



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Лабораторная работа № 1

Тема Методы Пикара, Эйлера, Рунге-Кутты

Студент Брянская Е.В.

Группа ИУ7-62Б

Оценка (баллы) _____

Преподаватель Градов В.М.

Москва.
2021 г.

Тема. Программная реализация приближенного аналитического метода и численных алгоритмов первого и второго порядков точности при решении задачи Коши для ОДУ.

Цель работы. Получение навыков решения задачи Коши для ОДУ методами Пикара и явными методами первого порядка точности (Эйлера) и второго порядка точности (Рунге-Кутты).

Исходные данные.
ОДУ, не имеющее аналитического решения:

$$\begin{cases} u'(x) = x^2 + u^2, \\ u(0) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Результат работы программы. Таблица, содержащая значения аргумента с заданным шагом в интервале $[0, x_{max}]$ и результаты расчета функции $u(x)$ в приближениях Пикара (от 1-го до 4-го), а также численными методами. Границу интервала x_{max} выбирать максимально возможной из условия, чтобы численные методы обеспечивали точность вычисления решения уравнения $u(x)$ до второго знака после запятой.

Описание алгоритмов

Задача Коши

Общее решение дифференциального уравнения n -ого порядка зависит от n констант. Требуется задать n дополнительных условий:

$$u(x) = \phi(x, c_1, c_2, \dots, c_n) \quad (2)$$

В задаче Коши все дополнительные условия задаются в одной точке ξ :

$$u_k(\xi) = \eta_k, k = 1, \dots, n \quad (3)$$

Задачу Коши можно решить с помощью следующих алгоритмов.

Приближённый аналитический метод Пикара

$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u), \\ u(\xi) = \eta \end{cases} \quad (4)$$

$$u(x) = \eta + \int_{\xi}^x f(t, u(t)) dt \quad (5)$$

Получается, что

$$y^{(s)}(x) = \eta + \int_{\xi}^x f(t, y^{(s-1)}(t)) dt \quad (6)$$

$$y^{(0)} = \eta \quad (7)$$

Найдём 1, 2, 3 и 4 приближение для (1).

$$y^{(1)} = 0 + \int_0^x t^2 dt = \left. \frac{t^3}{3} \right|_0^x = \frac{x^3}{3} \quad (8)$$

$$y^{(2)} = 0 + \int_0^x \left[\left(\frac{t^3}{3} \right)^2 + t^2 \right] dt = \left. \frac{t^7}{63} \right|_0^x + \left. \frac{t^3}{3} \right|_0^x = \frac{x^7}{63} + \frac{x^3}{3} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} y^{(3)} &= 0 + \int_0^x \left[\left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^7}{63} \right)^2 + t^2 \right] dt = \left. \frac{t^{15}}{15 \cdot 63^2} \right|_0^x + \left. \frac{2 \cdot t^{11}}{3 \cdot 63 \cdot 11} \right|_0^x + \left. \frac{t^7}{63} \right|_0^x + \left. \frac{t^3}{3} \right|_0^x = \\ &= \frac{x^{15}}{59535} + \frac{2 \cdot x^{11}}{2079} + \frac{x^7}{63} + \frac{x^3}{3} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} y^{(4)} &= 0 + \int_0^x \left[\left(\frac{t^{15}}{59535} + \frac{2 \cdot t^{11}}{2079} + \frac{t^7}{63} + \frac{t^3}{3} \right)^2 + t^2 \right] dt = \frac{x^{31}}{109\,876\,902\,975} + \frac{4 \cdot x^{27}}{3\,341\,878\,155} + \\ &+ \frac{4 \cdot x^{23}}{99\,411\,543} + \frac{2 \cdot x^{23}}{86\,266\,215} + \frac{2 \cdot x^{19}}{3\,393\,495} + \frac{4 \cdot x^{19}}{2\,488\,563} + \frac{4 \cdot x^{15}}{93\,555} + \frac{x^{15}}{59\,535} + \frac{2 \cdot x^{11}}{2079} + \frac{x^7}{63} + \frac{x^3}{3} \end{aligned} \quad (11)$$

