



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение  
высшего образования  
«Московский государственный технический университет  
имени Н.Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет)»  
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

---

ФАКУЛЬТЕТ ИНФОРМАТИКА И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

КАФЕДРА «ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ЭВМ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ  
ТЕХНОЛОГИИ» (ИУ7)

НАПРАВЛЕНИЕ ПОДГОТОВКИ 09.03.04 Программная инженерия

**О Т Ч Е Т**

по лабораторной работе № 4

Название: Программно-алгоритмическая реализация моделей  
на основе дифференциальных уравнений в частных производных с  
краевыми условиями II и III рода

Дисциплина: Моделирование

Студент

ИУ7-62Б

(Группа)

\_\_\_\_\_  
(Подпись, дата)

Е.В. Брянская

(И.О. Фамилия)

Преподаватель

\_\_\_\_\_  
(Подпись, дата)

В.М. Градов

(И.О. Фамилия)

Москва, 2021

# Задание

**Тема.** Программно-алгоритмическая реализация моделей на основе дифференциальных уравнений в частных производных с краевыми условиями II и III рода.

**Цель работы.** Получение навыков разработки алгоритмов решения смешанной краевой задачи при реализации моделей, построенных на квазилинейном уравнении параболического типа.

**Исходные данные.**

1. Задана математическая модель.

Уравнение для функции  $T(x, t)$

$$c(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{2}{R} \alpha(x) T + \frac{2T_0}{R} \alpha(x) \quad (1)$$

Краевые условия:

$$\begin{cases} t = 0, T(x, 0) = T_0, \\ x = 0, -k(T(0)) \frac{\partial T}{\partial x} = F_0, \\ x = l, -k(T(l)) \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha_N(T(l) - T_0) \end{cases} \quad (2)$$

В обозначениях уравнения лекции

$$p(x) = \frac{2}{R} \alpha(x) \quad (3)$$

$$f(u) = f(x) = \frac{2T_0}{R} \alpha(x) \quad (4)$$

2. Разностная схема с разностным краевым условием при  $x = 0$  получена в Лекции и может быть использована в данной работе. Самостоятельно надо получить интегроинтерполяционным методом разностный аналог краевого условия при  $x = l$ , точно так же, как это сделано при  $x = 0$ . Для этого надо проинтегрировать на отрезке  $[x_{N-1/2}, x_N]$  выписанное выше уравнение 1 и учесть, что поток  $\hat{F}_N = \alpha_N(\hat{y}_N - T_0)$ , а  $\hat{F}_{N-1/2} = \hat{\chi}_{N-1/2} \frac{\hat{y}_{N-1} - \hat{y}_N}{h}$ .

3. Значения параметров для отладки (все размерности согласованы)

$$k(T) = a_1(b_1 + c_1 T^{m_1})$$

$$c(T) = a_2 + b_2 T^{m_2} - \frac{c_2}{T^2}$$

$$a_1 = 0.0134, b_1 = 1, c_1 = 4.35 \cdot 10^{-4}, m_1 = 1$$

$$a_2 = 2.049, b_2 = 0.563 \cdot 10^{-3}, c_2 = 0.528 \cdot 10^5, m_2 = 1$$

$$\alpha(x) = \frac{c}{x - d}$$

$$\alpha_0 = 0.05 \text{ Вт/см}^2 \text{ К},$$

$$\alpha_N = 0.01 \text{ Вт/см}^2 \text{ К},$$

$$l = 10 \text{ см},$$

$$T_0 = 300 \text{ К},$$

$$R = 0.5 \text{ см},$$

$$F(t) = 50 \text{ Вт/см}^2 \text{ (для отладки принять постоянным)}.$$

## Выполнение

Задача решается интегро-интерполяционным методом.

Выбирается шаблон и связанная с шаблоном ячейка. Далее проводится интегрирование уравнения (1). В результате нескольких преобразований получается следующее:

$$\hat{c}_n(\hat{t}_n - t_n)h = \tau(\hat{F}_{n-1/2} - \hat{F}_{n+1/2}) - p_n\hat{t}_n\tau h + \hat{f}_n\tau h \quad (5)$$

С учётом формул (3) и (4) получаются такие выражения:

$$\begin{cases} \hat{F}_{n+1/2} = \hat{\chi}_{n+1/2} \frac{\hat{t}_n - \hat{t}_{n+1}}{h} \\ \hat{F}_{n-1/2} = \hat{\chi}_{n-1/2} \frac{\hat{t}_{n-1} - \hat{t}_n}{h} \end{cases} \quad (6)$$

Следующий шаг для 1ого уравнения:

$$\hat{\chi}_{n+1/2} = \frac{\hat{k}_n + \hat{k}_{n+1}}{2} \quad (7)$$

Аналогично для 2ого.

