Лекция 9

Законы алгебры предикатов

Рассматриваем равносильной формулы. Формулы называются равносильными, если при одинаковых наборах термов они имеют одинаковые значения. Если они равносильны, то они эквивалентны.

1) Коммутативность для кванторов

$\forall x \forall y F(x,y) = \forall y \forall x F(x,y)$

$\exists x \exists y F(x,y) = \exists y \exists x F(x,y)$

$\forall x \exists y F(x,y) = \exists y \forall x F(x,y)$

2) Отрицание кванторов

$\sim \forall x F(x) = \exists x (\sim F(x))$

$\sim \exists x F(x) = \forall x (\sim F(x))$

$\forall x F(x) = -\exists x(-F(x))$

$\exists x F(x) = -\forall x(-F(x))$

3) Дистрибутивность для кванторов

Квантор всеобщности - можно вынести коньюнкцию.

$$\forall x (F_1(x)) \& \forall x (F_2(x)) = \forall x (F_1(x) \& F_2(x))$$

Квантор существования - можно вынести дизъюнкцию.

$$\exists x (F_1(x)) V \exists x (F_2(x)) = \exists x (F_1(x) V F_2(x))$$

В противном случае делается переименование переменных, чтобы переменные стояли под разными кванторами. Кванторы должны быть по разным именам переменных.

$\forall x (F_1(x)) V \forall y (F_2(y)) = \forall x \forall y (F_1(x) V F_2(y))$

В общем случае, когда стоят разные кванторы и они идут по одной переменной используется переименование переменных. Делается это так. Если для одного квантора используется квантор … , то самая левая переименовывается

В логике предикатов кроме КНФ и ДНФ вводятся ещё формы:

1. Приведённая нормальная форма: это значит, что в формуле все кванторы вынесены за скобку и составляют префикс. А матрица это формула без кванторов.
2. Скалемовская стандартная форма. Её цель исключить из префикса квантор состояния (?) путём введения скалемовских функций.
3. В этой форме остаётся только квантор общности, который отбрасывается и рассматривается только коньюнкция дизъюнкторов.

Алгоритм преобразования … предикатов к Скалемовской стандартной форме

1. Привести к приведённой формуле (предварённая нормальная форма)

1. Исключение связок импликации и эквиваленции.

$$F \to A = \sim FVA$$

$$FequalsA = F \to A \& A \to F$$

2. Продвижение знака отрицания до квантора (законы Моргана)

$$\sim (FVA) = \sim F \& \sim A$$

$$\sim (F\&A) = \sim FV \sim A$$

$$-\exists xF(x) = \forall x(\sim F(x))$$

$$-\forall xF(x) = \exists x(-F(x))$$

Следующий шаг для того чтобы все кванторы вынести в префиксы (различные). Переменные под кванторами - связанные переменные. Без кванторов - свободные

3. Переименовывание связанных переменных. Многократно пока возможно применяются следующие правила. Найти самое левое вхождение переменной такое, что это вхождение связанно некоторым квантором, но

существует ещё одно вхождение этой же переменной. Следует сделать замену связанного вхождения (первого) на вхождение новой переменной.

4. Следующий шаг. Вынести кванторы новых связанных переменных влево не нарушая этой последовательности

$K1_x F_1(x)\ \ someoperation\ \ K2_x F_2(x) =$
$K1_y K1_x (F_1(y)\ someoperation\ F_2(x))$

После этого шага мы имеем приведённую нормальную формулу - префикс и матрица.

5. Устранение кванторов существования путём введения скалемовских функций

6. Получить КНФ.

7. Повторная стандартизация переменных так, чтобы каждый дизъюнкт содержал переменные, которые отсутствуют в других.

Формализация знаний с использованием квантора всеобщности использует импликацию.

$\forall x S(x) \to P(x)$ - для квантора всеобщности используется импликация.

$\exists x S(x) \& P(x)$ - для квантора существования используется коньюнкция.

Пример

Петя и Лена члены клуба.

Каждый член клуба или лыжник, или альпинист, или является и тем, и другим.

Нет альпиниста который любит дождь

Все лыжники любят снег

Лена не любит то, что любит Петя и любит то, что Петя не любит.

Петя любит дождь и снег.

Вопрос: есть ли в клубе человек являющийся альпинистом и не являющийся лыжником?

