УДК 004.021

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РАЗНОСТНОЙ И ВЕРОЯТНОСТНОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ НА ПРИМЕРЕ ПРОЦЕССА НАГРЕВАНИЯ ПОВЕРХНОСТИ ЖЁСТКОГО ДИСКА

Е.В. Брянская

SPIN-код: 8771-5980

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Почта: bev18u159@student.bmstu.ru

Аннотация

В работе рассматривается процесс моделирования температурного поля жёсткого диска, возникающего под воздействием теплового потока. Для этого используются разностный и вероятностный методы такие, как Якоби и Монте-Карло. Также был поставлен вопрос оптимизации используемых подходов, дальнейшее исследование показало, что их применение оправдано на сетке с малым шагом, то есть, большим количеством узлов. При такой размерности удаётся добиться выигрыша по времени в несколько раз, причём наиболее подходящим методом для вычисления температуры по всей поверхности исследуемого объекта является усовершенствованный метод Якоби. В случае сетки с малой размерностью, целесообразнее использовать его немодифицированную версию. С другой стороны, также было определено, что в случае, если необходимо определить температуру в заданной точке, рациональнее привлекать метод Монте-Карло.

Ключевые слова: *разностный и вероятностный методы, краевые условия I рода, равномерная прямоугольная сетка, разностная схема, метод Якоби, метод Монте-Карло.*

Введение

Активное развитие компьютерных технологий продолжает расширять область применения численных методов решения прикладных задач. Так, проектирование большинства современных технических систем связано с теоретическими расчётами и исследованиями, цель которых – выбор наиболее подходящих деталей, параметров конструкции, выявление критичных для функционирования как внутренних, так и внешних показателей.

В статье примером подобного объекта является жёсткий диск (Hard Disk Drive – HDD). Немаловажную роль для его функционирования играет температура. Для большинства моделей дисков нормальной температурой для работы являются 40-50 градусов, а при 70 возникает повышенный износ.

Необходимо смоделировать распределение температуры по поверхности диска в условиях воздействующего на него теплового потока, для идентификации наиболее подверженных деформации участков. Для проведения расчётов привлекаются такие методы, как Монте-Карло и Якоби. Требуется детально исследовать применение каждого из подходов, а также рассмотреть возможные их модификации.

Постановка краевой задачи

Круглая форма диска является дополнительным источником сложностей при вычислениях, поэтому в качестве его модели выступает тонкая прямоугольная пластина с отверстием, представленная на рисунке 1.

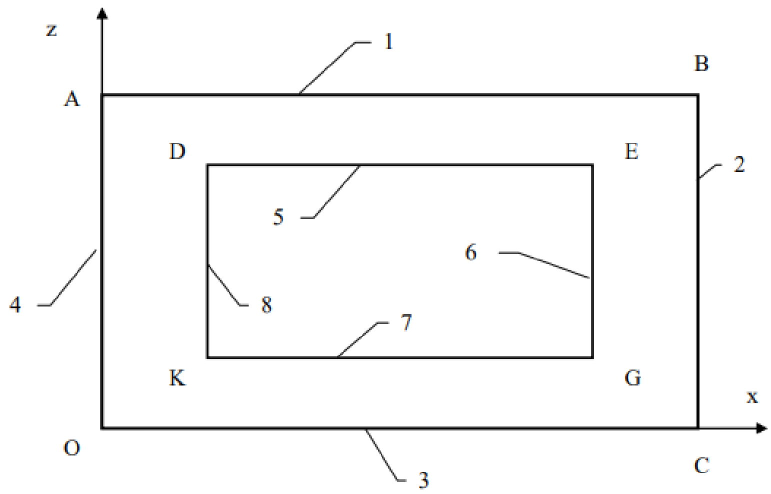

Рисунок 1 – Исследуемая пластина.

Координаты точек A, B, C, D, E, G, K заданы. Также известно, что OC = AB = a, AO = BC = b.

Математическая модель описывается следующим образом:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{f(x, z)}{k} = 0, \quad (1)$$

и определяет двумерное температурное поле $u(x, z)$ с постоянным коэффициентом k в рассматриваемой пластине с внешними размерами $a \times b$. Температура по её толщине принимается постоянной. Функция $f(x, z)$ представляет внутренние объёмные источники тепловыделения.