Затем полученные выражения подставляются в (5), которое далее приводится к виду:

$$\hat{A}_n\hat{t}_{n-1} - \hat{B}_n\hat{t}_n + \hat{D}_n\hat{t}_{n+1} = -F_n$$

И применяется метод простой прогонки.

## Результаты работы.

1. Представить разностный аналог краевого условия при  $x = l$  и его краткий вывод интегро-интерполяционным методом.

Проинтегрируем (1) на отрезке  $[x_{N-1/2}; x_N]$ :

$$\begin{aligned} \int_{x_{N-1/2}}^{x_N} dx \int_{t_m}^{t_{m+1}} c(T) \frac{\partial T}{\partial t} dt &= - \int_{t_m}^{t_{m+1}} dt \int_{x_{N-1/2}}^{x_N} \frac{\partial F}{\partial x} dx - \\ &- \int_{x_{N-1/2}}^{x_N} dx \int_{t_m}^{t_{m+1}} p(x) T dt + \int_{x_{N-1/2}}^{x_N} dx \int_{t_m}^{t_{m+1}} f(x) dt \end{aligned}$$

Пользуясь методами приближённого интегрирования получаем:

$$\begin{aligned} \frac{h}{4} (\hat{c}_N (\hat{T}_N - T_N) + \hat{c}_{N-1/2} (\hat{T}_{N-1/2} - T_{N-1/2})) &= -\tau (\hat{F}_N - \hat{F}_{N-1/2}) - \\ &- \tau \frac{h}{4} (p_N \hat{T}_N + p_{N-1/2} \hat{T}_{N-1/2}) + \tau \frac{h}{4} (\hat{f}_N + \hat{f}_{N-1/2}) \end{aligned}$$

Учитывая краевые условия:

$$\begin{aligned} \frac{h}{4} (\hat{c}_N (\hat{T}_N - T_N) + \hat{c}_{N-1/2} (\hat{T}_{N-1/2} - T_{N-1/2})) &= \\ &- \tau (\alpha_N (\hat{T}_N - T_0) - \hat{\chi}_{N-1/2} \frac{\hat{T}_{N-1} - \hat{T}_N}{h}) - \\ &- \tau \frac{h}{4} (p_N \hat{T}_N + p_{N-1/2} \hat{T}_{N-1/2}) + \tau \frac{h}{4} (\hat{f}_N + \hat{f}_{N-1/2}) \end{aligned}$$

Приводим к форме  $\hat{K}_N \hat{T}_N + \hat{M}_{N-1} \hat{T}_{N-1} = \hat{P}_N$ .

$$\begin{cases} K_N = \frac{h}{8} (2\hat{c}_N + \hat{c}_{N-1/2}) + \frac{h\tau}{8} (2p_N + p_{N-1/2}) + \tau (\alpha_N - \frac{\hat{\chi}_{N-1/2}}{h}) \\ M_N = \frac{h}{8} \hat{c}_{N-1/2} + \frac{h\tau}{8} p_{N-1/2} - \tau \frac{\hat{\chi}_{N-1/2}}{h} \\ P_N = \frac{h}{4} (\hat{c}_N T_N + \hat{c}_{N-1/2} \frac{T_N + T_{N-1}}{2}) + \frac{h\tau}{4} (\hat{f}_N + \hat{f}_{N-1/2}) + \tau \alpha_N T_0 \end{cases}$$

2. График зависимости температуры  $T(x, t_m)$  от координаты  $x$  при фиксированных значениях времени  $t_m$  при заданных выше параметрах.