Введём предикат

1) S(x), x - лыжник

2) M(x), x - альпинист

3) L(x, y), x любит y

X (роль люди) = {Петя, Лена}

Y (роль природа) = {дождь, снег}

Запишем предложения

1) Каждый член клуба или лыжник, или альпинист, или является и тем, и другим.

$$\forall x(S(x)VM(x))$$

2) Нет альпиниста который любит дождь

$$-\exists x(M(x)\&L(x,\text{дождь}))$$

3) Все лыжники любят снег

$$\forall x(S(x)\to L(x,\text{снег}))$$

4) Лена не любит то, что любит Петя и любит то, что Петя не любит

$$\forall y(L(\text{Лена},y)<->L(\text{Петя},y))$$

5) Петя любит дождь и снег

$$L(\text{Петя},\text{дождь})$$

$$L(\text{Петя},\text{снег})$$

Целевое утверждение

$$\exists x(M(x)\&\sim S(x))$$

Приводим к предварённой нормальной форме

0) Отрицание цели

$$\sim(\exists x(M(x)\&\sim S(x)))=\forall x(\sim(M(x)\&\sim S(x)))$$

$$\sim M(X)VS(x)$$

1) В первой формуле мы отбрасываем …, оставляем …

2) Нужно убрать квантор существования.

$$\sim \exists x(M(x)\&L(x,\text{дождь})) = \forall x(\sim M(x)V \sim L(x,\text{дождь}))$$

3) Убираем импликацию.

$$\forall x(S(x) \to L(x,\text{снег})) = \forall x(\sim S(x) \vee L(x,\text{снег})) =\sim S(x) \vee L(x,\text{снег})$$

4) Приводим эквиваленцию

$$\forall y(L(\text{Лена},y) \Leftrightarrow L(\text{Петя},y)) = \forall y((L(\text{Лена},y) \to\sim L(\text{Петя},y))\&(\sim L(\text{Лена},y) \to L(\text{Петя},y)))$$

Убираем эквиваленцию и приходим вот к чему

$$= (\sim L(\text{Лена},y)\vee \sim L(\text{Петя},y))\&(L(\text{Лена},y) \vee L(\text{Петя},y))$$

5) Ничего не делаем

Выпишем все полученные дизъюнкты, но в каждом дизъюнкте используем свои имена переменных.

1) $S(x_1) \vee M(x_1)$

2) $\sim M(x_2)\vee \sim L(x_2,\text{дождь})$

3) $\sim S(x_3) \vee L(x_3,\text{снег})$

4) $(\sim L(\text{Лена},y_1)\vee \sim L(\text{Петя},y_1))\&(L(\text{Лена},y_1) \vee L(\text{Петя},y_1))$

5) $L(\text{Лена},y_2) \vee L(\text{Петя},y_2)$

6) $L(\text{Петя},\text{дождь})$

7) $L(\text{Петя},\text{снег})$

8) $\sim M(x_4)VS(x_4)$

Берём выражение 8 (целевое) и 1

$$\sim M(x_4)VS(x_4)$$

$$S(x_1) \vee M(x_1)$$

Видим контрарную пару по M. Для унификации мы должны переменные сделать одинаковыми, поэтому используем подстановку x4 → x1.

Резольвента $S(x_1)$, x4 и x1 теперь связаны.

Выбираем короткий дизъюнкт и 3

$$S(x_1)$$
$$\sim S(x_3) \vee L(x_3, \text{снег})$$

Используем подстановку x1 в x3.

Резольвента $L(x_1, \text{снег})$

Берём последнюю резольвенту и дизъюнкт 4

$$L(x_1, \text{снег})$$
$$\sim L(\text{Лена}, y_1) \vee \sim L(\text{Петя}, y_1)$$

Чтобы это унифицировать мы используем подстановку x1 ← Лена

Теперь мы берём следующую переменную y1 ← снег

> ☝️ В программе необходимо предусмотреть распространение переменных!

Резольвента $\sim L(\text{Петя}, \text{снег})$

Последний шаг.

$$\sim L(\text{Петя}, \text{снег})$$
$$L(\text{Петя}, \text{снег})$$

Значит отрицание цели ложно ⇒ Сама цель истина.

Основные структуры данных

Структура переменной

- имя переменной
- значение
- ДОПОЛНИТЕЛЬНО
    - роль / тип
    - список подстановок

Можно объявить структуру константы

- значение
- роль / тип

Структура атом (предикат)

- имя предиката
- знак предиката
- список переменных, входящих в предикат

Дизъюнкт

- список атомов

Вся задача

- список дизъюнктов
- отрицание цели

В резолюции необходимо распространить переменные на атомы, которые остаются у нас.