Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Лабораторная работа № 2

Дисциплина Математическая статистика

Тема Интервальные оценки

Вариант №5

Студент Брянская Е.В.

Группа ИУ7-62Б

Оценка (баллы) ________________

Преподаватель Саркисян П.С.

Москва.
2021 г.

Оглавление

Введение

Цель работы: построение доверительных интервалов для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины.

Содержание работы:

1. Для выборки объема n из нормальной генеральной совокупности X реализовать в виде программы на ЭВМ
   а) вычисление точечных оценок $\hat{\mu}(\vec{x}_n)$ и $S^2(\vec{x}_n)$ математического ожидания MX и дисперсии DX соответственно;
   б) вычисление нижней и верхней границ $\underline{\mu}(\vec{x}_n)$, $\overline{\mu}(\vec{x}_n)$ для γ-доверительного интервала для математического ожидания MX;
   в) вычисление нижней и верхней границ $\underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$, $\overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ для γ-доверительного интервала для дисперсии DX;
2. вычислить $\hat{\mu}$ и S^2 для выборки из индивидуального варианта;
3. для заданного пользователем уровня доверия γ и N – объёма выборки из индивидуального варианта:
   а) на координатной плоскости Oyn построить прямую $y = \hat{\mu}(\vec{x_N})$, также графики функций $y = \hat{\mu}(\vec{x}_n)$, $y = \underline{\mu}(\vec{x}_n)$ и $y = \overline{\mu}(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N;
   б) на другой координатной плоскости Ozn построить прямую $z = S^2(\vec{x_N})$, также графики функций $z = S^2(\vec{x}_n)$, $z = \underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ и $z = \overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N.

1. Теоретическая часть

1.1. Формулы для вычисления величин

1.1.1 Определение γ-доверительного интервала

Доверительным интервалом уровня γ для параметра θ называется интервал $(\underline{\theta}(\vec{X}), \overline{\theta}(\vec{X}))$, образующий выборочными значениями статистики $\underline{\theta}$ и $\overline{\theta}$.

$$P\{\underline{\theta}(\vec{X}) <= x <= \overline{\theta}(\vec{X})\} = \gamma$$

1.2. Границы γ-доверительного интервала

Пусть $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ — случайная выборка объема n из генеральной совокупности X, распределенной по нормальному закону с параметрами μ и σ^2.

γ-доверительный интервал для математического ожидания

$$P\{\overline{X} - \frac{S(\vec{X})}{\sqrt{n}} t_{\frac{1+\gamma}{2}}^{St(n-1)} <= \mu <= \overline{X} + \frac{S(\vec{X})}{\sqrt{n}} t_{\frac{1+\gamma}{2}}^{St(n-1)}\} = \gamma$$

Т.е.

$$\underline{\mu}(\vec{X}) = \overline{X} - \frac{S(\vec{X})}{\sqrt{n}} t_{\frac{1+\gamma}{2}}^{St(n-1)}$$

$$\overline{\mu}(\vec{X}) = \overline{X} + \frac{S(\vec{X})}{\sqrt{n}} t_{\frac{1+\gamma}{2}}^{St(n-1)}$$

1.2.1 Оценка для математического ожидания

γ-доверительный интервал для дисперсии

$$P\{\frac{S^2(\vec{X})(n-1)}{t_{\frac{1+\gamma}{2}}^{\chi^2(n-1)}} <= \sigma^2 <= \frac{S^2(\vec{X})(n-1)}{t_{\frac{1+\gamma}{2}}^{\chi^2(n-1)}}\} = \gamma$$

Т.е.

$$\underline{\sigma}(\vec{X}) = \frac{S^2(\vec{X})(n-1)}{t_{\frac{1+\gamma}{2}}^{\chi^2(n-1)}}$$

$$\overline{\sigma}(\vec{X}) = \sigma^2 <= \frac{S^2(\vec{X})(n-1)}{t_{\frac{1+\gamma}{2}}^{\chi^2(n-1)}}$$