Метод Эйлера

Метод Рунге-Кутты

х	1	2	3	4	5	6	7
0.000e+00	0.000e+00	0.000e+00	0.000e+00	0.000e+00	0.000e+00	0.000e+00	0.000e+00
5.000e-04	4.167e-11	4.167e-11	4.167e-11	4.167e-11	4.160e-11	0.000e+00	4.167e-11
1.000e-03	3.333e-10	3.333e-10	3.333e-10	3.333e-10	3.331e-10	0.000e+00	3.333e-10
1.500e-03	1.125e-09	1.125e-09	1.125e-09	1.125e-09	1.124e-09	0.000e+00	1.125e-09
2.000e-03	2.667e-09	2.667e-09	2.667e-09	2.667e-09	2.666e-09	0.000e+00	2.667e-09
2.500e-03	5.208e-09	5.208e-09	5.208e-09	5.208e-09	5.207e-09	0.000e+00	5.208e-09
3.000e-03	9.000e-09	9.000e-09	9.000e-09	9.000e-09	8.998e-09	0.000e+00	9.000e-09
3.500e-03	1.429e-08	1.429e-08	1.429e-08	1.429e-08	1.429e-08	0.000e+00	1.429e-08
4.000e-03	2.133e-08	2.133e-08	2.133e-08	2.133e-08	2.133e-08	0.000e+00	2.133e-08
4.500e-03	3.037e-08	3.038e-08	3.038e-08	3.038e-08	3.037e-08	0.000e+00	3.038e-08
5.000e-03	4.167e-08	4.167e-08	4.167e-08	4.167e-08	4.166e-08	0.000e+00	4.167e-08
5.500e-03	5.546e-08	5.546e-08	5.546e-08	5.546e-08	5.545e-08	0.000e+00	5.546e-08
6.000e-03	7.200e-08	7.200e-08	7.200e-08	7.200e-08	7.199e-08	0.000e+00	7.200e-08
6.500e-03	9.154e-08	9.154e-08	9.154e-08	9.154e-08	9.153e-08	0.000e+00	9.154e-08
7.000e-03	1.143e-07	1.143e-07	1.143e-07	1.143e-07	1.143e-07	0.000e+00	1.143e-07
7.500e-03	1.406e-07	1.406e-07	1.406e-07	1.406e-07	1.406e-07	1.099e-08	1.406e-07
8.000e-03	1.707e-07	1.707e-07	1.707e-07	1.707e-07	1.707e-07	1.220e-07	1.707e-07
8.500e-03	2.047e-07	2.047e-07	2.047e-07	2.047e-07	2.047e-07	2.330e-07	2.047e-07
9.000e-03	2.430e-07	2.430e-07	2.430e-07	2.430e-07	2.430e-07	3.441e-07	2.430e-07
9.500e-03	2.858e-07	2.858e-07	2.858e-07	2.858e-07	2.858e-07	4.551e-07	2.858e-07
1.000e-02	3.333e-07	3.333e-07	3.333e-07	3.333e-07	3.333e-07	5.661e-07	3.333e-07
1.050e-02	3.859e-07	3.859e-07	3.859e-07	3.859e-07	3.858e-07	6.771e-07	3.859e-07
1.100e-02	4.437e-07	4.437e-07	4.437e-07	4.437e-07	4.436e-07	7.881e-07	4.437e-07
1.150e-02	5.070e-07	5.070e-07	5.070e-07	5.070e-07	5.069e-07	8.992e-07	5.070e-07
1.200e-02	5.760e-07	5.760e-07	5.760e-07	5.760e-07	5.760e-07	1.010e-06	5.760e-07
1.250e-02	6.510e-07	6.510e-07	6.510e-07	6.510e-07	6.510e-07	1.121e-06	6.510e-07
1.300e-02	7.323e-07	7.323e-07	7.323e-07	7.323e-07	7.323e-07	1.232e-06	7.323e-07
1.350e-02	8.201e-07	8.201e-07	8.201e-07	8.201e-07	8.201e-07	1.343e-06	8.201e-07
1.400e-02	9.147e-07	9.147e-07	9.147e-07	9.147e-07	9.146e-07	1.454e-06	9.147e-07
1.450e-02	1.016e-06	1.016e-06	1.016e-06	1.016e-06	1.016e-06	1.565e-06	1.016e-06
1.500e-02	1.125e-06	1.125e-06	1.125e-06	1.125e-06	1.125e-06	1.676e-06	1.125e-06
1.550e-02	1.241e-06	1.241e-06	1.241e-06	1.241e-06	1.241e-06	1.787e-06	1.241e-06
1.600e-02	1.365e-06	1.365e-06	1.365e-06	1.365e-06	1.365e-06	1.898e-06	1.365e-06
1.650e-02	1.497e-06	1.497e-06	1.497e-06	1.497e-06	1.497e-06	2.009e-06	1.497e-06
1.700e-02	1.638e-06	1.638e-06	1.638e-06	1.638e-06	1.638e-06	2.196e-06	1.638e-06
1.750e-02	1.786e-06	1.786e-06	1.786e-06	1.786e-06	1.786e-06	2.418e-06	1.786e-06
1.800e-02	1.944e-06	1.944e-06	1.944e-06	1.944e-06	1.944e-06	2.640e-06	1.944e-06