В работе используется распределение вида:

$$f(x, z) = f_0 e^{-\beta(x - x_0)^2(z - z_0)^2}, \tag{2}$$

где параметры f_0, β варьируются исходя из того, чтобы максимум решения уравнения – функции $u(x, z)$, не превышала 3000K. При этом $\beta > 0$, а координаты x_0, z_0 центра распределения функции $f(x, z)$ задаются пользователем.

На границах 1-4 исследуемого объекта поставлены следующие краевые условия I рода:

$$\begin{cases} x = 0, \ u(0, z) = u_0, \\ x = a, \ u(a, z) = u_0, \\ z = 0, \ u(x, 0) = u_0, \\ z = b, \ u(x, b) = u_0. \end{cases} \tag{3}$$

Аналогичным образом ставятся краевые условия на внутренней границе прямоугольника DEGK.

Таким образом, задача принимает вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \dfrac{f(x, z)}{k} = 0, \\ x = 0, \ u(0, z) = u_0, \\ x = a, \ u(a, z) = u_0, \\ z = 0, \ u(x, 0) = u_0, \\ z = b, \ u(x, b) = u_0. \end{cases} \tag{4}$$

Для решения вводится равномерная прямоугольная сетка

$$w_{h_x, h_z} = \left\{x_i, z_i : x_i = ih_x, z_j = jh_z, i = \overline{0, m}, j = \overline{0, n}\right\}, \tag{5}$$

где h_x, h_z - шаги по переменным *x, y* соответственно, *m, n* – количество узлов по *x, y*. [1]

Подходы к решению

Рассмотрим два подхода к решению подобных задач: разностный и вероятностный методы.

Итерационный метод

Для итерационного метода требуется записать разностную схему, для (4) она имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{u_{i+1,\,j} - 2u_{i,\,j} + u_{i-1,\,j}}{h^2{}_x} + \dfrac{u_{i,\,j+1} - 2u_{i,\,j} + u_{i,\,j-1}}{h^2{}_z} = -\dfrac{f}{k}, \\ где\ i = \overline{1, n-1},\ j = \overline{1, m-1}, \\ x = 0,\ u(0,\,z) = u_0, \\ x = a,\ u(a,\,z) = u_0, \\ z = 0,\ u(x,\,0) = u_0, \\ z = b,\ u(x,\,b) = u_0. \end{cases} \tag{6}$$

Очередное значение функции вычисляется на основе предыдущих. Так, для схемы (6) каждая последующая величина температурного поля может быть получена по формуле (7):

$$u_{i,j} = \frac{1}{2\left(h^2{}_z + h^2{}_x\right)}\left(\frac{f}{k}h^2{}_x h^2{}_z + h^2{}_z u_{i+1,j} + h^2{}_z u_{i-1,j} + h^2{}_x u_{i,\,j+1} + h^2{}_x u_{i,\,j-1}\right) \tag{7}$$

Процесс должен продолжаться до тех пор, пока выполняется условие (8):

$$max\left|u_i - u_{i-1}\right| \geq \varepsilon \tag{8}$$

Метод Якоби

Рассматриваемый подход является разновидностью метода простой итерации. Для построения итеративной процедуры необходимо провести предварительное преобразование системы уравнений $Ax = b$ к эквивалентному виду $x = Bx + d$ по одному из следующих правил:

$$\begin{gathered} 1.\ B = E - D^{-1}A = D^{-1}(D - A),\ d = D^{-1}b; \\ 2.\ B = -D^{-1}(L + U) = -D^{-1}(A - D),\ d = D^{-1}b; \\ 3.\ D_{ii}{}^{-1} = \frac{1}{D_{ii}},\ D_{ii} \neq 0,\ i = \overline{1,\ n}; \end{gathered} \tag{9}$$

где D – матрица, у которой на главной диагонали стоят соответствующие элементы матрицы A, а все остальные нули; матрицы U и L содержат верхнюю и нижнюю треугольные части A, на главной диагонали которых нули; E – единичная матрица.

Расчетную формулу $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + d$, где k – счётчик итераций, можно записать в другой форме:

$$x^{(k+1)}{}_i = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x^{(k)}{}_j\right),\ i = \overline{1,\ n} \tag{10}$$

Сначала вводится начальное приближение:

$$x^{(0)} = \left[\frac{b_1}{a_{11}},\ \ldots,\ \frac{b_i}{a_{ii}},\ \ldots,\ \frac{b_n}{a_{nn}}\right], \tag{11}$$

затем через $x^{(1)}$ находится $x^{(2)}$ и т.д.

