Лекция 6

Логика высказываний

Высказывание — повествовательное предложение, о котором можно сказать истинно оно или ложно.

Содержательная часть в логике не рассматривается

Пример: Волга впадает в Каспий

Простые высказывания — переменные или атомы или литеры, обозначаются буквой и называются переменной “пропозициональная” переменная

Логика высказываний позволяет формализовать предложение языка, используя вместо грамматических связок лог операции (отрицание, и, или, импликация, эквивалентность)

Высказывание А: идёт дождь

Высказывание Б: на него тучи

Сложное: если идет дождь, то на небе тучи A → B

Формула в логике:

- переменные, объединённые знаками логических операций и скобой. т.е. если у нас A и B, то *что-то там эквивалентно*
- истинность и ложность формулы определяется по таблице истинности. Пример: импликация, A→B. Ложно только если A-истина, B-ложно. Тогда таблица истинности

A	B	A→B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Формулы бывают

- общезачимые - истинно во всех интерпретациях. A v ~A. Они называются **теоремами**
- противоречивые - ложно во всех интерпретациях. A ^ ~A.

- выполнимые - исинна в некоторых интерпретациях.

Эквивалентные формулы

Две формулы считаются равносильными (эквивалентными), если их истинностное значение совпадает при всех интерпретациях. Из этого вытекает, что их эквиваленция является общезначимой формулой.

Чтобы доказать, что формулы эквиваленты есть два пути:

1. через таблицы истинности
2. доказать, что эквиваленция общезначима

1. A→B = ~A v B
2. A v B = ~A → B
3. A & B = ~(A→B)
4. A=B = (A→B)&&(B→A)

Связки эквивалентности

1. ~(~A) = A
2. ~(A&B) = ~A v ~B
3. ~(AvB) = ~A & ~B
4. ~(A→B) = A & ~B

1. A v (B&C) = (AvB) & (AvC). Используется при приведении к КНФ.

КНФ

КНФ (конъюнктивная нормальная форма) - конъюнкция дизъюнктов.

> 💡 A1 & A2 … & An
> Ai = B1 v B2 … Bn

Правила вывода новых высказываний основанных на предыдущих … составляют вычисление высказываний. Получаемое новое высказывание называется заключением.

Аксиомы системы это подмножество формул, истинность которых принимается без доказательств. К ним относятся исходные данные.

Метод дедуктивного вывода

Выводом формул из другого множества формул называется такая последовательность формул, что любая формула из этой последовательности есть либо аксиома (включая исходное высказывание), либо выводима из множества предшествующих формул. Эта последовательность формул называется схемой дедуктивного вывода.

В логике она записывается так

$$A, B, C ...| - \Phi$$
$$\frac{A, B, C ..}{\Phi}$$

Modus poneus (прямое доказательство)- если истинна A, A→B, то истинна B

Modus tollens (доказательство от противного (сам ты противный)) $\frac{-B \ A \to B}{-A}$

A	~A	B	~B	A→B
0	1	0	1	1
1	0	1	0	1

Аксиомы

- $\frac{A \to B \ B \to C}{A \to C}$

Пример

Дано сложное высказывание:

1. Всякое опасное деяния наказуемо
2. Преступление это общественно опасное деяние
3. Дача взятки преступление

Следовательно - дача взятки наказуема

A - опасные деяния

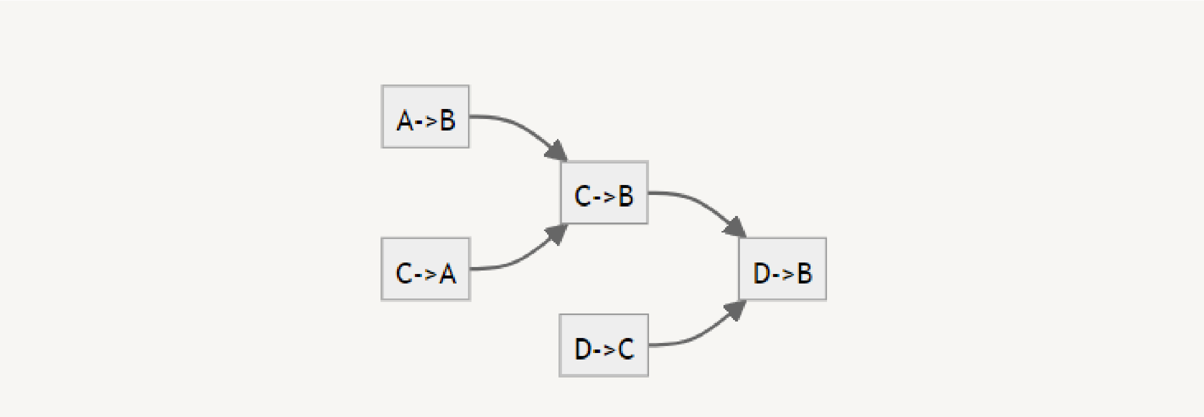
B - наказания

C - преступления

D - взятка

1. A → B
2. C → A
3. D → C
4. D → B - доказать

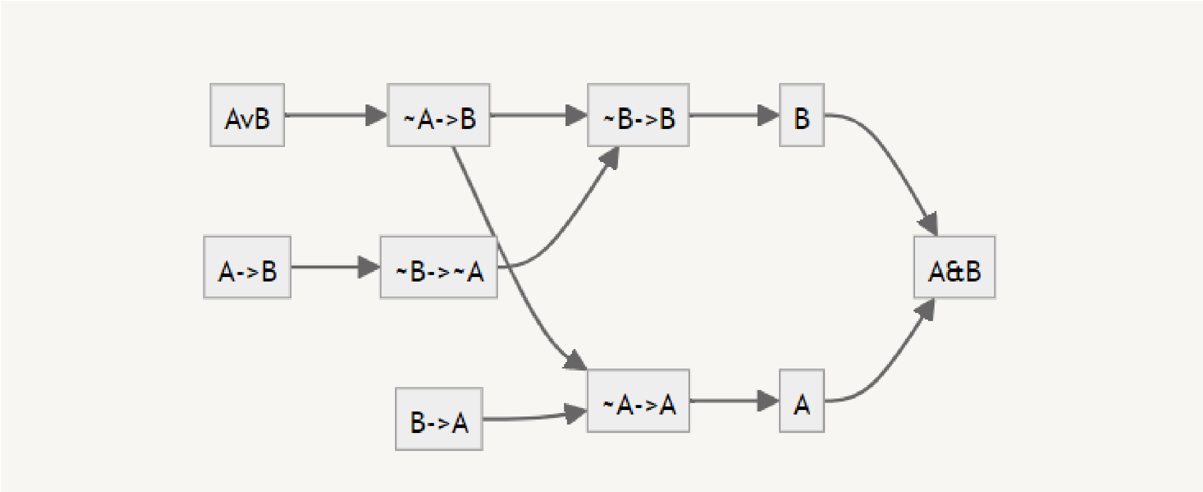
Построим дерево доказательства



применяем правило силогизма

Более сложный пример

$$\frac{(AvB)(A \to B)(B \to A)}{A \& B}$$



Формула B называется логическим следствием формул A1, A2, … Am, если каждый набор логических переменных обращающих в истину формулы A1, A2, … Am обращают в истину формулу B. Иными словами B это следствие. Если она истина, то только тогда когда … .

Формула B является логическим следствием, если импликация является теоремой (т.е. она общезначима).