somente se, $A \subset B$ e $B \subset A$. Assim, dois conjuntos serão iguais se, e somente se, eles contiverem os mesmos elementos.

c) Para todo conjunto A, considerado na composição de U, temos $\phi \subset A$.

d) Para todo conjunto A, considerado na composição de U, teremos $A \subset U$.

Combinação de Conjuntos: Sejam dois conjuntos A e B de um universo U.

a) Definiremos o conjunto C como a união de A e B (ou soma) como:

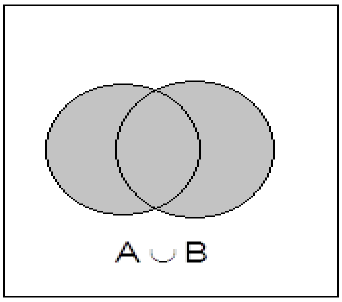
$C = \{x/x \in A \ \boldsymbol{ou} \ x \in B \ (ou\ ambos)\}$. Escrevemos $C = A \cup B$. Então, C será formado de todos os elementos que estão em A, **ou** em B, **ou** em ambos.

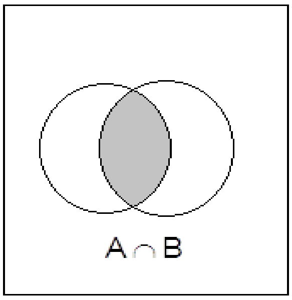
b) Definiremos D como a intersecção de A e B (ou produto de A e B) como:

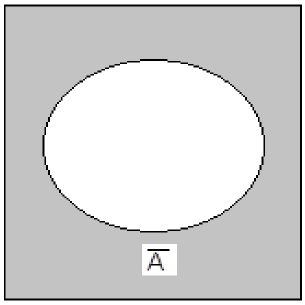
$D = \{x/x \in A \ \boldsymbol{e} \ x \in B\}$. Escrevemos $D = A \cap B$. Então, D será formado por todos os elementos que estão em A **e** que estão em B.

c) O conjunto denotado por $\overline{A}$ ou A^c constituído por todos os elementos que não estejam em A (mas que estejam no conjunto fundamental U) é denominado complemento de A. Isto é, $\bar{A} = \{x/x \notin \mathrm{A}\}$.

Diagrama de Venn







Conjuntos Equivalentes:

a) $A \cup B = B \cup A$

b) $A \cap B = B \cap A$

c) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

d) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

e) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

f) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

g) $A \cap \phi = \phi$

h) $A \cup \phi = A$

i) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

j) $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

k) $(A^C)^C = A$

Definição: Sejam dois conjuntos A e B. Denominamos produto cartesiano de A e B, AxB, o conjunto $\{(a, b), a \in A, b \in B\}$, isto é, o conjunto de todos os pares ordenados nos quais o primeiro elemento é tirado de A e o segundo de B.

Generalizando: Se $A_1, A_2, \dots, A_n$ forem conjuntos, então:

$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n), a_i \in A_i\}$, conjunto de todas as ênuplas ordenadas.

Exemplo 1.3. Suponha-se que A = {1, 2, 3}; B = {1, 2, 3, 4}.

Então A x B = {(1, 1), (1, 2),..., (1, 4), (2,1)... , (2, 4), (3,1), ... , (3,4)}.

2 ELEMENTOS DA TEORIA DAS PROBABILIDADES

A teoria da probabilidade tem sido desenvolvida de forma constante desde o século XVII e tem sido aplicada em diversas áreas de estudo. Muitos pesquisadores estão engajados na descoberta e estabelecimento de novas aplicações de probabilidade nas diversas áreas como medicina, meteorologia, física, marketing, comportamento humano, no planejamento de sistemas de computação, finanças, entre outras.

I - EXPERIMENTOS ALEATÓRIO (ε)

São aqueles que, repetidos em idênticas condições, produzem resultados diferentes.

