



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Лабораторная работа № 1

Тема Методы Пикара, Эйлера, Рунге-Кутты

Студент Брянская Е.В.

Группа ИУ7-62Б

Оценка (баллы) _____

Преподаватель Градов В.М.

Москва.
2021 г.

Задание

Тема. Программная реализация приближенного аналитического метода и численных алгоритмов первого и второго порядков точности при решении задачи Коши для ОДУ.

Цель работы. Получение навыков решения задачи Коши для ОДУ методами Пикара и явными методами первого порядка точности (Эйлера) и второго порядка точности (Рунге-Кутты).

Исходные данные.
ОДУ, не имеющее аналитического решения:

$$\begin{cases} u'(x) = x^2 + u^2, \\ u(0) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Результат работы программы. Таблица, содержащая значения аргумента с заданным шагом в интервале $[0, x_{max}]$ и результаты расчета функции $u(x)$ в приближениях Пикара (от 1-го до 4-го), а также численными методами. Границу интервала x_{max} выбирать максимально возможной из условия, чтобы численные методы обеспечивали точность вычисления решения уравнения $u(x)$ до второго знака после запятой.

Описание алгоритмов

Задача Коши

Общее решение дифференциального уравнения n -ого порядка зависит от n констант. Требуется задать n дополнительных условий:

$$u(x) = \phi(x, c_1, c_2, \dots, c_n) \quad (2)$$

В задаче Коши все дополнительные условия задаются в одной точке ξ :

$$u_k(\xi) = \eta_k, k = 1, \dots, n \quad (3)$$

Задачу Коши можно решить с помощью следующих алгоритмов.

Приближённый аналитический метод Пикара

$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u), \\ u(\xi) = \eta \end{cases} \quad (4)$$

$$u(x) = \eta + \int_{\xi}^x f(t, u(t)) dt \quad (5)$$

Получается, что

$$y^{(s)}(x) = \eta + \int_{\xi}^x f(t, y^{(s-1)}(t)) dt \quad (6)$$

$$y^{(0)} = \eta \quad (7)$$

Найдём 1, 2, 3 и 4 приближение для (1).

$$y^{(1)} = 0 + \int_0^x t^2 dt = \left. \frac{t^3}{3} \right|_0^x = \frac{x^3}{3} \quad (8)$$

$$y^{(2)} = 0 + \int_0^x \left[\left(\frac{t^3}{3} \right)^2 + t^2 \right] dt = \left. \frac{t^7}{63} \right|_0^x + \left. \frac{t^3}{3} \right|_0^x = \frac{x^7}{63} + \frac{x^3}{3} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} y^{(3)} &= 0 + \int_0^x \left[\left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^7}{63} \right)^2 + t^2 \right] dt = \left. \frac{t^{15}}{15 \cdot 63^2} \right|_0^x + \left. \frac{2 \cdot t^{11}}{3 \cdot 63 \cdot 11} \right|_0^x + \left. \frac{t^7}{63} \right|_0^x + \left. \frac{t^3}{3} \right|_0^x = \\ &= \frac{x^{15}}{59535} + \frac{2 \cdot x^{11}}{2079} + \frac{x^7}{63} + \frac{x^3}{3} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} y^{(4)} &= 0 + \int_0^x \left[\left(\frac{t^{15}}{59535} + \frac{2 \cdot t^{11}}{2079} + \frac{t^7}{63} + \frac{t^3}{3} \right)^2 + t^2 \right] dt = \frac{x^{31}}{109\,876\,902\,975} + \frac{4 \cdot x^{27}}{3\,341\,878\,155} + \\ &+ \frac{4 \cdot x^{23}}{99\,411\,543} + \frac{2 \cdot x^{23}}{86\,266\,215} + \frac{2 \cdot x^{19}}{3\,393\,495} + \frac{4 \cdot x^{19}}{2\,488\,563} + \frac{4 \cdot x^{15}}{93\,555} + \frac{x^{15}}{59\,535} + \frac{2 \cdot x^{11}}{2079} + \frac{x^7}{63} + \frac{x^3}{3} \end{aligned} \quad (11)$$

Реализация представлена на листинге 1.