$$\tau = 0.01, \varepsilon = 10^{-5}$$

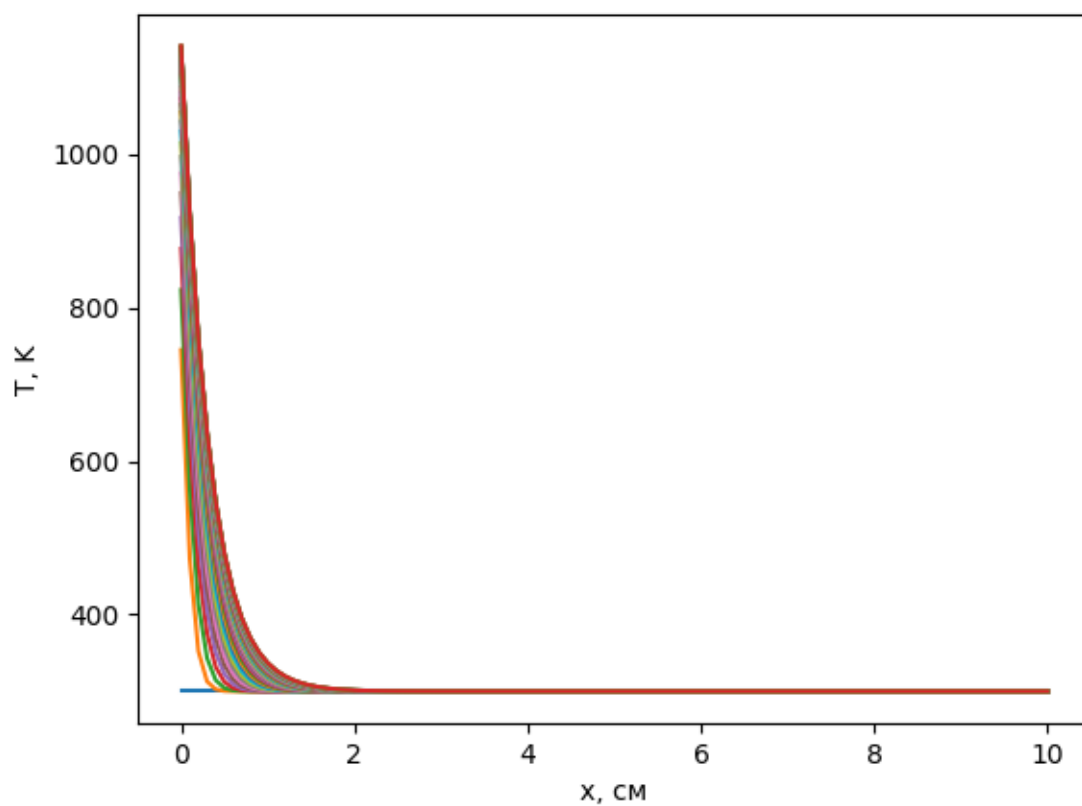


Рис. 1 — Задание 2

3. График зависимости  $T(x_n, t)$  при нескольких значениях координаты  $x_n$

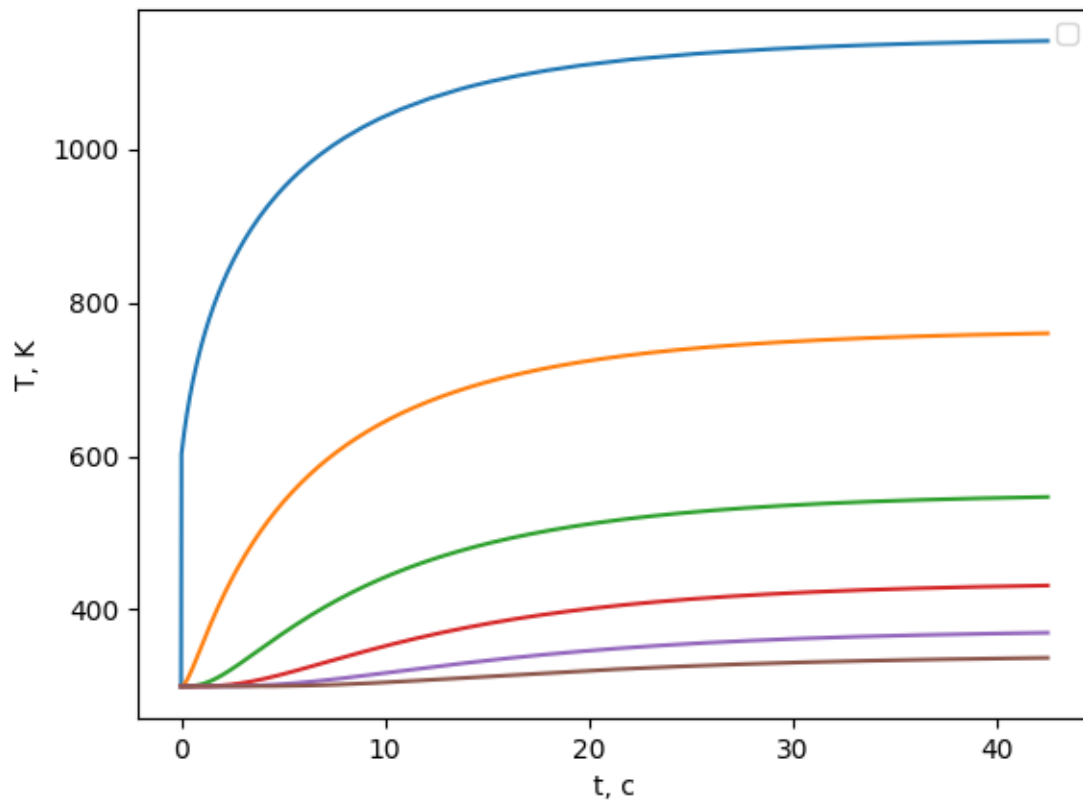


Рис. 2 — Задание 3

### Вопросы при защите лабораторной работы

1. *Приведите результаты тестирования программы (графики, общие соображения, качественный анализ)*

(а)  $F_0(t) = 0$  Из-за того, что тепловой поток равен нулю, температура равна  $T_0$  для всех  $x$ .

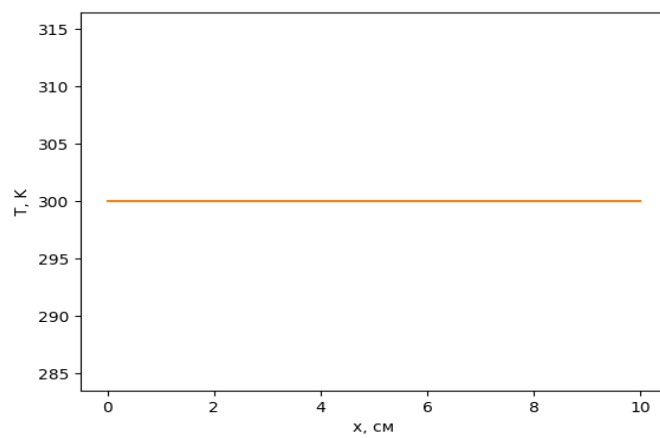


Рис. 3 — Тест 1

(b)  $F_0(t) < 0$  В такой ситуации происходит съём тепла.

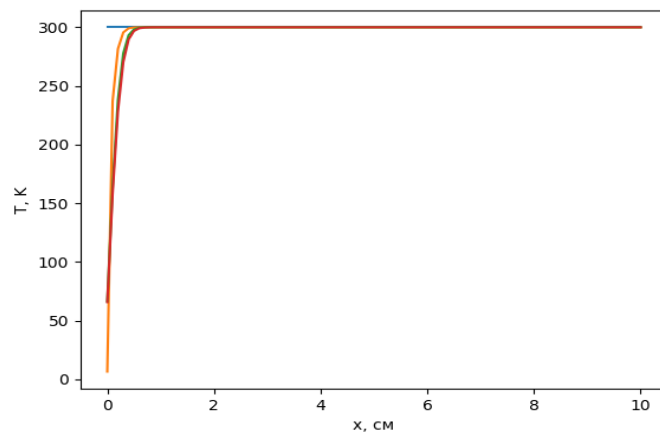


Рис. 4 — Тест 2



# Код программы

Листинг 1 — Лабораторная работа №3

```
1 import matplotlib.pyplot as plt
2
3 a1 = 0.0134
4 b1 = 1
5 c1 = 4.35e-4
6 m1 = 1
7 a2 = 2.049
8 b2 = 0.563e-3
9 c2 = 0.528e5
10 m2 = 1
11 alpha_0 = 0.05
12 alpha_N = 0.01
13 l = 10
14 T0 = 300
15 R = 0.5c
16 F = 50
17
18 tau = 0.01
19 step = 0.1
20 N = round(l / step) + 1
21 eps = 1e-5
22
23 cur_temp = [T0] * N
24 x = [0] * N
25 for i in range(N):
26     x[i] = i * step
27
28 def k(t):
29     return a1 * (b1 + c1 * t**m1)
30
31 def c(t):
32     return a2 + b2 * t**m2 - c2 / (t**2)