Existem dois tipos de experimentos:

i) Determinísticos: Os resultados são sempre os mesmos e determinados pelas condições sob as quais o procedimento seja executado.

Exemplo: Ponto de ebulição da água, ponto de congelamento da água, Leis da Física.

ii) Não-Determinísticos (Probabilístico ou Aleatório): Os resultados podem variar, mesmo quando são executados sob as mesmas condições. Embora não saibamos qual o resultado que irá ocorrer num experimento em geral, conseguimos descrever o conjunto de todos os resultados possíveis que podem ocorrer. As variações de resultados, de experimento para experimento, são devidas a uma multiplicidade de causas que não podemos controlar que chamamos ACASO.

Exemplos de Experimentos Aleatórios Não-Determinísticos:

a) Lançar uma moeda e observar a face de cima;

b) Lançar um dado e observar o número da face de cima;

c) Lançar duas moedas e observar as sequências de caras e coroas obtidas;

d) Lançar duas moedas e observar o número de caras obtidas;

e) De um lote de 80 peças boas e 20 defeituosas, selecionar 10 peças e observar o número de peças defeituosas;

f) De uma urna contendo 3 bolas vermelhas e 2 bolas brancas, selecionar uma bola e observar sua cor;

g) De um baralho com 52 cartas, selecionar uma carta e observar seu naipe;

h) Numa cidade onde 10% dos habitantes possuem determinada moléstia, selecionar 20 pessoas e observar o número de portadores da moléstia;

i) Observar o tempo que um aluno gasta para ir de ônibus, de sua casa até a UFPA.

II - ESPAÇO AMOSTRAL

Chamamos de ESPAÇO AMOSTRAL e indicamos por S, um conjunto formado por todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.

Exemplos de Espaço Amostral

a) Lançar uma moeda e observar a face voltada para cima.

Espaço amostral: $S = \{C, \bar{C}\}$, onde C representa cara e $\bar{C}$ coroa.

b) Lançar um dado e anotar o número da face voltada para cima. S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

c) Lançar duas moedas e observar as sequências de caras e coroas obtidas.

$S = \{(C, C);\ (C, \bar{C});\ (\bar{C}, C); (\bar{C}, \bar{C})\}$

d) Lançar duas moedas e observar o número de caras obtidas. S = {0, 1, 2}

e) Uma moeda é lançada até que o resultado cara (C) ocorra pela primeira vez e observa-se em qual lançamento esse fato ocorre. S = {1, 2, 3, 4, ...}

f) De uma urna contendo 3 bolas vermelhas (V), 2 bolas brancas (B) e 5 bolas azuis (A), retira-se uma bola e observar sua cor. S = {V, B, A}.

I - Espaço Amostral Finito

Nos ocuparemos unicamente de experimentos onde o espaço amostral S seja formado de um número finito de elementos. Isto é, admitiremos que S possa ser escrita como $S = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$

III - EVENTO

Consideramos um experimento aleatório, cujo espaço amostral é S. Chamamos de EVENTO todo subconjunto de S. Diremos que um evento A ocorre se realizado o experimento, o resultado obtido for pertencente a A. Os eventos que possuem um único elemento (A = 1) serão chamados eventos elementares.

Exemplos:

1) Um dado é lançado e observa-se o número da face de cima. S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Alguns eventos:

A = Ocorrência de um número ímpar.	A = {1, 3, 5}
B = Ocorrência de um número par.	B = {2, 4, 6}
C = Ocorrência de um número menor que 4.	C = {1, 2, 3}
D = Ocorrência de um número menor que 7.	D = {1, 2, 3, 4, 5, 6} = S
E = Ocorrência de um número maior que 7.	E = ∅

2) Lançar uma moeda 3 vezes, e observar a sequência de caras (C) e coroas ($\bar{C}$).

