3.2.4 Свободные колебания в электрическом контуре

Ивакин Кирилл Б01-907

Цель работы: исследование свободных колебаний в электрическом колебательном контуре.

В работе используется: генератор импульсов, электронное реле, магазин сопротивлений, магазин ёмкостей, катушка индуктивности, электронный осцилограф, универсальный измерительный мост.

1 Теория

В работе исследуются свободные колебания в RLC-контуре.

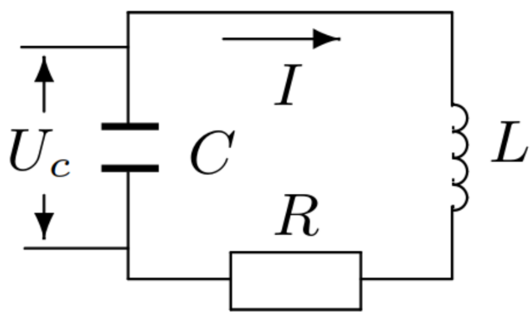


Рис. 1: Колебательный контур

Сумма падений напряжения на элементах цепи в отсутсвие внешней ЭДС равна нулю:

$$RI + U_C + L\frac{dI}{dt} = 0 \tag{1}$$

Подставим в это уравнение следующие выражения для I и $\frac{dI}{dt}$:

$$I = \frac{dq}{dt} = C\frac{dU_C}{dt}, U_L = L\frac{dI}{dt} \tag{2}$$

Уравнение для напряжения на конденсаторе U в колебательном контуре примет вид:

$$\ddot{U_C} + 2\gamma\dot{U_C} + \omega_0^2 U_C = 0 \tag{3}$$

Где $\gamma = \frac{R}{2L}$ - коэффициент затухания; $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ - собственная частота колебательного конура. Введем также период собственных колебаний:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC} \tag{4}$$

Для решения уравнения (3) введём вспомогательную переменную $U(t)$, положив

$$U_C(t) = U(t)e^{-\gamma t} \tag{5}$$

При этом из (3) получаем уравнение

$$\ddot{U} + \omega_1^2 U_C = 0 \tag{6}$$

где

$$w_1^2 = w_0^2 - \gamma^2 \tag{7}$$

1.1 Разные случаи колебаний

В зависимости от значения ω_1 выделяют 3 вида колебаний:

1. $\omega_1 > 0$ - затухающие колебания: $U(t) = U_0 e^{-\gamma t}\cos(\omega_1 t + \phi_0)$
2. $\omega_1 = 0$ - Критический режим: $U(t) = e^{-\gamma t}(C_1 + C_2 \cdot t)$
3. $\omega_1 < 0$ - Апериодические колебания: $U(t) = e^{-\gamma t}(C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{-\alpha t})$

1.2 Затухающие колебания

Затухающие колебания имеют место в рассматриваемом LCR-контуре при:

$$0 < R < 2\sqrt{\frac{L}{C}} = R_{\text{кр}} \tag{8}$$

$R_{\text{кр}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ - сопротивление, при котором еще существует критический режим. Большие сопротивления порождают апериодические колебания.

Период затухающих колебаний:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{\omega_0^2}}} \tag{9}$$

Так же вводится логарифмический декремент затухания:

$$\Theta = \frac{1}{n} \ln \frac{U_k}{U_{k+n}} = \gamma T_1 \tag{10}$$

где индексы показывают номер колебания, а U_k - максимальное напряжение в k-ом колебании.

Добротность контура:

$$Q = \frac{\pi}{\theta} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega_0^2}{\gamma^2} - 1} \approx \frac{\omega_0}{2\gamma} \tag{11}$$

Колебательные системы со слабым затуханием обладают большой добротностью.

