Amphi de révision : Algorithmique et complexité

Mattéo Rizza Murgier

19 janvier 2026

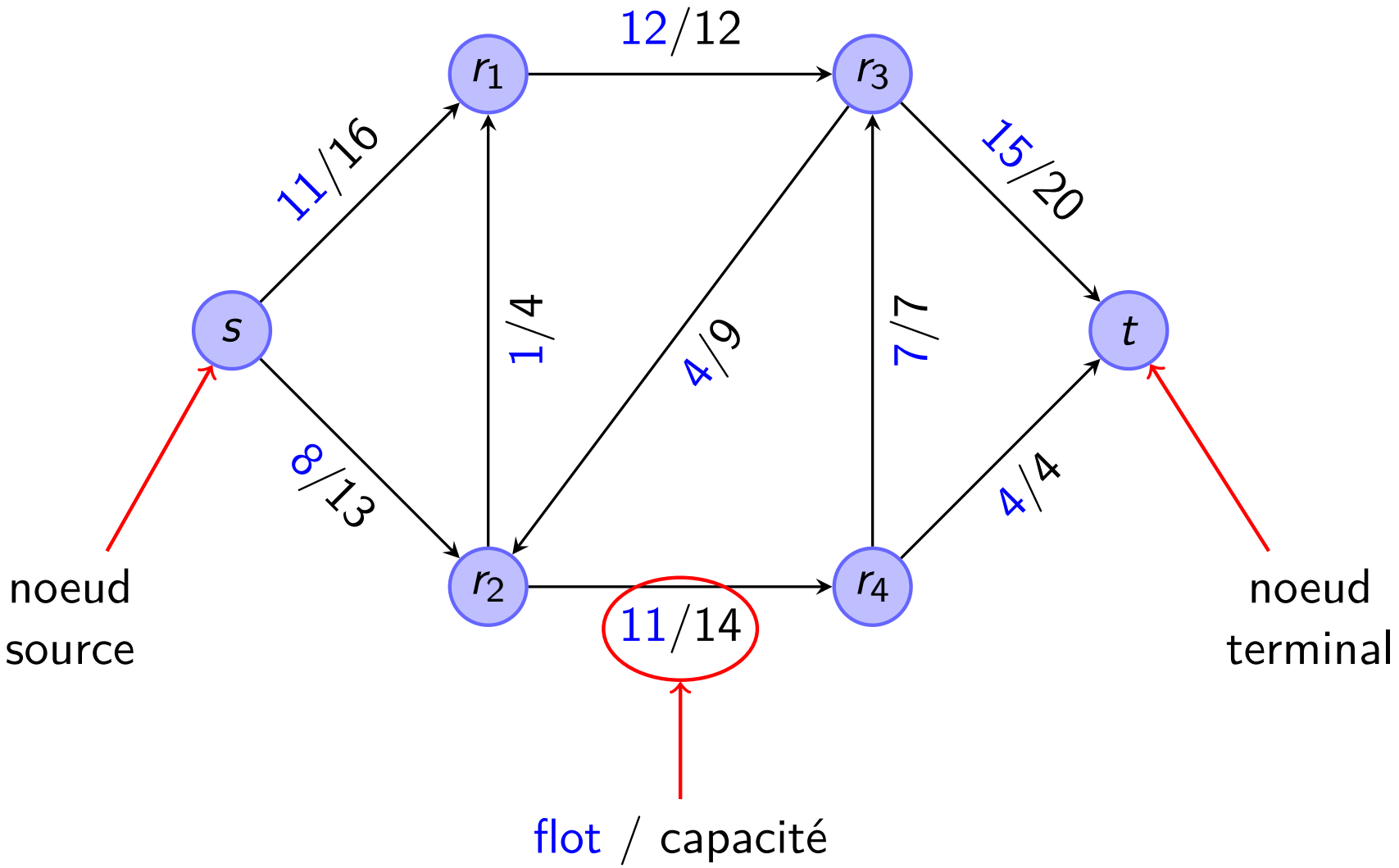
Infos sur l'examen

- L'examen dure 3h ;
- Vous avez le droit à des documents **manuscrits** ;
- Les chapitres 1 à 6, ainsi que les chapitres de pré-requis sont au programme de l'examen.

Attention

La structure et le contenu du cours ont changé par rapport à l'année dernière. Certains concepts ont été ajoutés au cours et seront mis en évidence dans ce qui suit.

Exemple de graphe de flot



Propriétés du flot

Un flot f réalisable doit vérifier les propriétés suivantes :

Règle flot-capacité

Le flot d'une arête ne peut pas dépasser sa capacité.

$$\forall\, u, v \in V^2 \quad 0 \leq f(u, v) \leq c(u, v)$$

Règle de conservation du flot

À l'exception de s et t, le flot entrant dans un nœud est égal au flot en sortant.

$$\forall\, u \in V \setminus \{s, t\} \quad \sum_{v \in V} f(u, v) = \sum_{v \in V} f(v, u)$$

Flot total

Le flot sortant de s est égal à celui entrant dans t.

$$\sum_{u \in V} f(s,u) = \sum_{u \in V} f(u,t)$$

Valeur du flot

La valeur du flot f, notée φ est donnée par :

$$\varphi = \sum_{u \in V} f(s,u) = \sum_{u \in V} f(u,t)$$

Le problème du flot maximal consiste à trouver un flot f ayant la valeur du flot maximale φ_{max}

Ford-Fulkerson

L'algorithme de Ford-Fulkerson est un algorithme glouton qui permet de calculer le flot maximal dans un graphe de flot.

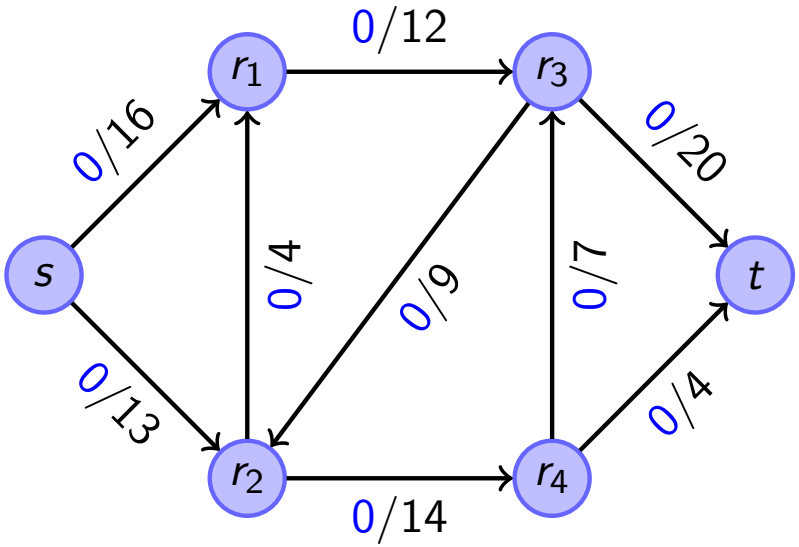
Complexité : $O((|V| + |E|) \times \varphi_{max})$

Remarque 1 : l'algorithme de Ford-Fulkerson n'impose aucune contrainte sur le type de parcours à effectuer. En pratique, on fait un DFS.

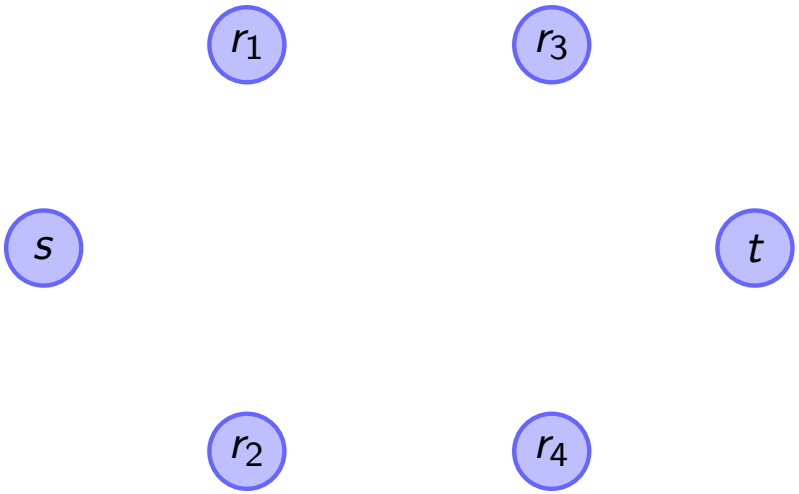
Remarque 2 : une variante de l'algorithme qui s'appuie sur le BFS (l'algorithme d'Edmonds-Karp) permet d'obtenir une complexité en $O(|V| \times |E|^2)$, indépendante de φ_{max}.

Algorithme de Ford-Fulkerson

Graphe de flot

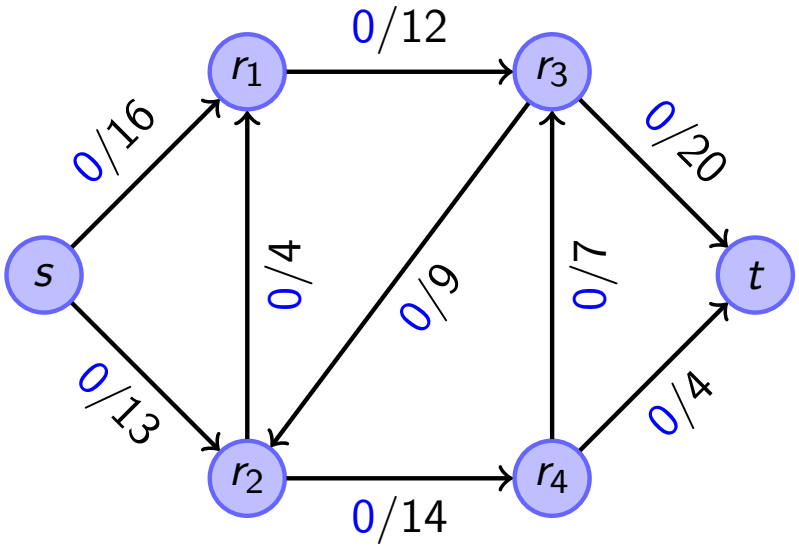


Graphe résiduel

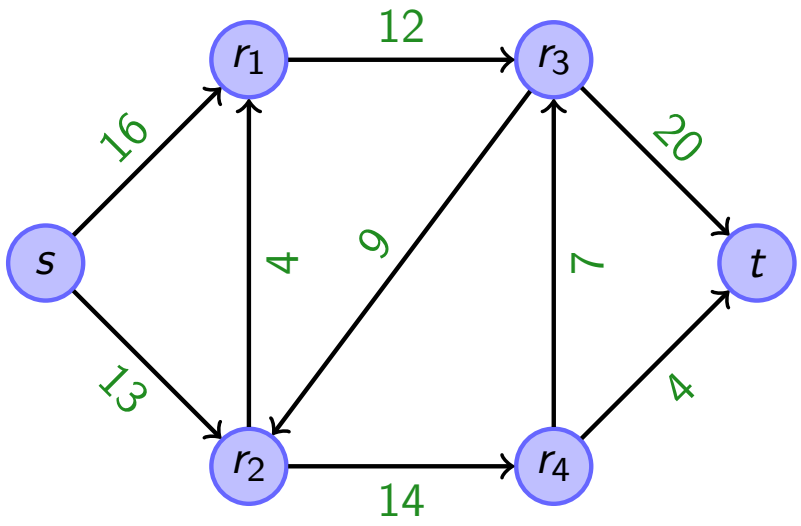


Algorithme de Ford-Fulkerson

Graphe de flot

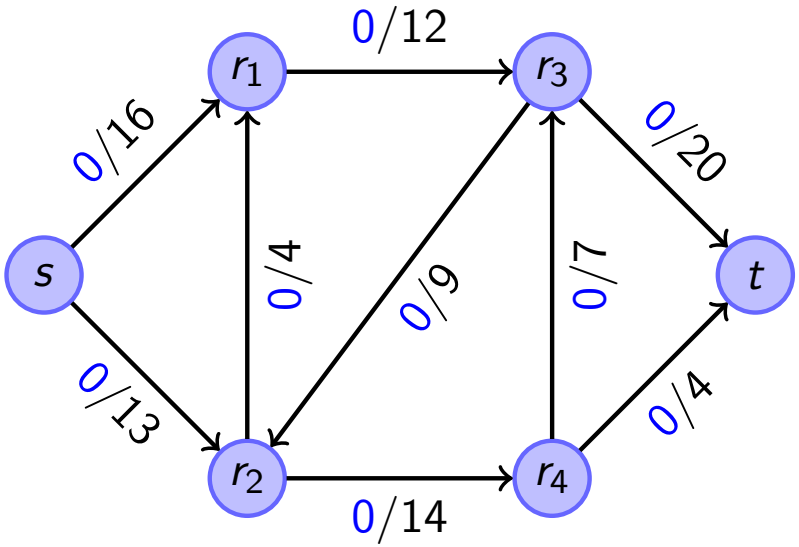


Graphe résiduel

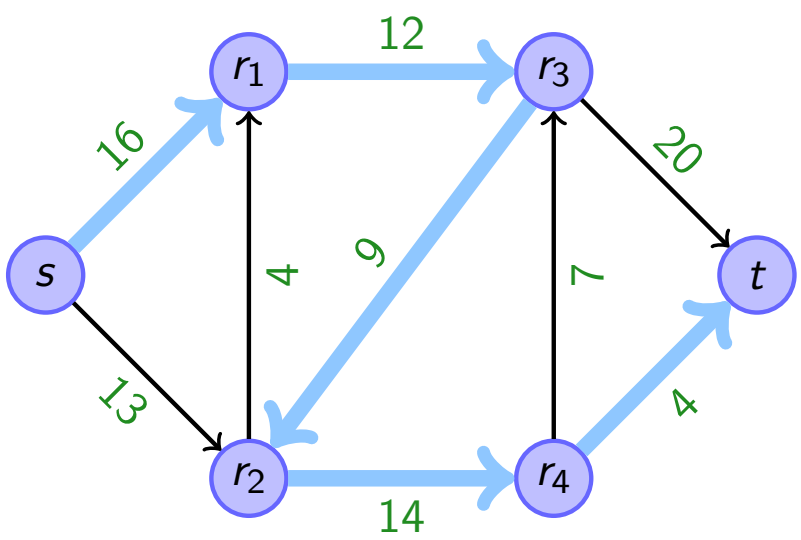


Algorithme de Ford-Fulkerson

Graphe de flot

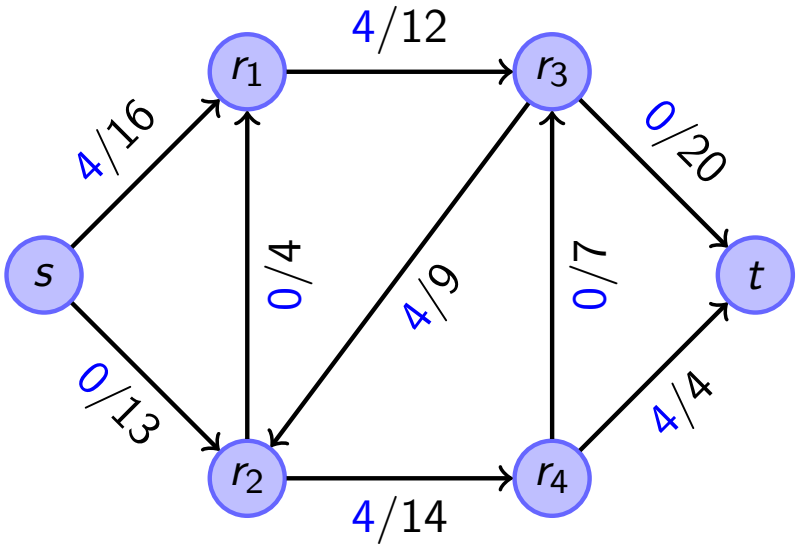


Graphe résiduel

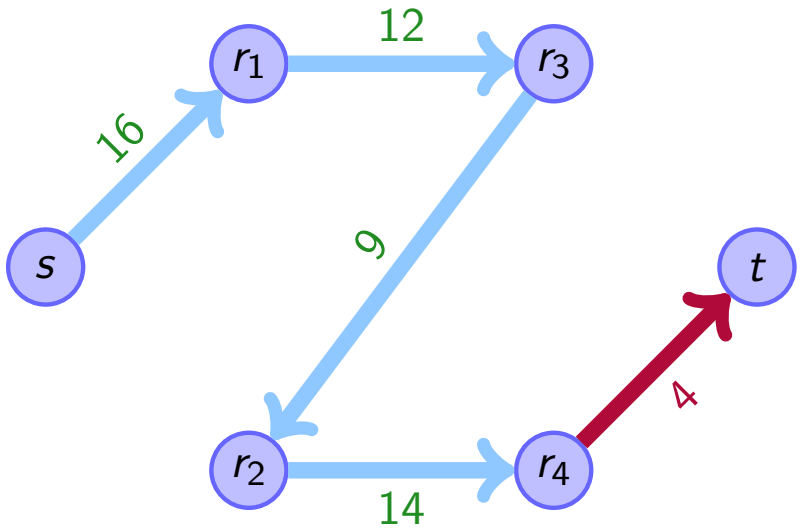


Algorithme de Ford-Fulkerson

Graphe de flot

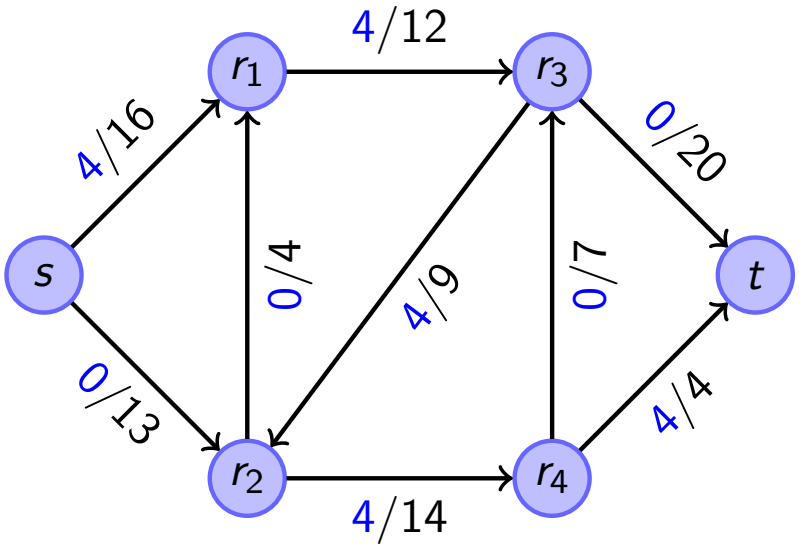


Graphe résiduel

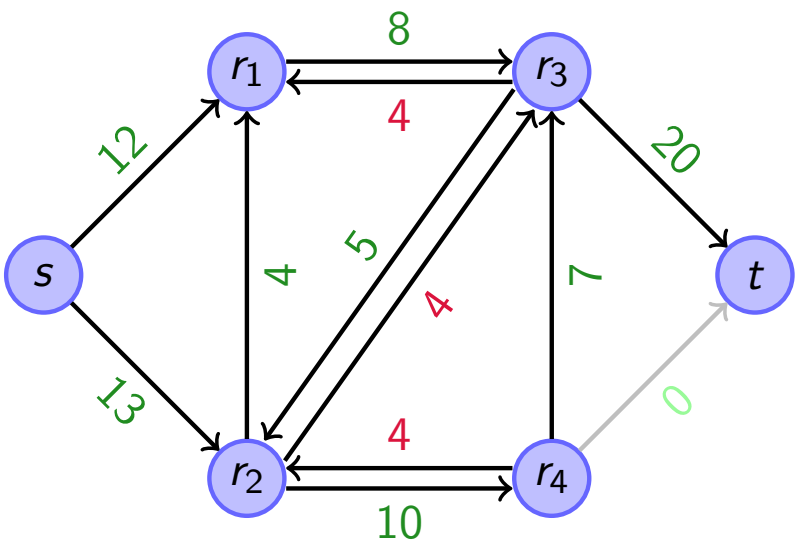


Algorithme de Ford-Fulkerson

Graphe de flot

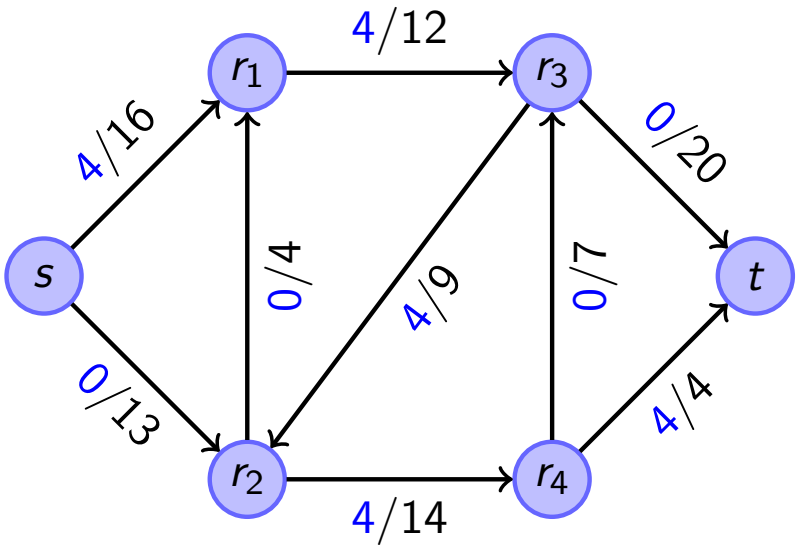


Graphe résiduel

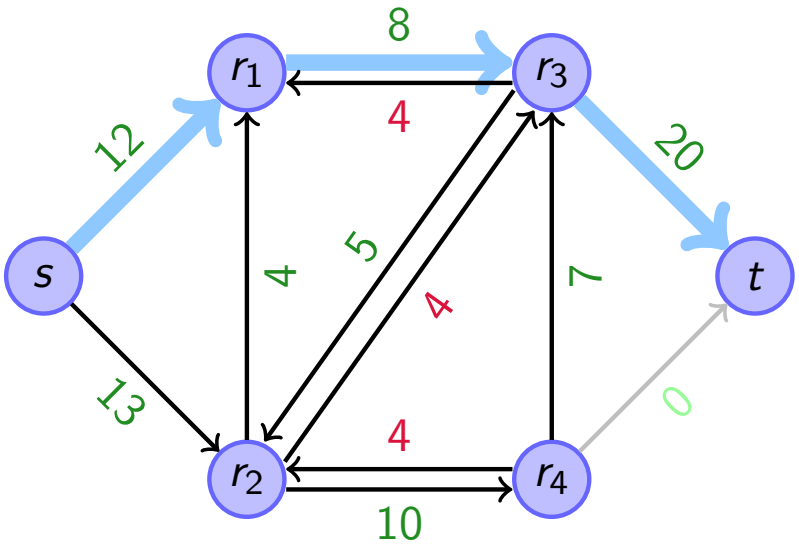


Algorithme de Ford-Fulkerson

Graphe de flot

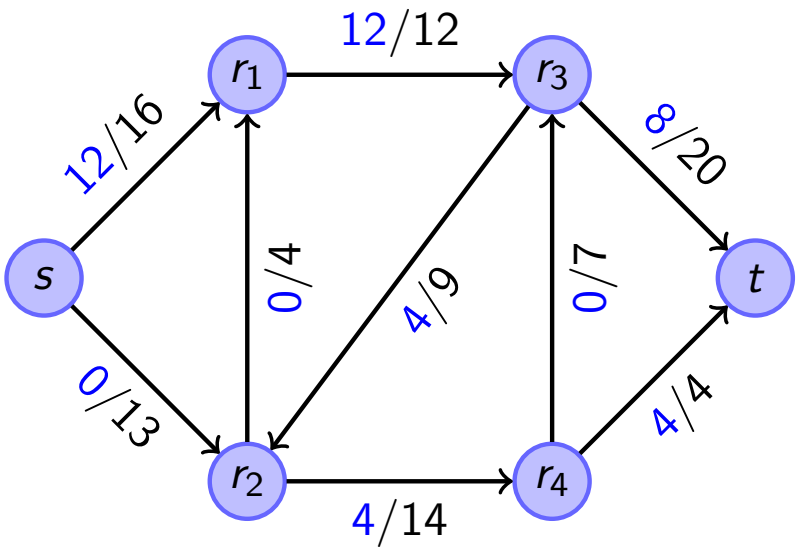


Graphe résiduel

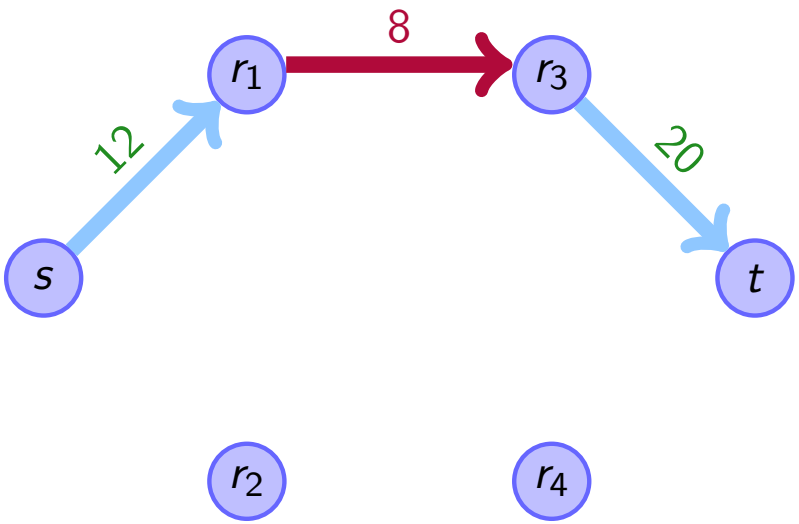


Algorithme de Ford-Fulkerson

Graphe de flot

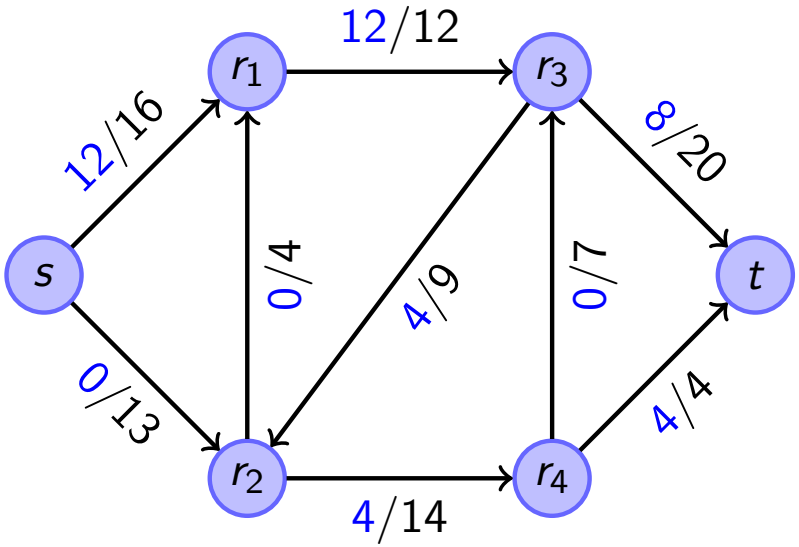


Graphe résiduel

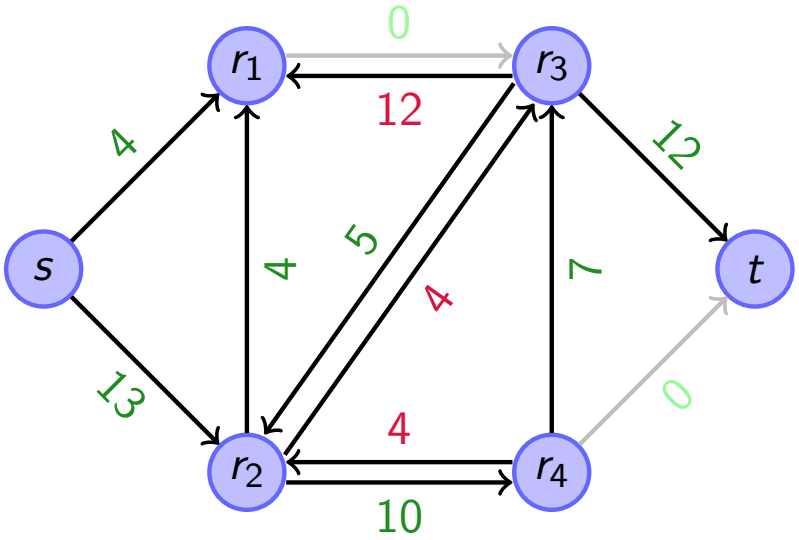


Algorithme de Ford-Fulkerson

Graphe de flot

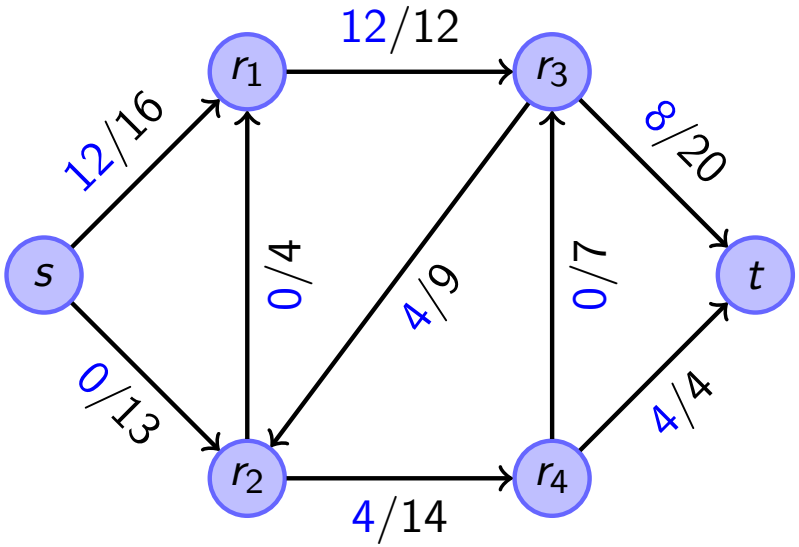


Graphe résiduel

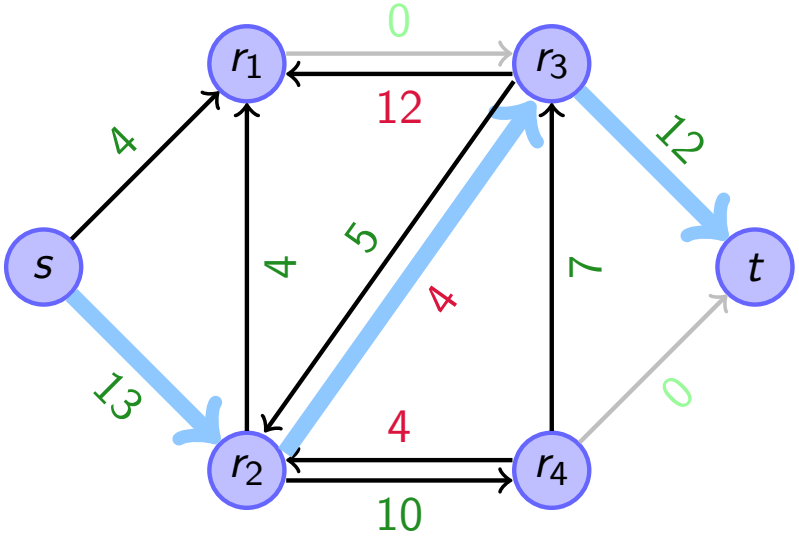


Algorithme de Ford-Fulkerson

Graphe de flot

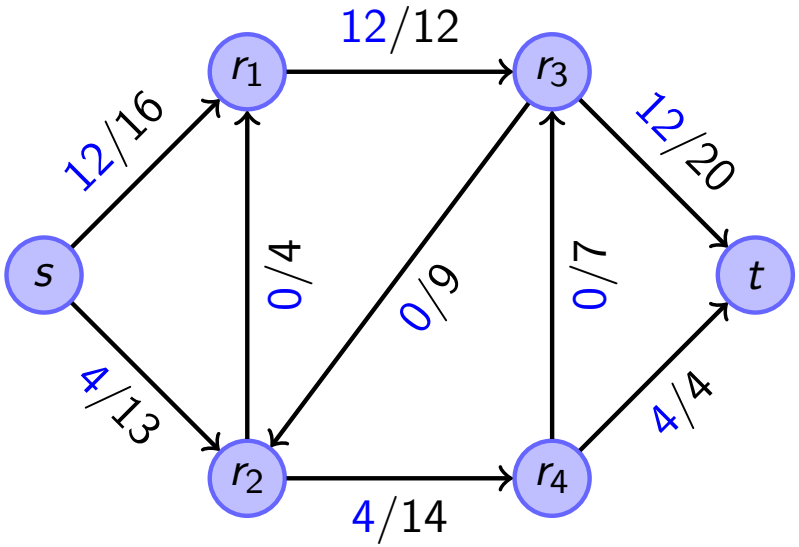


Graphe résiduel

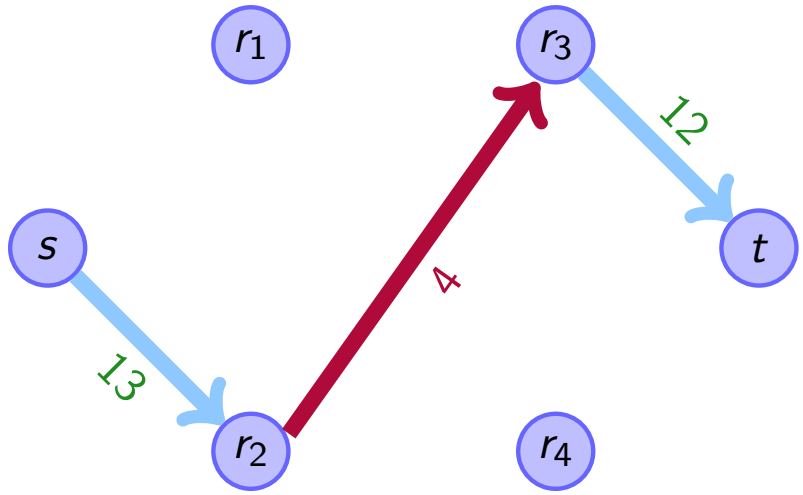


Algorithme de Ford-Fulkerson

Graphe de flot

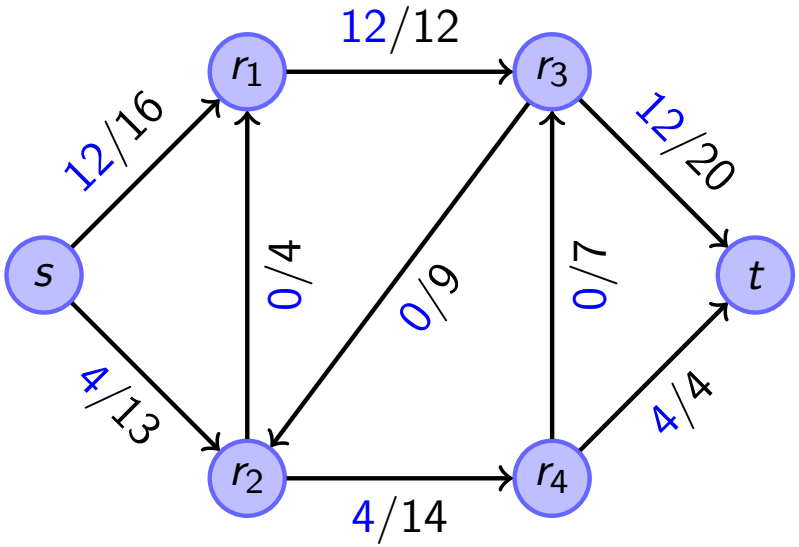


Graphe résiduel

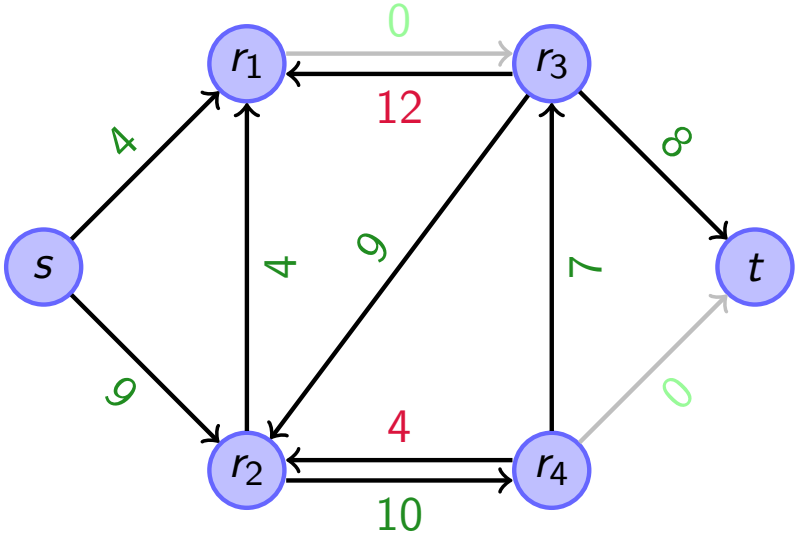


Algorithme de Ford-Fulkerson

Graphe de flot

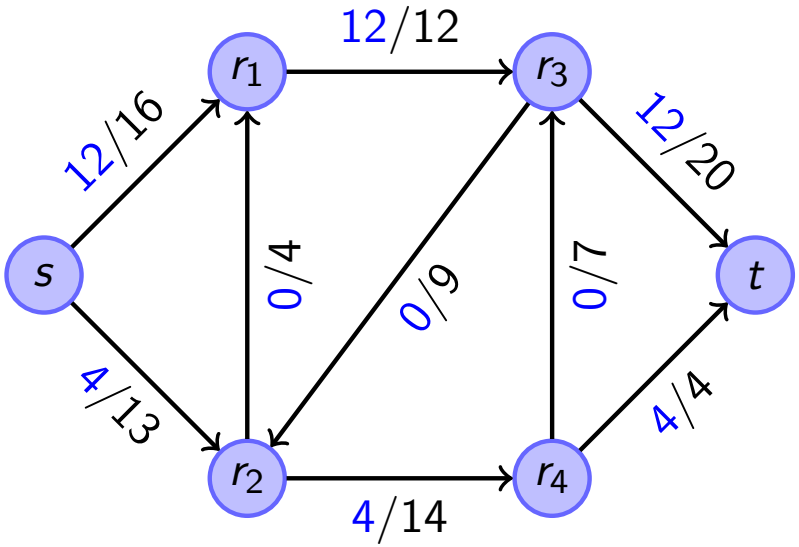


Graphe résiduel

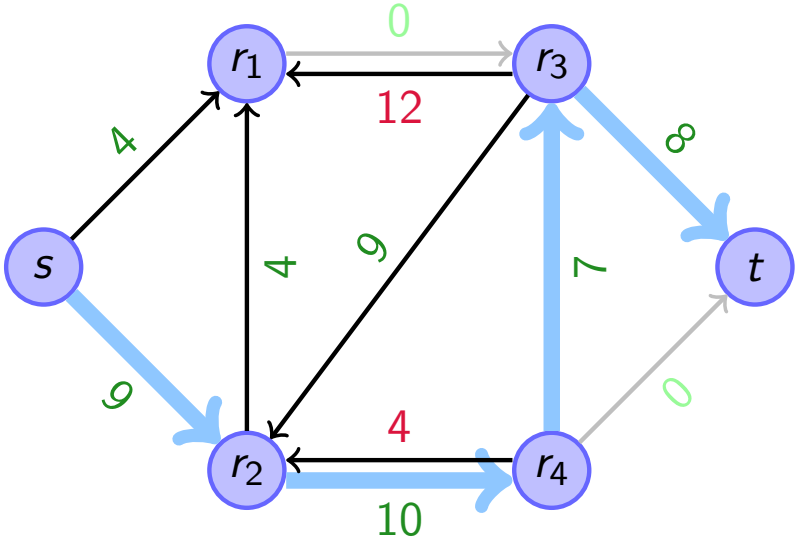


Algorithme de Ford-Fulkerson

Graphe de flot

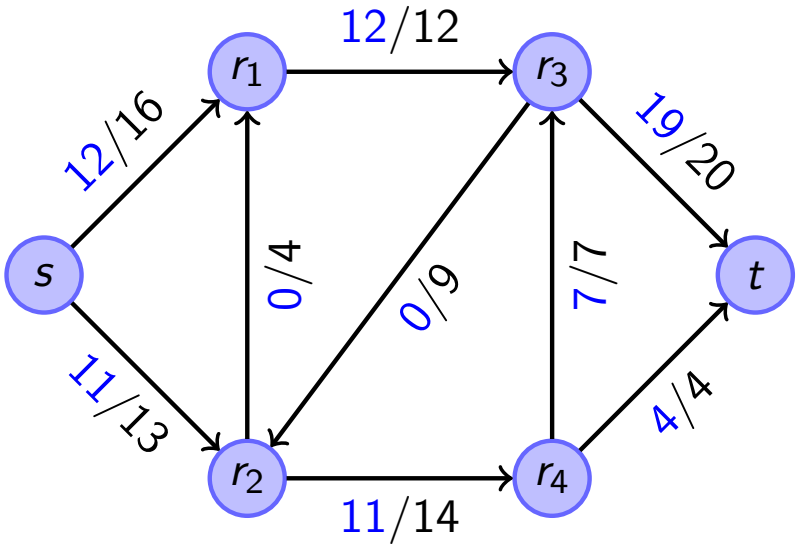


Graphe résiduel

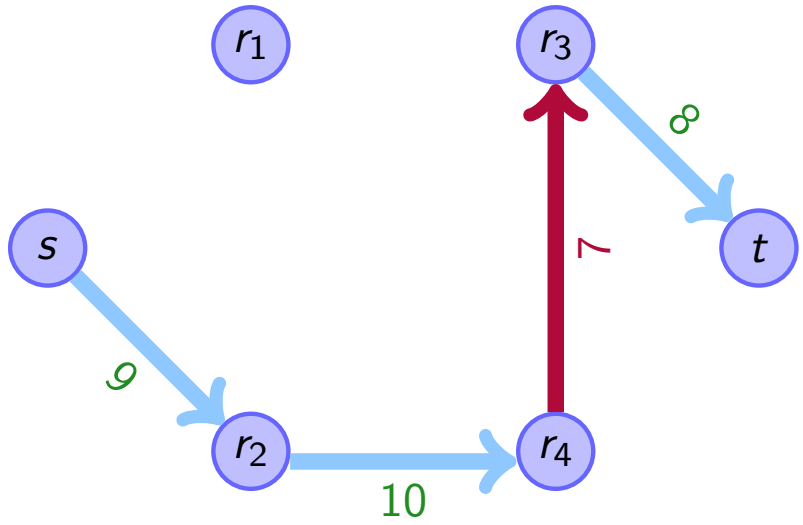


Algorithme de Ford-Fulkerson

Graphe de flot

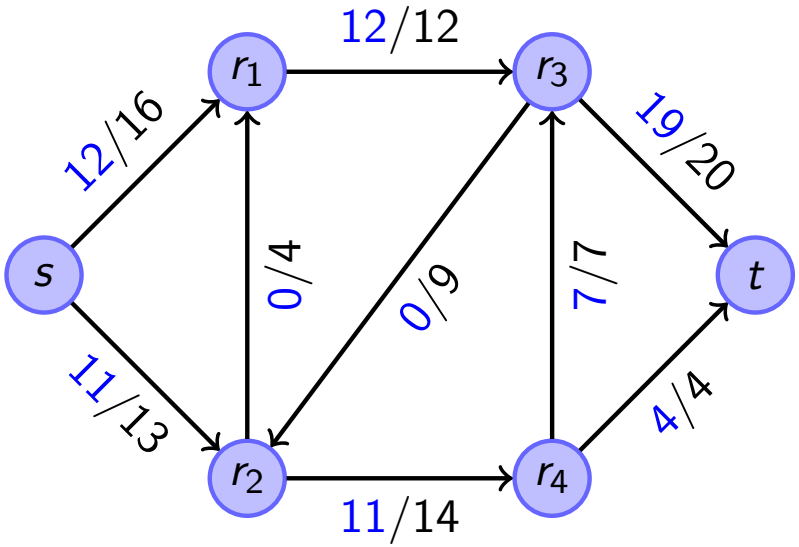


Graphe résiduel

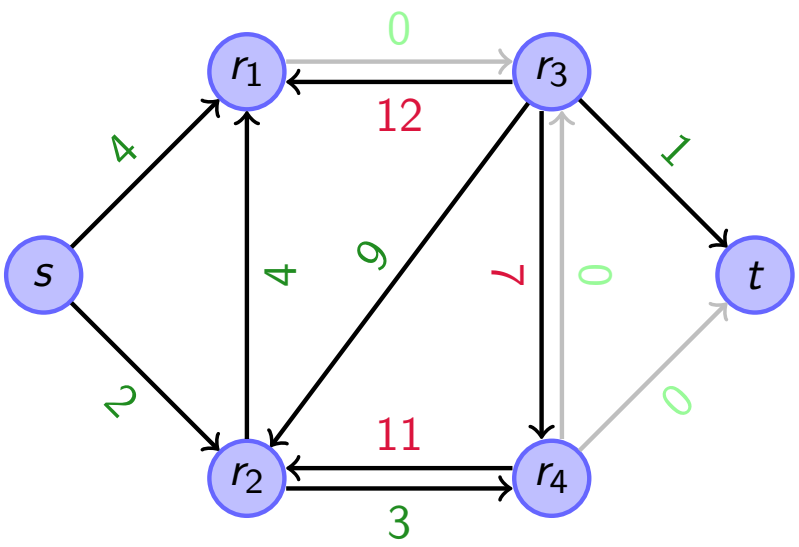


Algorithme de Ford-Fulkerson

Graphe de flot

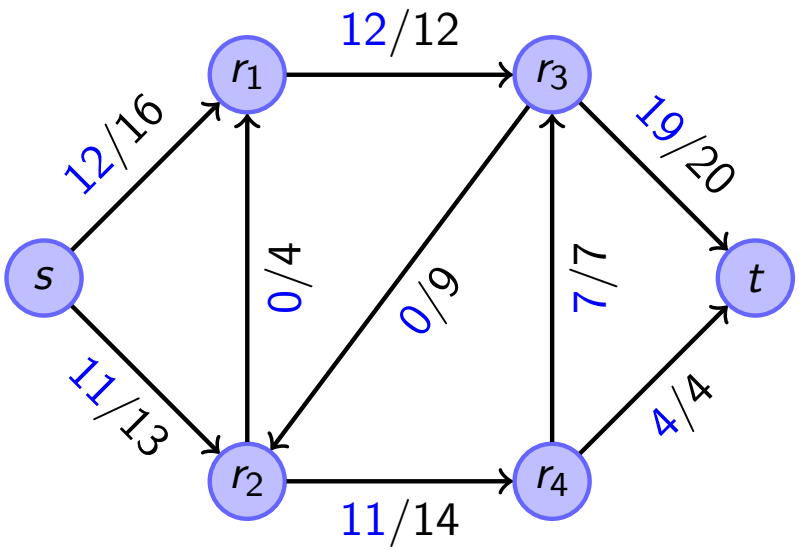


Graphe résiduel

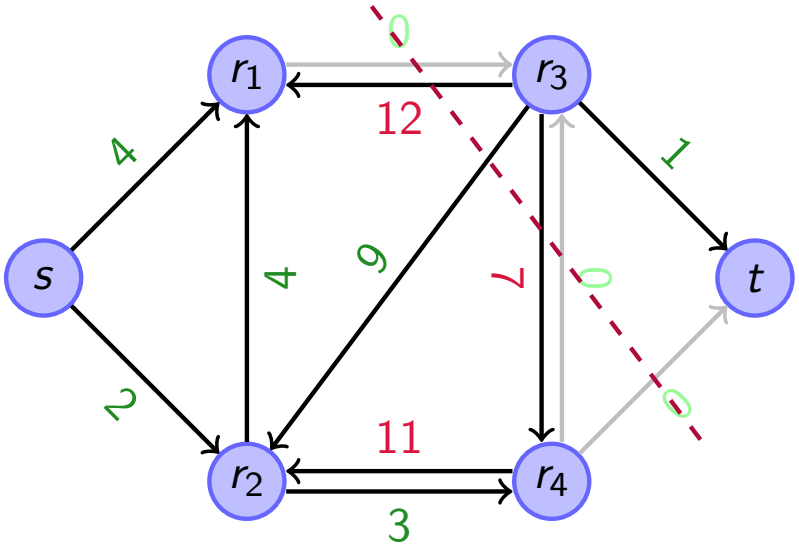


Algorithme de Ford-Fulkerson

Graphe de flot



Graphe résiduel



Terminaison

L'algorithme s'arrête lorsqu'il n'y a plus de chemin entre s et t dans le graphe résiduel

Coupe $s - t$

Partition des nœuds du graphe V en S et $T = V \setminus S$ telle que $s \in S$ et $t \in T$.

Sa capacité est donnée par :

$$c(S, T) = \sum_{(u,v) \in S \times T} c(u, v)$$

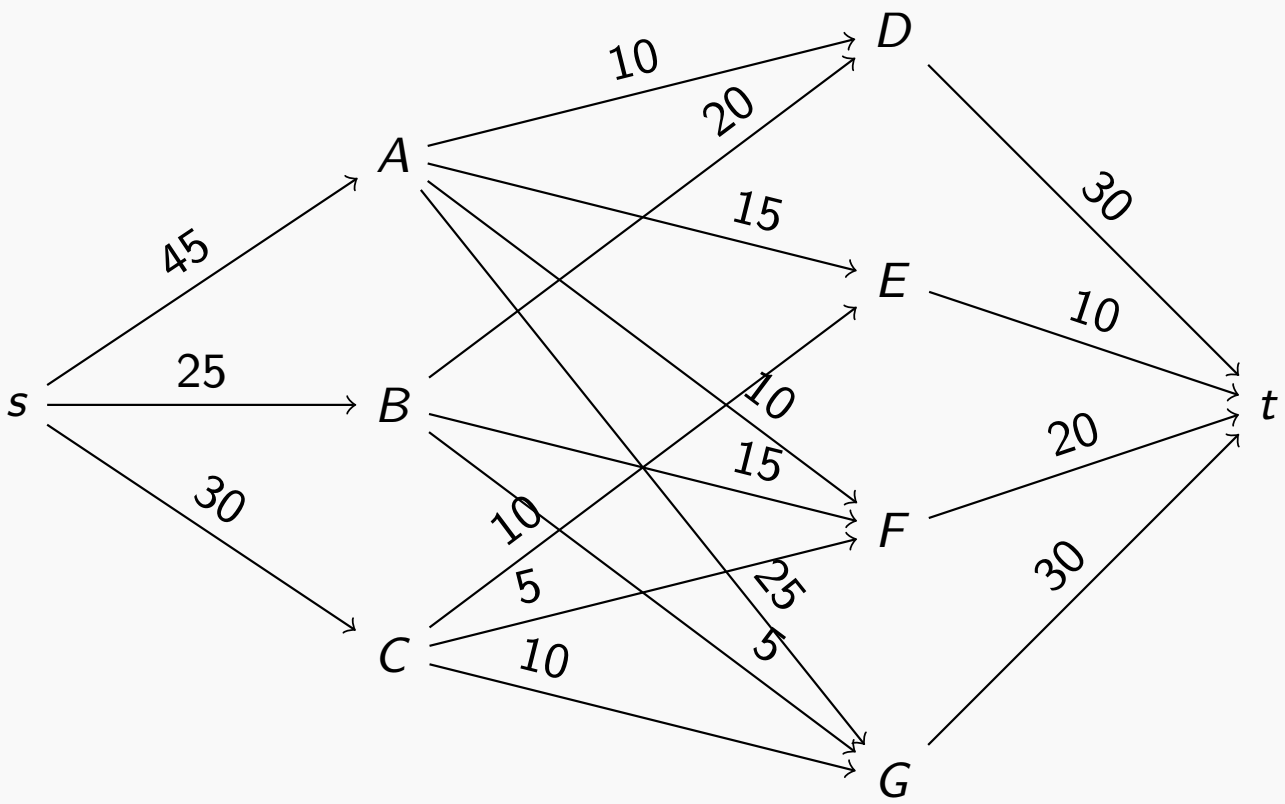
Théorème Max-flow Min-cut

Les trois propositions sont équivalentes :

1. Le flot φ entre s et t est maximal ;
2. Il n'existe aucun chemin augmentant ;
3. Il existe une coupe $s - t$ dont la capacité est égale à φ.

