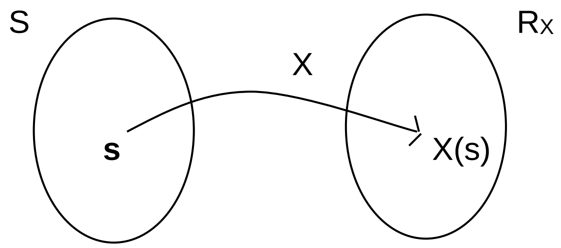
3 - VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

Ao descrever um espaço amostral de um experimento, não especificamos que um resultado individual necessariamente seja um número. Por exemplo, ao descrever uma peça manufaturada, podemos empregar apenas as categorias “defeituosa” e “não defeituosa”. Também, ao observar a temperatura durante o período de 24 horas, podemos simplesmente registrar a curva traçada pelo termógrafo. Contudo, em muitas situações experimentais, estaremos interessados na mensuração de alguma coisa e no seu registro como um número. Mesmo nos casos mencionados acima, poderemos atribuir um número a cada resultado (não numérico) do experimento. Por exemplo, poderemos atribuir o valor 1 (um) às peças perfeitas e o valor 0 (zero) às defeituosas. Poderemos registrar a temperatura máxima do dia, ou a temperatura mínima, ou a média das temperaturas máxima e mínima.

Consideremos um experimento aleatório ε, e seja S o espaço amostral associado a este experimento.

3.1 - DEFINIÇÃO: Variável aleatória (de modo abreviado: *v.a.*) num espaço amostral S, é uma função X, que associa S, (isto é, a cada s $\in$ S), um número real, X(s).



Ex.1: Consideremos o experimento aleatório: extraem-se duas bolas, *sem reposição*, de uma urna que contém: 2 bolas brancas (B) e 3 vermelhas (V). Vamos definir a v.a. X como: X = “o nº de bolas vermelhas obtidas nas duas extrações”. Portanto os valores *possíveis* que a v.a. X pode assumir são:

X = 0, se ocorre o evento “BB”, (duas bolas brancas)
X = 1, se ocorre o evento: “VB” ou “BV” (vermelha e branca ou branca e vermelha)
X = 2, se ocorre o evento: “V V” (duas bolas vermelhas)

3.2 - TIPOS DE VARIÁVEIS

As variáveis aleatórias podem ser de dois tipos: ***discretas*** ou ***contínuas***. Uma v.a. é dita discreta quando ela assume somente valores num conjunto enumerável de pontos do conjunto real. Ela é uma v.a. contínua se for do tipo que pode assumir qualquer valor em um intervalo real.

3.2.1 VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DISCRETAS

Seja X uma variável aleatória. Se o número de valores possíveis de X (isto é, Rx, o contradomínio) for finito ou infinito numerável, denominamos X de *variável aleatória discreta*. Isto é, os valores possíveis de X, podem ser postos em lista como $x_1, x_2, \ldots, x_n$

Distribuição de Probabilidade da Variável Aleatória

Seja X uma v.a. definida num espaço amostral S, tal que $X(S) = \{\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n}\}$

Podemos definir a probabilidade da v.a. X assumir o valor $\boldsymbol{x_i}$ (i = 1, 2, ..., n), a qual escreve-se $P(X = \boldsymbol{x_i})$ ou $f(x_i)$. Esta função f, que a cada $\boldsymbol{x_i}$ do conjunto X(S), (os valores possíveis que a variável aleatória X pode assumir), associa sua probabilidade de ocorrência, é chamada de DISTRIBUIÇÃO (ou FUNÇÃO) DE PROBABILIDADE DA V.A. X, e pode ser expressa por uma Tabela, um Gráfico ou uma Fórmula. Há outras notações, usuais para $P(X = \boldsymbol{x_i})$, por exemplo: p_i ou $P(x_i)$ ou $P(X = x)$ ou $P(x)$. A distribuição dada por $P(X = \boldsymbol{x_i})$, satisfaz as condições:

a) $P(x_i) \geq 0$ e b) $\sum_{i=1}^{n} P(x_i) = 1$

Ex.2: Consideremos uma urna com 3 bolas vermelhas e 2 brancas, de onde se extraem ***sem reposição*** duas bolas. Tínhamos que a v.a. X foi definida como:

X = “nº de bolas vermelhas obtidas nas duas extrações”.

