Demostración del área de un círculo

Bryan Robert Ninamango Arroyo

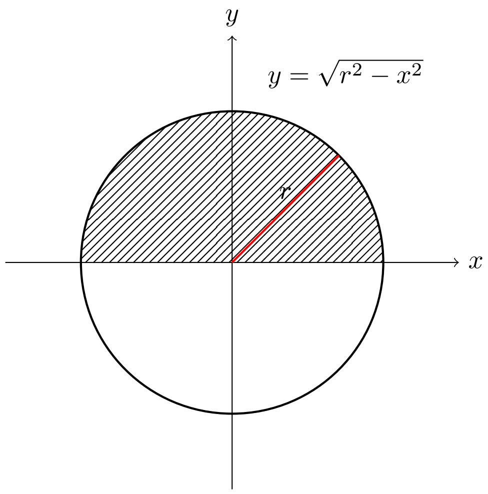
November 2025

1 Introducción

El área de un círculo es una de las fórmulas fundamentales de la geometría clásica y aparece en múltiples aplicaciones físicas y de ingeniería. Aunque su expresión $A_o = \pi r^2$ es ampliamente conocida, su deducción rigurosa permite comprender con mayor profundidad la relación entre geometría y cálculo integral.

2 Problema

Demostrar, mediante el uso de cálculo integral, cuál es el área de un círculo de radio r.



$$\boxed{A_o = \pi r^2}$$

3 Demostración

Para demostrar el área de una circunferencia, consideremos únicamente el semicírculo superior, esto permitirá simplificar el cálculo integral.

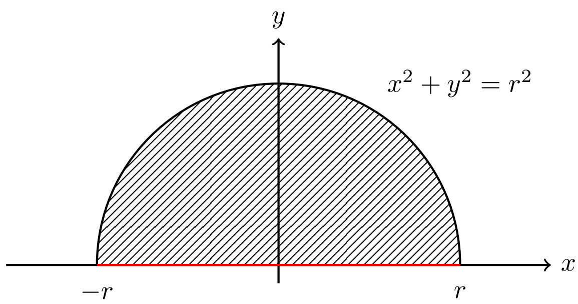


Figure 1: Caption

Recordando que la integral definida representa el área bajo una curva, partimos de la ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$. Al despejar y obtenemos la expresión del semicírculo superior:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \tag{1}$$

El semicírculo superior se encuentra definido en el intervalo $x \in [-r, r]$. Por lo tanto, su área se calcula integrando la función dada en la ecuación (1) sobre ese intervalo.

$$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx \tag{2}$$

Esta integral contiene una raíz cuadrática típica de circunferencias. Para eliminarla usamos la sustitución trigonométrica $x = r \sin\theta$, pues transforma $\sqrt{r^2 - x^2}$ en una expresión con coseno.

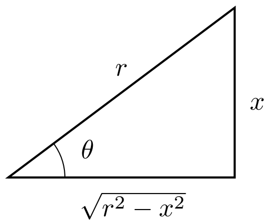


Figure 2: Caption

Recordemos las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo:

$$\boxed{sin(\theta) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}\,,\; cos(\theta) = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}\,,\; tan(\theta) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} sin(\theta) &= \frac{x}{r} \\ r\, sin(\theta) &= x \\ r\, cos(\theta)\, d\theta &= dx \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} cos(\theta) &= \frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{r} \\ r\, cos(\theta) &= \sqrt{r^2 - x^2} \end{aligned} \tag{5}$$

Sustituyendo (4) y (5) en (2):

$$\begin{gathered} \int_{x=-r}^{x=r} r^2 \cos^2\theta\, d\theta \\ \text{Límite superior: } x = r \;\Rightarrow\; \theta = \frac{\pi}{2}, \\ \text{Límite inferior: } x = -r \;\Rightarrow\; \theta = -\frac{\pi}{2}. \end{gathered} \tag{6}$$

Finalmente, evaluamos la integral definida para calcular el área encerrada por la curva.

$$
\begin{aligned}
\int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 \cos^2\theta \, d\theta &= r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\theta \, d\theta \\
&= r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\cos(2\theta)}{2} \, d\theta \\
&= r^2 \left[\frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta + \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(2\theta) \, d\theta \right] \\
&= r^2 \left[\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin(2\theta) \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&= r^2 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\sin\pi \right) - r^2 \left(\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{4}\sin(-\pi) \right) \\
&= r^2 \left(\frac{\pi}{4}\right) - r^2 \left(-\frac{\pi}{4}\right) \\
&= r^2 \frac{\pi}{2} + r^2 \frac{\pi}{2} = \pi r^2.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

$$
\boxed{A_o = \pi r^2}
$$

4 Conclusión

Se demostró que el área de un círculo de radio r es $A_o = \pi r^2$. El resultado indica que el área depende solo del radio y que aumenta con el cuadrado de este. Al obtenerlo mediante una integral definida y el Teorema Fundamental del Cálculo, la fórmula queda justificada de forma rigurosa.

5 Referencias

[1] Demostrando Fórmulas. (2022b, mayo 15). Demostración del Área de un Círculo con Integrales [Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=3mckJU05OJc

[2] Julián Schulze. (2020, 25 marzo). Área del círculo con integrales [Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=24TGv6aayuE