Кроме того, поставленную задачу можно решить с помощью численных методов.

Метод Эйлера

Явная схема выглядит следующим образом (12).

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \quad (12)$$

В этом случае нужно выбирать шаг, так как он определяет точность и устойчивость. Реализация представлена на листинге 1.

Метод Рунге-Кутты

Будем рассматривать метод второго порядка точности.

$$y_{n+1} = y_n + h[(1 - \alpha)k_1 + \alpha k_2], \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n), \\ k_2 &= f\left(x_n + \frac{h}{2\alpha}, y_n + \frac{h}{2\alpha}k_1\right), \alpha = \frac{1}{2} \text{ или } \alpha = 1 \end{aligned} \quad (14)$$

Реализация представлена на листинге 1.

Демонстрация работы программы

Результаты работы программы на отрезке $[0; 2]$ с шагом 10^{-6} представлены в таблице ниже (для наглядности берётся x с шагом 0.1).

x	Метод Пикара (1 приб-е)	Метод Пикара (2 приб-е)	Метод Пикара (3 приб-е)	Метод Пикара (4 приб-е)	Метод Эйлера	Метод Рунге-Кутта
0.00	0.00e+00	0.00e+00	0.00e+00	0.00e+00	0.00e+00	0.00e+00
0.10	3.33e-04	3.33e-04	3.33e-04	3.33e-04	3.33e-04	3.33e-04
0.20	2.67e-03	2.67e-03	2.67e-03	2.67e-03	2.67e-03	2.67e-03
0.30	9.00e-03	9.00e-03	9.00e-03	9.00e-03	9.00e-03	9.00e-03
0.40	2.13e-02	2.14e-02	2.14e-02	2.14e-02	2.14e-02	2.14e-02
0.50	4.17e-02	4.18e-02	4.18e-02	4.18e-02	4.18e-02	4.18e-02
0.60	7.20e-02	7.24e-02	7.24e-02	7.24e-02	7.24e-02	7.24e-02
0.70	1.14e-01	1.16e-01	1.16e-01	1.16e-01	1.16e-01	1.16e-01
0.80	1.71e-01	1.74e-01	1.74e-01	1.74e-01	1.74e-01	1.74e-01
0.90	2.43e-01	2.51e-01	2.51e-01	2.51e-01	2.51e-01	2.51e-01
1.00	3.33e-01	3.49e-01	3.50e-01	3.50e-01	3.50e-01	3.50e-01
1.10	4.44e-01	4.75e-01	4.77e-01	4.78e-01	4.78e-01	4.78e-01
1.20	5.76e-01	6.33e-01	6.40e-01	6.41e-01	6.41e-01	6.41e-01
1.30	7.32e-01	8.32e-01	8.50e-01	8.53e-01	8.53e-01	8.53e-01
1.40	9.15e-01	1.08e+00	1.12e+00	1.13e+00	1.13e+00	1.13e+00
1.50	1.12e+00	1.40e+00	1.49e+00	1.51e+00	1.52e+00	1.52e+00
1.60	1.37e+00	1.79e+00	1.98e+00	2.05e+00	2.08e+00	2.08e+00
1.70	1.64e+00	2.29e+00	2.67e+00	2.86e+00	2.97e+00	2.97e+00
1.80	1.94e+00	2.92e+00	3.65e+00	4.15e+00	4.69e+00	4.69e+00
1.90	2.29e+00	3.71e+00	5.08e+00	6.37e+00	9.57e+00	9.57e+00
2.00	2.67e+00	4.70e+00	7.22e+00	1.05e+01	3.17e+02	3.18e+02

Вопросы при защите лабораторной работы

1. Укажите интервалы значений аргумента, в которых можно считать решением заданного уравнения каждое из первых 4-х приближений Пикара. Точность результата оценивать до второй цифры после запятой. Объяснить свой ответ.

2. Пояснить, каким образом можно доказать правильность полученного результата при фиксированном значении аргумента в численных методах.

В силу того, что численные методы зависят от величины шага, то изменяя его, можно прийти к наиболее точному результату при фиксированном значении аргумента. Как только результат перестаёт отличаться от результатов, полученных ранее, то можно сделать вывод о том, что корректный результат получен.

3. Каково значение функции при $x=2$, т.е. привести значение $u(2)$.

При $x = 2$ и шаге 10^{-6} методом Рунге-Кутты было получено значение функции равное 317.82.

Код программы

Листинг 1 — Лабораторная работа №1

```
1 from math import sqrt
2
3 def f(x, y):
4     return x**2 + y**2
5
6 def picard_1(x_args):
7     res = []
8     for x in x_args:
9         res.append(x**3 / 3)
10    return res
11
12 def picard_2(x_args):
13     res = []
14     for x in x_args:
15         res.append(x**3 / 3 + x**7 / 63)
16    return res
17
18 def picard_3(x_args):
19     res = []
20     for x in x_args:
21         res.append(x**3 / 3 + x**7 / 63 + x**15 / 59535 + 2*x**11 / 2079)
22    return res
23
24 def picard_4(x_args):
25     res = []
26     for x in x_args:
27         res.append(x**3/3 + x**7/63 + x**15/59535 + 2*x**11/2079 +
28             x**31/109876902975 + 4*x**23/99411543 + 4*x**27/3341878155 + 2*x
29             **23/86266215 + 2*x**19/3393495 + 4*x**19/2488563 + 4*x**15/93555)
30    return res
31
32 def runge_kutta(x, y, h, num):
33     alpha = 0.5
34     res = []
35     temp = h / (2 * alpha)
36
37     for i in range(num):
```

```

38
39     k1 = f(x, y)
40     k2 = f(x + temp, y + temp * k1)
41
42     y += h * ((1 - alpha) * k1 + alpha * k2)
43     x += h
44
45     return res
46
47
48 def euler_explicit(x, y, h, num):
49     res = []
50
51     for i in range(num):
52         res.append(y)
53
54     try:
55         y += h * f(x, y)
56         x += h
57     except OverflowError:
58         for k in range(i, num):
59             res.append('—')
60         break
61     return res
62
63 def count_x_args(x, x_max, h):
64     x_args = []
65     while x <= x_max:
66         x_args.append(x)
67         x += h
68     return x_args
69
70
71 def print_head():
72     print(' '*4+'x'+ ' '*4+'|'+ ' '*17+'Метод Пикара'+ ' '*18+'|'+ ' '*6+'
        Метод Эйлера'+ ' '*5+'|'+ ' '*3+'Метод РунгеКутта—'+ ' '*3+'\n'+ ' '*9+'|'+ '
        '*5+'1'+ ' '*5+'|'+ ' '*5+'2'+ ' '*5+'|'+ ' '*5+'3'+ ' '*5+'|'+ ' '*5+'4'+
        ' '*5+'|'+ ' '*3+'Явный'+ ' '*3+'\n'+ '—'*55)
73
74

```



```

75 def main():
76     print_head()
77
78     x, x_max, y = 0, 2, 0
79     h = 10 ** -6
80
81     x_args = count_x_args(x, x_max, h)
82
83     res_runge_kutta = runge_kutta(x, y, h, num)
84     res_euler_explicit = euler_explicit(x, y, h, num)
85     res_picard_1 = picard_1(x_args)
86     res_picard_2 = picard_2(x_args)
87     res_picard_3 = picard_3(x_args)
88     res_picard_4 = picard_4(x_args)
89
90     for i in range(len(x_args)):
91         print('{:9.3f}|{:11.3e}|{:11.3e}|{:11.3e}|{:11.3e}|{:11.3e}|{:11.3e}|{:11.3e}'
92             '.format(x_args[i], res_picard_1[i], res_picard_2[i], res_picard_3[i],
93                 res_picard_4[i], res_euler_explicit[i], res_runge_kutta[i]))
94
95 if __name__ == '__main__':
96     main()

```