常微分方程与物理学模型

微分方程

- 方程是指含有未知变量的等式，解方程就是找出未知变量的值。
- $x^2 + 2x + 1 = 0$，$x = ?$
- 微分方程是指含有未知函数及其导数的关系式，解微分方程就是找出未知函数。
- $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} + 3$，$y \sim x = ?$
- 微分方程是伴随着微积分学一起发展起来的。微分方程的应用十分广泛。
- 常用于描述变量的变化率和变量本身之间的关系，物理学中非常常用。

一阶常微分方程

- 最最简单的：
- $\frac{dy}{dx} = x^2$，$y(0) = 0$
- 直接积分：
- $y = \frac{1}{3}x^3 + C$
- 代入初始条件，$y(0) = 0$，得$C = 0$
- 最终结果：$y = \frac{1}{3}x^3$

一阶线性常微分方程

- 导数可解出的一阶常微分方程可以表示为以下的形式

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

变量可分离方程

若一阶方程 $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ 中的 $f(x,y)$ 可以分解成 x 的函数 $g(x)$ 与 y 的函数 $h(y)$ 的乘积，即

$$\frac{dy}{dx}=g(x)\cdot h(y) \tag{10.2.2}$$

则称其为**变量可分离方程**。

若 $g(x)$ 与 $h(y)$ 连续，把原方程改写成

$$\frac{dy}{h(y)}=g(x)dx,$$

变量可分离方程

对两边取不定积分，得

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx,$$

若 $G(x)$ 是 $g(x)$ 的一个原函数，$H(y)$ 是 $\frac{1}{h(y)}$ 的一个原函数，就得到方程的通解

$$H(y) = G(x) + C,$$

这里 C 是任意常数[①]。这种形式的解也称为**隐式解**。

变量可分离方程

例 10. 2. 1 求解微分方程

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = 1。$$

解　将此方程化为变量可分离方程

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{1-y^2}，$$

变量可分离方程

即

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \pm\, dx \text{。}$$

两边积分得

$$\arcsin y = \pm x + C \text{；}$$

即

$$y = \sin(x + C) \text{。}$$

注意 $y = \pm 1$ 也是方程的两个解，但它们并不在通解之中。

齐次方程

若对于任何 $\tau \neq 0$

$$f(\tau x, \tau y) = f(x, y),$$

则称函数 $f(x, y)$ 为（0 次）**齐次函数**，相应的微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

相应地称为**齐次方程**。

令 $y = ux$，代入方程得

$$\frac{d(ux)}{dx} = u + x\frac{du}{dx} = f(x, ux) = f(1, u),$$

化简后就是变量可分离方程

$$x\frac{du}{dx} = f(1, u) - u,$$

解出方程后，用 $u = \dfrac{y}{x}$ 代入便得到方程的解。

齐次方程

例 10.2.5 求方程

$$(xy-y^2)dx-(x^2-2xy)dy=0$$

的通解。

解 将方程写成

$$\frac{dy}{dx}=\frac{xy-y^2}{x^2-2xy},$$

容易判断，这是一个齐次方程。令 $y=ux$，得到

$$x\frac{du}{dx}=\frac{u-u^2}{1-2u}-u=\frac{u^2}{1-2u}。$$

齐次方程

于是

$$\frac{1-2u}{u^2}du=\frac{1}{x}dx\text{，}$$

解此方程得

$$-\frac{1}{u}-2\ln u=\ln x+C\text{。}$$

用$u=\frac{y}{x}$代入，便得到方程的隐式通解

$$\frac{x}{y}+2\ln y-\ln x+C=0\text{。}$$

§3 二阶线性微分方程

一、二阶线性微分方程

一般形式： $$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=f(x)$$

当 $f(x)=0$ 时，二阶齐次线性微分方程；

当 $f(x)\neq 0$ 时，二阶非齐次线性微分方程。

n 阶线性微分方程

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=f(x)$$

二阶线性微分方程解的结构:

1、二阶齐次线性微分方程解的结构:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

定理1:

若 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是二阶齐次线性微分方程的解,

则它们的线性组合 $\alpha y_1(x) + \beta y_2(x)$

也是该二阶齐次线性微分方程的解。

问题: $y = \alpha y_1(x) + \beta y_2(x)$ α、β为常数,

是否一定是通解?