Portanto: X(S) = {0, 1, 2}. Construindo o *diagrama da árvore* teremos o seguinte:

RESULTADOS	X	PROBABILIDADES
BB	0	1/10
BV	1	3/10
VB	1	3/10
VV	2	3/10
	Σ	1

Portanto, temos: P(X = 0) = P(BB) = 1/10
P(X = 1) = P(BV ou VB) = 3/10 + 3/10 = 6/10
P(X = 2) = P(VV) = 3/10

Desta forma, a DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE desta v.a. X, será:

X	P(x)
0	1/10
1	6/10
2	3/10
Σ	1

Ex.3: Consideremos o lançamento de uma moeda honesta duas vezes. Seja a v.a. Y, definida como: Y = o nº de caras obtidas nos dois lançamentos $\Rightarrow$ Y = {0, 1, 2}. Portanto temos:

RESULTADOS	Y	PROBABILIDADES
C C	2	1/4
C $\bar{c}$	1	1/4
$\bar{c}$ C	1	1/4
$\bar{c}$ $\bar{c}$	0	1/4
	Σ	1

Portanto: P(Y = 0) = P($\bar{c}$ $\bar{c}$) = 1/4

P(Y = 1) = P(C$\bar{c}$ ou $\bar{c}$C) = 1/4 + 1/4 = 2/4

P(Y = 2) = P(C C) = 1/4

Desta forma, a DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE desta v.a. Y, será:

x	**P(x)**
0	1/4
1	2/4
2	1/4
Σ	1

Assim, variável aleatória é uma função que associa a cada ponto de um espaço amostral, um número real. A Tabela que associa a cada valor de uma variável aleatória, a sua probabilidade, denominamos DISTRIBUIÇÃO (ou FUNÇÃO) DE PROBABILIDADES DA VARIÁVEL ALEATÓRIA.

EXEMPLO: A DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

Definição: Considere um experimento ε e seja algum evento associado a ε. Admita-se que P(A) = p e consequentemente P(A^C) = 1 - p. Considerem-se n repetições de ε. Daí, o espaço amostral será formado por todas as sequências possíveis $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ onde cada a_i é ou A ou A^C, dependendo de que tenha ocorrido A ou A^C na i-ésima repetição de ε. (Existem 2^n sequências). Suponha-se que P(A) = ***p*** permaneça a mesma para todas as repetições. A variável aleatória X será definida como o nº de vezes que o evento A tenha ocorrido. Denominaremos X de variável aleatória com parâmetros n e p. Seus possíveis valores são 0, 1, 2, ... , n. (Diremos que X tem uma distribuição Binomial com parâmetros n e p).
As repetições individuais de ε serão denominadas Provas de Bernouilli.

Teorema 1: Seja X uma variável binomial, baseada em n repetições. Então:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Dem.: Considere-se um elemento do espaço amostral de ε satisfazendo à condição $(X = k)$. Um resultado poderia ser, por exemplo, se nas primeiras k repetições ocorresse A, enquanto nas últimas (n - k) ocorresse A^C, isto é:

$$\underline{A\ A\ A \dots A\ A\ A^C A^C \dots A^C\ A^C}$$

(k vezes) (n-k vezes)

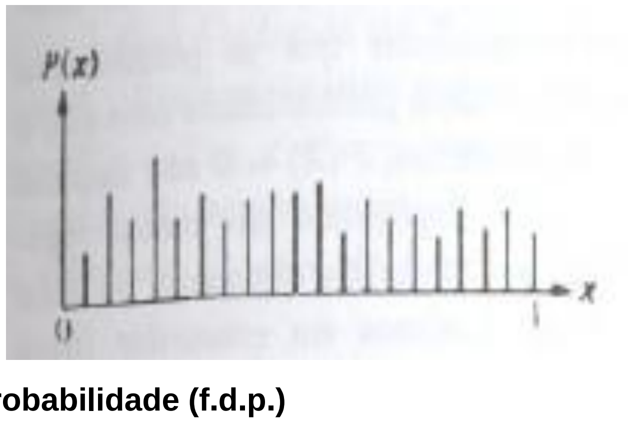
Como todas as repetições são independentes, a probabilidade desta sequência será $p^k(1-p)^{n-k}$. Essa mesma probabilidade seria associada a qualquer outro resultado para o qual $(X = k)$. O nº total de tais resultados é igual a $\binom{n}{k}$, porque deveremos escolher exatamente k posições (dentre n) para o evento A. Isto dá o resultado acima, porque esses resultados são todos mutuamente excludentes.