Критерий окончания:

$$\left|x^{(k+1)} - x^k\right| < \varepsilon. \tag{12}$$

Метод Монте-Карло

Один из методов статистического моделирования, позволяет решать задачи, в которых присутствует элемент неопределённости. Как правило, для их реализации привлекается генератор случайных величин. На основе многократных вычислений рассчитываются вероятностные характеристики рассматриваемого процесса [2]. В виду множественных математических операций вся процедура подсчёта требует значительных временных затрат.

Использование такого подхода для изучения физического процесса подразумевает моделирование поведения отдельных элементарных частей системы.

В текущей работе применяется такое стохастическое явление, как случайное блуждание, которое описывает путь частицы, запускаемой из исследуемой точки пластины [3]. Частица переходит из одного узла сетки в другой в одном из четырёх возможных направлений (вверх/вниз/влево/вправо), выбор которых определяется генератором случайных чисел. Это повторяется до тех пор, пока внешняя или внутренняя граница не будет достигнута.

Таким образом, выражение (13) позволяет определить значение температурного поля в конкретной точке.

$$u(x,\ y) = \frac{1}{kN} \sum_{\text{точки траектории}} f\left(x_i,\ y_i\right) + u_0, \tag{13}$$

где N – количество точек траектории, u_0 – значение на границе.

Реализация математической модели

Для проведения дальнейших исследований была разработана программа, реализующая оба подхода. Для отладки принимаются следующие значения параметров: a = 20 см, b = 10 см, u_0 = 313K, поток $F_0 = 30$ Вт/см^2 при x = 0. Стороны разбиваются на 70 и 35 узлов соответственно.

На рисунке 2 и 3 наглядно демонстрируется распределение температуры по поверхности пластины с использованием метода Якоби и Монте-Карло.

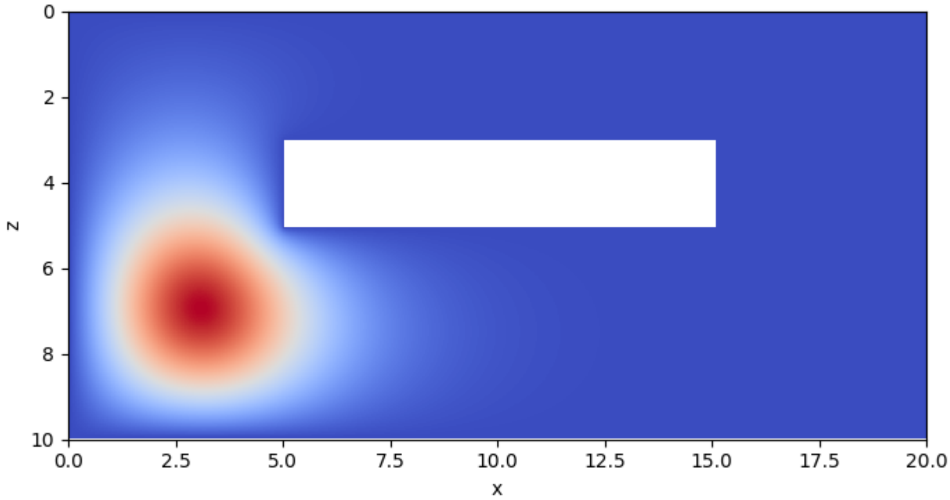

Рисунок 2 – Метод Якоби на сетке в 160000 узлов.