2. Практическая часть

2.1. Текст программы

```
function lab_02()
    x =
  [-4.58,-5.10,-4.24,-4.82,-6.05,-4.05,-4.48,-4.65,-3.67,-4.01,-3.22,
  -5.79,-4.20,-5.36,-5.16,-4.31,-3.91,-4.04,-5.65,-5.78,-4.03,-5.15,
  -4.89,-4.60,-5.71,-5.67,-4.40,-5.10,-5.29,-3.90,-3.77,-5.47,-5.57,
  -5.91,-3.62,-2.45,-3.13,-5.60,-4.35,-3.36,-3.87,-4.78,-5.72,-4.66,
  -4.34,-4.60,-5.24,-4.43,-5.15,-5.45,-3.22,-4.61,-5.65,-5.63,-4.73,
  -3.82,-4.34,-4.98,-6.43,-4.25,-4.66,-5.49,-4.98,-6.10,-4.44,-5.25,
  -4.89,-2.97,-7.26,-4.14,-4.45,-5.93,-3.49,-3.96,-5.66,-5.04,-5.40,
  -4.89,-4.61,-4.01,-5.44,-2.76,-4.97,-3.87,-4.33,-5.28,-5.63,-3.94,
  -4.56,-4.67,-5.35,-4.89,-3.79,-6.25,-4.38,-4.28,-4.48,-4.16,-5.67,
  -5.34,-4.78,-4.33,-4.89,-3.16,-4.88,-5.40,-4.64,-4.84,-6.72,-5.25,
  -3.27,-6.44,-3.49,-5.92,-5.21,-3.88,-5.08,-3.50,-6.80,-5.87];

    gamma = 0.9;

    % Задание а1 - вычисление точечных оценок μ^ и S2 для MX и DX
    mu = find_mu(x);
    fprintf('mu = %.2f\n', mu);

    S2 = find_S2(x);
    fprintf('S^2 = %.2f\n', S2);

    % Задание б1 - вычисление нижней и верхней границ доверительного
    % интервала для MX
    mu_low = find_mu_low(x, gamma);
    S2_high = find_mu_high(x, gamma);
    fprintf("%.2f < MX < %.2f\n", mu_low, S2_high);

    % Задание в1 - вычисление нижней и верхней границ доверительного
    % интервала для XD
    S2_low = find_S2_low(x, gamma);
    S2_high = find_S2_high(x, gamma);
    fprintf("%.2f < DX < %.2f\n", S2_low, S2_high);

    % Задание а3
```

```
    task_mu(x, gamma);
    task_S2(x, gamma);
end

function res = find_mu(x)
    res = sum(x) / length(x);
end

function res = find_S2(x)
    res = sum((x - find_mu(x)).^2) / (length(x) - 1);
end

function res = find_mu_low(x, gamma)
    n = length(x);
    mu = find_mu(x);
    S2 = find_S2(x);
    res = mu - sqrt(S2) * tinv((1 + gamma) / 2, n - 1) / sqrt(n);
end

function res = find_mu_high(x, gamma)
    n = length(x);
    mu = find_mu(x);
    S2 = find_S2(x);
    res = mu + sqrt(S2) * tinv((1 + gamma) / 2, n - 1) / sqrt(n);
end

function res = find_S2_low(x, gamma)
    n = length(x);
    S2 = find_S2(x);
    res = ((n - 1) * S2) / chi2inv((1 + gamma) / 2, n - 1);
end

function res = find_S2_high(x, gamma)
    n = length(x);
    S2 = find_S2(x);
    res = ((n - 1) * S2) / chi2inv((1 - gamma) / 2, n - 1);
end

function task_mu(x, gamma)
    figure;
```

```
    grid on;
    hold on;

    n = length(x);
    mu = find_mu(x);
    n_range = 1:1:n;

    plot([n_range(1), n_range(n)], [mu, mu], 'b');

    mu_array = zeros(n);
    mu_low_array = zeros(n);
    mu_high_array = zeros(n);

    for i=1:n
        mu_array(i) = find_mu(x(1:i));
        mu_low_array(i) = find_mu_low(x(1:i), gamma);
        mu_high_array(i) = find_mu_high(x(1:i), gamma);
    end

    plot(n_range, mu_array, 'g--');
    plot(n_range, mu_low_array, 'r-');
    plot(n_range, mu_high_array, 'm:', 'Linewidth',2);

    xlabel('n');
  ylabel('y');
    legend('$\hat{\mu}^2(\vec x_N)$', ...
        '$\hat{\mu}^2(\vec x_n)$', ...
        '$\underline{\mu}^2(\vec x_n)$', ...
        '$\overline{\mu}^2(\vec x_n)$', ...
        'Interpreter', 'latex');
end

function task_S2(x, gamma)
    figure;
    grid on;
    hold on;

    n = length(x);
    S2 = find_S2(x);
    n_range = 1:1:n;
```

```
    plot([n_range(1), n_range(n)], [S2, S2], 'b');

    S2_array = zeros(n);
    S2_low_array = zeros(n);
    S2_high_array = zeros(n);

    for i=1:n
        S2_array(i) = find_S2(x(1:i));
        S2_low_array(i) = find_S2_low(x(1:i), gamma);
        S2_high_array(i) = find_S2_high(x(1:i), gamma);
    end

    plot(n_range, S2_array, 'g--');
    plot(n_range, S2_low_array, 'r-');
    plot(n_range, S2_high_array, 'm:', 'Linewidth',2);

    legend('$\hat S^2(\vec x_N)$', ...
        '$\hat S^2(\vec x_n)$', ...
        '$\underline{\sigma}^2(\vec x_n)$', ...
        '$\overline{\sigma}^2(\vec x_n)$', ...
        'Interpreter', 'latex');
end
```