33
34 def alpha(x):
35     d = alpha_N * l / (alpha_N - alpha_0)
36     c = -(alpha_N * alpha_0 * l) / (alpha_N - alpha_0)
37     return c / (x - d)
```

```

38
39 def p(x):
40     return 2 / R * alpha(x)
41
42 def f(x):
43     return 2 * T0 / R * alpha(x)
44
45 def hee_minus(n):
46     return (k(cur_temp[n]) + k(cur_temp[n - 1])) / 2
47
48 def hee_plus(n):
49     return (k(cur_temp[n]) + k(cur_temp[n + 1])) / 2
50
51 def A(n):
52     return hee_minus(n) * tau / step
53
54 def D(n):
55     return hee_plus(n) * tau / step
56
57 def B(n):
58     return A(n) + D(n) + c(cur_temp[n]) * step + p(x[n]) * step * tau
59
60 def F(n, t):
61     return f(x[n]) * step * tau + c(cur_temp[n]) * t * step
62
63 def M0():
64     c_12 = c((cur_temp[0] + cur_temp[1]) / 2)
65     p_12 = p(x[0] + step/2)
66     hee_12 = hee_plus(0)
67     return step / 8 * c_12 - hee_12 * tau / step + tau * step / 8 * p_12
68
69 def K0():
70     p0 = p(x[0])
71     p_12 = p(x[0] + step / 2)
72     c0 = c(cur_temp[0])
73     c_12 = c((cur_temp[0] + cur_temp[1]) / 2)
74     hee_12 = hee_plus(0)
75     return step / 8 * (c_12 + 2 * c0) + hee_12 * tau / step + tau * step /
76         8 * (p_12 + 2 * p0)