Exemplo: Suponha que uma válvula eletrônica, instalada em determinado circuito, tenha probabilidade 0,2 de funcionar mais do que 500 horas. Se testarmos 20 válvulas, qual será a probabilidade de que delas, exatamente k, funcionem mais que 500 horas, k = 0, 1, 2, ... , 20?
Solução: Seja X o número de válvulas que funcionem mais de 500 horas, admitiremos que X tenha distribuição binomial. Então: $P(X = k) = \binom{20}{k}(0{,}2)^k(0{,}8)^{20-k}$

Assim:	P(X = 0) = 0,012	P(X = 4) = 0,218	P(X = 8) = 0,022
	P(X = 1) = 0,058	P(X = 5) = 0,175	P(X = 9) = 0,007
	P(X = 2) = 0,137	P(X = 6) = 0,109	P(X = 10) = 0,002
	P(X = 3) = 0,205	P(X = 7) = 0,055	P(X = k) ≈ 0,001 para k ≥ 11

3.2.2 VARIÁVEIS ALEATÓRIAS CONTÍNUAS

Suponha-se que o contradomínio de x seja formado por um número finito muito grande de valores, digamos todos os valores de x no intervalo 0 ≤ x ≤ 1, da forma: 0; 0,01; 0,02; ... 0,98; 0,99; 1,00. A cada um desses valores está associado um número não negativo $p(x_i) = P(X = x_i)$, i = 1, 2, ..., cuja soma é igual a 1. Esta observação está representada geometricamente na Figura abaixo. Poderia ser matematicamente mais fácil idealizar a apresentação probabilística de X, pela suposição de que X pudesse tomar todos os valores possíveis, 0 ≤ x ≤ 1. Se fizermos isso, o que acontecerá às probabilidades no ponto $p(x_i)$? Como os valores possíveis de X não são numeráveis, não podemos realmente falar do i-ésimo valor de X, e, por isso, $p(x_i)$ se torna sem sentido. O que faremos é substituir a função *p* definida somente para x_1, x_2,... por uma função *f* definida para todos os valores de x, 0 ≤ x ≤ 1.



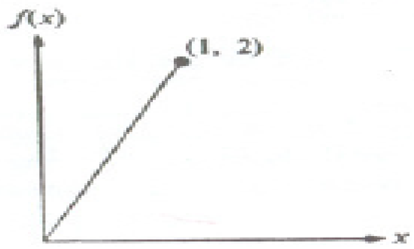
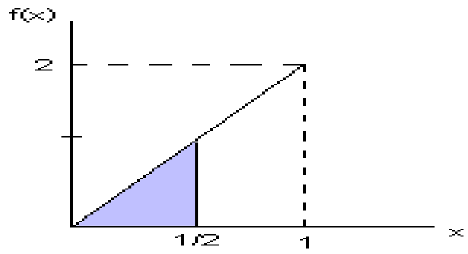
Função Densidade de Probabilidade (f.d.p.)
Seja X uma v.a. contínua. A função densidade de probabilidade $f(x)$ é uma função que satisfaz as seguintes condições:

a) $f(x) \geq 0$ para todo $x \in R_X$

b) $\int_{R_X} f(x)\,dx = 1$

c) Além disso, definimos, para qualquer a < b em $R_X, a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx$ em que R_X é o contradomínio de X.

Exemplo: Se f(x) = 2x, para 0 ≤ x < 1, e zero fora desse intervalo, vemos que f(x) ≥ 0, qualquer que seja x, e a área sob o gráfico de *f* é unitária (ver Figura a)). Logo, a função *f* pode representar a função densidade de uma variável aleatória contínua X.

a) 	b) 

Aqui, a P(0 ≤ X < 1/2) é igual à área do triângulo de base 1/2 e altura 1. Logo a probabilidade em questão é P(0 ≤ X < 1/2) = 1/2.(1/2 . 1) = 1/4.