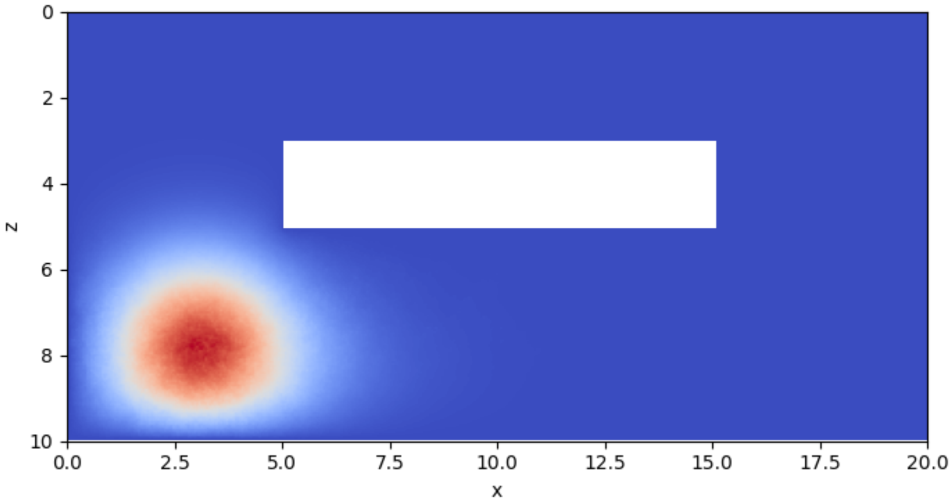

Рисунок 3 – Метод Монте-Карло на сетке в 160000 узлах.

Нетрудно заметить, что изображения отличаются. Это связано с тем, что используются разные подходы – из-за случайной природы вычислений метода Монте-Карло, значения в смежных узлах могут резко контрастировать. Также в ходе разработки программы вполне ожидаемо было отмечено, что качество результата напрямую зависит от количества узлов в сетке.

Результаты исследований

Уменьшение времени работы алгоритмов позволяет получить за одинаковое время результирующее изображение с более высоким разрешением. В связи с этим была предпринята попытка оптимизации алгоритмов путём их распараллеливания.

Метод Якоби модифицируется следующим образом: предобработанная матрица A разбивается на количество частей, равное числу потоков, каждый из которых производит расчёты только со своим набором узлов.

Что касается метода Монте-Карло, то разделение по потокам происходит похожим образом. Также при расчёте температурного поля по всей платине уже посчитанные ранее температурного поля сохраняются, а не вычисляются каждый раз заново.

На рисунке 4 представлены результаты проведения исследования зависимости времени обработки от количества узлов сетки. Следует отметить, что для упрощения из числа узлов не были исключены те, что попадают в область отверстия.

Рисунок 4 – Вычисление температуры в каждой точки пластины

Анализируя полученные результаты, можно сделать следующие выводы.

- На небольшом количестве узлов (до 5000) подходы с привлечением дополнительных потоков проигрывают по времени. Поэтому допустимо предположить, что привлечение такого рода оптимизации не оправдано на малой размерности сетки.
- Несмотря на малое отличие по времени при таком разбиении пластины, метод Якоби демонстрирует наилучший результат.

- На размерах сетки больших, чем 7200 узлов, использование параллельных вычислений оправдано, так, улучшенный алгоритм Монте-Карло на 16200 точках выполняет вычисления примерно в 3.2 раза быстрее, чем неоптимизированный. Похожая ситуация наблюдается и с привлечением подхода Якоби – разница в 3 раза.
- Сравнивая приведённые четыре способа, заметно, что наилучшие показатели наблюдаются у оптимизированного метода Якоби, наихудшие – у простой реализации Монте-Карло. По этой причине для моделирования температурного слоя пластины лучше привлекать первый подход.

Что касается HDD, то существует несколько причин перегрева. Например, близкое расположение к другим элементам компьютера (оптическим накопителям, видеокарте…), недостаточная вентиляция внутренних компонентов [4]. При моделировании такого рода факторов следует их учитывать, как граничные условия.

Другая причина – это отошедший шлейф, соединяющий жёсткий диск с материнской платой. Нестабильная работа, в таком случае, связана с тем, что ток постоянно "скачет" по контактной дорожке штекера, нагревая конкретную точку. В исследовании такой фактор имитируется направленным на поверхность пластины тепловым потоком.

Задача состоит в том, чтобы найти температуру в этой точке за наименьшее время. По рисунку 5 можно сделать вывод о том, что для этой задачи лучше всего использовать усовершенствованный метод Монте-Карло. Это объясняется тем, что вероятностный метод определяет значение для конкретной точки без опоры на вычисления соседних, в отличие от итерационного подхода.