2.2. Результат работы программы

$$\hat{\mu}(\vec{x}_n) = -4.76;$$
$$S^2(\vec{x}_n) = 0.81;$$
$$\underline{\mu}(\vec{x}_n) = -4.89;$$
$$\overline{\mu}(\vec{x}_n) = -4.62;$$
$$\underline{\sigma}^2(\vec{x}_n) = 0.66;$$
$$\overline{\sigma}^2(\vec{x}_n) = 1.02;$$

2.3. Графики

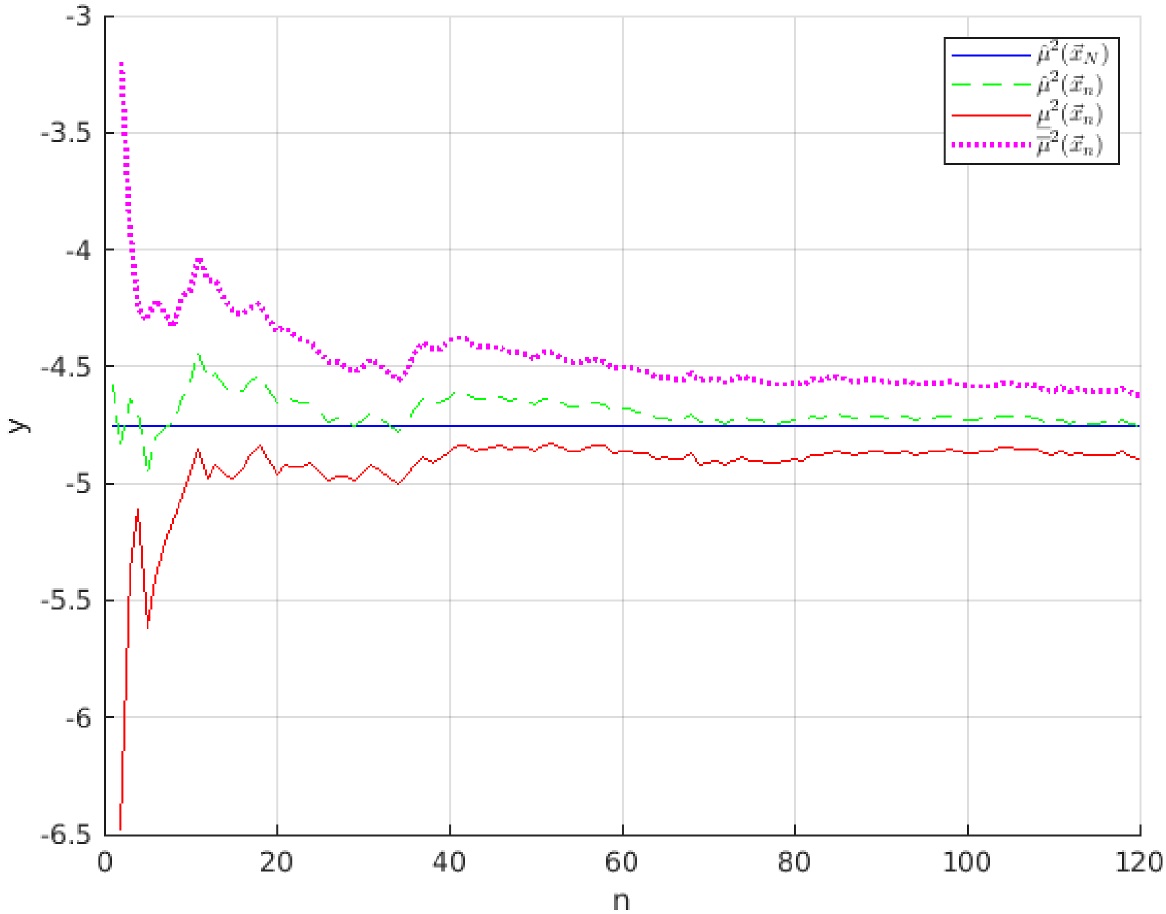

Рис. 2.1 — График для μ

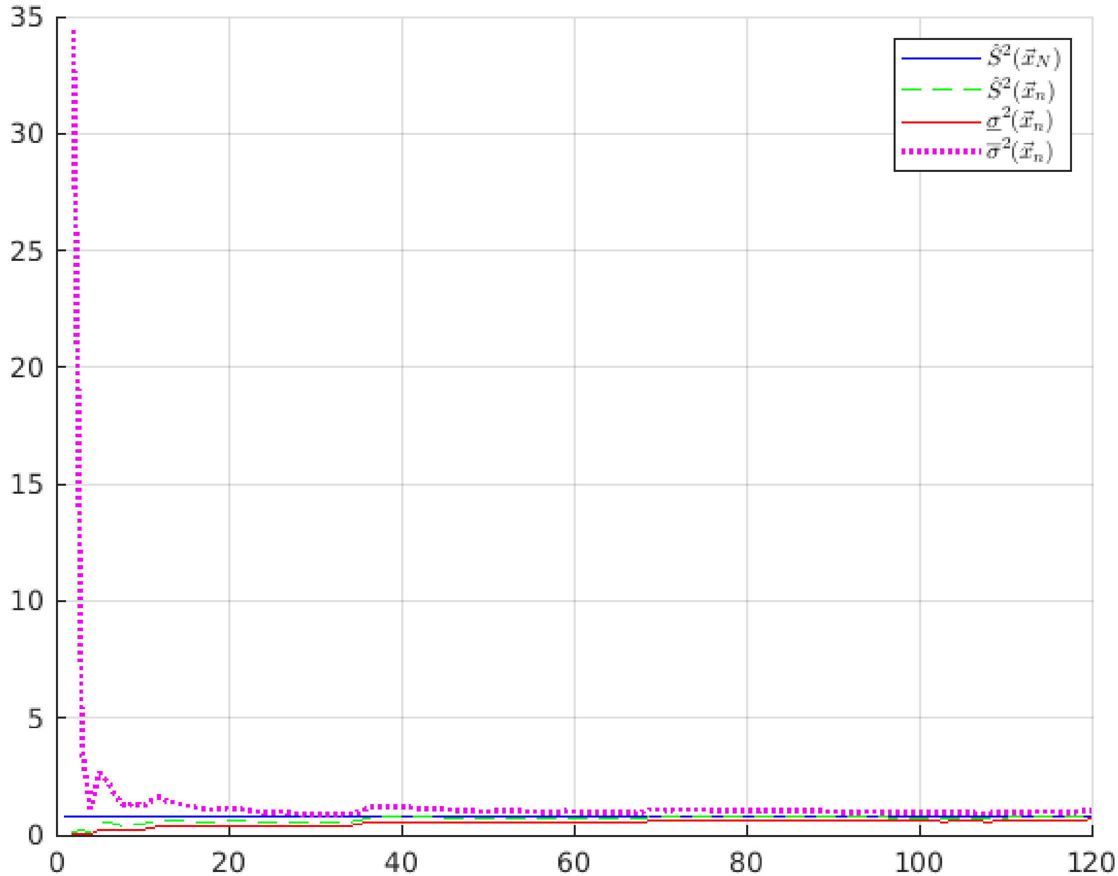

Рис. 2.2 — График для σ