EXEMPLO: VARIÁVEL ALEATÓRIA UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA

Definição: Suponha que X seja uma variável aleatória contínua que tome todos os valores no intervalo [a, b], no qual a e b sejam ambos finitos. Se a f. d. p. de X for dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(b-a)}, se\ a \leq X \leq b \\ 0, para\ outros\ valores \end{cases}$$

diremos que X é uniformemente distribuída sobre o intervalo $[a, b]$.

Obs.: Para qualquer subintervalo [c, d] onde a ≤ c < d ≤ b, P(c ≤ X ≤ d) é a mesma para todos os subintervalos que tenham o mesmo comprimento. Isto é:

$$P(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(x)dx = \frac{d-c}{b-a}$$

Exemplo: Um ponto é escolhido ao acaso no segmento de reta [0, 2]. Qual será a probabilidade de que o ponto escolhido esteja entre 1 e 3/2 ?
Fazendo-se X representar a coordenada do ponto escolhido, temos que a f. d. p. de X é dada por $f(x) = 1/2, 0 < x < 2$ e, portantoP$(1 \leq X \leq 3/2) = 1/4$.

4 FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO ACUMULADA

Definição: Seja X uma variável aleatória, discreta ou contínua. Define-se **F** como a função de distribuição acumulada da variável aleatória X (f.d.) como $F(x) = P(X \leq x)$.

a) Se X for uma variável aleatória discreta: $F(x) = \sum_{x_k \leq x} p(x_k)$, para todo $x_k \leq x$

b) Se X for uma variável aleatória contínua: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)\, ds$

Exemplos:

1 - Suponhamos que a variável aleatória X tome os três valores 0, 1 e 2, com probabilidades 1/3, 1/6 e 1/2, respectivamente. Então: $F(x) = \begin{cases} 0, & se\ x < 0; \\ \frac{1}{3}, se\ 0 \leq x < 1; \\ \frac{1}{2}, se\ 1 \leq x < 2; \\ 1, \geq 2 \end{cases}$

2 - Suponha que X seja uma variável aleatória contínua com f.d.p.:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, se\ 0 < x < 1 \\ 0, para\ outros\ valores\ (ou\ caso\ contrário) \end{cases}$$

Portanto, a f.d.p. de F é dada por: $F(x) = \begin{cases} 0, se\ x < 0, \\ \int_0^x 2sds = x^2, se\ 0 \leq x \leq 1, \\ 1, se\ x > 1 \end{cases}$

Obs.:

a) Se X for uma variável aleatória discreta, com um número finito de valores possíveis, o gráfico da f.d. será constituído por segmentos de retas horizontais (nesse caso, a f.d. se denomina função em degraus). A função F é contínua, exceto nos valores possíveis de X $(x_1, x_2, \ldots,\ x_n)$. No valor x_i o gráfico apresenta um 'salto' de magnitude $P(x_i) = P(X = x_i)$.

b) Se X for uma variável aleatória contínua, F será uma função contínua para todo x.

c) A função de distribuição F é definida para todos os valores de x.

Teorema 2:

a) A função F é não-decrescente. Isto é, se $x_i < x_j$, teremos $F(x_i) < F(x_j)$.

b) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$. [podemos escrever $F(-\infty) = 0$ e $F(+\infty) = 1$]

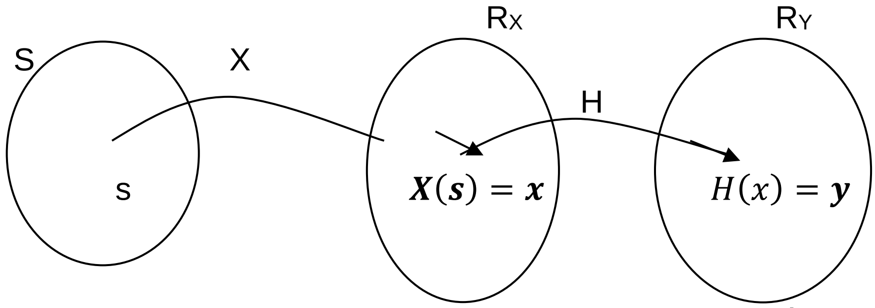
Teorema 3:

a) Seja F a função de distribuição de uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade $f(x)$. Então, $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$, para todo x no qual F seja derivável $[F'(x) = f(x)]$.

b) Seja X uma variável aleatória discreta com valores possíveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$, e suponha que $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. Seja F a f.d. de X. Então, $p(x_i) = P(X = x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$

5. FUNÇÕES DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

Eventos Equivalentes: Seja ε um experimento, S um espaço amostral associado a ε e X uma variável aleatória definida em S. Suponha que y = H(x) seja uma função real de x. Então, Y = H(X) é uma variável aleatória, porque para todo s $\in$ S, um valor de Y fica determinado, y = H[X(s)].