S = {(C, C, C); ($C, C, \bar{C}$); (C, $\bar{C}$, C); ($\bar{C}$, C, C); (C, $\bar{C}$, $\bar{C}$); ($\bar{C}$, C, $\bar{C}$); ($\bar{C}$, $\bar{C}$, C); ($\bar{C}$, $\bar{C}$, $\bar{C}$)}

Alguns eventos:

A = Ocorrer cara (C) no 1º lançamento. A = {(C,C,C); (C,C, $\bar{C}$); (C, $\bar{C}$,C); (C, $\bar{C}$, $\bar{C}$)}

B = Ocorrer exatamente uma coroa ($\bar{C}$). B = {(C,C, $\bar{C}$); (C, $\bar{C}$,C); ($\bar{C}$,C,C)}

Combinações de Eventos

Se usarmos certas operações entre conjuntos (eventos) podemos combinar conjuntos (eventos), para formar novos conjuntos (eventos).

a) União de dois eventos: Sejam A e B dois eventos. Então, A ∪ B será também um evento que ocorrerá se, e somente se, A ou B (ou ambos) ocorrem. Dizemos que $A \cup B$ é a união entre o evento A e o evento B.

b) Intersecção de dois eventos: Sejam A e B dois eventos. Então, A ∩ B será também um evento que ocorrerá se, e somente se, A e B ocorrem simultaneamente. Dizemos que A ∩ B é a intersecção entre o evento A e o evento B.

Em particular, se A ∩ B = ∅, A e B são chamados mutuamente exclusivos, ou seja, eles não podem ocorrer juntos.

c) Complementar de um evento: Seja A um evento. Então A^c será também um evento que ocorrerá se, e somente se, A não ocorrer. Dizemos que A^c é o evento complementar de A.

Exemplo: Um dado é lançado e observado o número da face de cima.

S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Sejam os eventos:

A = Ocorrência de um número par.	A = {2, 4, 6}
B = Ocorrência de um número maior ou igual a 4.	B = {4, 5, 6}
C = Ocorrência de um número ímpar.	C = {1, 3, 5}

Então, podemos ter:

i) Ocorrência de um número par ou maior ou igual a 4.	$A \cup B$ = {2, 4, 5, 6}
ii) Ocorrência de um número par e maior ou igual a 4.	$A \cap B$ = {4, 6}
iii) Ocorrência de um número par e Ocorrência de um número ímpar.	$A \cap C = \emptyset$
iv) Ocorrência de um número menor que 4.	B^c = {1, 2, 3}

d) União de n eventos: Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ uma sequência de eventos. Então: $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ será também um evento que ocorrerá se, e somente se, pelo menos um dos eventos A_i´s ocorrerem. Dizemos que $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ é a união dos eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

e) Intersecção de n eventos: Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$uma sequência de eventos. Então: $\bigcap_{i=1}^{n} = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ será também um evento que ocorrerá se, e somente se, todos os eventos A_i´s ocorrerem simultaneamente.

IV - FREQUÊNCIA RELATIVA

Num experimento aleatório, embora não saibamos qual o evento que irá ocorrer, sabemos que alguns eventos ocorrem frequentemente e outros, raramente. Desejamos então, associar aos eventos, números que deem uma indicação quantitativa da ocorrência dos mesmos, quando o experimento é repetido muitas vezes, nas mesmas condições. Para isso vamos definir frequência relativa de um evento.

Consideremos um experimento aleatório com espaço amostral S finito, isto é,

$$S = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$$

Suponhamos que o experimento seja repetido N vezes, nas mesmas condições. Sejam n_i o número de vezes que ocorre o evento elementar a_i. Definimos frequência relativa do evento $\{a_i\}$ como sendo o número f_i, tal que: $f_i = n_i/N$, $\forall_i$ ε {1, 2, ..., k}.