x	1	2	3	4	5	6	7
0.000e+00	0.000e+00	0.000e+00	0.000e+00	0.000e+00	0.000e+00	0.000e+00	0.000e+00
5.000e-04	4.167e-11	4.167e-11	4.167e-11	4.167e-11	4.160e-11	0.000e+00	4.167e-11
1.000e-03	3.333e-10	3.333e-10	3.333e-10	3.333e-10	3.331e-10	0.000e+00	3.333e-10
1.500e-03	1.125e-09	1.125e-09	1.125e-09	1.125e-09	1.124e-09	0.000e+00	1.125e-09
2.000e-03	2.667e-09	2.667e-09	2.667e-09	2.667e-09	2.666e-09	0.000e+00	2.667e-09
2.500e-03	5.208e-09	5.208e-09	5.208e-09	5.208e-09	5.207e-09	0.000e+00	5.208e-09
3.000e-03	9.000e-09	9.000e-09	9.000e-09	9.000e-09	8.998e-09	0.000e+00	9.000e-09
3.500e-03	1.429e-08	1.429e-08	1.429e-08	1.429e-08	1.429e-08	0.000e+00	1.429e-08
4.000e-03	2.133e-08	2.133e-08	2.133e-08	2.133e-08	2.133e-08	0.000e+00	2.133e-08
4.500e-03	3.037e-08	3.038e-08	3.038e-08	3.038e-08	3.037e-08	0.000e+00	3.038e-08
5.000e-03	4.167e-08	4.167e-08	4.167e-08	4.167e-08	4.166e-08	0.000e+00	4.167e-08
5.500e-03	5.546e-08	5.546e-08	5.546e-08	5.546e-08	5.545e-08	0.000e+00	5.546e-08
6.000e-03	7.200e-08	7.200e-08	7.200e-08	7.200e-08	7.199e-08	0.000e+00	7.200e-08
6.500e-03	9.154e-08	9.154e-08	9.154e-08	9.154e-08	9.153e-08	0.000e+00	9.154e-08
7.000e-03	1.143e-07	1.143e-07	1.143e-07	1.143e-07	1.143e-07	0.000e+00	1.143e-07
7.500e-03	1.406e-07	1.406e-07	1.406e-07	1.406e-07	1.406e-07	1.099e-08	1.406e-07
8.000e-03	1.707e-07	1.707e-07	1.707e-07	1.707e-07	1.707e-07	1.220e-07	1.707e-07
8.500e-03	2.047e-07	2.047e-07	2.047e-07	2.047e-07	2.047e-07	2.330e-07	2.047e-07
9.000e-03	2.430e-07	2.430e-07	2.430e-07	2.430e-07	2.430e-07	3.441e-07	2.430e-07
9.500e-03	2.858e-07	2.858e-07	2.858e-07	2.858e-07	2.858e-07	4.551e-07	2.858e-07
1.000e-02	3.333e-07	3.333e-07	3.333e-07	3.333e-07	3.333e-07	5.661e-07	3.333e-07
1.050e-02	3.859e-07	3.859e-07	3.859e-07	3.859e-07	3.858e-07	6.771e-07	3.859e-07
1.100e-02	4.437e-07	4.437e-07	4.437e-07	4.437e-07	4.436e-07	7.881e-07	4.437e-07
1.150e-02	5.070e-07	5.070e-07	5.070e-07	5.070e-07	5.069e-07	8.992e-07	5.070e-07
1.200e-02	5.760e-07	5.760e-07	5.760e-07	5.760e-07	5.760e-07	1.010e-06	5.760e-07
1.250e-02	6.510e-07	6.510e-07	6.510e-07	6.510e-07	6.510e-07	1.121e-06	6.510e-07
1.300e-02	7.323e-07	7.323e-07	7.323e-07	7.323e-07	7.323e-07	1.232e-06	7.323e-07
1.350e-02	8.201e-07	8.201e-07	8.201e-07	8.201e-07	8.201e-07	1.343e-06	8.201e-07
1.400e-02	9.147e-07	9.147e-07	9.147e-07	9.147e-07	9.146e-07	1.454e-06	9.147e-07
1.450e-02	1.016e-06	1.016e-06	1.016e-06	1.016e-06	1.016e-06	1.565e-06	1.016e-06
1.500e-02	1.125e-06	1.125e-06	1.125e-06	1.125e-06	1.125e-06	1.676e-06	1.125e-06
1.550e-02	1.241e-06	1.241e-06	1.241e-06	1.241e-06	1.241e-06	1.787e-06	1.241e-06
1.600e-02	1.365e-06	1.365e-06	1.365e-06	1.365e-06	1.365e-06	1.898e-06	1.365e-06
1.650e-02	1.497e-06	1.497e-06	1.497e-06	1.497e-06	1.497e-06	2.009e-06	1.497e-06
1.700e-02	1.638e-06	1.638e-06	1.638e-06	1.638e-06	1.638e-06	2.196e-06	1.638e-06
1.750e-02	1.786e-06	1.786e-06	1.786e-06	1.786e-06	1.786e-06	2.418e-06	1.786e-06
1.800e-02	1.944e-06	1.944e-06	1.944e-06	1.944e-06	1.944e-06	2.640e-06	1.944e-06
1.850e-02	2.111e-06	2.111e-06	2.111e-06	2.111e-06	2.110e-06	2.862e-06	2.111e-06
1.900e-02	2.286e-06	2.286e-06	2.286e-06	2.286e-06	2.286e-06	3.084e-06	2.286e-06
1.950e-02	2.472e-06	2.472e-06	2.472e-06	2.472e-06	2.472e-06	3.306e-06	2.472e-06
2.000e-02	2.667e-06	2.667e-06	2.667e-06	2.667e-06	2.667e-06	3.528e-06	2.667e-06
2.050e-02	2.872e-06	2.872e-06	2.872e-06	2.872e-06	2.872e-06	3.750e-06	2.872e-06
2.100e-02	3.087e-06	3.087e-06	3.087e-06	3.087e-06	3.087e-06	3.972e-06	3.087e-06
2.150e-02	3.313e-06	3.313e-06	3.313e-06	3.313e-06	3.313e-06	4.194e-06	3.313e-06
2.200e-02	3.549e-06	3.549e-06	3.549e-06	3.549e-06	3.549e-06	4.416e-06	3.549e-06
2.250e-02	3.797e-06	3.797e-06	3.797e-06	3.797e-06	3.797e-06	4.671e-06	3.797e-06
2.300e-02	4.056e-06	4.056e-06	4.056e-06	4.056e-06	4.056e-06	5.004e-06	4.056e-06
2.350e-02	4.326e-06	4.326e-06	4.326e-06	4.326e-06	4.326e-06	5.338e-06	4.326e-06
2.400e-02	4.608e-06	4.608e-06	4.608e-06	4.608e-06	4.608e-06	5.671e-06	4.608e-06
2.450e-02	4.902e-06	4.902e-06	4.902e-06	4.902e-06	4.902e-06	6.004e-06	4.902e-06