1.3 Критический режим

В этом случае параметры контура связаны соотношением:

$$R = R_{\text{кр}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}, \tag{12}$$

а уравнение колебаний и его решение принимают вид:

$$\ddot{U} = 0, U(t) = a_1 + a_2 t \tag{13}$$

Соответственно, напряжение на конденсаторе:

$$U_C(t) = (a_1 + a_2 t)e^{-\gamma t}, \tag{14}$$

где константы a_1 и a_2 определяются из начальных условий.

1.4 Апереодический режим ($\gamma > \omega_0$)

В этом режиме $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \gamma^2 < 0$, так что для описания системы удобно использовать гиперболические функции. Введем вместо мнимой ω_1 действительную величину:

$$\alpha = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = \omega_0\sqrt{\frac{R^2}{R_{\text{кр}}^2} - 1} \tag{15}$$

С помощью подстановки нетрудно убедиться, что общее решение уравнения колебаний это $U_C(t) = e^{-\gamma t}(b_1 e^{\alpha t} + b_2 e^{-\alpha t})$. Соответственно, напряжение на конденсаторе:

$$U_C(t) = U_{C0} e^{-\gamma t}(b_1 e^{\alpha t} + b_2 e^{-\alpha t}) \tag{16}$$

При начальных условиях $U_C(0) = U_{C0}, I(0) = 0$:

$$U_C(t) = U_{C0} e^{-\gamma t}[ch\alpha t + \frac{\gamma}{\alpha sh\alpha t}], \tag{17}$$

$$I(t) = -\frac{U_{C0}}{\rho}\frac{\omega_0}{\alpha} e^{-\gamma t} sh\alpha t \tag{18}$$

1.5 Фазовые траектории

Заметим, что уравнение затухающих колебний может быть переписано так:

$$U(t) = U_0 e^{-\gamma t}\cos(\omega_1 t + \phi_0) => U(t) = e^{-\gamma t}(a\cos(\omega_1 t) + b\sin(\omega_1 t)) \tag{19}$$

Где $a = U_0\cos(\phi_0), b = -U_0\sin(\phi_0)$. Итого:

$$\begin{cases} U(t) = U_0 e^{-\gamma t}(\cos(\omega_1 t) + \frac{\gamma}{\omega_1}\sin(\omega_1 t)) \\ I(t) = -\frac{U_0}{\rho}\frac{\omega_0}{\omega_1}e^{-\gamma t}\sin(\omega_1 t) \end{cases}$$

Из системы следует параметрическое представлений траектории системы на фазовой плоскости переменных (U, I).

1.6 МНК

Для аппроксимации линейной зависимости в лабораторной работе используется метод наименьших квадратов. Применение метода обосновано при условии:

1. измерения независисимы.
2. все погрешности в основном случайны и распределены нормально.
3. погрешность по x мала.
4. погрешность по у одинакова.

Прямая $y = kx + b$:

$$k = \frac{D_{xy}}{D_{xx}}, \quad b = \langle y\rangle - k\langle x\rangle \tag{20}$$

где обозначено

$$D_{xy} = \langle xy\rangle - \langle x\rangle\langle y\rangle, \quad D_{xx} = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 \tag{21}$$

погешность аппроксимации:

$$\sigma_k = \sqrt{\frac{1}{n-2}\left(\frac{D_{yy}}{D_{xx}} - k^2\right)}, \quad \sigma_b = \sigma_k\sqrt{\langle x^2\rangle} \tag{22}$$

Прямая $y = kx$:

$$k = \frac{\langle xy\rangle}{\langle x^2\rangle} \tag{23}$$

погешность аппроксимации:

$$\sigma_k = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left(\frac{\langle y^2\rangle}{\langle x^2\rangle} - k^2\right)} \tag{24}$$

2 Оборудование

Класс точности магазина сопротивлений: 0.2, класс точности магазина ёмкостей: 0.1.

Рис. 2: Эксперементальная установка

На рисунке приведена схема установки. Установка содержит постоянную индуктивность L с активным сопротивлением R_L, а также переменные сопротивление R и ёмкость C. Картина колебаний

ν, Гц	L, Гн	R, Ом
50	203.5	11.807
1000	199.0	19.480
5000	199.5	42.600

Таблица 1: Параметры установки

наблюдается на экране двухканального осцилографа. Для переодического возбуждения колебаний в контуре используется генератор иммпульсов.
Отсюда видно, что индуктивность примерно не меняется, а сопротивление катушки зависит от частоты. Это объясняется наличием переменного тока. В дальнейшем используем $L = 200$ Гн, $R = 42.6$ Ом.

3 Ход работы

3.1 Измерение периодов

Установим $R = 0$. Измерим период колебаний конутра при разных C, используя формулу:

$$T = \frac{T_0 x}{n x_0} \tag{25}$$

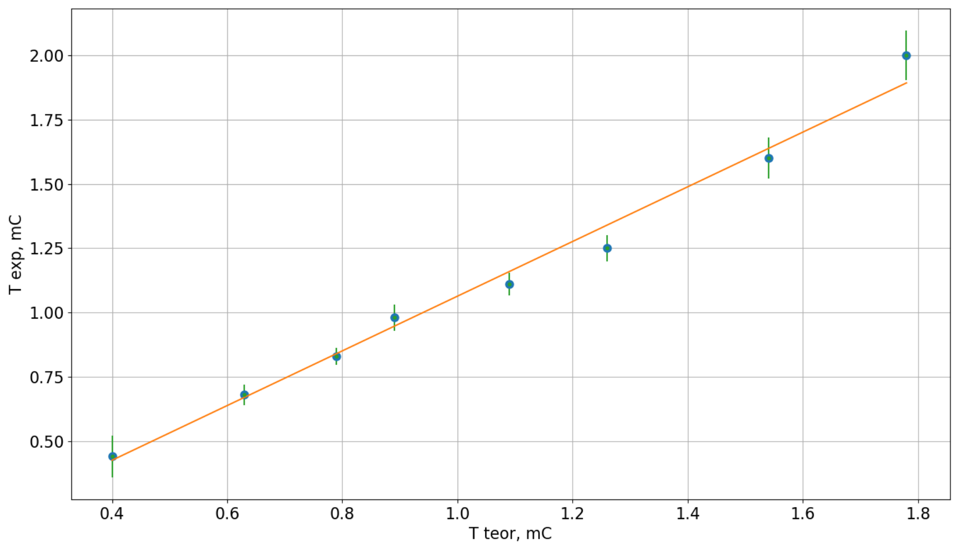
Где $T_0 = 0,01c$ - длина периода; x - рассояние, которое занимает n периодов; x_0 - расстояние между импульсами на экране при $C = 0,02$мкФ. Также посчитаем теоретическое время, используя формулу колебания (4).

T теор, мс	0.40	0.63	0.79	0.89	1.09	1.26	1.54	1.78
T прак, мс	0.44	0.68	0.83	0.98	1.11	1.25	1.60	2.0
C , мкФ	0.02	0.05	0.08	0.1	0.15	0.2	0.3	0.4

Таблица 2: Данные 1 эксперемента

Построим график $T_{exp}(T_{teor})$. Для этого воспользуемся методом наименьших квадратов.

$$k = 1.082 \quad \sigma_k = 0.027 \quad \epsilon_k = 2.7\% \tag{26}$$



С учётом погрешности эксперементальные данные совпадают с теоритическими.

3.2 Критическое сопротивление и декремент затухания

Рассчитаем C и $R_{кр}$, при которых собственная частота контура = 5Кгц. Измерим $R_{кр}^{эксп}$ увеличивая R, пока колебания не станут апериодическими.

$$R_{кр} = 12560Ом \quad C = 5.06нФ \quad R_{кр}^{эксп} = 10000Ом \tag{27}$$

Для $R = (0.1 - 0.3)R_{кр}$ будем искать θ по формуле:

$$\Theta = \frac{1}{n} \ln \frac{U_k}{U_{k+n}} = \gamma T_1 \tag{28}$$

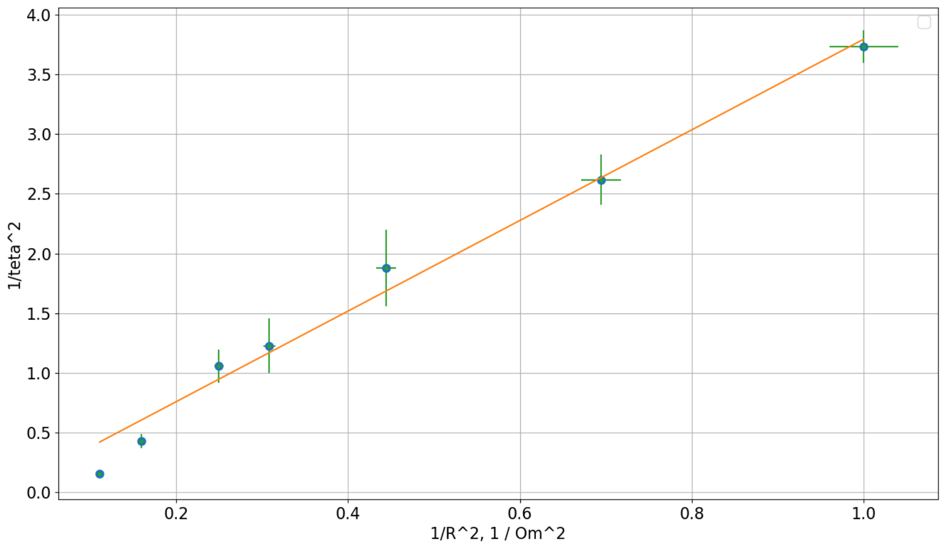
Занесем все данные в таблицу.

θ	n	$U(k)$, дел	$U(k+n)$, дел	R, кОм
0.52	3	8.50	1.80	1.00
0.62	5	8.80	0.40	1.20
0.73	4	3.70	0.20	1.50
0.90	3	3.00	0.20	1.80
0.97	2	2.80	0.40	2.00
1.53	1	2.30	0.50	2.50
2.55	1	3.20	0.25	3.00

Таблица 3: Данные 2 эксперемента

Построим график $\frac{1}{\theta^2}(\frac{1}{R^2})$ с помощь МНК, где R - полне сопротивление цепи, которое просто равно сопротивлению магазина сопротивления. Сопротивлением катушки можно пренебречь, так как ее $R << R_{магазин\_сопротивлений}$.

$$k = 3.35 \quad \sigma_k = 0.93 \quad \epsilon_k = 9.2\% \tag{29}$$



Найдем $R_{кр}$ по графику и сравним с теоретическим значением. Из теории следует:

$$\frac{1}{\theta^2} = \frac{R_{кр}^2}{4\pi^2}\frac{1}{R^2} - \frac{1}{4\pi^2} => R_{кр} = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta\frac{1}{\theta^2}}{\Delta\frac{1}{R^2}}} = 11494Ом \tag{30}$$

$$\sigma_{R_{кр}} = R_{кр}\sqrt{\left(\frac{\sigma_k}{2k}\right)^2} = 1578Ом \quad \epsilon_{R_{кр}} = 12.5\% \tag{31}$$

С учётом погрешности значение совпадает с теоретическим.
Рассчитаем добротность для максимального и минимального значений Θ и сравним данные с теоритическим значением Q.

$$Q_\Theta = \frac{\pi}{\Theta} \quad Q_{Theory} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R_{\text{кр}}^2}{R^2} - 1} \tag{32}$$

для минимальной θ

$$Q_\Theta = 6.2 \pm 0.2 \quad Q_{Theory} = 6.3 \quad \sigma_Q = 1.5\% \tag{33}$$