Les problèmes d'affectation ou de répartition de ressources peuvent très souvent être modélisés par des graphes de flots avec une composante bipartie.

Répartition de l'eau de puits entre des villes



Répartition de ressources

Pour les problèmes de répartition de ressources, on peut dégager une structure générale :

- Une composante bipartie au centre dont les arêtes modélisent les contraintes de répartition (e.g le débit max d'un tuyau entre un puits et une ville)
- Des arêtes entre s et les sources, modélisant les quantités de ressources allouables
- Des arêtes entre les destinations et t, modélisant les quantités cibles

Méthode générale de résolution d'un problème

Pour résoudre un problème se modélisant par un graphe de flot (souvent de répartition/affectation de ressources), on suit les étapes suivantes :

- Modéliser le problème par un graphe de flot
- Faire tourner l'algorithme de Ford-Fulkerson pour trouver le flot maximal
- Extraire la solution du problème du graphe de flots rempli

Conclusion de la section 6

Choses à savoir faire pour l'examen :

- Modéliser un problème par un graphe de flot
- Faire tourner Ford-Fulkerson à la main sur un exemple pour trouver la solution d'un problème
- Connaître et pouvoir raisonner sur les propriétés du flot

Comment s'entraîner :

- Refaire le TD 6 (exercices 1 et 2)