```

```

77 def P0():
78     c0 = c(cur_temp[0])
79     c_12 = c((cur_temp[0] + cur_temp[1]) / 2)
80     f0 = f(x[0])
81     f_12 = f(x[0] + step/2)
82     return step/8 * c_12 * (cur_temp[0] + cur_temp[1]) + \
83         step/4 * c0 * cur_temp[0] + cF*tau + tau*step/4 * (f_12 + f0)
84
85 def MN():
86     c_N = c(cur_temp[N - 1])
87     c_12 = c((cur_temp[N - 1] + cur_temp[N - 2]) / 2)
88     p_N = p(l)
89     p_12 = p(l - step/2)
90     hee_12 = hee_minus(N - 1)
91     return step / 8 * (2*c_N + c_12) + tau*step/8 * (2*p_N + p_12) + tau *
92         (alpha_N + hee_12/step)
93
94 def KN():
95     hee_12 = hee_minus(N - 1)
96     c_12 = c((cur_temp[N-1] + cur_temp[N-2]) / 2)
97     p_12 = p(l - step/2)
98     return c_12*step/8 + p_12*tau*step/8 - tau*hee_12/step
99
100 def PN():
101     c_N = c(cur_temp[N - 1])
102     c_12 = c((cur_temp[N - 1] + cur_temp[N - 2]) / 2)
103     f_N = f(l)
104     f_12 = f(l - step/2)
105     return step/4 * (c_N*cur_temp[N-1] + c_12/2 * (cur_temp[N-1] +
106         cur_temp[N-2])) + step*tau/4 * (f_N + f_12) + tau*alpha_N*T0
107
108 def calc_iter(prev_temp):
109     m0 = M0()
110     k0 = K0()
111     p0 = P0()
112     eps = [0] * N
113     eta = [0] * N
114     eps[1] = -m0 / k0
115     eta[1] = p0 / k0

```

```

115     for i in range(1, N - 1):
116         eps[i + 1] = D(i) / (B(i) - A(i) * eps[i])
117         eta[i + 1] = (F(i, prev_temp[i]) + A(i) * eta[i]) / (B(i) - A(i) *
            eps[i])
118
119     mN = MN()
120     kN = KN()
121     pN = PN()
122     new_temp = [0] * N
123     new_temp[-1] = (pN - kN * eta[-1]) / (mN + kN * eps[-1])
124     for i in range(N - 1, 0, -1):
125         new_temp[i - 1] = eps[i] * new_temp[i] + eta[i]
126     return new_temp
127
128 def temperature_check(old_t, new_t):
129     for i in range(N):
130         if abs((new_t[i] - old_t[i]) / new_t[i]) > eps:
131             return False
132     return True
133
134 def main():
135     global cur_temp
136
137     t_arr = [0]
138     temp_arr = [cur_temp.copy()]
139
140     while True:
141         prev_temp = cur_temp
142         while True:
143             new_temp = calc_iter(prev_temp)
144
145             if temperature_check(cur_temp, new_temp):
146                 break
147             cur_temp = new_temp
148
149         t_arr.append(t_arr[-1] + tau)
150         temp_arr.append(new_temp)
151
152         if temperature_check(prev_temp, new_temp):
153             break

```

```
154     cur_temp = new_temp
155
156     cur_temp = new_temp
157
158     # Отрисовка графиков
159
160 if __name__ == '__main__':
161     main()
```