для θ с $R = 2000$Ом

$$Q_\Theta = 3.2 \pm 0.4 \quad Q_{Theory} = 2.4 \quad \sigma_Q = 33.3\% \tag{34}$$

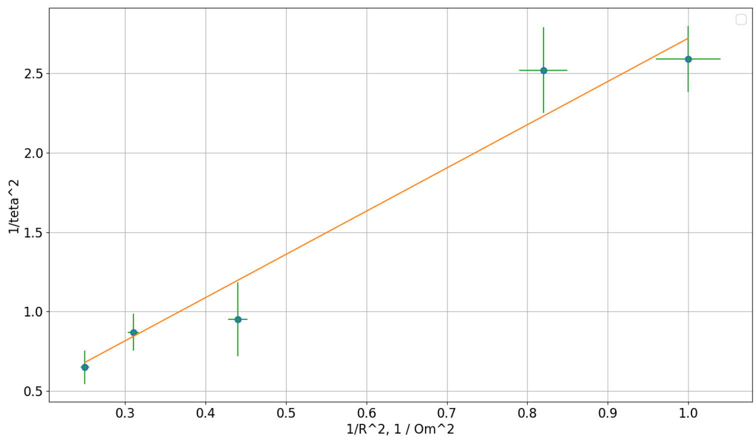
3.3 Свободные колебания на фазовой плоскости

Проведем аналогичные действия для спирали:

θ	n	$U(k)$, дел	$U(k+n)$, дел	R, кОм
0.62	4	6.00	0.50	1.00
0.63	3	3.30	0.50	1.10
1.02	4	6.00	0.10	1.50
1.07	2	3.00	0.35	1.80
1.24	2	3.00	0.25	2.00

Таблица 4: Данные 3 эксперемента

$$k = 2.37 \quad \sigma_k = 1.08 \quad \epsilon_k = 45\% \tag{35}$$



Найдем $R_{\text{кр}}$ по графику и сравним с теоретическим значением. Из теории следует:

$$\frac{1}{\theta^2} = \frac{R_{\text{кр}}^2}{4\pi^2}\frac{1}{R^2} - \frac{1}{4\pi^2} \Rightarrow R_{\text{кр}} = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta\frac{1}{\theta^2}}{\Delta\frac{1}{R^2}}} = 96679\text{Ом} \tag{36}$$

$$\sigma_{R_{\text{кр}}} = R_{\text{кр}}\sqrt{\left(\frac{\sigma_k}{2k}\right)^2} = 2202\text{Ом} \quad \epsilon_{R_{\text{кр}}} = 17.5\% \tag{37}$$

С Учётом погрешности результаты совпадают
Рассчитаем добротность для двух Θ и сравним данные с теоритическим значением
для минимальной θ

$$Q_\Theta = 5.1 \pm 0.5 \quad Q_{Theory} = 6.3 \quad \sigma_Q = 19.0\% \tag{38}$$

для θ с $R = 2000$Ом

$$Q_\Theta = 2.5 \pm 0.6 \quad Q_{Theory} = 2.4 \quad \sigma_Q = 4.1\% \tag{39}$$

4 Вывод

Итоги работы:

1. Измерен период RLC цепи с помощью осциллографа, результаты совпали с теорий с погрешностью 7.8%

2. Двумя способами измерены $R_{кр}$ и Q. Ниже описаны эти два метода

$R_{кр}$, Ом		
теор.	граф.	погрешность
12560	12417	12.50%
Q		
теор.	$f(\theta)$	погрешность
6.3	6.2 ± 0.2	1.50%
2.4	3.2 ± 0.4	33.30%

Таблица 5: Результаты работы методом амплитуд

$R_{кр}$, Ом		
теор.	граф.	погрешность
12560	9667	17.50%
Q		
теор.	$f(\theta)$	погрешность
6.3	5.1 ± 0.5	19.00%
2.4	2.5 ± 0.5	4.10%

Таблица 6: Результаты работы методом спирали