Por exemplo, se lançarmos um dado 100 vezes (N = 100) e observarmos o número 2 (evento 2) 18 vezes, então, a frequência relativa desse evento elementar será:

$$f_2 = 18/100 = 0{,}18$$

A frequência relativa possui as seguintes propriedades:

a) $0 < f_i < 1 \quad \forall_i$, pois $0 < n_i / N < 1$

b) $f_1 + f_2 + ... + f_k = 1$ pois $n_1 / N + n_2 / N + ... + n_k / N = N/N = 1$

c) Se A é um evento de S (A ≠ ∅), a frequência relativa do evento A (f_A) é o número de vezes que ocorre A, dividido por N.

d) Verifica-se experimentalmente que a frequência relativa tende a 'estabilizar' em torno de algum valor bem definido, quando o número de repetições do experimento é suficientemente grande.

V - NOÇÕES DE PROBABILIDADE

Já vimos que a frequência relativa nos dá uma informação quantitativa da ocorrência de um evento, quando o experimento é realizado um grande número de vezes. Quando o nº de repetições do experimento é muito grande, a frequência relativa tende a se estabilizar 'próxima' a um número. A esse número denominamos probabilidade do evento. $[P(A) = \lim f_A /N$ quando $N \to \infty]$.

A cada evento simples $\{a_i\}$ associaremos um número $\boldsymbol{p_i}$, denominada a probabilidade de $\{a_i\}$ que satisfaça:

a) $p_i \geq 0$, i = 1, 2, ... , k;

b) $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = 1$.

Resultados Igualmente Prováveis (Verossímeis)

Se todos os k resultados possíveis forem igualmente prováveis, segue-se cada probabilidade será $p_i = 1/k$. Assim, a condição $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = 1$ torna-se $k.p_i =$

1 para todo i. Disso decorre que, para qualquer evento A formado de r resultados, teremos P(A) = r / k.

Este método de avaliar P(A) é frequentemente anunciado da seguinte maneira:

$$P(A)=\frac{\text{Número total de casos favoráveis a A pelos quais ε pode ocorrer}}{\text{Número total de casos pelos quais ε pode ocorrer}}=\frac{n(A)}{n(\varepsilon)}$$

(não pode ser considerada como uma definição geral de probabilidade, ela é apenas uma consequência da suposição dos resultados serem equiprováveis, e pode ser aplicada sempre que a suposição for atendida).

Exemplo: No lançamento de duas moedas honestas temos $S=\{CC,C\bar{C},\bar{C}C,\bar{C}\bar{C}\}$ (resultados equiprováveis)

Evento A: ocorre 1 cara ⇒ $A=\{\,C\bar{C},\bar{C}C\}\Rightarrow P(A)=P(C\bar{C})+P(\bar{C}C)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

Se considerarmos o espaço amostral como o número de caras obtidas, nos 2 lançamentos, teremos $S=\{0,1,2\}$. Nesse caso temos $P(0)=\frac{1}{4}=P(2)$ e $P(1)=\frac{2}{4}$

Definição: Seja ε um experimento e S um espaço amostral associado a ε. A cada evento A associaremos um número real representado por P(A) e denominado probabilidade de A, que satisfaz as propriedades:

1) 0 ≤ P(A) ≤ 1,

2) P(S) = 1,

3) Se A e B forem eventos mutuamente excludentes (ou exclusivos):

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

4) Se $A_1,\ A_2,\ldots,\ A_n$ forem, dois a dois, eventos mutuamente exclusivos, então:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$$

Teoremas:

Teorema 1: Se o evento A = ∅, então P(∅) = 0.

Dem.: Para qualquer evento *A*, podemos escrever $A=A\cup\emptyset$, e como A e $\emptyset$ são eventos mutuamente exclusivos, temos pela propriedade 4 que:

$$P(A)=P(\mathrm{A}\cup\emptyset)=\mathrm{P(A)}+\mathrm{P}(\emptyset)\Rightarrow\mathrm{P}(\emptyset)=0$$

Teorema 2: Se A^C for o evento complementar de A, então $P(A^C) = 1 - P(\mathrm{A})$.

Dem.: Podemos escrever $S = A \cup A^C$, e das propriedades 2 e 4 temos:

$$1 = P(S) = P(A \cup A^C) = \mathrm{P(A)} + P(A^C) \Rightarrow 1 - \mathrm{P(A)} = \mathrm{P}(A^C)$$

Teorema 3: Se A e B são dois eventos quaisquer, então:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Dem.: Podemos decompor os eventos A∪B e B como:

$A \cup B = A \cup (B \cap A^C)$ e $B = (A \cap B) \cup (B \cap A^C)$

Pela propriedade 3, tem-se:

$$P(A \cup B) = P\big(A \cup (B \cap A^C)\big) = P(A) + P(B \cap A^C) \qquad (1)$$

$$P(B) = P\big((A \cap B) \cup (B \cap A^C)\big) = P((A \cap B) + P(B \cap A^C) \qquad (2)$$

De (2) temos $P(B \cap A^C) = P(B) - P(A \cap B)$, e substituindo em (1) chega-se ao resultado.

Teorema 4: Se A, B e C forem três eventos quaisquer, então:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Generalizando: Sejam $A_1, A_2, ..., A_n$, eventos quaisquer. Então:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j=2}^{n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k=3}^{n} P\big(A_i \cap A_j \cap A_k\big) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_k)$$

Teorema 5: Se $A \subset B$, então: $P(A) \leq P(B)$.

Dem.: Decompor B em dois eventos mutuamente excludentes: $B = A \cup (B \cap A^C)$

Aplicando a propriedade 3, $P(B) = A \cup (B \cap A^C) = P(A) + P(B \cap A^C)$. Como $P(B \cap A^C) \geq 0 \Rightarrow P(B) \geq P(A)$.

Exemplo: Duas máquinas, tipos I e II, são colocados em teste por 10 mil horas. A probabilidade de que um erro de cálculo aconteça em uma máquina do tipo I é de 1/30, no tipo II é 1/80 e, em ambos é 1/1000. Qual a probabilidade de que:

a) Pelo menos um dos processadores tenha apresentado erro?

b) Nenhum processador tenha apresentado erro?

c) Apenas o processador A tenha apresentado erro?

Solução:

Definimos os eventos:

A: máquina do tipo I apresenta erro ⇒ $P(A) = 1/30$.

B: máquina do tipo II apresenta erro ⇒ $P(B) = 1/80$.

$A \cap B$: máquina do tipo I e do tipo II apresentam erro ⇒ $P(A \cap B) = 1/1000$

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 1/30 + 1/80 - 1/100 = 0{,}0448$

b) $P(A^C \cap B^C) = ?$

Como $A^C \cap B^C = (A \cup B)^C$, temos:

$P(A^C \cap B^C) = P[(A \cup B)^C] = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0{,}0448 = 0{,}9552$

c) $P(A \cap B^C) = ?$

Temos que $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^C) \Rightarrow P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^C)$.

$\Rightarrow P(A \cap B^C) = P(A) - P(A \cap B) = 1/30 - 1/1000 = 0{,}0323$

VI - MÉTODOS DE ENUMERAÇÃO

A - Regra da Multiplicação:

Suponha que o procedimento 1 possa ser realizado de n_1 maneiras e que o procedimento 2 possa ser realizado de n_2 maneiras. Suponha-se, também, que cada maneira de realizar 1 possa ser seguida por qualquer daquelas para realizar 2. Então, o procedimento formado por 1 seguido de 2 poderá ser realizado de n_1 x n_2 maneiras.

Obs: Se existir k procedimentos e o i-ésimo procedimento pode ser executado de n_i maneiras, i = 1, 2, ..., k, então, o procedimento formado por 1, seguido por 2, ..., seguido por k, poderá ser executado de n_1 x n_2 x ... x n_k maneiras.

Ex.: Em uma linha de produção, cada peça deve passar por três etapas de controle. Em cada etapa, a peça é inspecionada para determinada característica e marcada adequadamente. Na primeira etapa, três classificações são possíveis, e nas últimas duas etapas quatro classificações são possíveis. Assim, existem $3 \times 4 \times 4 = 48$ classificações pelas quais uma peça pode ser marcada.

B - Regra da Adição:

Suponha que o procedimento 1 possa ser realizado de n_1 maneiras. Admita-se que o procedimento possa ser realizado de n_2 maneiras. Além disso, suponha que não seja possível que ambos os procedimentos 1 e 2 sejam realizados em conjunto. Então, o número de maneiras pelas quais poderemos realizar ou 1 ou 2 será $n_1 + n_2$

Obs.: Se existem k procedimentos e o i-ésimo procedimento puder ser executado de n_i maneiras, i = 1, 2, ..., k, então, o número de maneiras pelas quais poderemos realizar ou o procedimento 1, ou o procedimento 2, ou ..., ou o procedimento k, é dado por $n_1 + n_2 + ... + n_k$, supondo-se que dois quaisquer deles não se possam realizar conjuntamente.

Ex.: Suponha-se que para realizar uma viagem podemos escolher entre o transporte por ônibus ou por trem. Se existem três rodovias e duas ferrovias, então existirão 3 + 2 = 5 caminhos disponíveis para a viagem.

C - Permutações e Arranjos:

a) Permutar n objetos diferentes equivale a colocá-los dentro de uma caixa com n compartimentos, em alguma ordenação:

1	2	.	.	.	n

O primeiro compartimento pode ser ocupado por qualquer uma das n maneiras, o segundo por qualquer uma das (n - 1) maneiras, ..., e o último apenas por uma maneira. Portanto, aplicando-se a regra da multiplicação, a caixa poderá ser carregada de $n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 1$ maneiras.

Definição: Sendo n um número inteiro positivo, definiremos n! = n (n -1) (n -2) ... 1 e denominamos fatorial de n. Também definimos 0! = 1. Assim, o número de permutações de n objetos diferentes é dado por ${}_nP_n = n!$

b) Considere-se n objetos diferentes. Agora queremos escolher k desses objetos, $0 \leq k \leq n$ e permutar os escolhidos. Denotaremos o nº de maneiras de fazer isso (arranjos) por ${}_nA_k$. Pelo esquema acima, paramos após o compartimento de ordem k ter sido ocupado. Pela regra da multiplicação teremos $n \times (n-1) ... \times (n-k+1)$ maneiras de escolher.

Notação matricial: ${}_nA_k = {n!}/{(n-k)!}$

D - Combinações:

Considere-se n objetos diferentes. Agora o objetivo é contar o número de maneiras de escolher k desses objetos sem considerarmos a ordem. O número de maneiras de escolher k objetos dentre n, e permutá-los é $\frac{n!}{(n-k)!}$. Seja C o número de maneiras de escolher k dentre os n, não considerando a ordem. Observe-se que, uma vez que k objetos tenham sido escolhidos, existirão k! maneiras de permutá-los. Aplicando a regra da multiplicação, juntamente com esse resultado, obtemos: $C \times k! = \frac{n!}{(n-k)!}$. Portanto, o número de maneiras de escolher k dentre n objetos diferentes, não considerando a ordem, é dada por: $C = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$ onde n é inteiro positivo e k um nº inteiro tal que $0 \leq k \leq n$.

Obs.: Para n e r $(0 \leq r \leq n)$, inteiros não-negativos, tem-se:

a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ b) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

c) $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ (Teorema Binomial)

Ex.: a) Dentre 8 pessoas, quantas comissões de 3 pessoas podem ser formadas?

b) Um grupo de 8 pessoas é formado por 5 homens e 3 mulheres. Quantas comissões de 3 pessoas podem ser constituídas, incluindo exatamente 2 homens?