定理2:

若 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$

在 I 上的两个线性无关的解，

则: $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ $\quad C_1$、C_2 为常数

是该二阶齐次线性微分方程的通解。

如 $\quad y''+y=0$， $\quad y_1=\cos x \quad y_2=\sin x$

$$\frac{y_2}{y_1}=\tan x \neq \text{常数}$$

$$\therefore GS. \quad y=C_1\cos x+C_2\sin x$$

2、二阶非齐次线性微分方程解的结构:

y

定理: 非齐次线性微分方程的通解等于该方程的一个特解加上相应的齐次线性微分方程的通解

y^*

$\bar{y}$

证明: 设 $$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=f(x)$$

$$y=\bar{y}+y^*$$

$$\because \frac{d^2\bar{y}}{dx^2}+p(x)\frac{d\bar{y}}{dx}+q(x)\bar{y}=0$$

$$\frac{d^2y^*}{dx^2}+p(x)\frac{dy^*}{dx}+q(x)y^*=f(x)$$

二、二阶常系数齐次线性微分方程

定义:

n 阶常系数线性微分方程的标准形式

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} y' + p_n y = f(x)$$

$p_1, p_2, \cdots, p_n$ 为常数。

二阶常系数齐次线性方程的标准形式

$$y'' + py' + qy = 0 \quad p, q \text{ 为常数；}$$

二阶常系数非齐次线性方程的标准形式

$$y'' + py' + qy = f(x) \quad p, q \text{ 为常数。}$$

二阶常系数齐次线性微分方程解法

——————特征方程法

$$y'' + py' + qy = 0$$

设 $y = e^{\lambda x}$，将其代入上方程，得

$$(\lambda^2 + p\lambda + q)e^{\lambda x} = 0, \quad \because e^{\lambda x} > 0,$$

$$\therefore \lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

为二阶常系数齐次线性微分方程的特征方程。

特征方程法与原微分方程比较：

1) 若 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ 有两个不同的实根，

记为 λ_1 & λ_2，

∴原微分方程的两个特解：

$$y_1(x)=e^{\lambda_1 x}, \quad y_2(x)=e^{\lambda_2 x},$$

$$\because \lambda_1 \neq \lambda_2, \quad \frac{y_1(x)}{y_2(x)}=e^{(\lambda_1-\lambda_2)x} \neq \text{常数}$$

则原微分方程的通解：$y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$.

2) 若 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 有两个相同的实根，

记为 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -\dfrac{p}{2}$,

得到一个特解 $y_1(x) = e^{\lambda x}$,

须找一个与 $y_1(x)$ 线性无关的特解，设为 $y_2(x)$,

即 $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq$ 常数，设 $y_2(x) = u(x)e^{\lambda x}$,

代入原微分方程 $y'' + py' + qy = 0$，并简化

$$[u''(x) + \underline{(2\lambda + p)}u'(x) + \underline{(\lambda^2 + p\lambda + q)}u(x)]e^{\lambda x} = 0$$

$\Rightarrow u'' = 0$，取 $u(x) = x$ ，$\Rightarrow y_2(x) = xe^{\lambda x}$,

则原微分方程的通解：$y = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda x}$.

3) 若 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ 有一对共轭复根 $\alpha\pm\beta i$，

即 $\lambda_1=\alpha+\beta i$，$\lambda_2=\alpha-\beta i$，

∴原微分方程的两个特解：

$y_1(x)=e^{\lambda_1 x}=e^{(\alpha+\beta i)x}$，$y_2(x)=e^{\lambda_2 x}=e^{(\alpha-\beta i)x}$，

显然 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 线性无关，

通解为：$y=C_1e^{(\alpha+\beta i)x}+C_2e^{(\alpha-\beta i)x}$，

复数形式，涉及复数运算，

重新组合，变为实数形式。

由解的线性性得：

$$\frac{1}{2}[e^{(\alpha+\beta i)x}+e^{(\alpha-\beta i)x}]=\frac{1}{2}[e^{\alpha x}(e^{\beta xi}+e^{-\beta xi})]$$

$$=\frac{1}{2}\{e^{\alpha x}[\cos\beta x+i\sin\beta x+\cos(-\beta x)+i\sin(-\beta x)]$$

$=e^{\alpha x}\cos\beta x$ 也是原微分方程的特解；

同理 $\frac{1}{2i}[e^{(\alpha+\beta i)x}-e^{(\alpha-\beta i)x}]$

$$=\frac{1}{2i}\{e^{\alpha x}[\cos\beta x+i\sin\beta x-\cos(-\beta x)-i\sin(-\beta x)]$$

$=e^{\alpha x}\sin\beta x$ 也是原微分方程的特解；

且 $e^{\alpha x}\cos\beta x/e^{\alpha x}\sin\beta x\neq$ 常数，

则原微分方程的通解：

$$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$$

三、二阶常系数非齐次线性微分方程

标准形式 $$y'' + py' + qy = f(x)$$

由解的结构定理

非齐次的特解

非齐次的通解 $$y = \underline{\bar{y}} + y^*$$

齐次的通解

常数变易法求特解

人口预测模型

人类进入20世纪以来，在科学技术和生产力飞速发展的同时，世界人口也以空前的规模增长，统计数据如表1所示。

年份	1625	1804	1927	1960	1974	1987	1999
人口/亿	5	10	20	30	40	50	60

如何依据历史的人口变化情况估计未来的人口情况，对人类社会的可持续发展具有重要意义。

指数增长模型

基于人口增加速度越来越快的假设，可以首先提出这个模型。记今年的人口数量为x0, k年后人口为xk, 年增长率为r, 则

$$x_k = x_0(1+r)^k$$

这是200多年前英国人口学家Malthus调查了英国100多年的人口统计资料得出的著名的人口指数增长模型。记t时刻人口为x(t)，将x(t)视为连续、可微的函数。记初始时刻(t=0)的人口为x0, 假设人口增长率r, 于是

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = rx \quad x(0) = x_0 \qquad x(t) = x_0 e^{rt}$$

指数增长模型

r>0时，上式表示人口将按照指数规律随时间无限制增长，称为指数增长模型。

但是这种模型导致的问题是人口会无条件的增长下去，这显然不符合常理，因为没有考虑到人口增长的限制因素。为了解决这个问题，新的模型—Logistic模型诞生了

阻滞增长模型-Logistic模型

显然指数增长模型是不符合实际的，为了使人口预报特别是长期预报更好地符合实际情况，必须修改指数增长模型关于人口增长率是一个常数的基本假设。

注意到，自然资源、环境条件对人口增长起阻滞作用，并且随着人口的增加、阻滞作用越来越大。所谓阻滞增长模型就是考虑到这个因素。

阻滞增长模型-Logistic模型

阻滞作用体现在人口增长率r的影响上面，即人口增长率到一定程度时会随着人口增加而下降，若将r表示为x的函数r(x)，那么它应该是减函数，那么上面的方程可以写成

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=r(x)x \quad x(0)=x_0$$

对r(x)一个最简单的假定是，设r为x的线性函数，r(x)=r-sx，r称为固有增长率，定义人口最大量为xm，当x=xm时人口将不再增长，所以s=r/xm，

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=rx(1-x/x_m) \quad x(0)=x_0$$

阻滞增长模型-Logistic模型

上式右端因子rx体现了人口自身的增长趋势，因子(1-x/xm)则体现了环境和资源对人口增长的阻滞作用。

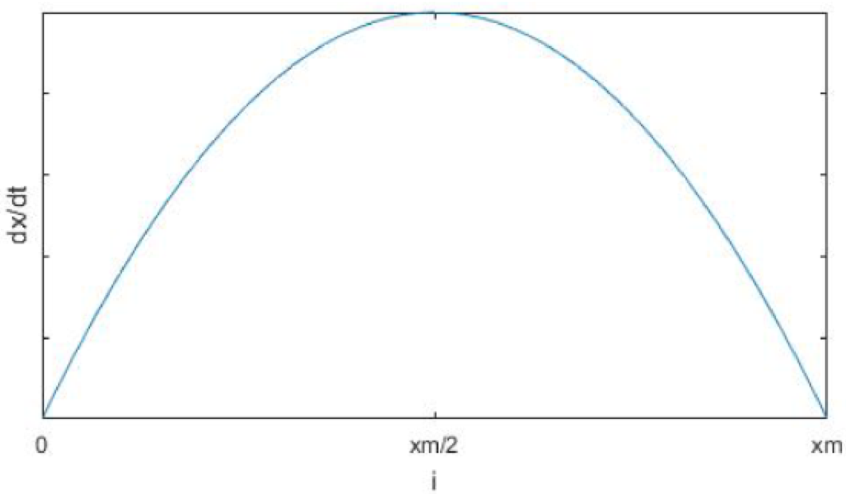


图 1: 阻滞增长模型$\frac{dx}{dt} - x$曲线

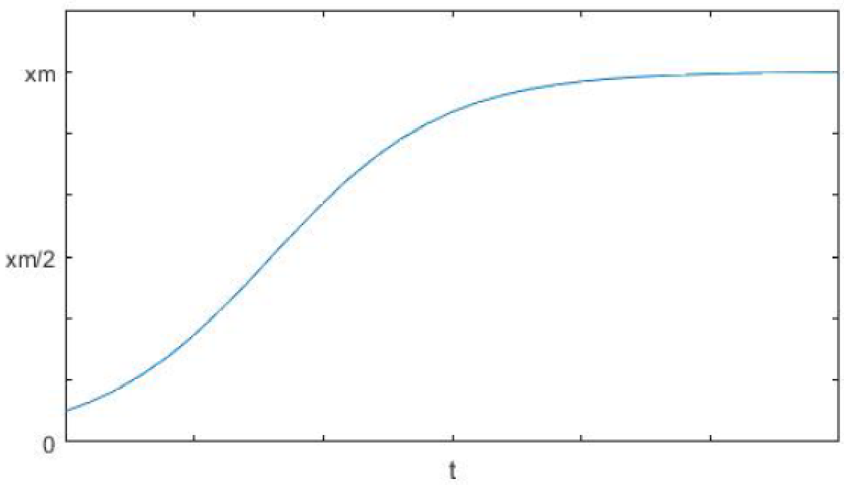
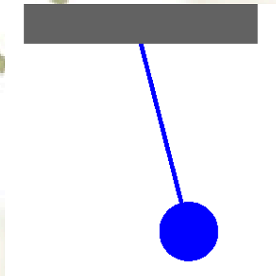


图 2: 阻滞增长模型$x - t$曲线



例1 （理想单摆运动）建立理想单摆运动满足的微分方程，并得出理想单摆运动的周期公式。

从图3-1中不难看出，小球所受的合力为$mg\sin\theta$，根据**牛顿第二定律**可得：

$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$$

从而得出两阶微分方程：

这是理想单摆应满足的运动方程

$$\begin{cases} \ddot{\theta} + \dfrac{g}{l}\sin\theta = 0 \\ \dot{\theta}(0) = 0, \theta(0) = \theta_0 \end{cases}$$

（a）

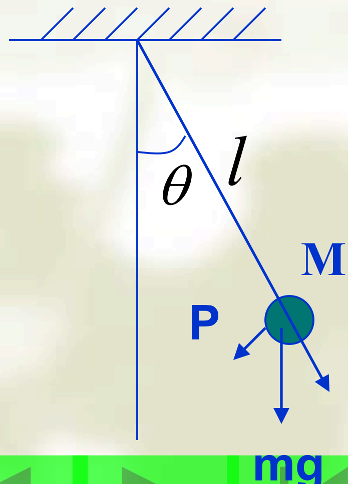
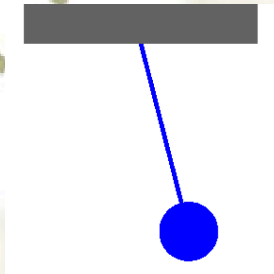


图3-1

(a)是一个两阶非线性方程,不易求解.当θ很小时,$\sin\theta\approx\theta$, 此时,可考察(a)的近似线性方程：



$$\begin{cases}\ddot{\theta}+\dfrac{g}{l}\theta=0\\ \dot{\theta}(0)=0,\theta(0)=\theta_0\end{cases}\qquad(b)$$

(*a*) 的近似方程

(*b*) 的解为: $\theta(t)=\theta_0\cos\omega t$

其中 $\omega=\sqrt{\dfrac{g}{l}}$

当 $t=\dfrac{T}{4}$ 时, $\theta(t)=0$

故有 $\sqrt{\dfrac{g}{l}}\dfrac{T}{4}=\dfrac{\pi}{2}$

由此即可得出

$$T=2\pi\sqrt{\frac{g}{l}}$$

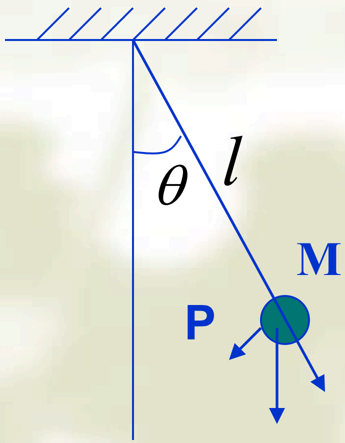


图3-1

火箭发射模型

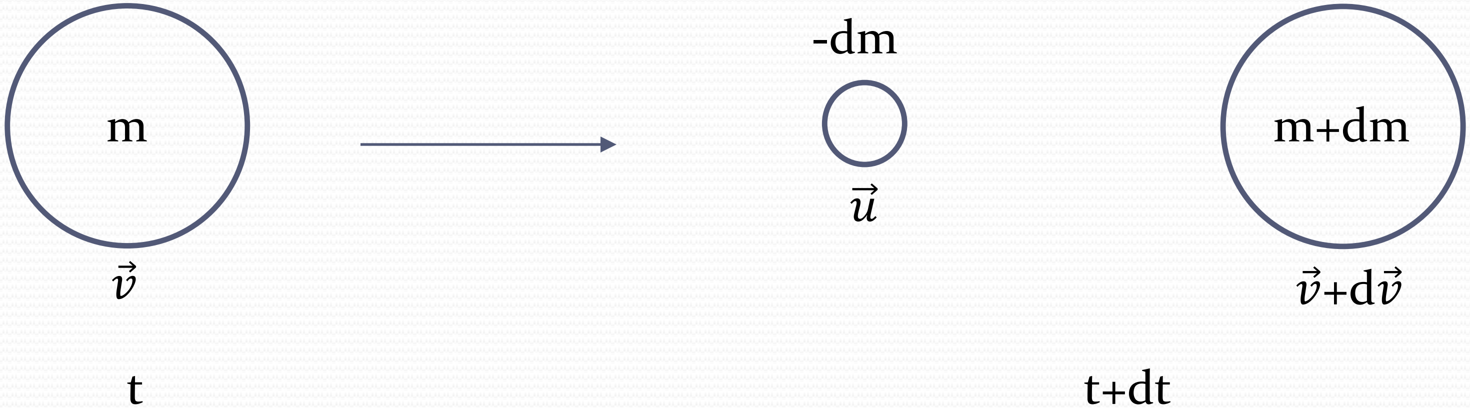
- 火箭运行的原理：通过燃烧化学燃料释放能量，向后喷射气体提供的反作用力推动火箭向前运动
- 关键点：喷射气体 —— 变质量物体的运动

工具1：“牛顿定律可以解决一切力学问题”——局部

- 牛顿第二定律：$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d(m\vec{v})}{dt}$
- 物体质量不变的情况下：$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d(m\vec{v})}{dt}=m\frac{d\vec{v}}{dt}$
- 在物体质量发生改变的时候，乘法求导法则：
- $\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d(m\vec{v})}{dt}=m\frac{d\vec{v}}{dt}+\vec{v}\frac{dm}{dt}$
- $\boxed{\vec{F}=m\frac{d\vec{v}}{dt}+\vec{v}\frac{dm}{dt}}$

变质量牛顿第二定律

工具2：“动量守恒”——整体



- 动量守恒：$\vec{F}dt + m\vec{v} = (m + dm)(\vec{v}+\mathrm{d}\vec{v}) + (-dm \cdot \vec{u})$
- $\vec{F}dt + m\vec{v} = m\vec{v} + m\mathrm{d}\vec{v} + \vec{v}dm + dm\mathrm{d}\vec{v} - dm \cdot \vec{u}$
- $\boxed{\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + (\vec{v} - \vec{u}) \cdot \frac{dm}{dt}}$

密舍尔斯基方程

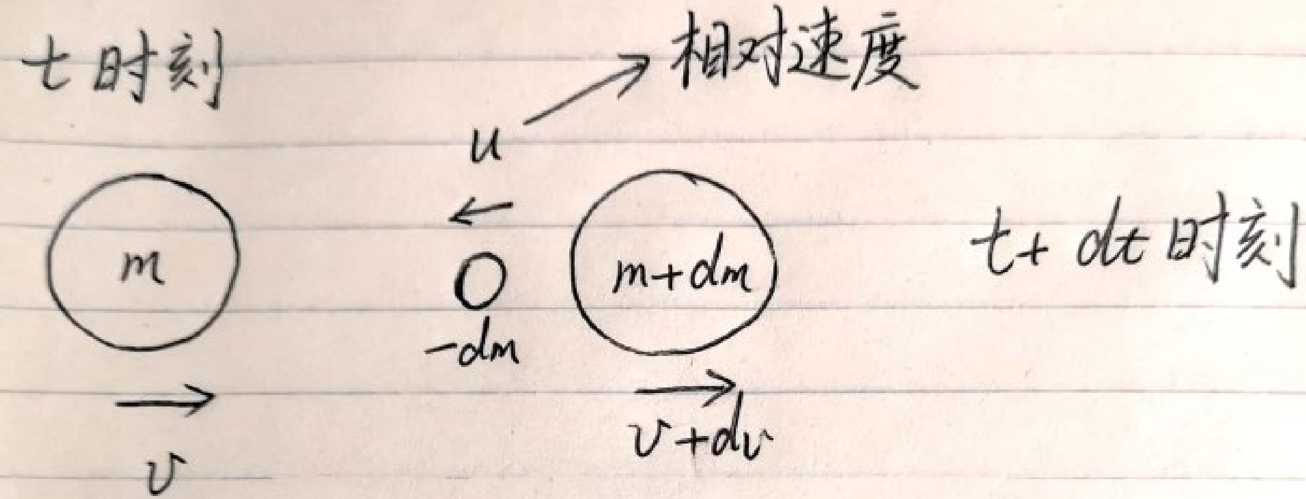
哪一个是正确的？

火箭发射问题的建模例子

- 有一个飞船主体质量为M_0，携带的燃料质量为M_R，某时刻发动机开始点火使飞船沿直线向前做加速运动，已知单位时间燃料的燃烧质量为m_0，燃料全部生成物的喷射速度（生成物相对于飞船的朝后速度）为常量u，在一直到燃料烧尽的全过程中，试求：

- 1) 飞船加速度的最大值和最小值
- 2) 飞船加速结束之后的末速度
- 3) 初始时刻飞船发动机提供的功率
- 4) 飞船全过程时间内的平均功率
- 5) 本次发射的能量利用效率是多少？什么情况下效率取最大值？

1)



动量守恒: $mv=(m+dm)(v+dv)-dm(v+dv-u)$

$$\Rightarrow mv=mv+mdv+vdm+dm\,dv-dm\,v+dm\,u-dm\,dv$$

$$\Rightarrow mdv+vdm=0$$

根据加速度的定义 $a=\dfrac{dv}{dt}=-\dfrac{v\,dm}{m\,dt}=-\dfrac{v}{m}\dfrac{dm}{dt}$

$$=-\frac{v}{m}\times(-m_0)=\frac{m_0}{m}v$$

所以 $a_{min}=\dfrac{m_0}{M_0+M_R}u$, $a_{max}=\dfrac{m_0}{M_0}u$

2)

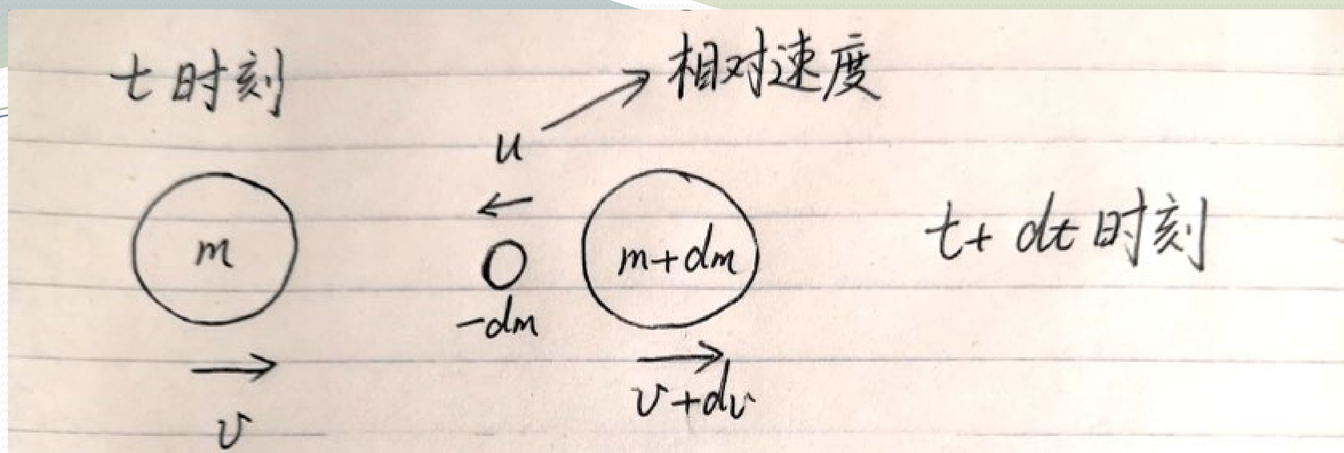
2） 对 $m\,dv + v\,dm = 0$ 变形

$$\frac{dv}{v} + \frac{dm}{m} = 0$$

积分得 $$\int_0^{v_e} \frac{dv}{v} + \int_{M_0+M_R}^{M_0} \frac{dm}{m} = 0$$

$$\Rightarrow \text{本}\quad v_e = u \ln \frac{M_0 + M_R}{M}$$

3)



$t \to t+dt$ 时间内，系统动能增量为:

$$dE_k = \left[\frac{1}{2}(m+dm)(v+dv)^2 + \frac{1}{2}(-dm)(v-u)^2\right] - \frac{1}{2}mv^2$$

$$\Rightarrow \cancel{dE_k = (Mdv + udm)}$$

$$dE_k = (m\,dv + v\,dm)v - \frac{1}{2}u^2 dm$$

将 $(m\,dv)+(v\,dm)=0$ 代入，得

$$dE_k = -\frac{1}{2}u^2 dm$$

所以功率 $P = \frac{dE_k}{dt} = -\frac{1}{2}u^2\frac{dm}{dt} = \frac{1}{2}m_0 u^2$ 为常量.

4)

飞船最终获得的动能为

$$E_{ke}=\frac{1}{2}M_0u^2\left(\ln\frac{M_0+M_R}{M_0}\right)^2$$

释放全部内能为

$$E=\overline{P}\cdot\frac{M_R}{m_0}=\frac{1}{2}M_Ru^2$$

所以效率为 $\eta=\frac{E_{ke}}{E}=\frac{M_0}{M_R}\left(\ln\frac{M_0+M_R}{M_0}\right)^2$

5)

由 $\eta = \frac{M_0}{M_R}\left(\ln\frac{M_0+M_R}{M_0}\right)^2$，令 $\frac{M_0}{M_R} = \frac{1}{\alpha}$

$\Rightarrow \eta = \frac{1}{\alpha}\left[\ln(1+\alpha)\right]^2$ 求最值即可