Definição: Seja C um evento (subconjunto) associado ao contra domínio R_Y, de Y. Seja $B \subset R_X$ definido como: $B = \{x \in : H(x) \in C\}$
Isto é: B é o conjunto de todos os valores de X, tais que $H(x) \in C$. Se B e C forem assim definidos, são denominados eventos equivalentes.

Exemplo: Suponha-se que $H(x) = \pi x^2$. Então, os eventos $B: \{X > 2\}$ e $C: \{H(x) = Y > 4\pi\}$ são equivalentes. Porque, se $Y = \pi x^2$, então $\{X > 2\}$ ocorrerá se, e somente se, $\{Y > 4\pi\}$ ocorrer.

Definição: Seja uma variável aleatória X definida no espaço amostral S. Seja R_X o contra domínio de X. Seja H uma função real e considere-se a variável aleatória $Y = H(x)$Y com contra domínio R_Y. Para qualquer evento $C \subset R_Y$, definiremos P(C) assim:

$$\mathrm{P(C)} = \mathrm{P}\{\mathrm{X} \in R_X: H(X) \in C\} \qquad \text{(I)}$$

Isto é: a probabilidade de um evento associado ao contra domínio de Y é definida como a probabilidade do evento equivalente (em termos de X).

Exemplo: Seja X uma variável aleatória com f.d.p. $f(x) = e^{-x}, x > 0$.
Suponha-se que $H(x) = 2x + 1$. Portanto, $R_X = \{x: x > 0\}$, enquanto $R_Y = \{y: y > 1\}$.
Suponha-se que o evento C seja definido como: $\mathrm{C} = \{Y \geq 5\}$. Então, $y \geq 5$y se, e somente se, $2x + 1 \geq 5$, o que por sua vez acarreta $x \geq 2$. Daí, C é equivalente a $B = \{x \geq 2\}$. Então $P(X \geq 2) = \int e^{-x} dx = \frac{1}{e^2}$. Aplicando-se (I) teremos: $P(Y \geq 5) = 1/e^2$.

a) VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DISCRETAS

Caso 1: X é uma variável aleatória discreta. Se X for uma variável aleatória discreta e Y = H(X), nesse caso Y será também uma variável aleatória discreta.
Exemplo 1: Suponha que a variável aleatória X tome os valores -1, 0 e 1, com probabilidades 1/3, 1/2 e 1/6, respectivamente. Seja Y = 3X + 1. Nesse caso os valores possíveis de Y são -2, 1 e 4, com probabilidades 1/3, 1/2 e 1/6.

Exemplo 2: Considere a mesma variável do ex. 1. Se Y = X^2, os valores de Y são 0 e 1com probabilidades 1/2 e 1/2, porque Y = 1 se, e somente se, X = -1 ou X = 1 e a probabilidade desse evento é 1/3 + 1/6 = 1/2.
Em termos de eventos: se B: {X = ± 1} e C: {Y = 1} são eventos equivalentes e pela equação (I) tem iguais probabilidades.

Caso 2: X é uma variável aleatória contínua. Pode acontecer que X seja uma variável aleatória contínua enquanto Y seja uma variável aleatória discreta. Por exemplo: suponha que X possa tomar todos os valores reais, enquanto Y seja definido igual a +1 se X ≥ 0, e Y = -1 se X < 0. Neste caso, Y = 1 se, e somente se, X ≥ 0, enquanto Y = -1 se X < 0. Por isso, P(Y = 1) = P(X ≥ 0), enquanto P(Y = -1) = P(X < 0).

b) VARIÁVEIS ALEATÓRIAS CONTÍNUAS

X é uma v. a. contínua com f. d. p. f(x) e H é uma função contínua. Assim, $Y = H(X)$ será uma variável aleatória contínua e temos que encontrar sua f.d.p., que denotaremos $g(y)$.
Procedimento:

a) obter G, a função de distribuição de Y, na qual $G(y) = P(Y \leq y)$, encontrando o evento A (no contra domínio de X) o qual é equivalente ao evento $\{Y \leq y\}$;

b) derivar $G(y)$ em relação a y, para obter $g(y)$;

c) determinar aqueles valores no contra domínio de Y, para os quais $g(y) > 0$.

6. CARACTERIZAÇÃO DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

1 - Valor Esperado de uma Variável Aleatória

I - Definição: Seja X uma variável aleatória discreta, com valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Seja $p(x_i) = P(X = x_i)$. Então, o valor esperado de X (ou esperança matemática, ou valor médio, ou expectância de X), E(X) é definido como $E(X) = \sum x_i \, p(x_i)$.

Teorema 4: Seja X uma variável aleatória distribuída binomialmente, com parâmetro p, baseada em n repetições de um experimento. Então $E(x) = n \times p$.

II - Definição: Seja X uma variável aleatória com função de densidade de probabilidade f(x). O valor esperado de X é definido como $E(X) = \int xf(x)dx$

Obs.: Pode acontecer que esta integral (imprópria) não convirja. Consequentemente, E(X) existirá se, e somente se, $\int |x| f(x)\, dx$ for finita.
Teorema 5: Seja X uma variável aleatória uniformemente distribuída sobre o intervalo [a, b]. Nesse caso, $E(x) = (a + b)/2$.

2 - Esperança de uma Função de uma Variável Aleatória

Definição: Seja X uma variável aleatória e seja $Y = H(X)$.

a) Se Y for uma variável aleatória discreta com valores possíveis $y_1, y_2, \dots, y_n$ e se $q(y_i) = P(Y = y_i)$, definirmos: $E(Y) = \sum y_i \, q(y_i)$.

b) Se Y for uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade $g(y)$ definimos: $E(Y) = \int y g(y) dy$.

Teorema 6: Seja X uma variável aleatória e seja $Y = H(X)$.

a) Se X for uma variável aleatória discreta e $p(x_i) = P(X = x_i)$ teremos:

$$E(Y) = E[H(X)] = \sum H(x_i) \, p(x_i)$$

b) Se X for uma variável aleatória contínua com f. d. p. $f(x)$ teremos:

$$E(Y) = \int H(X) f(x) dx.$$

Propriedades:

1 - Se X = C, onde C é uma constante então E(X) = C.

2 - Suponha-se que C seja uma constante e X seja uma v. a. Então E(CX) = CE(X).

3 - Sejam X e Y duas variáveis aleatórias quaisquer. Então E(X + Y) = E(X) + E(Y)

3 - Variância de uma variável aleatória

Definição: Seja X uma variável aleatória. Definimos a **variância** de X, V(X) ou σ_X^2 como:

$$V(X) = E[X - E(X)\}^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Propriedades:

1) A variância de uma constante é zero: $V(K) = E[((K - E(K)^2] = E[(K - K)^2] = 0$

2) Multiplicando-se uma v.a. por uma constante, sua variância fica multiplicada pelo quadrado da constante: $V(KX) = K^2 Var(X)$

3) Somando-se ou subtraindo-se uma constante a uma v.a., sua variância não se altera: $V(X \pm K) = Var(X) \pm Var(K) = Var(X)$, pois $Var(K) = 0$

4) A variância da soma ou diferença de duas v.a's independentes, é a soma das respectivas variâncias: $V(X \pm K) = Var(X) + Var(Y)$, quando Cov(X,Y) = 0.

A raiz quadrada positiva de V(X) é denominada o **desvio padrão** de X, σ_X.

Teorema 7:

i) Seja X uma variável aleatória distribuída binomialmente, com parâmetro p, baseada em n repetições de um experimento. Então: $E(X) = n \times p$ e $Var(X) = n \times p \times (1 - p)$

ii) Seja X uma variável aleatória uniformemente distribuída sobre o intervalo [a, b]. Nesse caso, $E(X) = (a + b)/2 \times p$ e $Var(X) = (b - a)/12$.