Вопросы при защите лабораторной работы

1. Укажите интервалы значений аргумента, в которых можно считать решением заданного уравнения каждое из первых 4-х приближений Пикара. Точность результата оценивать до второй цифры после запятой. Объяснить свой ответ.
2. Пояснить, каким образом можно доказать правильность полученного результата при фиксированном значении аргумента в численных методах.
3. Каково значение функции при $x=2$, т.е. привести значение $u(2)$.

Список литературы

1. Иванов, К. К. Принципы разработки параллельных методов / К. К. Иванов, С. А. Раздобудько, Р. И. Ковалев. — Текст : непосредственный // Молодой ученый. — 2017. — № 3 (137). — С. 30-32. — URL: <https://moluch.ru/archive/137/38412/> (дата обращения: 21.10.2020).
2. Кормен, Томас Х. и др Алгоритмы: построение и анализ, 3-е изд. : Пер. с англ. - М. : ООО "И.Д. Вильямс 2018. - 1328 с. : ил. - Парал. тит. англ. - ISBN 978-5-8459-2016-4 (рус.).
3. Документация по Стандартной библиотеки языка C++ thread [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://docs.microsoft.com/ru-ru/cpp/standard-library/thread?view=vs-2019>, свободный (дата обращения 22.10.2020)
4. Документация по Стандартной библиотеки языка C++ mutex [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://docs.microsoft.com/ru-ru/cpp/standard-library/mutex?view=vs-2019>, свободный (дата обращения 22.10.2020)
5. Документация по Visual Studio 2019 [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://docs.microsoft.com/ru-ru/visualstudio/windows/?view=vs-2019>, свободный (дата обращения: 21.10.2020)
6. QueryPerformanceCounter function [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://docs.microsoft.com/en-us/windows/win32/api/profileapi/nf-profileapi-queryperformancecounter>, свободный (дата обращения: 22.10.2020).