Generalização: Suponha que temos N peças. Se escolhemos ao acaso n delas, sem reposição, teremos $\binom{N}{n}$ diferentes amostras possíveis, todas com a mesma probabilidade de serem escolhidas. Se as N peças forem formadas por tipo A e k_2 do tipo B (com $k_1 + k_2 = N$), então, a probabilidade de que as n peças sejam exatamente s_1 do tipo A e $(n - s_1)$ do tipo B será dada por: $P(X = s_1) = \frac{\binom{k_1}{s_1}\binom{k_2}{n-s_1}}{\binom{N}{n}}$

(denominada probabilidade hipergeométrica).

E - Permutações com Elementos Repetidos

Suponha que temos n objetos, sendo n_1 do tipo 1, n_2 do tipo 2, …, n_k do tipo k, com $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = \mathrm{n}$. Nesse caso, o número de permutações desses n objetos é dado por $\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$.

Observação**:** Suponha que temos um conjunto de n objetos, tais que $n_1$do tipo 1n_2, do tipo 2, …, n_k são do tipo *k*, com $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = \mathrm{n}$. O número de maneiras de selecionar uma amostra sem reposição de r objetos, contendo k_1 objetos do tipo 1, k_2 do tipo 2, ... , K_m do tipo *m*, com k_1+ k_2+...+$km = r$, é $\binom{n_1}{k_1}\binom{n_2}{k_2}\ldots\binom{n_m}{k_m}$

VII - PROBABILIDADE CONDICIONADA

Definição: Sejam A e B dois eventos associados ao experimento ε. Definimos P(A/B), a probabilidade condicionada do evento A, quando B tiver ocorrido, como:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ desde que } P(B) > 0.$$

Analogamente, $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$, desde que P(A) > 0.

Propriedades:

1) $0 \leq P(A/B) \leq 1$;

2) $P(S/A) = 1$;

3) $P(B_1 \cup B_2/A) = P(B_1/A) + P(B_2/A)$, se $B_1 \cap B_2 = \emptyset$

4) $P(B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k/A) = P(B_1/A) + P(B_2/A) + \ldots + P(B_k)$, se $B_i \cap B_j = \emptyset$ para i ≠ j.

Temos duas maneiras de calcular a probabilidade condicionada P(B/A):

a) Diretamente, pela consideração da probabilidade de B em relação ao espaço amostral reduzido A.

b) Pela definição, onde $P(A \cap B)$ e $P(A)$ são calculados em relação ao espaço amostral S.

Observe que $P(A \cap B) = P(B/A) \times P(A)$ ou $P(A \cap B) = P(A/B) \times P(B)$

Conhecido como o <u>teorema da multiplicação</u>.

Definição: Dizemos que $B_1, B_2, \ldots, B_k$, representam uma partição do espaço amostral S, quando:

a) $B_i \cap B_k = \emptyset$ para i ≠ k;

b) $\cup B_i = S$;

c) $P(B_i) > 0$ para todo i.

Isto é: quando o experimento é realizado um, e somente um, dos eventos B_i ocorre.

Considere A um evento qualquer referente a S, e $B_1, B_2, \dots, B_k$ uma partição de S. Portanto podemos escrever: $A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots \cup (A \cap B_k)$

Alguns dos conjuntos $A \cap B_i$ podem ser vazios e, todos os eventos são dois a dois mutuamente excludentes. Portanto, aplicando-se a propriedade da adição de eventos mutuamente excludentes teremos:

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \cdots + P(A \cap B_k)$$

Como cada termo $P(A \cap B_i)$ pode ser expresso na forma $P(A/B_i) \times P(B_i)$, obtemos o teorema da probabilidade total:

$$P(A) = P(A/B_1) \times P(B_1) + P(A/B_2) \times P(B_2) + \cdots + P(A/B_k) \times P(B_k)$$

VIII - TEOREMA DE BAYES

Considere $B_1, B_2, \dots, B_K$ uma partição de S e seja A um evento associado a ε. Aplicando-se a definição de probabilidade condicionada poderemos escrever:

$$P(B_i/A) = \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A/B_i) \times P(B_i)}{\sum_{i=1}^{k} P(A/B_i) \times P(B_i)} \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Este resultado é conhecido como Teorema de Bayes.

IX - EVENTOS INDEPENDENTES

Definição**:** Sejam A e B dois eventos quaisquer de S e suponha que $P(A)$ >0. O evento B é dito independente do evento A se $P(B/A) = P(B)$.

Esta definição corresponde à noção intuitiva da independência do evento B em relação ao evento A, pois diz que a probabilidade de B não se altera com a informação que o evento A ocorreu. Se o evento B é independente do evento A, decorre da definição anterior que: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Se o evento B é independente do evento A então esperamos que A também seja independente de B. De fato isto ocorre, como é verificado a seguir:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$$

Ex.: Suponha que um dado equilibrado é lançado duas vezes. Considere os eventos A={o primeiro dado mostra um número par} e B={o segundo dado mostra um 5 ou um 6}. Verifique se A e B são independentes.

Temos que o espaço amostral é formado por 36 elementos, cada um composto por um par de valores que especificam as faces obtidas em cada lançamento, ou seja, S = {(1,1), (1,2),…, (1,6), (2,1), (2,2),…,(2,6),…,(6,5), (6,6)}.

Assim: $P(A) = 18/36 = 1/2$, $P(B) = 12/36 = 1/3$ e $P(A \cap B) = 6/36 = 1/6$

Portanto: $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} = P(A)$. Ou, equivalentemente, $P(A \cap B) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = P(A) \times P(B)$. Logo, A e B são eventos independentes.

Obs.: Para definir a independência mútua para *n* eventos, sendo *n* um inteiro positivo, devemos exigir a validade da forma produto para todo subconjunto de *k* dos *n* eventos, para $2 \leq k \leq n$. Por exemplo, para n=3, os eventos A_1, A_2 e A_3 serão mutuamente independentes se **todas** as seguintes condições forem válidas:

a) $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \times P(A_2)$ b) $P(A_1 \cap A_3) = P(A_1) \times P(A_3)$

c) $P(A_2 \cap A_3) = P(A_2) \times P(A_3)$ d) $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \times P(A_2) \times P(A_3)$

Resumindo: Os eventos A e B serão independentes se, e somente se:

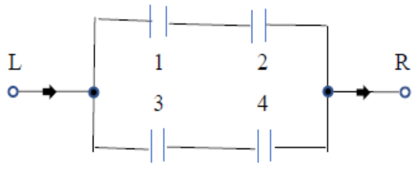
$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

e: Os eventos A, B e C são mutuamente independentes se, e somente se, todas as condições forem válidas:

a) $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ c) $P(B \cap C) = P(B) \times P(C)$

b) $P(A \cap C) = P(A) \times P(C)$ d) $P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$

Ex: A probabilidade de fechamento de cada relé do circuito abaixo é dada por p. Se todos os relés funcionarem independentemente, qual a probabilidade de haver corrente entre os terminais L e R?



Sejam os eventos: A_i ={o relé i está fechado}, i=1,2,3,4 e E={a corrente passa de L para R}.

Então: $E = (A_1 \cap A_2) \cup (A_3 \cap A_4)$

Logo: $P(E) = P(A_1 \cap A_2) + P(A_3 \cap A_4) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) =$

$$= P(A_1)P(A_2) + P(A_3)P(A_4) - P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)$$

$$= p \times p + p \times p - p \times p \times p \times p = p^2 + p^2 - p^4 = 2p^2 - p^4$$