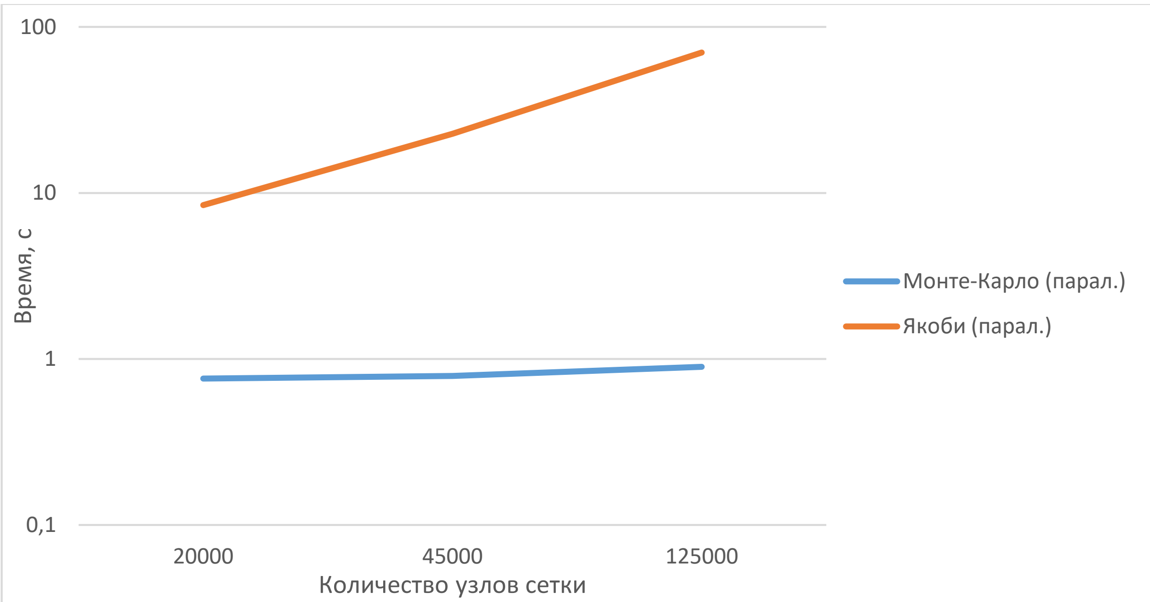

Рисунок 5 – Вычисление температуру в конкретной точке

Заключение

С помощью таких методов, как Монте-Карло и Якоби было смоделировано распределение температуры по поверхности тонкой прямоугольной пластины в условиях воздействующего на неё теплового потока.

Экспериментально было выяснено, что оптимизация этих подходов с помощью дополнительных потоков имеет место лишь на количестве узлов большем, чем 7200. Так, для на сетке размерностью 180×90 показатели доработанных методов отличаются более, чем в 3 раза. Но между усовершенствованными методами Монте-Карло и Якоби для подобной задачи следует выбирать второй.

С другой стороны, для определения температуры в конкретной точке лучшие выбирать первый подход, что объясняется особенностью работы этого алгоритма.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Волков К. Н. и др. Разностные схемы в задачах газовой динамики на неструктурированных сетках //М.: Физматлит. – 2014.

[2] Соболь И. М. Метод Монте-Карло. – наука, 1985. – Т. 46.

[3] Ермаков С.М., Некруткин В.В., Сипин А.С., Случайные процессы для решения классических уравнений математической физики. М.: Наука, 1984, - 205 с.

[4] Груздев С. М. Проблемы надежности компьютерной техники научно-исследовательского предприятия и рекомендации по повышению её качества //Информационные технологии и прикладная математика. – 2020. – С. 36-43.

Брянская Екатерина Вадимовна – бакалавр кафедры "Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии", МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

COMPARATIVE ANALYSIS OF DIFFERENCE AND PROBABILISTIC COMPUTATIONAL MODELS ON THE EXAMPLE OF HEATING THE HDD SURFACE

E.V. Bryanskaya

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Annotation

The paper considers the process of modeling the temperature field of a hard disk that occurs under the influence of heat flow. To do this, we use differential and probabilistic methods such as Monte Carlo and Jacobi. The question of optimizing the approaches used was also raised, further research showed that their use is justified on a grid with a small step, that is, a large number of nodes. With this dimension, it is possible to achieve a time gain of several times, and the most suitable method for calculating the temperature over the entire surface of the object under study is the improved Jacobi method. In the case of a grid with a small dimension, it is more appropriate to use its unmodified version. On the other hand, the modified Monte Carlo method should be used if it is necessary to determine the temperature at a given point.

Keywords: difference and probabilistic methods, boundary conditions of the first kind, uniform rectangular grid, difference scheme, Jacobi method, Monte-Carlo method.

Bryanskaya Ekaterina Vadimovna – student at the department of "Computer software and information technologies", Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation,