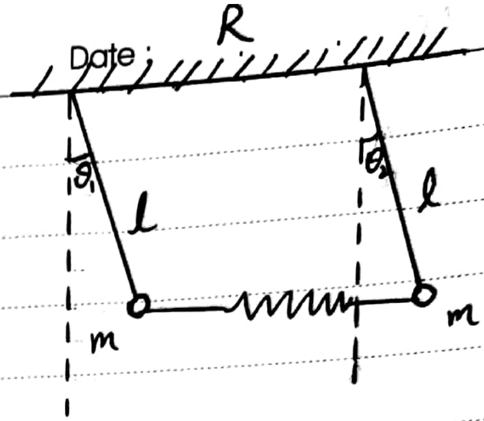
弹簧耦合摆的简正坐标(一阶近似解)



(θ_1、θ_2均为小量,弹簧原长为R)

(1) 分离变量法

以天花板为势能零点,写出动、势能表达式

$$T=\frac{1}{2}m(l\dot{\theta}_1)^2+\frac{1}{2}m(l\dot{\theta}_2)^2.$$

$$U=-mgl\cos\theta_1-mgl\cos\theta_2+\frac{1}{2}kl^2(\theta_2-\theta_1)^2,$$ (形变量 $\Delta x\approx l\theta_1-l\theta_2$)

总能量 $E=T+U=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_2^2-mgl\left(2-\frac{1}{2}\theta_1^2-\frac{1}{2}\theta_2^2\right)+\frac{1}{2}kl^2(\theta_2-\theta_1)^2$

(这里用了 $\cos\theta\approx 1-\frac{1}{2}\theta^2$ 近似,一阶近似)

由于E守恒,两边对t求导

$$0=\frac{1}{2}ml^2\cdot 2\dot{\theta}_1\cdot\ddot{\theta}_1+\frac{1}{2}ml^2\cdot 2\dot{\theta}_2\ddot{\theta}_2+\frac{1}{2}mgl\cdot 2\theta_1\cdot\dot{\theta}_1+\frac{1}{2}mgl\cdot 2\theta_2\cdot\dot{\theta}_2$$
$$+kl^2(\theta_1-\theta_2)(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2)$$

$$\Rightarrow\left[ml\ddot{\theta}_1-kl(\theta_2-\theta_1)-mg\theta_1\right]\dot{\theta}_1+\left[ml\ddot{\theta}_2+kl(\theta_2-\theta_1)-mg\theta_2\right]\dot{\theta}_2=0$$

由于$\dot{\theta}_1$、$\dot{\theta}_2$相互独立,所以系数为0

$$\Rightarrow\begin{cases}ml\ddot{\theta}_1-kl(\theta_2-\theta_1)-mg\theta_1=0 & ①\\ ml\ddot{\theta}_2+kl(\theta_2-\theta_1)-mg\theta_2=0 & ②\end{cases}$$

两个方程,但系数有混合

①+②得 → $ml(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2)-mg(\theta_1+\theta_2)=0$

①−②得 → $ml(\ddot{\theta}_1-\ddot{\theta}_2)-mg(\theta_1-\theta_2)+2kl(\theta_1-\theta_2)=0$

发现 $\theta_1+\theta_2$ 与 $\theta_1-\theta_2$ 分别为两组独立变量

解出 $\theta_1+\theta_2$ 与 $\theta_1-\theta_2$ 后,即可知 $\theta_1(t)$ 与 $\theta_2(t)$

方法二：利用 Lagrange 方程.

$$L=T-V=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_2^2+mgl\left(2-\frac{1}{2}\theta_1^2-\frac{1}{2}\theta_2^2\right)-\frac{1}{2}kl^2(\theta_1-\theta_2)^2$$

由lagrange方程.

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_1}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial\theta_1}=0\\[2ex]\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_2}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial\theta_2}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}ml^2\ddot{\theta}_1-mgl\,\theta_1+kl^2(\theta_2-\theta_1)=0\\[2ex]ml^2\ddot{\theta}_2-mgl\,\theta_2+kl^2(\theta_2-\theta_1)=0.\end{cases}$$

由能量方程得到动力学方程的简便方法.

关于θ_1，θ_2的独立性问题

我目前认为θ_1,θ_2 ; $\dot{\theta}_1,\dot{\theta}_2$; $\ddot{\theta}_1,\ddot{\theta}_2$ 均相互独立.

因为θ_1,θ_2为~~相~~相互独立的坐标，整个系统的自由度数才为2

只不过只有考虑$\dot{\theta}_1,\dot{\theta}_2$的独立性才能得出$A\dot{\theta}_1+B\dot{\theta}_2=0$的形式

进而得到$A=B=0$

也可考虑θ_1与θ_2的独立性，$\ddot{\theta}_1$与$\ddot{\theta}_2$的独立性，但得不出有意义的结果。

欢迎讨论(若感兴趣的话:-))